INDUZIONE

giovedì 9 febbraio 2023 10:37

#1

Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 2$ risulta:

- $3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 9}{2}$

BASE INDUZIONE

$n=2 \Rightarrow 3^2 + \frac{3^{2+1} - 9}{2} \Rightarrow 9 = \frac{18}{2} \Rightarrow 9 = 9$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supponiamo per vera l'ipotesi induttiva per n e vediamo per $n+1$

$\underbrace{3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n}_{\Downarrow} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1+1} - 9}{2}$

Sappiamo per ipotesi

$\frac{3^{n+1} - 9}{2} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 9}{2} \Rightarrow \frac{3^{n+1} - 9 + 2 \cdot 3^{n+1}}{2} = \frac{3^{n+2} - 9}{2} \Rightarrow \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 9}{2} = \frac{3^{n+2} - 9}{2} \Rightarrow \frac{3^{n+2} - 9}{2} = \frac{3^{n+2} - 9}{2}$ VERIFICATO

#2

Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 9$ risulta:

- $9 + 10 + 11 + \dots + n = \frac{n^2 + n - 72}{2}$

BASE INDUZIONE

$n = 9 \Rightarrow 9 = \frac{9^2 + 9 - 72}{2} \Rightarrow 9 = \frac{18}{2} \Rightarrow 9 = 9$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supponiamo per vera l'ipotesi induttiva per n e vediamo per $n+1$

$\underbrace{9 + 10 + 11 + \dots + n}_{\Downarrow} + n+1 = \frac{(n+1)^2 + n + 1 - 72}{2}$

$\frac{n^2 + n - 72}{2} + n+1 = \frac{(n+1)^2 + n + 1 - 72}{2}$

$\frac{n^2 + n - 72 + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 72}{2}$

$\frac{n^2 + 3n + 2 - 72}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2 - 72}{2}$ VERIFICATO

#3

Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 1$ risulta:

- $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$

BASE INDUZIONE

$n = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supponiamo per vera l'ipotesi induttiva per n e vediamo per $n+1$

$1 + 3 + 5 + 9 + \dots + (2n - 1) + 2n + 2 - 1 = (n+1)^2$

$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$ VERIFICATO

#4

Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 1$ risulta:

- $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3(3^n - 1)}{2}$

BASE INDUZIONE

$n = 1 \Rightarrow 3^1 = \frac{3(3^1 - 1)}{2} \Rightarrow 3 = \frac{6}{2} \Rightarrow$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supponiamo per vera l'ipotesi induttiva per n e vediamo per $n+1$

$\underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}_{\Downarrow} + 3^{n+1} = \frac{3(3^{n+1} - 1)}{2}$

Supponiamo sia vera l'ipotesi induttiva su n e verifichiamo per $n+1$

$$\underbrace{3+3^2+3^3+\dots+3^n}_{\Downarrow}+3^{n+1}=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2}$$

$$\frac{3(3^n-1)}{2}+3^{n+1}=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2}$$

$$\frac{3(3^n-1)+2\cdot 3^{n+1}}{2}=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2}$$

$$\frac{3^{n+1}-3+2\cdot 3^{n+1}}{2}=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2}$$

$$\frac{3(3^{n+1})-3}{2}=\frac{3(3^{n+1}-1)}{2}$$

$$\frac{3^{n+2}-3}{2}=\frac{3^{n+2}-3}{2}$$ VERIFICATO

#5

Si dimostri per induzione $\forall n \geq 0$

- $11 \mid 12^n - 1$

BASE INDUZIONE

$n = 0$

$11 \mid 12^0 - 1 = 11 \mid 0 \Rightarrow$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supposta vera l'ipotesi

$11 \mid 12^{n+1} - 1$

$11 \mid 12^n \cdot 12 - 1 \Rightarrow 11 \mid 12^n \cdot 12 - 12 + 12 - 1 \Rightarrow \underset{\Downarrow}{12(12^n - 1)} + 11$ VERIFICATO

Supposta vera per ipotesi l'asserto è verificato

#6

Si dimostri per induzione $\forall n \geq 1$

- $4 + 14 + \dots + (10n - 6) = 5n^2 - n$

PASSO BASE

$n = 1$

$10(1) - 6 = 5(1) - 1 \Rightarrow 10 - 6 = 5 - 1 \Rightarrow 4 = 4$ VERIFICATO

PASSO INDUTTIVO

Supposta per vera l'ipotesi, verifichiamo per $n+1$

- $\underbrace{4 + 14 + \dots + (10n - 6)}_{\Downarrow} + (10(n+1) - 6) = 5(n+1)^2 - n + 1$

$5n^2 - n + 10n + 10 - 6 = 5n^2 + 10n + 5 - n + 1$

$5n^2 + 9n + 4 = 5n^2 + 9n + 4$ VERIFICATO

CONGRUENZE

giovedì 9 febbraio 2023 10:56

#1

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod 9 \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$$

MCD(9,11) = 1
$11 = 9 \cdot 1 + 2$
$9 = 2 \cdot 4 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

I MODULI SONO COPRIMI, IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE

Vediamo la 1° eq.

- $6 + 9k$, con $k \in R$

Poniamola soluzione della 2° eq.

- $6 + 9k \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 9k \equiv -4 \pmod{11}$

$1 = \alpha \cdot 9 + \beta \cdot 11 \Rightarrow 1 = 9 - 2 \cdot 4$
$1 = 9 - [11 - 9 \cdot (1)](4)$
$1 = 9 - 11(4) + 9(4)$
$1 = 9(5) - 11(4)$
$1 = 9(5) + 11(-4)$

$k = \frac{b}{d} \cdot 5$

$k = -\frac{4}{1} \cdot 5$

$k = -20$ aggiungo il modulo fino ad avere $0 < m \leq 11 \cdot 1$

$k = -20 + 11 + 11 = 2$

$6 + 9 \cdot 2 = 6 + 18 = 24$

La soluzione del sistema è $[24]_{99}$
La generica soluzione è $[3]_{99}$

#2

$$\begin{cases} x \equiv 16 \pmod{19} \\ x \equiv 17 \pmod{20} \end{cases}$$

MCD(19,20)
$20 = 19 \cdot 1 + 1$
$19 = 1 \cdot 19 + 0$

MODULI COPRIMI IL SISTEMA È COMPATIBILE

- $16 + 19k$, con $k \in R$

$16 + 19k \equiv 17 \pmod{20}$

$19k \equiv 1 \pmod{20}$

$1 = 20 - 19(1)$
$1 = 19(-1) + 20(1)$

$k = \frac{1}{1} \cdot (-1)$

$k = -1 + 20 = 19$

$16 + 19 \cdot 19$

$16 + 361 = 377$

La soluzione è $[377]_{380}$

La generica soluzione $[3]_{380}$

#3

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 9 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$$

MCD(9,7)
$9 = 7 \cdot 1 + 2$
$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MODULI COPRIMI IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $5 + 9k$

$5+9k \equiv 3 \pmod 7$
$9k \equiv -2 \pmod 7$

$1 = \alpha \cdot 9 + \beta \cdot 7$
$1 = 7 - 2 \cdot 3$
$1 = 7 - [9 - 7 \cdot 1](3)$
$1 = 7 - 9(3) + 7(3)$
$1 = 7(4) - 9(3)$
$1 = 9(-3) + 7(4)$

