Costantino Delizia
Patrizia Longobardi
Mercede Maj
Chiara Nicotera

Matematica discreta

Soluzione degli esercizi proposti

1

Teoria degli insiemi

Esercizio 1.1.1. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.1.2. Si ha: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Esercizio 1.1.3. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.1.4. Si ha $C = \{1, -1\}$, $D = \emptyset$, $E = \{i, -i\}$, $F = \{n, o\}$.

Esercizio 1.1.5. Risulta:

$$\begin{array}{rrrr}
c \in A, & 1 \notin A, & \{\triangle\} \notin A, & \{12\} \in A, \\
12 \in A, & \emptyset \in A, & \{\emptyset\} \notin A, & \{12\} \subseteq A, \\
\{\{12\}\} \subseteq A, & \{c, 12\} \subseteq A, & \emptyset \subseteq A, & \{\emptyset\} \subseteq A, \\
\{\{\emptyset\}\} \not\subseteq A, & c \notin B, & 1 \in B, & \{d, 5\} \in B, \\
\{d\} \notin B, & f \in B, & \emptyset \notin B, & \{\emptyset\} \in B, \\
\{1\} \subseteq B, & \{\{d\}\} \not\subseteq B, & \{c, 12\} \not\subseteq B, & \emptyset \subseteq B, \\
\{\emptyset\} \not\subseteq B, & \{\{\emptyset\}\} \subseteq B, & \{1, \{d, 5\}\} \subseteq B, & \{\{f\}\} \not\subseteq B, \\
\{\{1\}, 0\} \not\subseteq B, & \{f, \{\emptyset\}\} \subseteq B, & \{f, \emptyset\} \not\subseteq B, & \{f, d\} \subseteq B.
\end{array}$$

Esercizio 1.1.6. Sono vere la seconda, la settima e l'ultima affermazione, le altre sono false.

Esercizio 1.1.7. Risulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(L) &= \{\emptyset, \{11\}, \{7\}, L\} \\
\mathcal{P}(M) &= \{\emptyset, \{s\}, \{8\}, \{\pi\}, \{s, 8\}, \{s, \pi\}, \{8, \pi\}, M\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.1.8. Si ha:

$$\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \qquad \emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \qquad \{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0),$$

$$\begin{array}{rrr} \{0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & \mathbb{N}_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & 3 \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \\ \{3, \{4\}\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & 0 \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & \{10, 100\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \\ \{2, -3, 5\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & \mathbb{Z} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), & -3 \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0). \end{array}$$

Esercizio 1.1.9. È vera la seconda affermazione, le altre sono false.

Esercizio 1.1.10. Se $S = T = V$, allora per la $(1.1.4)$ si ha $S \subseteq T$, $T \subseteq V$ e $V \subseteq S$.

Viceversa, si ha $S \subseteq T$ e da $T \subseteq V \subseteq S$ segue $T \subseteq S$, per la proprietà transitiva dell'inclusione, sicché $S = T$, ancora per la $(1.1.4)$. Si ha poi $T \subseteq V$ e $V \subseteq T$ per la proprietà transitiva dell'inclusione, sicché $T = V$.

Esercizio 1.1.11. Per ogni $x \in S$ si ha $\{x\} \in \mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$, quindi $\{x\} \in \mathcal{P}(T)$, cioé $\{x\} \subseteq T$ e $x \in T$, come volevasi.

Esercizio 1.1.12. Sia $S \subset T$. Allora $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$ per la $(1.1.9)$. Inoltre esiste $T : T \in \mathcal{P}(T), T \notin \mathcal{P}(S)$, pertanto $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$.

Sia ora $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$. Allora $S \subseteq T$ per la $(1.1.9)$. Esiste inoltre $Y : Y \in \mathcal{P}(T), Y \notin \mathcal{P}(S)$, ne segue $Y \nsubseteq S$, dunque esiste $y : y \in Y, y \notin S$, inoltre $y \in T$ poiché $Y \subseteq T$, pertanto y è tale che $y \in T, y \notin S$, e $S \subset T$.

Esercizio 1.1.13. Risulta $|\mathcal{P}(T)| = 2^4 = 16$ e gli elementi di $\mathcal{P}(T)$ sono: Ø, $\{Ø\}$, $\{\{Ø\}\}$, $\{\{\{Ø\}\}\}$, $\{\{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{Ø, \{Ø\}\}$, $\{Ø, \{\{Ø\}\}\}$, $\{Ø, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{\{Ø\}, \{\{Ø\}\}\}$, $\{\{Ø\}, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{\{\{Ø\}\}, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{Ø, \{Ø\}, \{\{Ø\}\}\}$, $\{Ø, \{Ø\}, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{Ø, \{\{Ø\}\}, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, $\{\{Ø\}, \{\{Ø\}\}, \{Ø, \{Ø\}\}\}$, T.

Esercizio 1.2.1. Da $a \leq b$, $b < c$ segue $b \leq c$ e $a \leq c$ per la proprietà transitiva della relazione $\leq$ (vedi $(1.2.25)$). Per assurdo sia $a = c$, allora si ha $c \leq b$ e da $b \leq c$ segue $b = c$ per la proprietà asimmetrica (vedi $(1.2.24)$), contro l'essere $b < c$.

Analogamente si prova la seconda relazione.

Da $a < b$ e $b < c$ segue poi $a \leq c$ e $b < c$ e dunque $a < c$ per quanto provato in precedenza.

Si supponga ora $a < b$ e $c \leq d$,. esistono allora e sono univocamente determinati $t \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ tali che $b = a + t$, $d = c + s$, pertanto $b + d = (a + c) + (t + s)$, con $s + t \in \mathbb{N}_0$, sicché $a + c \leq b + d$. Non può essere $s + t = 0$, altrimenti si avrebbe $s = 0, t = 0$ per la $(1.2.4)$ e $t = 0$ contro l'essere $t \in \mathbb{N}$, pertanto $a + c < b + d$.

Sia ora $a < b, c < d$. Allora esistono e sono univocamente determinati $t \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}$ tali che $b = a + t, d = c + s$. Risulta $bd = (a + t)(c + s) = ac + as + ct + st$, per le $(1.2.15)$ e $(1.2.16)$. Non può essere $as + ct + st = 0$, altrimenti si avrebbe $st = 0$ per la $(1.2.4)$ e $s = 0$ o $t = 0$ per la legge di annullamento del prodotto (vedi $(1.2.11)$), entrambi assurdi.

Le altre relazioni si provano analogamente.

