Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление программная инженерия
Образовательная программа системное и прикладное программное обеспечение

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1

курса «Теория функций комплексной переменной»

Шубин Егор Вячеславович
Ларионов Владислав Васильевич
Мухамедьяров Артур Альбертович
Поток: P3209

Преподаватель:
Краснов Александр Юрьевич

Санкт-Петербург, 2025 г.

Содержание

Лабораторная работа № 1

1. Текст задания:

1. Доказательство свойств для множества Мандельброта.
2. Код программ для построения множеств Мандельброта и Жюлиа.
3. Набор изображений, построенных при разном числе итераций и приближении.
4. Текст-описания структуры и построения ранее неразобранного фрактала. Его визуализации.

2. Задание 1

2. 1. Свойство 1

Если $c \in M$ (где M — множество Мандельброта), то $\overline{c} \in M$, то есть множество симметрично относительно вещественной оси.

Доказательство:

Рассмотрим итерационный процесс для множества Мандельброта:

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Точка c принадлежит множеству M, если последовательность $\{z_n\}$ ограничена.

Рассмотрим сопряжённое число $\overline{c}$. Для $\overline{c}$ итерация будет:

$$w_0 = 0, \quad w_{n+1} = w_n^2 + \overline{c}.$$

Нужно показать, что если $\{z_n\}$ ограничена, то $\{w_n\}$ также ограничена.

Применяя операцию комплексного сопряжения к итерации для c:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

получаем:

$$\overline{z_{n+1}} = \overline{z_n^2 + c} = \overline{z_n^2} + \overline{c} = (\overline{z_n})^2 + \overline{c},$$

так как $\overline{z^2} = \overline{z}^2$, т.к. для любого комплексного числа

$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad \overline{z^2} = x^2 - y^2 - 2xyi,$$

$$(\overline{z})^2 = (x-yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi,$$

Таким образом:

$$\overline{z_0} = 0, \quad \overline{z_{n+1}} = (\overline{z_n})^2 + \overline{c}.$$

Это совпадает с итерацией для w_n. Значит, $w_n = \overline{z_n}$. Поскольку $\{z_n\}$ ограничена, то $|w_n| = |\overline{z_n}| = |z_n|$, и последовательность $\{w_n\}$ также ограничена. Следовательно, $\overline{c} \in M$.

Таким образом, множество Мандельброта симметрично относительно вещественной оси.

Ч.Т.Д.

2. 2. Свойство 2

Если $|c| > 2$, то последовательность $z_{n+1} = z_n^2 + c$ с $z_0 = 0$ неограничена, и, следовательно, c не принадлежит множеству Мандельброта.

Доказательство:

Рассмотрим итерацию:

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Предположим, что $|c| > 2$. Покажем, что последовательность $\{z_n\}$ неограничена.

Рассмотрим модуль итерации:

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c|.$$

По неравенству треугольника:

$$|z_n^2 + c| \geq |z_n|^2 - |c|.$$

Предположим, что на некотором шаге $|z_n| > |c|$. Тогда:

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c|.$$

Так как $|c| > 2$, выберем $|z_n| > |c|$. Тогда $|z_n|^2 - |c| > |z_n|$, потому что:

$$|z_n|^2 - |c| > |z_n|^2 - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1),$$

и если $|z_n| > 1$, то $|z_n|(|z_n| - 1) > |z_n|$, при $|z_n| > |c| > 2$.

Теперь покажем, что последовательность $|z_n|$ становится больше $|c|$. Начнём с $z_0 = 0$:

$$|z_1| = |z_0^2 + c| = |c| > 2.$$

Для z_2:

$$|z_2| = |z_1^2 + c| \geq |z_1|^2 - |c| = |c|^2 - |c|.$$

Так как $|c| > 2$, рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x$. Для $x > 2$:

$$f(x) = x(x - 1) > x,$$

так как $x - 1 > 1$. Таким образом, $|z_2| \geq |c|^2 - |c| > |c|$, поскольку $|c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c|$.

Теперь предположим, что $|z_n| > |c|$. Тогда:

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| > |z_n|^2 - |z_n| = |z_n|(|z_n| - 1).$$

Так как $|z_n| > |c| > 2$, то $|z_n| - 1 > 1$, и $|z_{n+1}| > |z_n|$. Следовательно, последовательность $|z_n|$ строго возрастает, причём $|z_n| > |c| > 2$.