$k = \frac{-2}{1} \cdot (-3)$
$k = -2 \cdot (-3)$
$k = 6$

$5 + 9 \cdot 6 = 54$
59

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[59]_{63}$

#14

$x \equiv 0 \pmod 2$
$x \equiv 4 \pmod 5$
$x \equiv 2 \pmod 3$

MCD(2,5)
$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MCD(2,3)
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MCD(3,5)
$5 = 3 \cdot 1 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MODULI A DUE A DUE COPRIMI
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $0 + 2k$

$2k \equiv 4 \pmod 5$

$1 = 2(2) + 5(1)$
$1 = 2(-2) + 5(1)$

$k = \frac{4}{1} \cdot (-2)$
$k = -8 + 5 = -3 + 5 = 2$

$2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow$ la soluzione $[4]_{10} \Rightarrow 4 + 10k$

-

$4 + 10k \equiv 2 \pmod 3$

$10k \equiv -2 \pmod 3$

MCD(10,3)
$10 = 3 \cdot 3 + 1$
$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$k = \frac{-2}{1} \cdot 1$

$k = -2 + 3 = 1$

$1 = 10 - 3 \cdot 3$
$1 = 10(1) + 3(-3)$

$4 + 10(1) = 4 + 10 = 14$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[14]_{30}$
La generica soluzione è $[2]_{30}$

#15

$x \equiv 0 \pmod 2$
$x \equiv 3 \pmod 7$
$x \equiv 6 \pmod{11}$

MCD(2,7)
$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MCD(2,11)
$11 = 2 \cdot 5 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MCD(7,11)
$11 = 7 \cdot 1 + 4$
$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$
$3 = 1 \cdot 3 + 0$

MODULI A DUE A DUE COPRIMI
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $2k \equiv 3 \pmod 7$

$1 = 7 - 2 \cdot (3)$
$1 = 2(3) - 7(1)$
$1 = 2(-3) + 7(1)$

$k = \frac{3}{1} \cdot (-3) = -9 + 7 = -2 + 7 = 5$

$2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow [10]_{14}$

- $10 + 14k \equiv 6 \pmod{11}$

$14k \equiv -4 \pmod{11}$

- $10+14k \equiv 6 \pmod{11}$

$14k \equiv -4 \pmod{11}$

MCD(14, 11)

$14 = 11\cdot 1 + 3$

$11 = 3\cdot 3 + 2$

$3 = 2\cdot 1 + 1$

$2 = 1\cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2\cdot 1$

$1 = 3 - [11 - 3\cdot 3](1)$

$1 = 3 - 11(1) + 3(3)$

$1 = 3(4) - 11(1)$

$1 = (14 - 11(1))(4)$

$1 = 14(4) - 11(4) - 11(1)$

$1 = 14(4) - 11(3)$

$1 = 14(4) + 11(-5)$

$k = -4 \cdot (4)$

$k = -16 + 11 = -5 + 11 = 6$

$10 + 14\cdot 6 = 94$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[94]_{154}$

#6

$x \equiv 1 \pmod 2$
$x \equiv 3 \pmod 7$
$x \equiv 2 \pmod 3$

MCD(2, 7): $7 = 2\cdot 3 + 1$, $2 = 1\cdot 2 + 0$

MCD(7, 3): $7 = 3\cdot 2 + 1$, $3 = 1\cdot 3 + 0$

MCD(2, 3): $3 = 2\cdot 1 + 1$, $2 = 1\cdot 2 + 0$

MODULI COPRIMI
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $1 + 2k$, $k \in \mathbb{R}$

$1 + 2k \equiv 3 \pmod 7$

$2k \equiv 2 \pmod 7$

$1 = 7 - 2(3)$

$1 = 2(-3) + 7(1)$

$k = \frac{2}{1} \cdot (-3)$

$k = 2 \cdot (-3)$

$k = -6 + 7 = 1$

$1 + 2(1) = 1 + 2 = 3 \Rightarrow [3]_{14} \Rightarrow 3 + 14k$

- $3 + 14k \equiv 2 \pmod 3$

$14k \equiv -1 \pmod 3$

MCD(14, 3)

$14 = 3\cdot 4 + 2$

$3 = 2\cdot 1 + 1$

$2 = 1\cdot 2 + 0$

$1 = 3 - 2\cdot 1$

$1 = 3 - [14 - 3\cdot 4](1)$

$1 = 3 - 14(1) + 3(4)$

$1 = 3(5) - 14(1)$

$1 = 14(-1) + 3(5)$

$k = \frac{-1}{1} \cdot (-1)$

$k = 1$

$3 + 14(1) \Rightarrow 3 + 14 = 17$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[17]_{42}$

La soluzione generica è $[8]_{42}$

#7

Trova il numero intero a che soddisfa le seguenti condizioni:

- rest$(a, 3) = 2$, rest$(a, 4) = 3$, rest$(a, 7) = 6$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod 3 \\ a \equiv 3 \pmod 4 \\ a \equiv 6 \pmod 7 \end{cases}$$

MCD(3, 4): $4 = 3\cdot 1 + 1$, $3 = 1\cdot 3 + 0$

MCD(3, 7): $7 = 3\cdot 2 + 1$, $3 = 1\cdot 3 + 0$

MCD(4, 7): $7 = 4\cdot 1 + 3$, $4 = 3\cdot 1 + 1$, $3 = 1\cdot 3 + 0$

MCD COPRIMI TRA LORO
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $2 + 3k$, $k \in \mathbb{R}$

$2 + 3k \equiv 3 \pmod 4$

$3k \equiv 1 \pmod 4$

$1 = 4 - 3(1)$

$1 = 3(-1) + 4(1)$

$k = \frac{1}{1} \cdot (-1)$

$k = -1 + 4 = 3$

$3k \equiv 1 \pmod 4$

$1 = 4 - 3(1)$

$1 = 3(-1) + 4(1)$

$k = \frac{1}{1} \cdot (-1)$

$k = -1 + 4 = 3$

$2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11 \Rightarrow [11]_{12} \Rightarrow 11 + 12k$

- $11 + 12k \equiv 6 \pmod 7$
  $12k \equiv -5 \pmod 7$

$MCD(12,7)$

$12 = 7 \cdot 1 + 5$

$7 = 5 \cdot 1 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 5 - 2 \cdot 2$

$1 = 5 - [7 - 5(1)](2)$

$1 = 5 - 7(2) + 5(2)$

$1 = 5(3) - 7(2)$

$1 = (12 - 7(1))(3)$

$1 = 12(3) - 7(3)$

$1 = 12(3) - 7(5)$

$1 = 12(3) + 7(-5)$

$k = \frac{-5}{1} \cdot 3$

$k = -5 \cdot 3$

$k = -15 + 7 = -8 + 7 = -1 + 7 = 6$

$11 + 12 \cdot 6 = 83$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[83]_{84}$

18

$$\begin{cases} b \equiv 15 \pmod{18} \\ b \equiv 16 \pmod{19} \end{cases}$$

$MCD(18,19)$

$19 = 18 \cdot 1 + 1$

$18 = 1 \cdot 18 + 0$

MCD COPRIMI

IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE

- $15 + 18k$, con $k \in R$
  $15 + 18k \equiv 16 \pmod{19}$
  $18k \equiv 1 \pmod{19}$
  $1 = 19 - 18 \cdot 1$
  $1 = 18(-1) + 19(1)$

$k = \frac{1}{1} \cdot (-1)$

$k = -1 + 19 = 18$

$15 + 18 \cdot 18 = 339$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[339]_{342}$

9

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 9 \pmod{11} \\ x \equiv 51 \pmod{75} \end{cases}$$

$MCD(2,11)$

$11 = 2 \cdot 5 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$MCD(2,75)$

$75 = 2 \cdot 37 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$MCD(11,75)$

