$$f: N_0 \to \mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{2} = y & \text{se } x \in N_p \\ -\frac{x+1}{2} = y & \text{se } x \in N_d \end{cases}$$

ESERCIZIO 1

$$f: N_0 \to \mathbb{Z}$$
$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \in N_p \Rightarrow y \geq 0 \\ -\frac{x+1}{2} & \text{se } x \in N_d \Rightarrow y < 0 \end{cases}$$

Dim. che f è biettiva e determinare l'applicazione inversa.

PER DETERMINARE L'APPLICAZIONE INVERSA, SI RICAVA LA x IN FUNZIONE DELLA y 1 E POI SI SCAMBIANO x E y 2 :

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to N_0$$

- $y = \frac{x}{2} \Rightarrow 2y = \frac{x}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow x = 2y$ 1
- $y = -\frac{x+1}{2} \Rightarrow -y = \frac{x+1}{2} \Rightarrow -2y = \frac{x+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow -2y - 1 = x + \cancel{1} - \cancel{1}$

$$\Downarrow$$
$$x = -2y - 1 \quad 1$$

2 $y = 2x$

2 $y = -2x - 1$

Quindi l'applicazione inversa è:

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to N_0$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x) = y$$
$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme. Una corrispondenza $R \subseteq A \times A$ tra A ed A viene anche detta relazione in A.

Una relazione R in A si dice di EQUIVALENZA se R è:

riflessiva $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $a R a \quad \forall a \in A$

simmetrica $\Leftrightarrow$ $a R b \Rightarrow b R a \qquad a, b \in A$

transitiva $\Leftrightarrow$ $a R b$ e $b R c \Rightarrow a R c \quad (a, b, c \in A)$

Per ogni $a \in A$ si definisce CLASSE DI EQUIVALENZA di a RISPETTO A R, l'insieme:

$$[a]_R \overset{def}{=} \{ x \in A : a R x \}$$

Si definisce <u>INSIEME QUOZIENTE</u> di A rispetto ad R

$$A/_R \overset{def}{=} \{ [a]_R : a \in A \}$$

Un sottoinsieme $F \subseteq P(A)$ si dice una <u>partizione</u> di A

$\overset{def}{\iff}$ 1) $\emptyset \notin F$

2) $X, Y \in F$ con $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

3) $\bigcup_{X \in F} X = A$

Gli elementi di F si dicono " BLOCCHI DELLA PARTIZIONE "

Se F è una partizione di A allora ogni elemento di A appartiene ad uno ed un solo blocco di F.

. Nella partizione associata ad una relazione di equivalenza la condizione $a R b$ significa che a e b sono nello stesso blocco della partizione.

$c \not R d$ significa che c e d sono in blocchi diversi.

$F = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$ $\quad F = \{ \{a, b, c\}, \{c\}, \{d\} \}$

$\{c\}$

ESERCIZIO

Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ si consideri la relazione R definita ponendo

$$x R y \iff x + 2y \in 3\mathbb{Z}$$

1. Si dimostri che R è una relazione di equivalenza in A
2. Si descriva la partizione di A determinata da R
3. Motivando la risposta, si stabilisca se la relazione R' definita in A ponendo

$$x R' y \iff x - 2y \in 3\mathbb{Z}$$

è di equivalenza.

1. R riflessiva $\overset{def}{\iff}$ $x \overset{?}{R} x \quad \forall x \in A \iff x + 2x \in 3\mathbb{Z}$

$\iff 3x \in 3\mathbb{Z} \quad \forall x \in A$ CHE È VERO!

R simmetrica $\overset{def}{\iff} (x R y \overset{?}{\Rightarrow} y R x)$

$\iff (x+2y \in 3\mathbb{Z} \overset{?}{\Rightarrow} y+2x \in 3\mathbb{Z})$ $\quad 3 \mid y+2x$

Noi sappiamo che $x+2y \in 3\mathbb{Z}$

Oss.
a|b significa che $\exists q \in \mathbb{Z}$: $a \cdot q = b$

$\Rightarrow \underset{a}{3} \mid \underbrace{x+2y}_{b}$

Inoltre $\underset{a}{3} \mid 3(x+y) = \underbrace{3x+3y}_{c}$

$\Rightarrow 3 \mid 3x+3y-x-2y$
$\Downarrow$
$3 \mid 2x+y \Rightarrow y+2x \in 3\mathbb{Z}$

$a \mid b$ e $a \mid c \Rightarrow a \mid c-b$

R transitiva: $\overset{def}{\iff} (\overset{Ip}{x R y, y R z} \overset{?}{\Rightarrow} \overset{TESI}{x R z})$ $\quad x+2z \in 3\mathbb{Z} \iff 3 \mid x+2z$

Ip
$x R y \Rightarrow x+2y \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow \underset{a}{3} \mid \underbrace{x+2y}_{b}$
$y R z \Rightarrow y+2z \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow \underset{a}{3} \mid \underbrace{y+2z}_{c}$

$\Rightarrow 3 \mid \underbrace{x+2y}_{b} + \underbrace{y+2z}_{c} = x+3y+2z$

$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right) \Rightarrow a \mid b+c$

$3 \mid 6y$

$3 \mid x+3y+2z$
$3 \mid 3y$

$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right) \Rightarrow a \mid b-c$

$\Rightarrow 3 \mid x+\cancel{3y}+2z-\cancel{3y}$
$\Downarrow$
$3 \mid x+2z \iff x+2z \in 3\mathbb{Z}$
$\Updownarrow$
$x R z$

(2) Determiniamo le classi così da vedere quali elementi sono in relazione:

$x R y \iff x+2y \in 3\mathbb{Z}$

$[1]_R = \{x \in A : 1 R x\} = \{x \in A : 1+2x \in 3\mathbb{Z}\} = \{1,4,7\} = [4]_R = [7]_R$

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $\quad 1R4$, $1R7$

$[2]_R = \{x \in A : 2 R x\} = \{x \in A : 2+2x \in 3\mathbb{Z}\}$
$= \{2,5,8\} = [5]_R = [8]_R$

$[3]_R$ (per casa)