Более того, $|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c|$. Так как $|z_n| > 2$, то $|z_n|^2 > 4$, и $|z_n|^2 - |c|$ растёт. Это означает, что $|z_n|$ растёт экспоненциально. Следовательно, $|z_n| \to \infty$, и последовательность неограничена.

Таким образом, если $|c| > 2$, то $c \notin M$.

3. Задание 2

Код выполненного задания

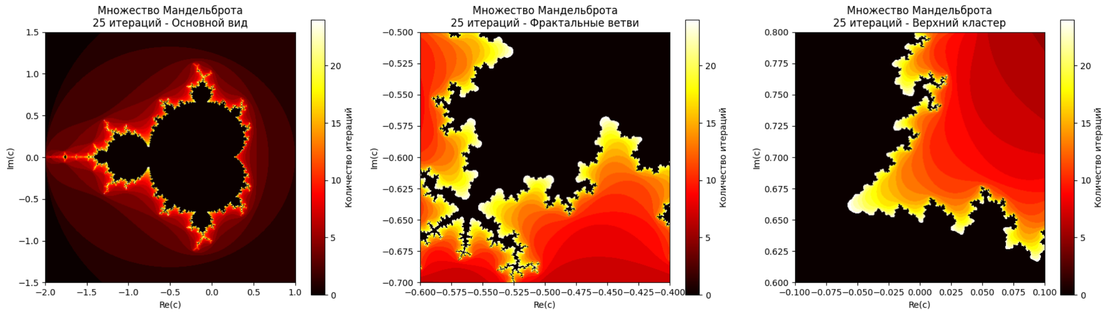