$75 = 11 \cdot 6 + 9$

$11 = 9 \cdot 1 + 2$

$9 = 2 \cdot 4 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MODULI COPRIMI

IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI

- $1 + 2k$
  $1 + 2k \equiv 9 \pmod{11}$
  $2k \equiv 8 \pmod{11}$
  $1 = 11 - 2(5)$
  $1 = 2(-5) + 11(1)$

$k = \frac{8}{1} \cdot (-5) = -40 + 11 = -29 + 11 \Rightarrow -18 + 11 \Rightarrow -7 + 11 = 4$

$k = 4$

$1 + 2 \cdot 4 = 1 + 8 = 9 \Rightarrow [9]_{22} \Rightarrow 9 + 22k$

- $9 + 22k \equiv 51 \pmod{75}$
  $22k \equiv 42 \pmod{75}$

$MCD(75,22)$

$75 = 22 \cdot 3 + 9$

$22 = 9 \cdot 2 + 4$

$9 = 4 \cdot 2 + 1$

$4 = 1 \cdot 4 + 0$

$1 = 9 - 4 \cdot 2$

$1 = 9 - [22 - 9(2)](2)$

$1 = 9 - 22(2) + 9(4)$

$1 = 9(5) - 22(2)$

$1 = [75 - 22(3)](5) - 22(2)$

$1 = 75(5) - 22(15) - 22(2)$

$1 = 75(5) - 22(17)$

$1 = 75(5) + 22(-17)$

$k = \frac{42}{1} \cdot 5$

$k = 210$

$9 + 22 \cdot 210 = 4629$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[4629]_{1650}$
La generica soluzione è $[1329]_{1650}$

#10

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 6 \pmod{14} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

MCD(5,3)	MCD(5,14)	MCD(5,11)	MCD(3,14)	MCD(3,11)	MCD(14,11)
$5 = 3 \cdot 1 + 2$	$14 = 5 \cdot 2 + 4$	$11 = 5 \cdot 2 + 1$	$14 = 3 \cdot 4 + 2$	$11 = 3 \cdot 3 + 2$	$14 = 11 \cdot 1 + 3$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$5 = 4 \cdot 1 + 1$	$5 = 1 \cdot 5 + 0$	$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$11 = 3 \cdot 3 + 2$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$	$4 = 1 \cdot 4 + 0$		$2 = 1 \cdot 2 + 1$	$2 = 1 \cdot 2 + 0$	$3 = 2 \cdot 1 + 1$
					$2 = 1 \cdot 2 + 0$

MODULI SONO COPRIMI
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE

- $2 + 5k$, con $k \in \mathbb{Z}$
  $2 + 5k \equiv 1 \pmod 3$
  $5k \equiv -1 \pmod 3$
  $1 = 3 - 2 \cdot 1$
  $1 = 3 - [5 - 3(1)](1)$
  $1 = 3 - 5(1) + 3(1)$
  $1 = 3(2) - 5(1)$
  $1 = 5(-1) + 3(2)$

  $k = \frac{-1}{1} \cdot (-1)$
  $k = 1$

$2 + 5(1) = 7 \Rightarrow [7]_{15} \Rightarrow 7 + 15k$

- $7 + 15k \equiv 6 \pmod{14}$
  $15k \equiv -1 \pmod{14}$
  $MCD(15, 14)$
  $15 = 14 \cdot 1 + 1$
  $14 = 1 \cdot 14 + 0$
  $1 = 15 - 14(1)$
  $1 = 15(1) + 14(-1)$

  $k = \frac{-1}{1} \cdot 1$
  $k = -1 + 14 = 13$

$7 + 15(13) = [202]_{210} \Rightarrow 202 + 210k$

- $202 + 210k \equiv 5 \pmod{11}$
  $210 \equiv -197 \pmod{11}$
  $MCD(210, 11)$
  $210 = 11 \cdot 19 + 1$
  $11 = 1 \cdot 11 + 0$
  $1 = 210 - 11(19)$
  $1 = 210(1) + 11(-19)$

  $k = \frac{-197}{1} \cdot 1$
  $k = -197 + 11 + 11 + \dots = 1$

$202 + 210(1) = 412$

La soluzione espressa in classi di equivalenza: $[412]_{2310}$
La generica soluzione è $[250]_{2310}$

#11

Nel seguente sistema, individua tutte le soluzioni comprese tra 50 e 100

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

I MODULI SONO TUTTI PRIMI,
IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE

- $2 + 5k$, con $k \in \mathbb{Z}$
  $2 + 5k \equiv 1 \pmod 3$
  $5k \equiv -1 \pmod 3$
  $MCD(5, 3)$
  $5 = 3 \cdot 1 + 2$
  $3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 = 3 - [5 - 3(1)](1)$
  $2 = 1 \cdot 2 + 0$

  $1 = 3 - 2 \cdot 1$
  $1 = 3 - 5(1) + 3(1)$
  $1 = 3(2) - 5(1)$
  $1 = 5(-1) + 3(2)$

  $k = \frac{-1}{1} \cdot (-1)$
  $k = 1$

$2 + 5(1) = 7 = [7]_{15} \Rightarrow 7 + 15k$

- $7 + 15k \equiv 1 \pmod 2$
  $15k \equiv -6 \pmod 2$
  $MCD(15, 2)$
  $15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 1 = 15 - 2 \cdot 7 \quad k = -6 \cdot 1$

- $7 + 15k \equiv 1 \pmod{2}$

$15k \equiv -6 \pmod{2}$

$MCD(15, 2)$

$15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 1 = 15 - 2 \cdot 7 \Rightarrow k = \frac{-6}{1} \cdot 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0 \qquad 1 = 15(1) + 2(-7)$

$k = -6 + 2 = -4 + 2 = -2 + 2 = 0$

$7 + 15(0) = 7 =$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[7]_{30}$

Le soluzioni comprese tra 50 e 100 sono $\Rightarrow$ $7 + 30 = 37$

$37 + 30 = 67$

$67 + 30 = 97$

MATRICI

lunedì 13 febbraio 2023 10:27

#1

Si consideri la matrice:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3$

Si verifichi se la matrice è invertibile e, nel caso, se ne calcoli l'inversa.

- $\det(A) = a_{11} \Rightarrow (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot ((2\cdot 1) - (-2\cdot 1)) = 8 \neq 0$ LA MATRICE È INVERTIBILE

Calcoliamo i minori complementari

- $M_c(a_{11}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4$
- $M_c(a_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$
- $M_c(a_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$
- $M_c(a_{21}) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2$
- $M_c(a_{22}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$
- $M_c(a_{23}) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4$
- $M_c(a_{31}) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$
- $M_c(a_{32}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$
- $M_c(a_{33}) = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Creiamo la matrice dei minori complementari:

- $A^c = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Trasponendola $\Rightarrow$ • $A^{cT} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ • $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

#2

Ridurre a scala la seguente matrice:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) $R_3 \leftrightarrow R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $R_3 - \lambda \cdot R_2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow R_3 - 2 \cdot R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $R_4 - \lambda \cdot R_2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow R_4 - 1 \cdot R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $R_4 - \lambda R_3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow R_4 - \frac{3}{7} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

#3

Ridurre a scala la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $R_3 \leftrightarrow R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_2 \Rightarrow \lambda = 1 \to R_3 = R_3 - \lambda R_2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}$$

#3

Calcola il rango della seguente matrice usando la riduzione a scala:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & -5 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

