ESERCIZIO

Si consideri l'insieme $A=\{2,3,4\}$ e si ponga $B=A\times A$. Nell'insieme B si consideri poi la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a,b)\sqsubseteq(c,d) \iff a\le c \text{ e } b|d$$

dove $\le$ e $|$ denotano rispettivamente l'ordinamento usuale e il divide in $\mathbb{N}$.

1) Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in B.

2) Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(B,\sqsubseteq)$

3) Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(B,\sqsubseteq)$

4) Si stabilisca, motivando la risposta, se $(B,\sqsubseteq)$ è un reticolo.

1) $\sqsubseteq$ RIFLESSIVA : $(a,b)\sqsubseteq(a,b)$?

$(a,b)\sqsubseteq(a,b) \iff \underline{a\le a}$ e $\underline{b|b}$ è vero quindi $(a,b)\sqsubseteq(a,b)$

$\sqsubseteq$ ASIMMETRICA: IPOTESI $\left.\begin{array}{l}\bullet(a,b)\sqsubseteq(c,d)\\ \bullet(c,d)\sqsubseteq(a,b)\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$ TESI $(a,b)=(c,d)$

$b|d$ e $d|b \Rightarrow d=b$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\sqsubseteq(c,d)\iff \underline{a\le c} \text{ e } \underline{b|d}\\ (c,d)\sqsubseteq(a,b)\iff \underline{c\le a} \text{ e } \underline{d|b}\end{array}\right) \Rightarrow a=c \text{ e } d=b$$

$a\le c$ e $c\le a \Rightarrow a=c$

$\Downarrow$

$(a,b)=(c,d)$

$\Rightarrow \sqsubseteq$ è asimmetrica

$\sqsubseteq$ TRANSITIVA: IPOTESI $\left.\begin{array}{l}(a,b)\sqsubseteq(c,d)\\ (c,d)\sqsubseteq(e,f)\end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$ TESI $(a,b)\sqsubseteq(e,f)$

$\left[\left(\begin{array}{l}aRb\\ bRz\end{array}\right)\Rightarrow aRz\right]$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\sqsubseteq(c,d)\iff a\le c \text{ e } b|d\\ (c,d)\sqsubseteq(e,f)\iff c\le e \text{ e } d|f\end{array}\right) \Rightarrow \underline{a}\le c\le \underline{e} \text{ e } b|f$$

$\Downarrow$

$a\le e$ e $b|f$

$\Updownarrow$

$(a,b)\sqsubseteq(e,f)$

PROPRIETÀ DIVIDE:

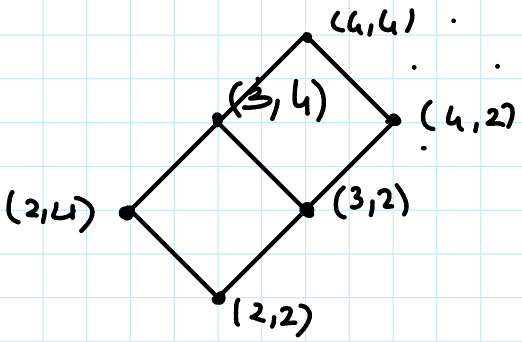
1) $b|d$ e $d|b \Rightarrow b=d$

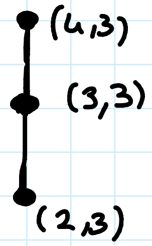
2) $b \mid d$ e $d \mid f \Rightarrow b \mid f$ $\Rightarrow$ $\sqsubseteq$ è transitiva

$\Rightarrow$ $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in B.

② $B = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ coppie degli el $A \times A$, $A = \{2,3,4\}$

$$(a,b) \sqsubseteq (c,d) \iff a \le c \text{ e } b \mid d$$





$(3,4) \not\sqsubseteq (3,2)$

$(3,2) \sqsubseteq (3,4)$

$(3,2) \sqsubseteq (4,2)$

$(3,4) \not\sqsubseteq (4,2)$ NO

$(3,3) \sqsubseteq (4,3)$

$(4,2) \sqsubseteq (4,4)$

$(4,4) \not\sqsubseteq (4,2)$

$(3,4) \sqsubseteq (4,4)$

③ Elementi minimali: $(2,2)$, $(2,3)$

$\Rightarrow$ $\min B$ non esiste

Elementi massimali: $(4,4)$, $(4,3)$

$\Rightarrow$ $\max B$ non esiste

④ $\{(2,2), (2,3)\}$ $\inf_B \{(2,2),(2,3)\}$ = max dei minoranti

NON CI SONO MINORANTI

$\Rightarrow \nexists \inf_B \{(2,2),(2,3)\}$

$\{(3,2), (3,3)\}$

$\Rightarrow (B, \sqsubseteq)$ NON È UN RETICOLO

ESERCIZIO

Nell'insieme $A = \{1,2,\dots,9\}$ ← naturali si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 4a < 3b$$

① Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A

② Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$

③ Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato

④ Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, massimo e minimo di $(A, \sqsubseteq)$