Esercizio 1.2.2. Esistono $k, k_1 \in \mathbb{N}_0$ tali che $b = ak$, $d = ck_1$, ne segue $bd = akck_1 = ackk_1$ per la proprietà commutativa (vedi $(1.2.7)$), con $kk_1 \in \mathbb{N}_0$, pertanto $ac|bd$.

Da $n \in \mathbb{N}_0$ segue $n|n$ per la proprietà riflessiva (vedi $(1.2.39)$). Se $a|b$ e $n \in \mathbb{N}_0$ si ha allora $an|bn$ per la proprietà precedente, e, essendo $a|an$ risulta $a|bn$ per la proprietà transitiva (vedi $(1.2.41)$.

Esercizio 1.2.3. Per definizione si ha $b = (b - a) + a = (b - c) + c$. Da $b - a = b - c$ segue allora $a = c$, per la cancellabilità rispetto alla somma (vedi $(1.2.6)$). La seconda relazione si prova analogamente.

Esercizio 1.2.4. Con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sia $a + b = a + c$, allora si ha $(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$, sicché, per la proprietà associativa della somma (vedi $(1.2.2)$), si ha $(-a + a) + b = (-a + a) + c$, da cui $0 + a = 0 + b$ e $b = c$.

Esercizio 1.2.5. Si ragioni come nell'Esercizio $1.2.3$.

Esercizio 1.2.6. Si ragioni come nell'Esercizio $1.2.1$.

Esercizio 1.2.7. Sia $a \leq b$, esiste allora $t \in \mathbb{N}_0$ tale che $b = a + t$. Se $c > 0$, si ha $bc = (a + t)c = ac + tc$, con $tc \in \mathbb{N}_0$, sicché $ac \leq bc$. Se $c < 0$, si ha $0 = c + k$, con $k \in \mathbb{N}$, da cui $-c = k \in \mathbb{N}$; da $a = b - t$ segue allora $ac = (b - t)c = bc - tc$ per la $1.2.7$, dunque $ac = bc + t(-c)$, con $t(-c) \in \mathbb{N}_0$, come volevasi.

Se poi $a < b$ si ha $b = a + t$, con $t \in \mathbb{N}$ univocamente individuato e $bc = ac + tc$. Se $c > 0$, si ha $tc \in \mathbb{N}_0$ e non può essere $tc = 0$, altrimenti si avrebbe, per la legge di annullamento del prodotto (vedi $(1.2.11)$), $t = 0$ o $c = 0$, entrambi assurdi, pertanto $ac < bc$. Se invece $c < 0$, si ha $ac = bc - tc = bc + t(-c)$, con $t(-c) \in \mathbb{N}_0$ e ancora non può essere $t(-c) = 0$, altrimenti si avrebbe, per la legge di annullamento del prodotto (vedi $(1.2.11)$), $t = 0$ o $-c = 0$, entrambi assurdi. pertanto $bc < ac$.

Se $0 \leq a$, si ha $(-1)a \leq (-1)0 = 0$ e, per la $1.2.6$ $-a \leq 0$; viceversa da $-a \leq 0$ segue $0 = (-1)0 \leq (-1)(-a)$ e, sempre per la $1.2.6$, $0 \leq a$.

Le altre relazioni si provano analogamente.

Esercizio 1.2.8. Si ha $0 = a0$, pertanto $a|0$. Risulta $b = 0k$, con $k \in \mathbb{Z}$ se e solo se $b = 0$. Si ha poi $a = a$, pertanto $1|a$ e $a|a$. Le analoghe di $(1.2.41)$, $(1.2.42)$, $(1.2.43)$ si provano in modo del tutto simile.

Per la $1.2.6$, si ha $(-1)(-a) = a$, pertanto $-1|a$ e $(-a)|a$. Se $a|b$, si ha $b = ak$, con $k \in \mathbb{Z}$, da cui $b = (-a)(-k)$, con $-k \in \mathbb{Z}$, dunque $(-a)|b$; viceversa se $(-a)|b$, si ha che $-(-a)|b$ e dunque $a|b$. Infine se $a|b$, si ha $b = ak$, con $k \in \mathbb{Z}$, da cui $-b = -ak = a(-k)$, per la 1.2.6, sicché $a|(-b)$, viceversa se $a|(-b)$ si ha anche $a| - (-b)$ e dunque $a|b$, come richiesto.

Si noti infine che, per ogni $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a|(-a)$, $(-a)|a$, con $a \neq -a$, pertanto non vale l'analoga di (1.2.40).

Esercizio 1.2.9. Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, risulta $ab \geq 0$ e $a + b \geq 0$, sicché $|ab| = ab = |a||b|$ e $|a + b| = a + b = |a| + |b|$. Se invece $a < 0, b < 0$, si ha $ab \geq 0$, per la 1.2.9 e $a + b < 0$, pertanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$ e $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$. Siano infine, per esempio, $a \geq 0, b < 0$, allora si ha $ab < 0$, per la 1.2.9, e $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$; si ha poi $a+b < a \leq a+(-b) = |a|+|b|$ e $(-a)+(-b) \leq -b \leq a+(-b) = |a|+|b|$, pertanto, se $a + b \geq 0$, risulta $|a + b| = a + b < |a| + |b|$, se invece $a + b < 0$, risulta $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$.

Esercizio 1.2.10. Da $x, y \in \mathbb{N}_p$ segue $x = 2k, y = 2k_1$, con $k, k_1 \in N_0$, da cui $x+y = 2(k+k_1) \in \mathbb{N}_p$ e $xy = (2k)(2k_1) = 2(2kk_1) \in \mathbb{N}_p$. Se invece $x, y \in \mathbb{N}_d$, si ha $x = 2k + 1, y = 2k_1 + 1$, con $k, k_1 \in \mathbb{N}_0$, dunque $x + y = 2 + 2k_1 + 2 = 2(k + k_1 + 1) \in \mathbb{N}_p$ e $xy = 2k2k_1 + 2k + 2k_1 + 1 = 2(2kk_1 + k + k_1) + 1 \in \mathbb{N}_d$. Infine se, per esempio, $x \in \mathbb{N}_p, y \in N_d$, si ha $x = 2k, y = 2k_1 + 1$, $k, k_1 \in \mathbb{N}_0$, da cui $x + y = 2k + 2k_1 + 1 = 2(k + k_1) + 1 \in \mathbb{N}_d$ e $xy = 2k(2k_1 + 1) \in N_p$.