- $R_2 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow R_2 - 4R_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & -9 & -11 \\ 7 & -5 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = 7 \Rightarrow R_3 - 7R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & -9 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -17 & -50 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \Rightarrow R_3 - \frac{2}{5} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \Rightarrow R_3 - \frac{2}{5} R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{67}{5} & -\frac{228}{5} \end{pmatrix}$$

I pivot sono 3, quindi $\rho(A) = 3$

#4

Dalla stessa matrice, calcola il rango usando il teorema dei minori

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & -5 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Sappiamo $0 \leq \rho A \leq 3$, Sicuramente non 0, dato che la matrice non è nulla, $1 \leq \rho(A) \leq 3$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + 4 = 5 \neq 0 \Rightarrow 2 \leq \rho(A) \leq 3$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow -1 \cdot 3 \cdot 2 = -6 \neq 0$

Non possiamo più orlare, quindi $\rho(A) = 3$

#5

Usando la riduzione a scala, calcola il rango della seguente matrice

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & -13 & 5 \end{pmatrix}$

- $R_2 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow R_2 - (-1) \cdot R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & -13 & 5 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow R_3 - 3 \cdot R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -8 & -8 \\ -8 & 8 & -6 & -13 & 5 \end{pmatrix}$$

- $R_4 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = -4 \Rightarrow R_4 - (-4) R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 12 & 6 & 3 & 29 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow R_3 - (-1) R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 6 & 3 & 29 \end{pmatrix}$$

- $R_4 - \lambda R_2 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow R_4 - 3 R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 2 \end{pmatrix}$$

- $R_4 - \lambda R_3 \Rightarrow \lambda = -24 \Rightarrow R_4 - (-24) R_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

pivot sono 4, quindi $\rho(A) = 4$

#16

Calcola il prodotto tra le due matrici.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} A = 3 \cdot 3 \\ B = 3 \cdot 2 \end{matrix} \Rightarrow A \cdot B = (3,2)$

$$\begin{matrix} (1\cdot7)+(0\cdot1)+(1\cdot0) & (1\cdot1)+(0\cdot0)+(1\cdot4) \\ (1\cdot7)+(5\cdot1)+(-1\cdot0) & (1\cdot1)+(5\cdot0)+(-1\cdot4) \\ (3\cdot7)+(2\cdot1)+(0\cdot0) & (3\cdot1)+(2\cdot0)+(0\cdot4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7+0+0 & 1+0+4 \\ 7+5+0 & 1+0+0 \\ 21+2+0 & 3+2+0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

#7

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} (1\cdot7)+(0\cdot1)+(1\cdot0) & (1\cdot1)+(0\cdot0)+(1\cdot4) \\ (1\cdot7)+(5\cdot1)+(-1\cdot0) & (1\cdot1)+(5\cdot0)+(-1\cdot4) \\ (3\cdot7)+(2\cdot1)+(0\cdot0) & (3\cdot1)+(2\cdot0)+(0\cdot4) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7+0+0 & 1+0+5 \\ 7+5 & 1+0-4 \\ 21+2+0 & 3+0+0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

#8

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\text{colonne } A}{\text{righe } B}$ = numero colonne A = righe di B

$$\begin{matrix} (1\cdot1)+(-1\cdot7)+(3\cdot(-1)) & (1\cdot5)+(-1)\cdot2+(3\cdot0) \\ (0\cdot1)+(2\cdot7)+(1\cdot(-1)) & (0\cdot5)+(2\cdot2)+(1\cdot0) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1-7-3 & 5-2+0 \\ 0+14-1 & 0+4+0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

#9

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ • $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} (3\cdot 2) + (1\cdot 1) + (0\cdot 6) & (3\cdot 3) + (1\cdot 2) + (0\cdot 7) \\ (-1\cdot 2) + (0\cdot 1) + (1\cdot 6) & (-1\cdot 3) + (0\cdot 2) + (1\cdot 7) \\ (0\cdot 2) + (1\cdot 1) + (0\cdot 6) & (0\cdot 3) + (1\cdot 2) + (0\cdot 7) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6+1+0 & 9+2+0 \\ -2+0+6 & -3+0+7 \\ 0+1+0 & 0+2+0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

STRUTTURE ALGEBRICHE

mercoledì 15 febbraio 2023 09:27

#1

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, si consideri l'operazione binaria $*$, definita ponendo

- $a * b = a + b - 4ab$

1) si dimostri che la struttura algebrica $\mathbb{Q}^*$ è un monoide commutativo
2) si determinino tutti gli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Q}, *)$
3) si stabilisca se l'insieme $2\mathbb{Z}$ è un sottomonoide di $(\mathbb{Q}, *)$

⇓

1) $(\mathbb{Q}, *)$, $*$ deve essere commutativa, associativa e deve esistere l'elemento neutro

$*$ è commutativa: $(a*b) = (b*a) \Rightarrow$

$b*a = b+a - 4ba = a+b-4ab$, ad occhio perché addizione e moltiplicazione sono commutative VERIFICATO

$*$ è associativa: $a*(b*c) = (a*b)*c$

$a*(b*c) = a*(b+c-4bc) \Rightarrow a+b+c-4bc-4a(b+c-4bc) = a+b+c-4bc-4ab-4ac+16abc$ VERIFICATO

$(a*b)*c = a+b-4ab*c \Rightarrow a+b-4ab+c-4(a+b-4ab)\cdot c \Rightarrow a+b+c-4ab-4ac-4bc+16abc$

$*$ ha elemento neutro: $(a*e) = a$, elemento che al posto di b restituisce $a \Rightarrow 0$ VERIFICATO

$(\mathbb{Q}, *)$ È UN MONOIDE COMMUTATIVO

2) invertibile = simmetrico

a è invertibile $\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{Q} : a*b = 0 \Rightarrow a+b-4ab = 0$

$b - 4ab = -a \Rightarrow b(1-4a) = -a \Rightarrow b = \frac{-a}{1-4a}$ vale solo se $1-4a \neq 0$, quindi $a \neq \frac{1}{4}$, perché annulla il denominatore

GLI ELEMENTI INVERTIBILI $\mathbb{Q} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

N.B.: come facciamo a calcolare l'inverso? Se volessimo farlo con $\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{1-4\cdot\frac{3}{5}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$ se fatto $\frac{3}{5} * \frac{3}{7}$, verrà restituito elemento neutro

3) $2\mathbb{Z}$ è un sottomonoide?

$0 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow$ VERIFICATO

$\forall a, b \in 2\mathbb{Z}$, $a*b$ deve appartenere a $2\mathbb{Z}$

Sapendo $a, b \in 2\mathbb{Z}$, un qualsiasi numero moltiplicato per 4 sarà ancora in $2\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}$ È STABILE RISPETTO A $*$, È UN SOTTOMONOIDE DI $(\mathbb{Q}, *)$

#2

Nell'insieme $\mathbb{N}_0$ si consideri l'operazione binaria $*$ definita ponendo:

- $a * b = \begin{cases} a & \text{se } a \in \mathbb{N}_P \\ b & \text{se } a \in \mathbb{N}_D \end{cases}$

1) si dimostri che $(\mathbb{N}_0, *)$ è un semigruppo
2) si stabilisca se l'operazione $*$ è commutativa
3) si dimostri che $(\mathbb{N}_0, *)$ non è un monoide