⑤ Si determini l'eventuale estremo superiore in A del sottoinsieme $\{3, 4\}$

⑥ Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

① $\sqsubseteq$ RIFLESSIVA: $a \sqsubseteq a \quad \forall a \in A$ VERO perchè $a = a$

$\sqsubseteq$ ASIMMETRICA: IPOTESI $\left.\begin{matrix} a \sqsubseteq b \\ b \sqsubseteq a \end{matrix}\right) \overset{?}{\Rightarrow}$ TESI $a = b$

$a \sqsubseteq b \iff \underbrace{a = b}_{1^a}$ opp. $\underbrace{4a < 3b}_{②}$

$b \sqsubseteq a \iff b = a$ opp. $\underbrace{4b < 3a}_{②^*}$

Supponiamo per assurdo che $a \neq b \Rightarrow$

$\underbrace{4a < 3b}_{②} < \underbrace{4b < 3a}_{②^*} \Rightarrow 4a < 3a$ ASSURDO

b è un naturale quindi $3 \cdot b < 4 \cdot b$

$\Rightarrow a = b$

$\sqsubseteq$ TRANSITIVA: IPOTESI $\left.\begin{matrix} a \sqsubseteq b \\ b \sqsubseteq c \end{matrix}\right) \overset{?}{\Rightarrow} a \sqsubseteq c$
$(a = c$ opp. $4a < 3c)$

$a \sqsubseteq b \iff a = b$ opp. $4a < 3b$

$b \sqsubseteq c \iff b = c$ opp. $4b < 3c$

Ci sono 4 casi possibili:

Ⅰ $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c \Rightarrow a \sqsubseteq c$

Ⅱ $a = b,\ 4b < 3c \Rightarrow 4a < 3c \Rightarrow a \sqsubseteq c$

Ⅲ $4a < 3b,\ b = c \Rightarrow 4a < 3c \Rightarrow a \sqsubseteq c$

Ⅳ $4a < 3b,\ 4b < 3c \overset{3b < 4b}{\Longrightarrow} 4a < 3b < 4b < 3c \Rightarrow 4a < 3c$

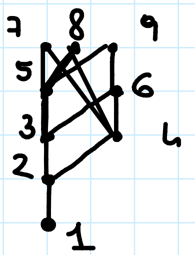
iv) $4a<3b,\ 4b<3c \overset{3b<4b}{\Longrightarrow} 4a<3b<4b<3c \Rightarrow 4a<3c$
$\Downarrow$
$a \sqsubseteq c$

$\Rightarrow \sqsubseteq$ è una relazione d'ordine

2) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$a \sqsubseteq b \iff a=b$ opp. $4a<3b$

$1 \sqsubseteq 2,\quad 1 \sqsubseteq 3,\quad 2 \sqsubseteq 3,\ 2 \sqsubseteq 4,$
$3 \not\sqsubseteq 4,\ 3 \sqsubseteq 5,\ 3 \sqsubseteq 6,\ 4 \sqsubseteq 6,\ 4 \not\sqsubseteq 5$
$5 \sqsubseteq 7,\ 4 \sqsubseteq 7,\ 6 \not\sqsubseteq 7,\ 5 \sqsubseteq 8$
$7 \not\sqsubseteq 8,\ 4 \sqsubseteq 8,\ 6 \not\sqsubseteq 8$
$8 \not\sqsubseteq 9,\ 6 \sqsubseteq 9,\ 5 \sqsubseteq 9$



3) $(A,\sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato, ad esempio 3 e 4 non sono confrontabili

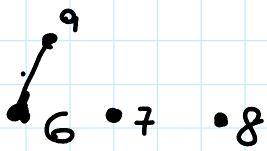
4) minimali: 1 $\qquad \min A = 1$

massimali: 7, 8, 9 $\qquad \nexists \max A$

5) estremo superiore: min dei maggioranti

MAGGIORANTI DI $\{3,4\}$: 6, 7, 8, 9 (5 no perché $4 \not\sqsubseteq 5$)

$\min\{6,7,8,9\}$
non esiste
perchè tra 6, 7, 8, 9
non c'è un elemento
che è $\sqsubseteq$ con tutti gli altri.



$\Rightarrow \nexists \sup_A \{3,4\}$

Possiamo anche rispondere all'ultima richiesta:
$(A,\sqsubseteq)$ non è un reticolo perchè
$\nexists \sup_A \{3,4\}$

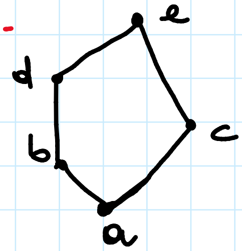
Def Un reticolo limitato L si dice reticolo con complemento se per ogni elemento di L, a, esiste almeno un elemento $b \in L$ tale che

$$\inf\{a,b\} = \min L$$

$\inf\{a,b\} = \min L$

$\sup\{a,b\} = \max L$

esempio.



è un reticolo limitato avendo min e massimo.

$\inf\{b,c\} = a$ $\sup\{b,c\} = e$

il complemento di b è c

$\inf\{c,b\} = a$ $\sup\{c,b\} = e$

il complemento di c è b

$\inf\{d,c\} = a$ $\sup\{d,c\} = e$

il complemento di d è c