Esercizio 1.2.11. Si ha $b = ak, d = ck_1$, con $k, k_1 \in \mathbb{Z}$, da cui $bd = akck_1 = ac(kk_1)$, con $kk_1 \in \mathbb{Z}$, sicché $ac|bd$. È $z|z$ per la proprietà riflessiva (vedi 1.2.10), pertanto da $a|b$ segue $az|bz$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$; da $a|az, az|bz$ segue infine $a|bz$ per la proprietà transitiva (vedi 1.2.10).

Esercizio 1.2.12. Da $s\mathbb{N}_0 \subseteq t\mathbb{N}_0$ segue $s = s1 \in t\mathbb{N}_0$, cioè $s = tk$ per un opportuno $k \in \mathbb{N}_0$, sicché $t|s$. Viceversa, sia $t|s$. Per ogni $y \in s\mathbb{N}_0$ si ha $y = sv$, con $v \in \mathbb{N}_0$, dunque $s|y$, ne segue $t|y$ per la transitività (vedi 1.2.41) sicché $y \in t\mathbb{N}_0$. La seconda relazione si prova analogamente.

Con $s, t \in \mathbb{N}_0$, si ha $s\mathbb{N}_0 = t\mathbb{N}_0$ se e solo se $s\mathbb{N}_0 \subseteq t\mathbb{N}_0$ e $t\mathbb{N}_0 \subseteq s\mathbb{N}_0$, cioè se e solo se $s|t$ e $t|s$, e dunque, per la (1.2.40), se e solo se $s = t$.

Con $h, k \in \mathbb{Z}$ si ha invece $h\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$ se e solo se $h|k$ e $k|h$, cioè se e solo se $h = k$ o $h = -k$, per la 1.2.11.

Esercizio 1.2.13. Da $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, $\frac{s}{t} = \frac{c}{d}$ segue $mb = an, sd = ct$. Si ha allora $(mt + ns)bd = mtbd + nsbd = mbtd + sdnb = antd + ctnb = adnt + bcnt = (ad + bc)nt$, dunque $\frac{mt+ns}{nt} = \frac{ad+bc}{bd}$. Si ha poi $msbd = mbsd = anct = acnt$, dunque $\frac{ms}{nt} = \frac{ac}{bd}$.

Esercizio 1.2.14. Per ogni $\frac{m}{n}, \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$, si ha, per la commutatività della somma e del prodotto in $\mathbb{Z}$, $\frac{m}{n} + \frac{s}{t} = \frac{mt+ns}{nt} = \frac{sn+mt}{tn} = \frac{s}{t} + \frac{m}{n}$. Per ogni $\frac{m}{n}, \frac{s}{t}, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, si ha, per l'associatività della somma e del prodotto in $\mathbb{Z}$, $(\frac{m}{n}+\frac{s}{t})+\frac{u}{v} = \frac{mt+ns}{nt}+\frac{u}{v} = \frac{(mt+ns)v+unt}{ntv} = \frac{mtv+nsv+unt}{n(tv)} = \frac{m}{n}+\frac{sv+tu}{tv} = \frac{m}{n}+(\frac{s}{t}+\frac{u}{v})$.

Analogamente si provano la proprietà commutativa e la proprietà associativa del prodotto in $\mathbb{Q}$.

Si ha poi, per ogni $\frac{m}{n}, \frac{s}{t}, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$, $(\frac{m}{n}+\frac{s}{t})\frac{u}{v} = (\frac{mt+ns}{nt})\frac{u}{v} = \frac{mtu+nsu}{ntv} = \frac{(mtu+nsu)v}{ntv^2} = \frac{mu}{nv}+\frac{su}{tv} = \frac{m}{n}\frac{u}{v}+\frac{s}{t}\frac{u}{v}$.

Analogamente si prova la proprietà distributiva a sinistra del prodotto rispetto alla somma.

Esercizio 1.2.15. Si ha, per ogni $n, t \in \mathbb{Z}$, $0t = 0 = n0$, sicché $\frac{0}{n} = \frac{0}{t}$, per definizione. Si ha poi, per ogni $m, s \in \mathbb{Z}, m, s \neq 0$, $ms = sm$ e $\frac{m}{m} = \frac{s}{s}$. Risulta poi, per ogni $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n}+0 = \frac{m}{n}+\frac{0}{n} = \frac{mn+n0}{n^2} = \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n}$. Infine si ha, per ogni $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n}1 = \frac{m}{n}\frac{n}{n} = \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n}$.

Esercizio 1.2.16. Per ogni $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, si ha $\frac{m}{n}+\frac{-m}{n} = \frac{mn-nm}{n^2} = \frac{0}{n^2} = 0$. Per ogni $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n} \neq 0$, risulta poi $m, n \neq 0$ e $\frac{m}{n}\frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = \frac{mn}{mn} = 1$.

Esercizio 1.3.1. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.3.2. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.3.3. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.3.4. L'asserto è ovvio se $k = 1$, discende subito da 1.2.4 se $k = 2$. Sia $k > 2$. Se $p|a_1 \dots a_k = (a_1 \dots a_{k-1})a_k$, allora, per 1.2.4, $p|a_1 \dots a_{k-1}$ o $p|a_k$. Se $p|a_1 \dots a_{k-1}$, per ipotesi induttiva, esiste $i \in \{1, \cdots, k-1\}$ tale che $p|a_i$. Pertanto esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ tale che p divide a_i.

Sia ora $n \geq 2$ e sia $n = p_1 p_2 \cdots p_h = q_1 q_2 \cdots q_k$, con p_i, q_j primi. Si supponga per esempio $h \leq k$. Da $n = p_1(p_2 \cdots p_h)$ segue che $p_1|n = q_1 q_2 \cdots q_k$, dunque esiste $i \in \{1, \dots, k\}$ tale che p_1 divide q_i. Si ha dunque $p_1 = q_i$, poiché q_i è primo e $p_1 \neq 1$. Si può assumere $i = 1$, sicché $p_1 = q_1$ e da $n = p_1 p_2 \cdots p_h = p_1 q_2 \cdots q_k$, segue $p_2 \cdots p_h = q_2 \cdots q_k$, per la cancellabilità rispetto al prodotto (vedi (1.2.14)). Ragionando analogamente su p_2 si ha che esiste $i \in \{2, \dots, k\}$ tale che $p_2 = q_i$ e si può assumere $i = 2$, cioè $p_2 = q_2$; da $p_2 \cdots p_h = p_2 \cdots q_k$, segue allora $p_3 \cdots p_h = q_3 \cdots q_k$. Così continuando, dopo h passi si ottiene allora $p_i = q_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, h\}$. Non può essere $h < k$, altrimenti si avrebbe $1 = q_{h+1} \cdots q_k$ e $q_k = 1$ per (1.2.12), contro l'essere q_k un numero primo.