⇓

1) Verifichiamo se $*$ è associativa $(a*b)*c = a*(b*c)$

$$(a*b)*c = \begin{cases} {}_{a\,\mathbb{N}_P}\ a*c = a \Rightarrow a \in \mathbb{N}_P \\ {}_{a\,\mathbb{N}_D}\ b*c = \begin{cases} {}^{b\,\mathbb{N}_P}\ = b \Rightarrow a \in \mathbb{N}_D, b \in \mathbb{N}_P \\ {}_{b\,\mathbb{N}_D}\ = c \Rightarrow a \in \mathbb{N}_D, b \in \mathbb{N}_D \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ automaticamente verificata anche la 2ª VERIFICATO

$(\mathbb{N}_0, *)$ È UN SEMIGRUPPO

2) Immediato perché

$2*4 = 2$
$\neq$
$4*2 = 4$

$*$ NON È COMMUTATIVA

3) Dobbiamo verificare che non esiste elemento neutro

Per assurdo, se $e \in \mathbb{N}_0$ neutro $\Rightarrow a*e = a = e*a$

3) Dobbiamo verificare che non esiste elemento neutro

Per assurdo, sia $e \in \mathbb{N}_0$ neutro $\Rightarrow a * e = a = e * a$

Se $a = 1 \Rightarrow 1 * e = 1 \Rightarrow 1$ è dispari, quindi $1 * e = e = 1 \Rightarrow 1$ è elemento neutro

Se $a = 3 \Rightarrow 3 * 1 = 3 \Rightarrow 3 * 1 = 1$, quindi è assurdo   NON VERIFICATO

$(\mathbb{N}_0, *)$ NON É UN MONOIDE

#13

Si consideri il monoide moltiplicativo $A = \mathbb{Z}_{10}$ e sia U il gruppo degli elementi invertibili di A

1) si compili la tabella moltiplicativa di U
2) si determini un sottogruppo di ordine 2 di U

$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m \dots [m-1]_m\} \Rightarrow \mathbb{Z}_{10} = \{[0]_{10}, [1]_{10} \dots [9]_{10}\}$

1) $U(\mathbb{Z}_{10}, \cdot) = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\} = \{1, 3, 7, 9\}$

$\cdot$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

$3 \cdot 7 = 21 - 10 - 10 = 1$

Possiamo dire che 1 è l'elemento neutro $U(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$

2) Per determinare un sottogruppo di ordine 2, deve contenere l'elemento neutro

$B = \{1, a\}$

se $a \in B$, allora $a^{-1} \in B$, cioè deve esserci il suo simmetrico

$a^{-1} = 1$ o $a^{-1} = a$

- l'inverso dell'elemento neutro è l'elemento stesso, quindi no.

l'unico tra 3, 7, 9, tale che $\cdot$ coincide con l'inverso

$3 \cdot 3 = 9$

$7 \cdot 7 = 49 = 9$

$9 \cdot 9 = 81 = 1 \Rightarrow 1 = 1$, quindi 9

$B = \{1, 9\}$

#14

Sia $* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'operazione definita da $a * b = |a - b|$

1) $*$ è commutativa?
2) $*$ è associativa?
3) $*$ ha elemento neutro
4) quali sono gli elementi di $\mathbb{N}$ simmetrizzabili rispetto ad $*$?

1) $a * b = b * a \Rightarrow |a - b| = |b - a|$, per la proprietà del valore assoluto, l'ordine degli addendi non cambia

$(\mathbb{N}, *)$ É COMMUTATIVA

2) $(a * b) * c = a * (b * c)$

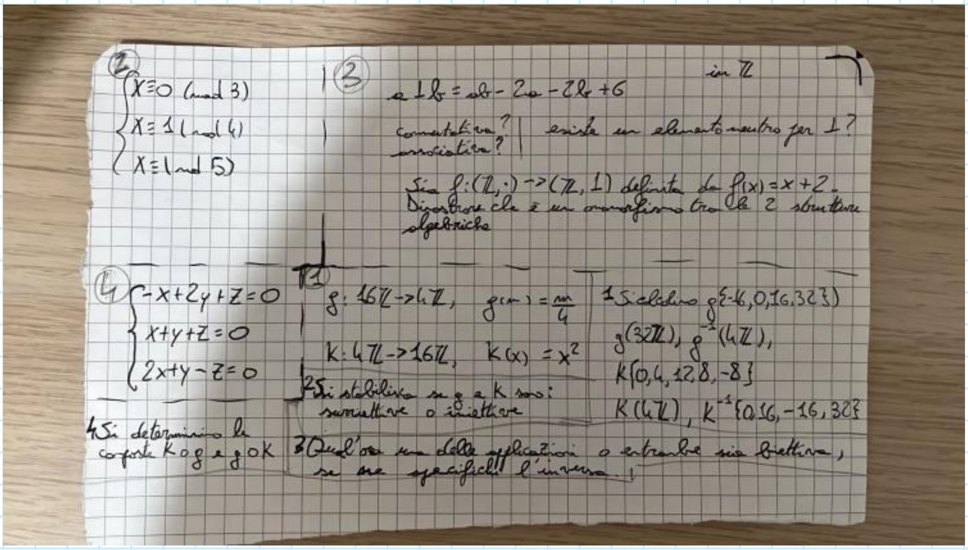
- $(a * b) * c = |a - b| * c \Rightarrow ||a - b| - c|$
- $a * (b * c) = a * |b - c| \Rightarrow |a - |b - c|| \neq$ $(\mathbb{N}, *)$ NON É ASSOCIATIVA

3) l'elemento neutro è 0, perché $0 * a = |0 - a| \Rightarrow |-a| \Rightarrow |a|$

0 É ELEMENTO NEUTRO

ESAME - 16/ 02/2023

venerdì 17 febbraio 2023 10:00



2

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$$

3

$a \perp b = ab - 2a - 2b + 6$ in $\mathbb{Z}$

commutativa? associativa? | esiste un elemento neutro per $\perp$?

Sia $f: (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \perp)$ definita da $f(x) = x + 2$. Dimostrare che è un omomorfismo tra le 2 strutture algebriche

4

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

4 Si determinino le composte $k \circ g$ e $g \circ k$

1

$g: 16\mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z}$, $g(m) = \frac{m}{4}$

$k: 4\mathbb{Z} \to 16\mathbb{Z}$, $k(x) = x^2$

2 Si stabilisca se g e k sono: suriettive o iniettive

1 Si calcolino $g\{-16, 0, 16, 32\}$, $g(32\mathbb{Z})$, $g^{-1}(4\mathbb{Z})$, $k\{0, 4, 12, 8, -8\}$, $K(4\mathbb{Z})$, $k^{-1}\{0, 16, -16, 32\}$

3 Qualora una delle applicazioni o entrambe sia biettiva, se ne specifichi l'inversa.

#2

Risolvi il sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$$

$MCD(3,4)$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$
$3 = 1 \cdot 3 + 0$

$MCD(3,5)$
$5 = 3 \cdot 1 + 2$
$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$MCD(4,5)$
$5 = 4 \cdot 1 + 1$
$4 = 1 \cdot 4 + 0$

MODULI A DUE A DUE COPRIMI, IL SISTEMA É COMPATIBILE

- $3k$, con $k \in \mathbb{Z}$

$3k \equiv 1 \pmod 4$

$MCD(3,4) = 1 / 1 \Rightarrow$ compatibile

$1 = 4 - 3(1)$

$1 = 3(-1) + 4(1)$

$k = \frac{1}{1} \cdot (-1)$

$k = -1 + 4 = 3$

$3(3) = 9 \Rightarrow [9]_{12} \Rightarrow 9 + 12k$

- $9 + 12k \equiv 2 \pmod 5$

$12k \equiv -7 \pmod 5$

$MCD(12,5)$

$12 = 5 \cdot 2 + 2$

$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 5 - 2(2)$

$1 = 5 - [12 - 5(2)](2)$

$1 = 5 - 12(2) + 5(4)$

$1 = 5(5) - 12(2)$

$1 = 12(-2) + 5(5)$

$k = \frac{-7}{1} \cdot (-2)$

$k = 14$

$9 + 12(14) = 177$

La soluzione espressa in classi di equivalenza è $[177]_{60}$

La soluzione generica è $[57]_{60}$

#3

Sia $(\mathbb{Z}, \perp)$ una struttura algebrica, con:

- $a \perp b = ab - 2a - 2b + 6$

1) $\perp$ è commutativa?
2) $\perp$ è associativa?
3) $\perp$ ha l'elemento neutro?
4) Sia $f:(\mathbb{Z},\cdot) \to (\mathbb{Z},\perp)$ definita da $f(x)=x+2$. Dimostrare che è un omomorfismo tra due strutture algebriche.