Рис. 1.1: Визуализация на 25 итераций

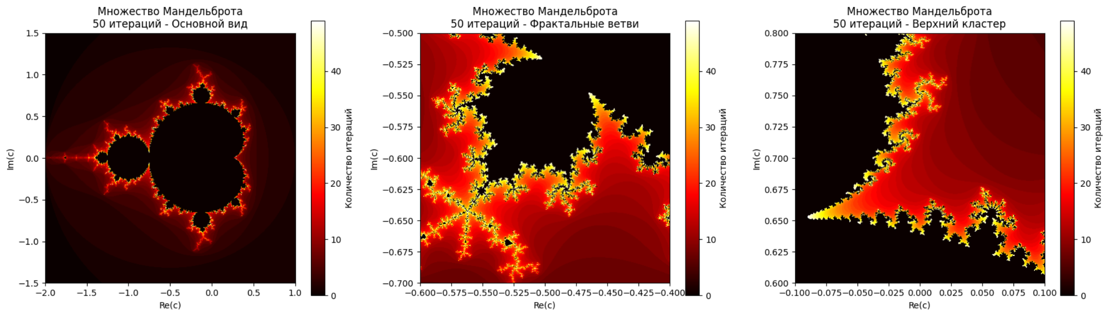

Рис. 1.2: Визуализация на 50 итераций

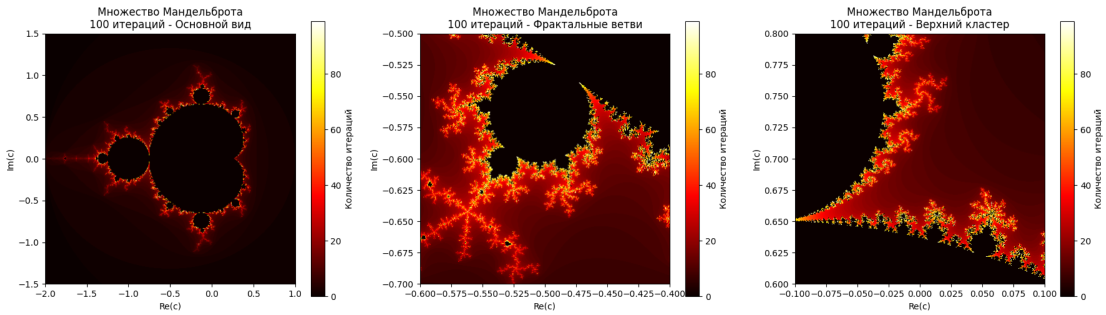

Рис. 1.3: Визуализация на 100 итераций

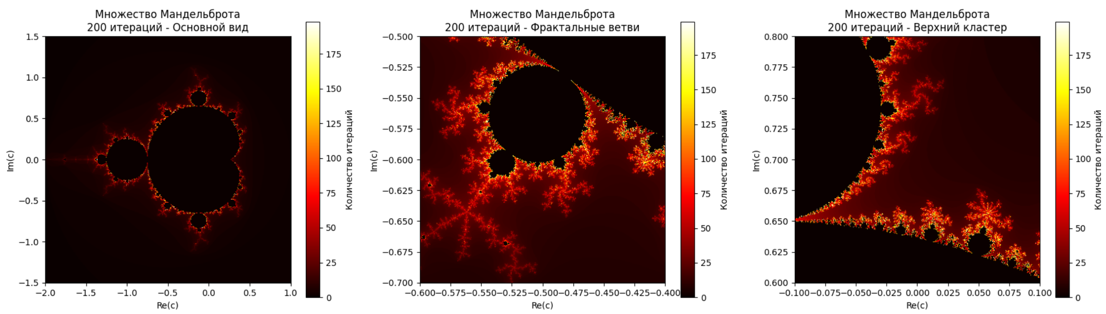

Рис. 1.4: Визуализация на 200 итераций

4. Задание 3

Код выполненного задания

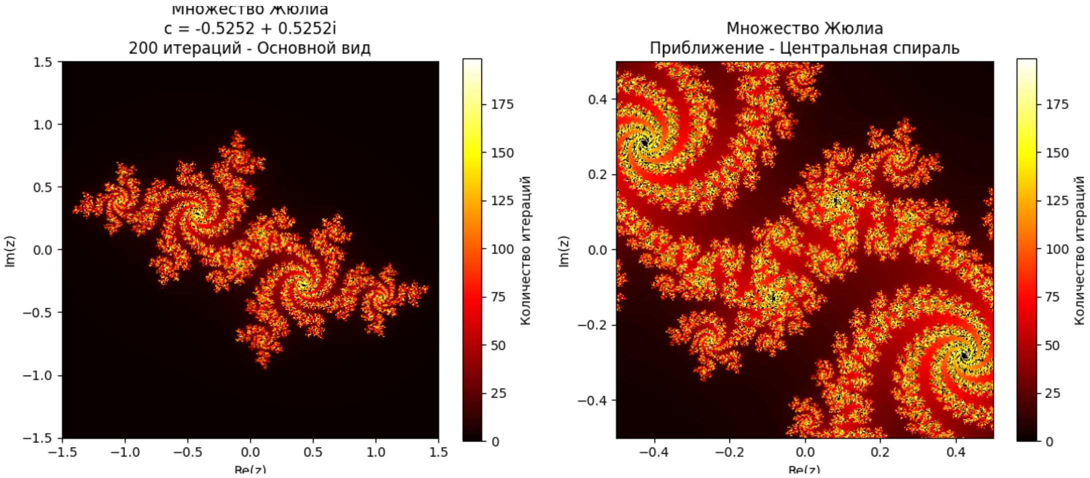