Esercizio 1.3.5. Per $n = 1$, si ha $1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $1^2 + 2^2 + \cdots + h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$, si ottiene facilmente $1^2 + 2^2 + \cdots + h^2 + (h+1)^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 = (h+1)[\frac{h(2h+1)}{6} + (h+1)] = (h+1)[\frac{2h^2+h+6h+6}{6}] = (h+1)[\frac{2h^2+7h+6}{6}] = (h+1)[\frac{(h+2)(2h+3)}{6}] = \frac{(h+1)(h+2)(2(h+1)+1)}{6}$.

Esercizio 1.3.6. Per $n = 1$, si ha $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{h\cdot(h+1)} = 1 - \frac{1}{h+1}$, si ha $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{h\cdot(h+1)} + \frac{1}{(h+1)\cdot(h+2)} = 1 - \frac{1}{h+1} + \frac{1}{(h+1)\cdot(h+2)} = 1 - \frac{h+2-1}{(h+1)(h+2)} = 1 - \frac{h+1}{(h+1)(h+2)} = 1 - \frac{1}{h+2}$.

Esercizio 1.3.7. Per $n = 1$, si ha $1 = 1^2$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $1 + 3 + 5 + \cdots + (2h-1) = h^2$, si ha $1 + 3 + 5 + \cdots + (2h-1) + (2(h+1)-1) = h^2 + (2(h+1)-1) = h^2 + 2h + 1 = (h+1)^2$.

Esercizio 1.3.8. Per $n = 1$, si ha $2\cdot 1 = 2 = 1\cdot 2 = 1(1+1)$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $2+4+6+\cdots+2h = h(h+1)$, si ha $2+4+6+\cdots+2(h+1) = h(h+1) + 2(h+1) = (h+1)(h+2) = (h+1)((h+1)+1)$.

Esercizio 1.3.9. Per $n = 1$, si ha $1 \cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (1-1)\cdot 2^2 + 2 = (1-1)\cdot 2^{1+1} + 2$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \cdots + h\cdot 2^h = (h-1)\cdot 2^{h+1} + 2$, si ha $1\cdot 2^1 + 2\cdot 2^2 + \cdots + h\cdot 2^h + (h+1)\cdot 2^{h+1} = (h-1)\cdot 2^{h+1} + 2 + (h+1)2^{h+1} = 2^{h+1}(h-1+h+1) + 2 = 2^{h+1}(2h) + 2 = 2^{h+2}h + 2 = ((h+1)-1)\cdot 2^{(h+1)+1} + 2$.

Esercizio 1.3.10. Per $n = 1$, si ha $2 = 2\cdot 1 = 2(2^1 - 1)$. Con $h > 1$, supposto per ipotesi induttiva $2 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1} = 2(2^{h-1} - 1)$, si ha $2 + 2^2 + \cdots + 2^h = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{h-1} + 2^h = 2(2^{h-1}-1) + 2^h = 2^h - 2 + 2^h = 2(2^h) - 2 = 2(2^h - 1)$.

Esercizio 1.3.11. Per $n = 1$, si ha $3 = \frac{3(3^1-1)}{2}$. Con $h > 1$, supposto per ipotesi induttiva $3 + 3^2 + \cdots + 3^{h-1} = \frac{3(3^{h-1}-1)}{2}$, si ha $3 + 3^2 + \cdots + 3^h = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{h-1} + 3^h = \frac{3(3^{h-1}-1)}{2} + 3^h = \frac{3^h-3}{2} + 3^h = \frac{3^h-3+2\cdot 3^h}{2} = \frac{3\cdot 3^h-3}{2} = \frac{3(3^h-1)}{2}$.

Esercizio 1.3.12. Per $n = 1$, si ha $-1^2 = -1 = (-1)^1\frac{1(1+1)}{2}$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^h h^2 = (-1)^h \frac{h(h+1)}{2}$, si ha $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^h h^2 + (-1)^{h+1}(h+1)^2 = (-1)^h \frac{h(h+1)}{2} + (-1)^{h+1}(h+1)^2 = (-1)^h(h+1)[\frac{h}{2} + (-1)(h+1)] = (-1)^h(h+1)[\frac{h-2h-2}{2}] =$

$(-1)^h(h+1)(\frac{-h-2}{2}) = (-1)^h(-1)(h+1)\frac{h+2}{2} = (-1)^{h+1}\frac{(h+1)(h+2)}{2}$.

Esercizio 1.3.13. Per $n = 0$, si ha $12^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ e $11|0$. Con $h \geq 0$, supposto per ipotesi induttiva $11|12^h - 1$, si ha $12^h - 1 = 11t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, da cui $12^{h+1} - 1 = 12^h \cdot 12 - 1 = 12^h \cdot (11+1) - 1 = 12^h \cdot 11 + 12^h - 1 = 12^h \cdot 11 + 11t = 11(12^h + t)$ e $11|12^{h+1}$.

Esercizio 1.3.14. Per $n = 1$, si ha $2^{3\cdot 1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ e, ovviamente, $7|7$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $7|2^{3h} - 1$, si ha $2^{3h} - 1 = 7t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, da cui $2^{3(h+1)} - 1 = 2^{3h} \cdot 2^3 - 1 = 2^{3h} \cdot 8 - 1 = 2^{3h} \cdot (7+1) - 1 = 2^{3h} \cdot 7 + 2^{3h} - 1 = 2^{3h} \cdot 7 + 7t = 7(2^{3h} + t)$ e $7|2^{3(h+1)}$.

Esercizio 1.3.15. Per $n = 1$, si ha $5^{3\cdot 1} - 1 = 5^3 - 1 = 125 - 1 = 124$ e, ovviamente, $124|124$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $124|5^{3h} - 1$, si ha $5^{3h} - 1 = 124t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, da cui $5^{3(h+1)} - 1 = 5^{3h} \cdot 5^3 - 1 = 5^{3h} \cdot 125 - 1 = 5^{3h} \cdot (124+1) - 1 = 5^{3h} \cdot 124 + 5^{3h} - 1 = 5^{3h} \cdot 124 + 124t = 124(5^{3h} + t)$ e $124|5^{3(h+1)}$.

Esercizio 1.3.16. Per $n = 1$, si ha $1^2 - 3 = -2 \neq 1$. Per ogni $n \geq 1$ si ha $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (vedi Esercizio 1.3.7) e, ovviamente $n^2 \neq n^2 - 3$.