$\Downarrow$

1) Dimostriamo che $a \perp b = b \perp a$

$a \perp b = ab - 2a - 2b + 6$
$b \perp a = ba - 2b - 2a + 6$ $\Rightarrow$ $\perp$ È COMMUTATIVA

2) Dimostriamo che $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$

$(ab-2a-2b+6) \perp c \Rightarrow (ab-2a-2b+6)c - 2(ab-2a-2b+6) - 2c \Rightarrow abc - 2ac - 2bc + 4c - 2ab + 4a + 4b - 6$

$(b \perp c) \Rightarrow bc - 2b - 2c + 6$

$a \perp (b \perp c) \Rightarrow a(bc-2b-2c+6) - 2a - 2(bc-2b-2c+6) + 6 \Rightarrow abc - 2ac - 2bc + 4c - 2ab + 4a + 4b - 6$

$\perp$ È ASSOCIATIVA

3) $a \perp e = a$

$e = 3 \Rightarrow 3a - 2a - 2(3) + 6 = a$

3 È ELEMENTO NEUTRO

4) $f:(\mathbb{Z},\cdot) \to (\mathbb{Z},\perp)$ tale che $f(x) = x+2$. C'è un omomorfismo?

$\forall a,b \in \mathbb{Z},\ f(a\cdot b) = (a+2) \perp (b+2)$
$ab + 2 = (a+2)(b+2) - 2(a+2) - 2(b+2) + 6$
$ab + 2 = ab + 2$

La condizione non è soddisfatta, quindi

$f:(\mathbb{Z},\cdot) \to (\mathbb{Z},\perp)$ NON È UN OMOMORFISMO

#1

Date due funzioni $f: 16\mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z},\ f(m) = \frac{m}{4}$ e $k: 4\mathbb{Z} \to 16\mathbb{Z},\ k(x) = x^2$

1) si calcoli $f(\{-16,0,16,32\})$, $f(32\mathbb{Z})$, $f^{-1}(4\mathbb{Z})$, $k\{0,4,12,8,-8\}$, $k(4\mathbb{Z})$, $k^{-1}\{0,16,-16,32\}$
2) si stabilisca se f e k sono suriettive o iniettive
3) Qualora una delle applicazioni, o entrambe, sia biettiva, se ne specifichi l'inversa.
4) Si determinino le composte $k \circ f$ e $f \circ k$

$\Downarrow$

1) $f(\{-16,0,16,32\}) = f(-16) = -4$
$f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $\{-4,0,4,8\}$
$f(16) = 4$
$f(32) = 8$

- $f(32\mathbb{Z}) = \frac{\cancel{32}^{8}\mathbb{Z}}{\cancel{4}_{1}} \Rightarrow 8\mathbb{Z}$

- $f^{-1}(4\mathbb{Z}) = m = 16m \Rightarrow 16\mathbb{Z}$

- $k:\{0,4,12,8,-8\} = k(0) = 0$
$k(4) = 16$
$k(12) = 144$ $\Rightarrow$ $\{0,16,144,64,64\}$
$k(8) = 64$

$k(4) = 16$
$k(12) = 144 \Rightarrow \{0, 16, 144, 64, 64\}$
$k(8) = 64$
$k(-8) = 64$

- $k = 4\mathbb{Z} = (4\mathbb{Z})^2 = 16\mathbb{Z}$

- $k^{-1} = \{0, 16, -16, 32\} = k^{-1}(0) = \sqrt{0} = 0$
$k^{-1}(16) = \sqrt{16} = 4$
$k^{-1}(-16) = \sqrt{-16} = 4$
$k^{-1}(32) = \sqrt{32}$

- $g(m)$

INIETTIVA

$2 \neq 4 \Rightarrow g(2) = \frac{1}{2} \neq$ VERIFICATO
$g(4) = 1$

SURIETTIVA

ogni multiplo di 4 sarà VERIFICATO
anche multiplo di 16

g È BIETTIVA

$k(x)$

INIETTIVA

$-2 \neq 2 \Rightarrow k(-2) = 4 =$ NON È
$k(2) = 4$ INIETTIVA

SURIETTIVA

se faccio il quadrato di
un multiplo di 16, sarà VERIFICATO
anche un multiplo di 4

- $[g(m)]^{-1}$

$g(m) = y$ con $y \in 4\mathbb{Z}$

$m = 4y$

$g^{-1}(y) = 4y$

- $k \circ g$

$k(g(y))$

$\left(\frac{y}{4}\right)^2$

$k \circ g = \frac{y^2}{16}$

$g \circ k$

$g(k(y))$

$\frac{(y^2)}{4}$

$g \circ k = \frac{y^2}{4}$

#4

Risolvi il seguente sistema lineare usando la riduzione a scala ridotta

$$R_3 - \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

Scriviamo le matrici corrispondenti

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a scala $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

- $R_2 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow R_2 - (-1)R_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $R_3 - \lambda R_1 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow R_3 - (-2)R_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda R_2 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow R_3 - \left(\frac{5}{3}\right) R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo il nuovo sistema

$$\begin{cases} -x+2y+z=0 \\ -3y+2z=0 \\ -\frac{7}{3}z=0 \end{cases}$$

ESAME - 10/01/2023

mercoledì 22 marzo 2023 09:28

#1

Sia A un insieme non vuoto con n elementi e sia P(A) l'insieme delle parti di A. Motivando la risposta, si stabilisca:

1) se esiste un'applicazione iniettiva da A in P(A)
2) se esiste un'applicazione suriettiva da A in P(A)
3) se la relazione

$R_1 = \{(a, t) \in A \times P(A) \mid a \in t\}$

è o meno una funzione.