Рис. 1.5: Визуализация при $c = -0.5251993 + 0.5251993i$

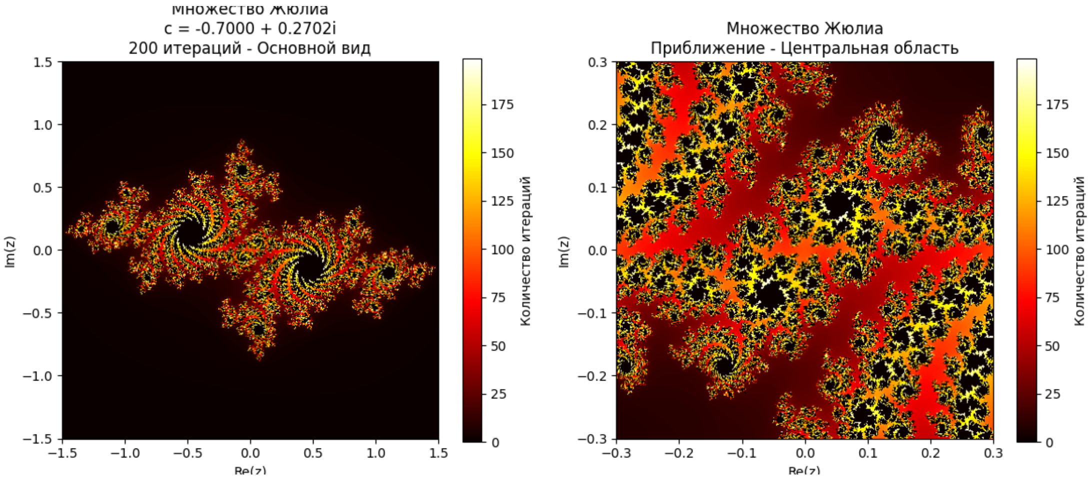

Рис. 1.6: Визуализация при $-0.7 + 0.27015i$

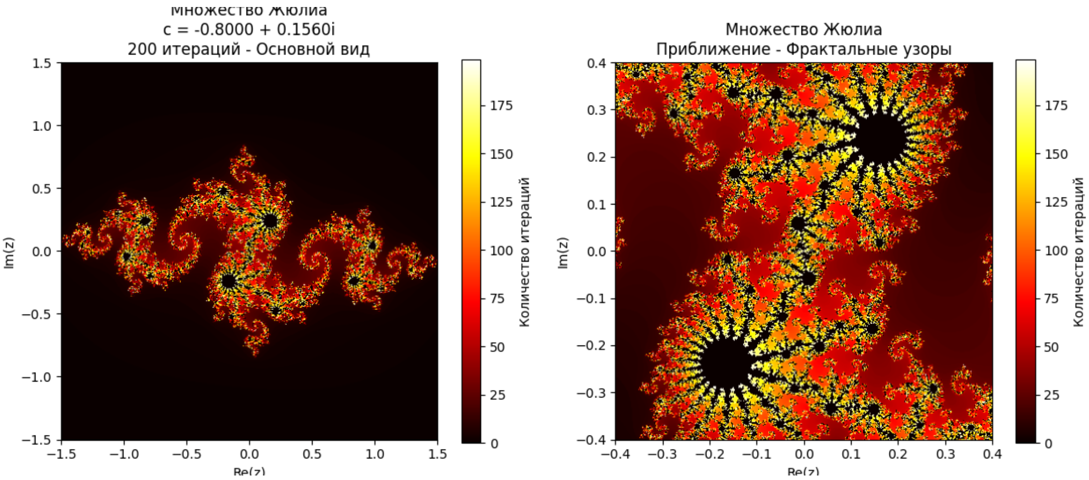

Рис. 1.7: Визуализация при $c = -0.8 + 0.156i$

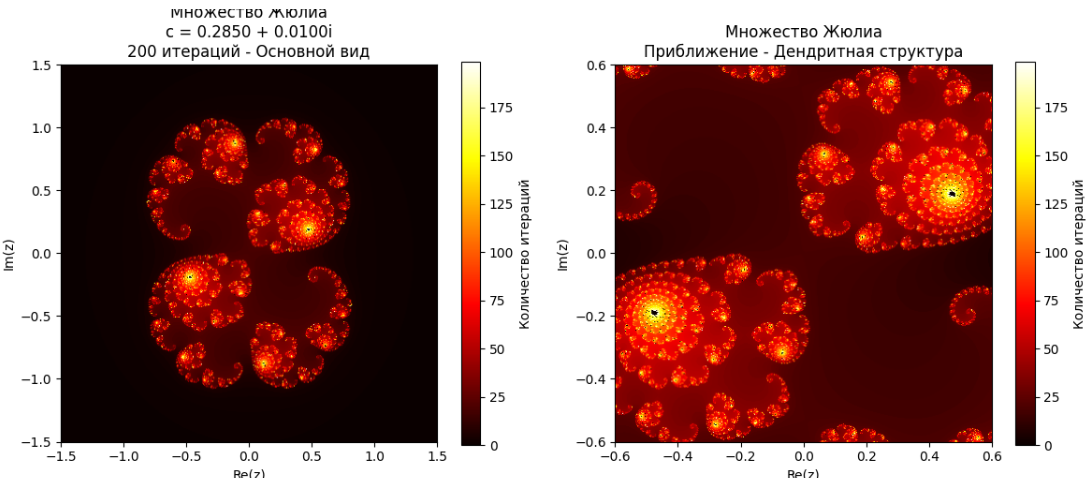

Рис. 1.8: Визуализация при $c = 0.285 + 0.01i$

5. Задание 4. Дерево Пифагора.