Esercizio 1.4.1. Per ogni $x \in S \cup V$ risulta $x \in S$ o $x \in V$, da cui $x \in T$ o $x \in W$ per le ipotesi, dunque $x \in T \cup W$; pertanto $S \cup V \subseteq T \cup W$.

Risulta sempre $V \subseteq V$ (vedi (1.1.2)), pertanto da $S \subseteq T$ segue $S \cup V \subseteq T \cup V$.

Da $S \subseteq T, V \subseteq T$ segue $S \cup V \subseteq T \cup T = T$ per la proprietà iterativa dell'unione (vedi 1.4.5).

Esercizio 1.4.2. L'implicazione non vale, infatti per esempio , con $A = \{a\}, B = \{b, c\}, C = \{a, b\}$ si ha $A \cup C = \{a, b\} \subseteq \{a, b, c\} = B \cup C$, ma $A \not\subseteq B$.

Esercizio 1.4.3. Per ogni $x \in S \cap V$ risulta $x \in S$ e $x \in V$, da cui $x \in T$ e $x \in W$ per le ipotesi, dunque $x \in T \cap W$; pertanto $S \cap V \subseteq T \cap W$.

Risulta sempre $V \subseteq V$ (vedi (1.1.2)), pertanto da $S \subseteq T$ segue $S \cap V \subseteq T \cup V$.

Da $S \subseteq T, V \subseteq T$ segue $S \cap V \subseteq T \cap T = T$ per la proprietà iterativa dell'intersezione (vedi 1.4.9).

Esercizio 1.4.4. L'implicazione non vale, infatti per esempio , con $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{a, d\}$ si ha $A \cap C = \{a\} = B \cap C$, ma $A \not\subseteq B$.

Esercizio 1.4.5. La prima implicazione non vale: infatti, per esempio, con $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $C = \{a, b, 3\}, D = \{a, c, d\}, E = \{a, b, 8\}$ si ha $A \subset C$, $B \subset D$, ma $A \cap B = \{a\} = C \cap D$.

Si ha poi $A \cap B = \{a\} = C \cap B$, pertanto non vale la seconda implicazione.

Si ha infine $A \subset C, A \subset E$, ma $A = \{a, b\} = C \cap E$.

Esercizio 1.4.6. Da $S \cap T \subseteq S$ (vedi $(1.4.6)$), segue $S = (S \cap T) \cup S$ per $1.4.1$, sicché per la proprietà commutativa dell'unione (vedi $1.4.2$) $S \cup (S \cap T) = (S \cap T) \cup S = S$.

Da $S \subseteq S \cup T$ (vedi $(1.4.1)$ segue $S \cap (S \cup T) = S$ per $1.4.4$.

Esercizio 1.4.7. Per ogni $x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$, esiste $Y \in \mathcal{F}$ tale che $x \in Y$, allora $x \in T$ per le ipotesi; pertanto $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \subseteq T$.

Per ogni $x \in T$ risulta $x \in Y$ per ogni $Y \in \mathcal{F}$ per ipotesi, pertanto $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$.

Esercizio 1.4.8. Si ha:

$$\begin{aligned}
x \in S \cup (\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X) &\iff x \in S \text{ o } (x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X) \\
&\iff x \in S \text{ o } (x \in X, \forall X \in \mathcal{F}) \\
&\iff (x \in S \text{ o } x \in X), \forall X \in \mathcal{F} \\
&\iff (x \in S \cup X), \forall X \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} (S \cup X).
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned}
x \in S \cap (\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X) &\iff x \in S \text{ e } (x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X) \\
&\iff x \in S \text{ e } (\exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in Y) \\
&\iff \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in Y \text{ e } x \in S \\
&\iff \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in Y \cap S \\
&\iff x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (S \cap X).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4.9. Si ha:

$$\begin{array}{ll} G \cup H = \{a, b, c, 2, m, n, d, 3, 0\}, & G \cup K = \{a, b, c, 2, m, n, d, 3, 0\}, \\ H \cup K = \{b, d, 3, m, 0\}, & G \cap H = \{b, m\}, \\ G \cap K = \emptyset, & H \cap K = \{d, 3, 0\} = K, \\ G \setminus H = \{a, c, 2, n\}, & H \setminus G = \{d, 3, 0\}, \\ G \setminus K = \{a, b, c, 2, m, n\}, & K \setminus G = \{d, 3, 0\}, \\ H \setminus K = \{b, m\}, & K \setminus H = \emptyset. \end{array}$$

Si ha dunque:

$$\begin{array}{lll} |G \cup H| = 9, & |G \cup K| = 9, & |H \cup K| = 5, \\ |G \cap H| = 2, & |G \cap K| = 0, & |H \cap K| = 3, \\ |G \setminus H| = 4, & |H \setminus G| = 3, & |G \setminus K| = 6, \\ |K \setminus G| = 3, & |H \setminus K| = 2, & |K \setminus H| = 0. \end{array}$$

Esercizio 1.4.10. Per ogni $x \in S \setminus W$ risulta $x \in S$ e $x \notin W$, da cui $x \in V$ e $x \notin T$ per le ipotesi, dunque $x \in V \setminus T$; pertanto $S \setminus W \subseteq V \setminus T$. Ovviamente

$$S \subseteq V, T \subseteq W \iff T \subseteq W, S \subseteq V \implies T \setminus V \subseteq W \setminus S.$$

Da $T \subseteq T$ (vedi (1.1.2)) seguono poi le altre implicazioni.

Esercizio 1.4.11. Con $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, b, c\}, D = \{a, c, d\}$, si ha $A \subset C, B \subset D$ e $A \setminus D = \{b\} = C \setminus B$.

Si ha poi $A \subset C$, $A \setminus B = \{b\} = C \setminus B$, sicché $A \setminus B \not\subset C \setminus B$; $B \subset D$, $A \setminus B = \{b\} = A \setminus D$ sicché $A \setminus B \not\supset A \setminus D$.

Esercizio 1.4.12. Posto $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, c\}$, si ha:

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{a, b, c\}, \\ B \cap C &= \{a\}, \\ A \setminus B &= \{c\}, \\ A \setminus C &= \{b\}, \\ A \setminus (B \cup C) &= \emptyset \neq \{b, c\} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \\ A \setminus (B \cap C) &= \{b, c\} \neq \emptyset = (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.13. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in S \setminus (S \setminus T) &\iff x \in S \text{ e } x \notin S \setminus T \\ &\iff x \in S \text{ e } (x \notin S \text{ o } x \in T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff (x \in S \text{ e } x \in T) \\ &\iff x \in S \cap T. \end{aligned}$$

Se S, T sono insiemi non disgiunti si ha allora $S \setminus (S \setminus T) = S \cap T \neq \emptyset$ e $(S \setminus S) \setminus T = \emptyset \setminus T = \emptyset$, pertanto $S \setminus (S \setminus T) \neq (S \setminus S) \setminus T$.