4) se la relazione

$R_2 = \{(a, \{a\}) \in A \times P(A)\}$

è o meno una funzione

1) Dato che l'insieme delle parti è 2^n con $|A| = n$, $2^n > n$, quindi esistono due elementi in dominio e codominio diversi, infatti $g: A \to P(A) \Rightarrow g(a) = \{a\}$ che è una funzione iniettiva

ESISTE UNA FUNZIONE INIETTIVA

2) $(f: X \to Y \text{ SURIETTIVA} \Rightarrow |X| \geq |Y|) \equiv$

$\equiv |X| < |Y| \Rightarrow \nexists f: X \to Y$ SURIETTIVA

INFATTI $|A| = n < 2^n = |P(A)| \Rightarrow \exists$ f suriettiva $f: A \to P(A)$

#2

Risolvere il seguente sistema congruenziale lineare. Trova le soluzioni comprese tra 50 e 100

- $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

Verifichiamo la compatibilità del sistema

MCD(5,3)	MCD(5,2)	MCD(2,3)	I MODULI SONO DUE A DUE
$5 = 3 \cdot 1 + 2$	$5 = 2 \cdot 2 + 1$	$3 = 2 \cdot 1 + 1$	COPRIMI, IL TCR CI GARANTISCE
$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$2 = 1 \cdot 2 + 0$	$2 = 1 \cdot 2 + 0$	ALMENO SOLUZIONE
$2 = 1 \cdot 2 + 0$			

- $2 + 5k$, con $k \in \mathbb{Z}$

$2 + 5k \equiv 1 \pmod 3$

$5k \equiv -1 \pmod 3$

MCD(5,3) = 1 | -1 ⇒ COMPATIBILE

$1 = 3 - 2(1)$

$1 = 3 - [5 - 3(1)](1)$

$1 = 3 - 5(1) + 3(1)$

$1 = 3(2) - 5(1)$

$1 = 5(-1) + 3(2)$

$\alpha = -1$

$k = \frac{b}{d} \cdot \alpha \Rightarrow k = -\frac{1}{1} \cdot (-1) \quad k = 1$

$2 + 5(1) = 7$

Le soluzioni sono $[7]_{15} \Rightarrow 7 + 15k$

- $7 + 15k \equiv 1 \pmod 2$

$15k \equiv -6 \pmod 2$

MCD(15, 2)

$15 = 2 \cdot 7 + 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = 15 - 2(7)$

$1 = 15(1) + 2(-7)$

$k = -\frac{6}{1} \cdot 1 \Rightarrow k = -6 + 2 = -4 + 2 = -2 + 2 = 0$

$7 + 15(0) \Rightarrow 7$

L'insieme delle soluzioni è $[7]_{30}$

Le soluzioni comprese tra 50 e 100 sono

$7 + 30 = 37$

$37 + 30 = 67$

$67 + 30 = 97$

#3

Sia $*: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'operazione definita da $a * b = |a - b|$

#3

Sia $*: N \to N$ l'operazione definita da $a * b = |a-b|$

1) $*$ è commutativa?
2) $*$ è associativa?
3) $*$ ha elemento neutro?
4) quali sono gli elementi di N simmetrizzabili rispetto a $*$

↓

1) $a * b = b * a$

$|a-b| = |b-a|$

Il valore assoluto è sempre positivo

$|a-b| = |-(b-a)|$

Distinguiamo due parti

se $a \geq b \Rightarrow -(b-a) = a-b$

se $a < b \Rightarrow b-a$

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & a \geq b \\ -a+b & a<b \end{cases}$$

$$|b-a| = \begin{cases} b-a & b \geq a \\ -b+a & b<a \end{cases}$$

SE $b=a \Rightarrow |a-b| = 0 = |b-a|$

SE $b>a \Rightarrow |a-b| = b-a = |b-a|$

SE $b<a \Rightarrow |a-b| = a-b = |b-a|$

$\Rightarrow |b-a| = |a-b|$

$*$ È COMMUTATIVA

2) $(a*b)*c = a*(b*c)$

def di $*$

$(a*b)*c = (|a-b|)*c = ||a-b|-c|$

$a*(b*c) = a*(|b-c|) = |a-|b-c||$

Ad occhio notiamo come non sia associativa, poiché

$(2*3)*5 = 1*5 = 4$

$2*(3*5) = 2*2 = 0$

$4 \neq 0$

$*$ NON È ASSOCIATIVA

#4

Si stabilisca se la matrice

$$\begin{pmatrix} [0] & [2] & [1] \\ [0] & [2] & [4] \\ [1] & [0] & [2] \end{pmatrix}$$

è invertibile in $\mathbb{Z}_6$. Si stabilisca anche il rango

Calcoliamo il determinante usando Laplace

$(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$1 \cdot 1 \cdot 8-2 = 6$

$6 \div 6 = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

A NON È INVERTIBILE

Essendo $\det(6)$ $\quad \rho(A) = 3$

FUNZIONI E RELAZIONI

mercoledì 18 ottobre 2023 09:12

1) Consideriamo le applicazioni:

- $g: 16\mathbb{Z} \to 4\mathbb{Z}$, $g(m) = \frac{m}{4}$
- $k: 4\mathbb{Z} \to 16\mathbb{Z}$, $k(x) = x^2$

- $g(\{-16, 0, 16, 32\})$, $g(32\mathbb{Z})$, $g^{-1}(4\mathbb{Z})$, $k(\{0, 4, 12, 8, -8\})$, $k(4\mathbb{Z})$, $k^{-1}(\{0, 16, -16, 32\})$

- $g(-16) = \frac{-16}{4} = -4$

  $g(0) = \frac{0}{4} = 0$

  $g(16) = \frac{16}{4} = 4$

  $g(32) = \frac{32}{4} = 8$

  $g(\{-16, 0, 16, 32\}) = \{-4, 0, 4, 8\}$

- $g(32\mathbb{Z}) = \frac{32m}{4}$, $8\mathbb{Z}$

- $g^{-1}(4\mathbb{Z}) = 16\mathbb{Z}$

- $k(0) = 0$

  $k(4) = 16$

  $k(12) = 144$

  $k(8) = 64$

  $k(-8) = 64$

  $k(\{0, 4, 12, 8, -8\}) = \{0, 16, 144, 64\}$

- $k(4\mathbb{Z}) = 16\mathbb{Z}$

- $k^{-1}(0) = \sqrt{0} = 0$

  $k^{-1}(16) = \sqrt{16} = 4$

  $k^{-1}(16)\ \sqrt{-16} = 4$

  $k^{-1}(32) = \sqrt{32} =$

  $k^{-1}(\{0, 16, -16, 32\}) = \{0, 4, \sqrt{32}\}$

- g È INIETTIVA

  $16 \neq -16 \qquad g(16) = 4 \neq g(-16) = -4$

  k NON È INIETTIVA

  $4 \neq -4 \qquad g(4) = 16 = g(-4) = 16$

  g È SURIETTIVA

  $g(16\mathbb{Z}) = 4\mathbb{Z}$

  k NON È SURIETTIVA

) numeri negativi non stanno in $16\mathbb{Z}$

- $g(m) = \frac{m}{4}$

  $g^{-1}(m) = 4m$

- $k \circ g$

  $k(g(m))$

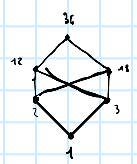
  $\left(\frac{m}{4}\right)^2 = \frac{m^2}{16}$

- $g \circ k$

  $g(k(x))\ \ \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$

2) Sia $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$

- disegnare il diagramma di Hasse



- dimostrare che $(A, |)$ non è un reticolo

  prendiamo un arbitrario sottoinsieme

  $\{2, 3\} \Rightarrow$ maggioranti $\{12, 18, 36\}$

- dimostrare che $(A, |)$ non è un reticolo

prendiamo un arbitrario sottoinsieme

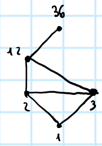
$\{2,3\} \Rightarrow$ maggioranti $\{12, 18, 36\}$

$\nexists$ minimo dei maggioranti

$\nexists$ estremo superiore

$(A, |)$ non è un reticolo

- $A = \{1, 2, 3, 12, 36\}$



$Sup_{A'}\{2,3\} = 12$

$\{12, 36\}$ maggioranti

$Inf_{A'}\{2,3\} = 1$

$\{1\}$ minoranti

$(A', |)$ è un reticolo

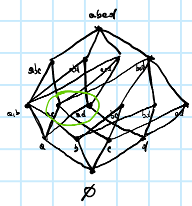
3) Si consideri l'insieme $S = \{a,b,c,d\}$ e sia $P(S)$ l'insieme delle parti di S