Код выполненного задания

Дерево Пифагора — это фрактал, основанный на фигуре, известной как «Пифагоровы штаны», которая представляет собой дерево, построенное итеративно с использованием геометрических преобразований. Начинается с квадрата, к которому добавляются два меньших квадрата, образующих прямоугольный треугольник (по теореме Пифагора). На каждом следующем шаге к новым квадратам добавляются свои пары квадратов, уменьшенных по масштабу с определенным коэффициентом. Мы использовали коэффициент 0.3.

Мы получили следующие фракталы для разного кол-ва итераций:

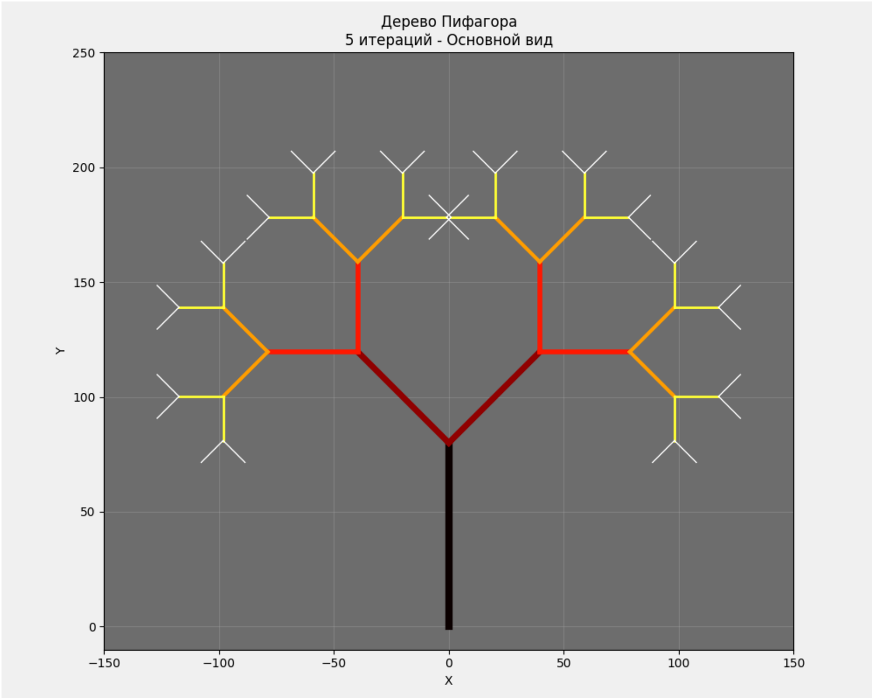

Рис. 1.9: Визуализация на 5 итераций

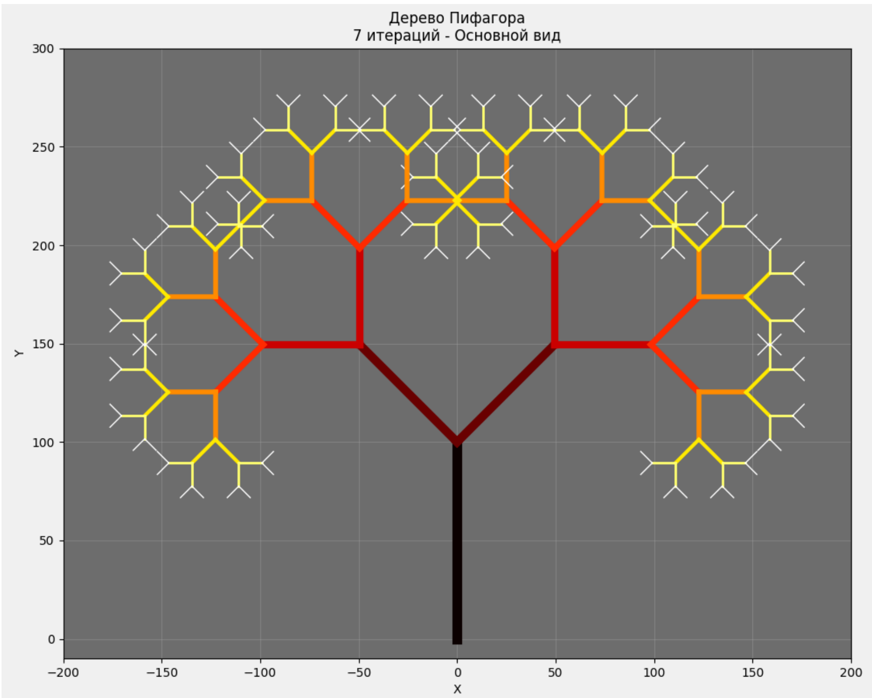

Рис. 1.10: Визуализация на 7 итераций

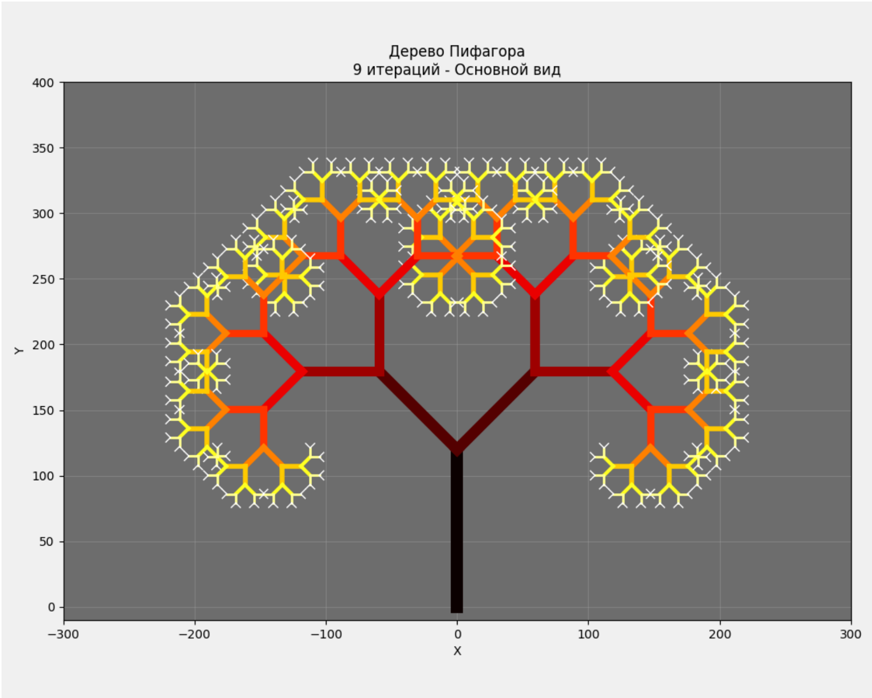

Рис. 1.11: Визуализация на 9 итераций

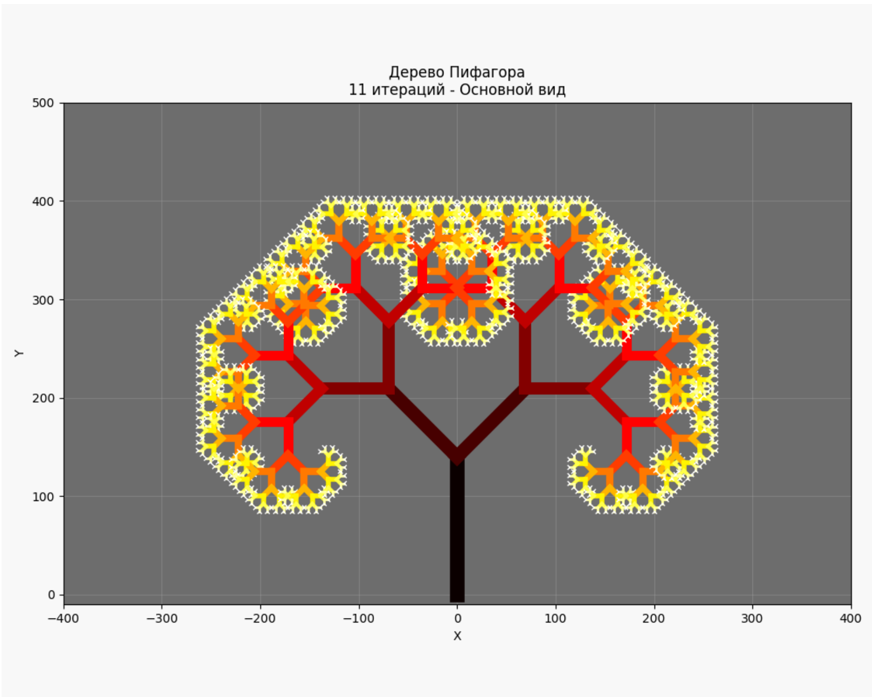

Рис. 1.12: Визуализация на 11 итераций