Esercizio 1.4.14. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.4.15. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in S \cap (T \setminus V) &\iff x \in S \text{ e } x \in T \setminus V \\ &\iff x \in S \text{ e } (x \in T \text{ e } x \notin V) \\ &\iff x \in S \text{ e } x \in T \text{ e } x \notin V \\ &\iff x \in S \cap T \text{ e } x \notin S \cap V \\ &\iff x \in (S \cap T) \setminus (S \cap V). \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} x \in (S \setminus T) \cap V &\iff x \in S \setminus T \text{ e } x \in V \\ &\iff (x \in S \text{ e } x \notin T) \text{ e } x \in V \\ &\iff x \in S \text{ e } x \notin T \text{ e } x \in V \\ &\iff x \in S \cap V \text{ e } x \notin T \cap V \\ &\iff x \in (S \cap V) \setminus (T \cap V). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.16. Si ha:

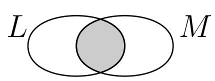
$$\begin{aligned} \mathbb{N} \cup \{3, -4, a\} &= \mathbb{N} \cup \{-4, a\}, \\ \mathbb{N} \cap \{3, -4, a\} &= \{3\}, \\ \mathbb{N} \setminus \{3, -4, a\} &= \mathbb{N} \setminus \{3\}, \\ \mathbb{Z} \cup \{3, -4, a\} &= \mathbb{Z} \cup \{a\}, \\ \mathbb{Z} \cap \{3, -4, a\} &= \{3, -4\}, \\ \mathbb{Z} \setminus \{3, -4, a\} &= \mathbb{Z} \setminus \{3, -4\}, \\ \{3, -4, a\} \setminus \mathbb{N} &= \{-4, a\}, \\ \{3, -4, a\} \setminus \mathbb{N}_0 &= \{-4, a\}, \\ \{3, -4, a\} \setminus \mathbb{Z} &= \{a\}, \\ \mathbb{N} \dot{\cup} \{3, -4, a\} &= (\mathbb{N} \setminus \{3\}) \cup \{-4, a\}, \\ \mathbb{N}_0 \dot{\cup} \{3, -4, a\} &= (\mathbb{N}_0 \setminus \{3\}) \cup \{-4, a\}, \\ \mathbb{Z} \dot{\cup} \{3, -4, a\} &= (\mathbb{Z} \setminus \{3, -4\}) \cup \{a\}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.17. Risulta:

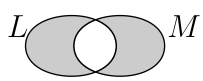
$$\begin{aligned}
6\mathbb{N} \cup 9\mathbb{Z} &= \{6x, 9y : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\},\\
6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{Z} &= 18\mathbb{N},\\
6\mathbb{N} \setminus 9\mathbb{Z} &= \{3x : x \in 2\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}\},\\
9\mathbb{Z} \setminus 6\mathbb{N} &= \{9x : x \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{N}\},\\
9\mathbb{Z} \mathbin{\dot\cup} 6\mathbb{N} &= \{9x : x \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{N}\} \cup \{3x : x \in 2\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}\},\\
9\mathbb{Z} \mathbin{\dot\cup} 6\mathbb{N}_0 &= \{9x : x \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{N}_0\} \cup \{3x : x \in 2\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4.18. Le rappresentazioni richieste sono le seguenti:

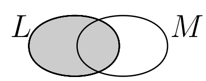
$L \setminus (L \setminus M)$



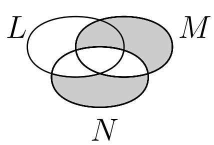
$L \mathbin{\dot\cup} M$



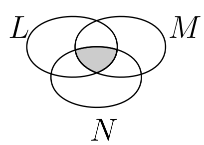
$L \setminus (M \setminus L)$



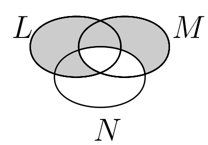
$(M \mathbin{\dot\cup} N) \setminus (L \cap N)$



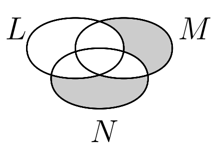
$(L \cap N) \setminus (N \setminus M)$



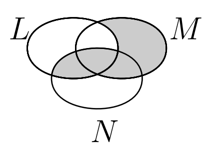
$(L \setminus M) \cup (M \setminus N)$



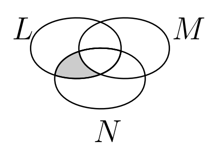
$(M \mathbin{\dot\cup} N) \setminus L$



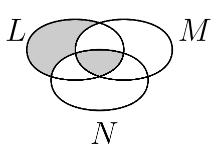
$(L \cap N) \cup (M \setminus L)$



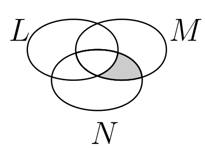
$(L \setminus M) \cap N$



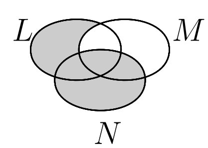
$L \setminus (M \mathbin{\dot\cup} N)$



$(L \cup N) \cap (M \setminus L)$



$(L \setminus M) \cup N$



Esercizio 1.4.19. Sono vere le affermazioni seguenti:

$$x \notin S \cap T \iff x \notin S \text{ o } x \notin T;$$

$$x \notin S \cup T \iff x \notin S \text{ e } x \notin T;$$
$$x \notin S \setminus T \iff x \notin S \text{ o } x \in T.$$

Le altre sono false.

Esercizio 1.4.20. Siano $A = \{1,2,6\}, B = \{3,4,6\}, C = \{3,5,6\}$. Si ha $B \setminus C = \{4\}$ e $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}, A \cup (B \setminus C) = \{1,2,6,4\}$.

Esercizio 1.4.21. Siano $A = \{1,2,6\}, B = \{3,4,6\}, C = \{3,5,6\}$. Si ha $B \setminus C = \{4\}$ e $A \cap B = \{6\}, A \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

Esercizio 1.4.22. Siano $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$. Si ha $A \setminus B = \{3\}$ e $A \setminus (B \cap C) = \{2,3\}$.