- quanti sono gli elementi di $P(S)$

$2^4 = 16$

- nell'insieme ordinato $(P(S), \subseteq)$ si calcoli

$Sup_{P(S)}(\{a,c\},\{a,d\})$, $Inf_{P(S)}(\{a,c\},\{a,d\})$

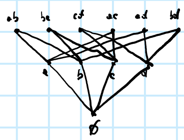


$Sup(\{a,c\},\{a,d\}) = \{a,c,d\}$

$Inf(\{a,c\},\{a,d\}) = \{a\}$

- Sia $A = \{x \in P(S) : |x| \leq 2\}$, si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali; massimo e minimo di A

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}\}$



minimale = $\emptyset$

minimo = $\emptyset$

massimali = $\{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}\}$

massimo = $\nexists$

- Dato che gli elementi non sono confrontabili, l'insieme non è totalmente ordinato

4) Si consideri l'insieme $A = \{2,3,4\}$ e si ponga $B = A \times A$. Nell'insieme B si consideri anche la relazione $\leq$ definita ponendo

- $(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq c \quad b | d$

- Si dimostri che $\leq$ è una relazione d'ordine in B

RIFLESSIVA

$(a,b) \leq (a,b)$

$a \leq a$, $b | b$ ✓

ASIMMETRICA

$(a,b) \leq (c,d)$
$(c,d) \leq (a,b)$ $\Rightarrow (a,b) = (c,d)$

$a \leq c$, $c \leq a$ $\Rightarrow$ $a = c$ $\Rightarrow$ $a = c = b = d$ ✓
$b | d$, $d | b$ $\quad$ $b = d$

TRANSITIVA

$(a,b) \leq (c,d)$ $\Rightarrow$ $(a,b) \leq (e,f)$
$(c,d) \leq (e,f)$

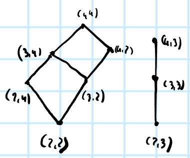
$a \leq c$ $\Rightarrow$ $a \leq e$
$c \leq e$ ✓

$b | d$ $\Rightarrow$ $b | f$
$d | f$

$\leq$ È UNA RELAZIONE D'ORDINE

- disegnare il diagramma di Hasse di $(B, \leq)$

$B = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$



minimo $\nexists$
minimali $(2,2)$, $(2,3)$
massimo $\nexists$
massimale $(4,4)$, $(4,3)$

- stabilire se $(B, \leq)$ è un reticolo

5) Nell'insieme $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ si consideri la relazione $\leq$, definita ponendo
$a \leq b \iff a = b$ oppure $4a < 3b$

- verifichiamo che $\leq$ è una relazione d'ordine

RIFLESSIVA

$a \leq b \Rightarrow a = a$ ✓

ASIMMETRICA

$a \leq b$ $\Rightarrow$ $a = b$
$b \leq a$

$a \leq b \Rightarrow a = b$ oppure $4a < 3b$
$b \leq a \Rightarrow b = a$ oppure $4b < 3a$
Supponendo per assurdo che siano diversi,
$4a < 3b < 4b < 3a \Rightarrow 4a < 3a$? Impossibile
(quindi $a = b$ ✓

TRANSITIVA

$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c \Rightarrow a = c$ oppure $4a < 3c$

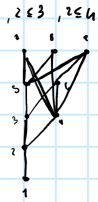
$a \leq b \Rightarrow a = b$ oppure $4a < 3b$
$b \leq c \Rightarrow b = c$ oppure $4b < 3c$
$a = b$ e $b = c \Rightarrow a = c$
ma se $a = b$, allora $4b < 3c$, $b = a$ e allora $4a < 3c$ ✓

$\leq$ È UNA RELAZIONE D'ORDINE

- disegnare il diagramma di Hasse di $(A, \leq)$ $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Il uguaglianza non si verifica mai, $4a < 3b$

$1 \leq 2$, $1 \leq 3$, $2 \leq 3$, $2 \leq 4$, $3 \leq 5$, $3 \leq 6$, $4 \leq 6$, $5 \leq 9$, $4 \leq 7$, $5 \leq 8$, $4 \leq 8$, $6 \leq 9$, $5 \leq 9$



$(A, \leq)$ NON È TOTALMENTE ORDINATO

minimali $\{1\}$
minimo $\{1\}$
massimo $\nexists$
massimali $\{7,8,9\}$

- determinare estremo superiore $\{3,4\}$

massimo $\nexists$

massimali $\{7,8,9\}$

- determinare estremo superiore $\{3,4\}$

maggioranti $=\{6,7,8,9\}$

$\nexists$ min dei maggioranti

$\nexists\ sup_A\{3,4\}$

$(A,\leq)$ NON È UN RETICOLO

(6) Nell'insieme $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ si consideri la relazione R definita ponendo

- $xRy \iff x+2y \in 3\mathbb{Z}$

- si dimostra che R è una relazione d'equivalenza

RIFLESSIVA

$xRx \iff x+2x \in 3\mathbb{Z} \quad 3x \in 3\mathbb{Z}$ ✓

SIMMETRICA

$xRy \iff yRx$

$x+2y \in 3\mathbb{Z} \qquad 3 \mid y+2x-x+2y$ ✓

$y+2x \in 3\mathbb{Z}$

TRANSITIVÀ

$xRy,\ yRz \qquad xRz$

$x+2y \in 3\mathbb{Z}$

$y+2z \in 3\mathbb{Z}$ $\Rightarrow x+2z \in 3\mathbb{Z}$

$a|b$

$a|c$ $\Rightarrow a \mid b+c$

$3 \mid x+2y+y+2z \Rightarrow 3 \mid x+3y+2z$

$3 \mid x+3y+2z \Rightarrow 3 \mid x+\cancel{3y}+2z-\cancel{3y}$

$3 \mid 3y \qquad 3 \mid x+2z$

- si descrive la partizione in A, determinata da R

$[1]_R=\{1Rx\}=1R1 \quad 1+2(1)=3 \in 3\mathbb{Z}$

$1R4 \quad 1+2(4)=9 \in 3\mathbb{Z}$

$1R7 \quad 1+2(7)=15 \in 3\mathbb{Z}$

$[1]_R=\{x\in A: 1Rx\}=\{x\in A: 1+2x \in 3\mathbb{Z}\}=\{1,4,7\}=[4]_R=[7]_R$

$[2]_R=\{2Rx\}=2R2 \quad 2+2(2)=6 \in 3\mathbb{Z}$

$2R5 \quad 2+2(5)=12 \in 3\mathbb{Z}$

$2R8 \quad 2+2(8)=18 \in 3\mathbb{Z}$

$[2]_R=\{x\in A: 2Rx\}=\{x\in A: 2+2x \in 3\mathbb{Z}\}=\{2,5,8\}=[2]=[5]=[8]_R$

$[3]_R=\{3Rx\}=3R3 \quad 3+2(3)=9 \in 3\mathbb{Z}$

$3R6 \quad 3+2(6)=15 \in 3\mathbb{Z}$

$3R9 \quad 3+2(9)=21 \in 3\mathbb{Z}$

$[3]_R=\{x\in A: 3Rx\}=\{x\in A: 3+2x \in 3\mathbb{Z}\}=\{3,6,9\}=[3]=[6]=[9]$

- dimostrare che $xR'y \iff x-2y \in 3\mathbb{Z}$ è una relazione di equivalenza

$xRx \Rightarrow 1-2=-1 \notin 3\mathbb{Z}$ $\quad$ R' non è una relazione di equivalenza