Esercizio 1.4.23. Sia $S \setminus (T \setminus V) = S$. Allora:

$$\begin{aligned} x \in S \cap T &\Longrightarrow (x \in S) \text{ e } (x \in T) \\ &\Longrightarrow (x \in S \setminus (T \setminus V)) \text{ e } (x \in T) \\ &\Longrightarrow ((x \in S) \text{ e } (x \notin T \text{ o } x \in V)) \text{ e } (x \in T) \\ &\Longrightarrow x \in V. \end{aligned}$$

Viceversa sia $S \cap T \subseteq V$. Allora ovviamente $S \setminus (T \setminus V) \subseteq S$; inoltre si ha :

$$\begin{aligned} x \in S &\Longrightarrow (x \in S \text{ e } x \in T) \text{ o } (x \in S \text{ e } x \notin T) \\ &\Longrightarrow (x \in S \cap T) \text{ o } (x \in S \text{ e } x \notin T) \\ &\Longrightarrow (x \in S \text{ e } x \in V) \text{ o } (x \in S \text{ e } x \notin T) \\ &\Longrightarrow (x \in S) \text{ e } (x \in V \text{ o } x \notin T) \\ &\Longrightarrow (x \in S) \text{ e } (x \notin T \setminus V) \\ &\Longrightarrow x \in S \setminus (T \setminus V), \end{aligned}$$

sicché $S \subseteq S \setminus (T \setminus V)$; pertanto $S = S \setminus (T \setminus V)$.

Per provare la seconda equivalenza si può, per esempio, utilizzare l'Esercizio 1.4.13. Si ha: $S \setminus T = S \setminus V \iff S \setminus (S \setminus T) = S \setminus (S \setminus V) \iff S \cap T = S \cap V$.

Esercizio 1.4.24. Si ha:

$$\begin{array}{rrrrr} -3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & 3 \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & -3 \notin 2\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & 3 \notin 2\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & 0 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \\ 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, & -5 \notin 2\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, & 0 \in 2\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, & -4 \in 2\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, & 4 \in 2\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}, \\ 0 \notin 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}, & -4 \notin 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}, & 4 \in 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}, & -5 \notin 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}, & 5 \notin 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}. \end{array}$$

Esercizio 1.4.25. Si ha:

$$V \cup (\emptyset \setminus V) = V, \qquad V \cap (\emptyset \setminus V) = \emptyset, \qquad V \cup (V \setminus V) = V,$$

$$\begin{array}{lll} V \cap (V \setminus V) = \emptyset, & V \setminus (\emptyset \cup V) = \emptyset, & V \setminus (\emptyset \cap V) = V, \\ V \cap (V \setminus \emptyset) = V, & V \setminus (V \setminus \emptyset) = \emptyset, & V \setminus (\emptyset \setminus V) = V, \\ V \cup (V \cap \emptyset) = V, & V \setminus (V \setminus V) = V, & V \cup (V \setminus \emptyset) = V. \end{array}$$

Esercizio 1.4.26. Si ha:

$$A \cup (B \setminus C) = A \cup \{i\} = \{a, 4, c, \frac{1}{3}, \sqrt{5}, i\},$$
$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{a, 4, c, \frac{1}{3}, \sqrt{5}, b, 7, i\} \setminus \{a, 4, c, \frac{1}{3}, \sqrt{5}, b, 7, \sqrt{15}\} = \{i\}.$$

Pertanto non sussiste l'uguaglianza $S \cup (T \setminus V) = (S \cup T) \setminus (S \cup V)$. Si ha però:

$$\begin{aligned} x \in (S \cup T) \setminus (S \cup V) &\Longrightarrow x \in S \cup T \text{ e } x \notin S \cup V \\ &\Longrightarrow (x \in S \text{ o } x \in T) \text{ e } (x \notin S \text{ e } x \notin V) \\ &\Longrightarrow x \in T \text{ e } x \notin V \\ &\Longrightarrow x \in T \setminus V \\ &\Longrightarrow x \in S \cup (T \setminus V), \end{aligned}$$

pertanto $(S \cup T) \setminus (S \cup V) \subseteq S \cup (T \setminus V)$.

Esercizio 1.4.27. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in (S \setminus T) \cap V &\iff x \in S \setminus T \text{ e } x \in V \\ &\iff (x \in S \text{ e } x \notin T) \text{ e } x \in V \\ &\iff x \in S \text{ e } x \notin T \text{ e } x \in V \\ &\iff x \in S \cap V \text{ e } x \notin T \\ &\iff x \in (S \cap V) \setminus T. \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.28. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in (S \cup T) \setminus (T \cap V) &\iff x \in (S \cup T) \text{ e } x \notin (T \cap V) \\ &\iff (x \in S \text{ o } x \in T) \text{ e } (x \notin T \text{ o } x \notin V) \\ &\iff (x \in S \text{ e } x \notin T) \text{ o } (x \in S \text{ e } x \notin V) \\ &\qquad\qquad \text{o } (x \in T \text{ e } x \notin V) \\ &\iff (x \in S \text{ e } x \notin T) \text{ o } (x \in S \text{ e } x \in T \text{ e } x \notin V) \\ &\qquad \text{o } (x \in S \text{ e } x \notin T \text{ e } x \notin V) \text{ o } (x \in T \text{ e } x \notin V) \\ &\iff (x \in S \text{ e } x \notin T) \text{ o } (x \in T \text{ e } x \notin V) \\ &\iff x \in (S \setminus T) \cup (T \setminus V). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.29. Si ha $(L \cup M) \setminus N = (L \setminus N) \cup (L \setminus N)$, per la proprietà distributiva a destra del complemento rispetto all'unione (vedi (1.4.17)), sicché $(L \cup M) \setminus N \subseteq L \cup (M \setminus N))$. L'inclusione può essere stretta, infatti se $L \cap N \neq \emptyset$ un elemento di $L \cap N$ appartiene a $L \cup (M \setminus N))$ e non appartiene a $(L \cup M) \setminus N$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} x \in L \cup (M \setminus N) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in L \text{ o } x \in M \setminus N \\ &\Longleftrightarrow \quad (x \in L) \text{ o } (x \in M \text{ e } x \notin N) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x \in L \text{ o } x \in M) \text{ e } (x \in L \text{ o } x \notin N) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x \in L \text{ o } x \in M) \text{ e } (x \notin N \text{ o } x \in L) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x \in L \cup M) \text{ e } (x \notin N \setminus L) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in (L \cup M) \setminus (N \setminus L). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.30. Con $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{b, c\}$ si ha $A \cap B = \{a\}$, $B \cap C = \{c\}$, $A \cap C = \{b\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Esercizio 1.4.31. Per le formule di De Morgan (vedi 1.4.13) si ha:

$$\begin{aligned} L \setminus (L \cap M \cap N) &= (L \setminus L) \cup (L \setminus (M \cap N)) \\ &= \emptyset \cup (L \setminus (M \cap N)) \\ &= L \setminus (M \cap N). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.32. Si assuma $L \setminus (N \setminus (L \cap M)) = L$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in L \cap N &\Longrightarrow x \in L \text{ e } x \in N \\ &\Longrightarrow x \in L \setminus (N \setminus (L \cap M)) \text{ e } x \in N \\ &\Longrightarrow x \in L \text{ e } (x \notin N \text{ o } x \in L \cap M) \text{ e } x \in N \\ &\Longrightarrow x \in M. \end{aligned}$$

Pertanto $L \cap N \subseteq M$.

Viceversa si assuma $L \cap N \subseteq M$. Ovviamente $L \setminus (N \setminus (L \cap M)) \subseteq L$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} x \in L &\Longrightarrow (x \in L \text{ e } x \notin N) \text{ o } (x \in L \text{ e } x \in N) \\ &\Longrightarrow (x \in L \text{ e } x \notin N) \text{ o } (x \in L \cap N) \\ &\Longrightarrow (x \in L \text{ e } x \notin N) \text{ o } (x \in L \text{ e } x \in M) \\ &\Longrightarrow (x \in L \text{ e } x \notin N) \text{ o } (x \in L \cap M) \\ &\Longrightarrow (x \in L) \text{ e } ((x \notin N) \text{ o } (x \in L \cap M)) \\ &\Longrightarrow (x \in L) \text{ e } (x \notin N \setminus (L \cap M)) \\ &\Longrightarrow x \in L \setminus (N \setminus (L \cap M)). \end{aligned}$$

Pertanto $L \setminus (N \setminus (L \cap M)) = L$.

Esercizio 1.4.33. Si assuma $(L \setminus M) \cup (L \cap N) = L$. Esista per assurdo un elemento $x \in (L \cap M) \setminus N$. Allora $x \in L \cap M$ e $x \notin N$, da $x \in L$ segue per l'ipotesi $x \in L \setminus M$ o $x \in L \cap N$, ma $x \in M$, pertanto $x \notin L \setminus M$ e $x \notin N$, pertanto $x \notin L \cap N$, un assurdo. Viceversa sia $(L \cap M) \setminus N = \emptyset$. Ovviamente $(L \setminus M) \cup (L \cap N) \subseteq L$; sia $x \in L$, allora si ha ($x \in L$ e $x \notin M$) o ($x \in L$ e $x \in M$), nel secondo caso non puo' essere $x \in (L \cap M) \setminus N$ perché questo insieme è vuoto, dunque $x \in L \cap N$, dunque vale anche $L \subseteq (L \setminus M) \cup (L \cap N)$, sicché $L = (L \setminus M) \cup (L \cap N)$.

Esercizio 1.4.34. Ovviamente $(S \setminus T) \cup (S \cap T) \subseteq S$; se $x \in S$ si ha poi ($x \in S$ e $x \notin T$) oppure ($x \in S$ e $x \in T$), sicché $x \in (S \setminus T) \cup (S \cap T)$, e $S \subseteq (S \setminus T) \cup (S \cap T)$. Pertanto $S = (S \setminus T) \cup (S \cap T)$. Esista per assurdo $x \in (S \setminus T) \cap (S \cap T)$, allora $x \notin T$ e $x \in T$, assurdo.

Esercizio 1.4.35. Si ha $S = (S \setminus T) \cup (S \cap T)$ e $S = (T \setminus S) \cup (T \cap S)$, per l'esercizio precedente, pertanto $S \cup T = (S \setminus T) \cup (S \cap T) \cup (T \setminus S) \cup (T \cap S) = (S \setminus T) \cup (S \cap T) \cup (S \cap T) \cup (T \setminus S) = (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \cup (S \cap T)$, per la proprietà commutativa dell'intersezione e per le proprietà commutativa e associativa dell'unione. Gli insiemi $S \setminus T$, $T \setminus S$ sono ovviamente disgiunti, gli insiemi $S \setminus T$ e $S \cap T$ sono disgiunti per il precedente esercizio e così gli insiemi $T \setminus S$ e $S \cap T$.

Esercizio 1.4.36. Si ha:

$$\begin{aligned} S \dot\cup T &= (S \cup T) \setminus (S \cap T) \\ &= ((S \cup T) \setminus S) \cup ((S \cup T) \setminus T) \\ &= (S \setminus S) \cup (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \cup (T \setminus T) \\ &= \emptyset \cup (S \setminus T) \cup (T \setminus S) \cup \emptyset \\ &= (S \setminus T) \cup (T \setminus S). \end{aligned}$$

Esercizio 1.4.37. Se S è un qualunque insieme non vuoto risulta sempre $S \subseteq S \cup (T \dot\cup V)$, ma ovviamente $S \not\subseteq (S \cup T \cup V) \setminus (S \cup T \cap V) = ((S \cup T \cup V) \setminus ((S \cup T) \cap (S \cup V))) = (S \cup T) \dot\cup (S \cup V)$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in (S \cup T) \dot\cup (S \cup V) &\Longrightarrow (x \in (S \cup T) \cup (S \cup V)) \text{ e} \\ &\qquad (x \notin (S \cup T) \cap (S \cup V)) \\ &\Longrightarrow (x \in S \text{ o } x \in T \text{ o } x \in V) \text{ e } (x \notin S \cup (T \cap V)) \\ &\Longrightarrow (x \in S \text{ o } x \in T \text{o } x \in V) \text{ e} \\ &\qquad ((x \notin S) \text{ e } (x \notin T \cap V)) \\ &\Longrightarrow (x \in T \text{ o } x \in V) \text{ e } (x \notin T \cap V) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x \in T \dot{\cup} V.$$

Esercizio 1.4.38. Si ha:

$$\begin{aligned}
x \in (\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X) \setminus S &\iff x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \text{ e } x \notin S \\
&\iff \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in Y \text{ e } x \notin S \\
&\iff \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in Y \setminus S \\
&\iff x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (X \cup S).
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned}
x \in (\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X) \setminus S &\iff x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X \text{ e } x \notin S \\
&\iff x \in X, \forall\, X \in \mathcal{F} \text{ e } x \notin S \\
&\iff x \in X \setminus S, \forall\, X \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} (X \cup S).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.4.39. Si ha:

$$\begin{aligned}
x \in S \setminus (\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X) &\iff x \in S \text{ e } x \notin \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \\
&\iff x \in S \text{ e } x \notin X, \forall\, X \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in S \setminus X, \forall\, X \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} (S \setminus X).
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned}
x \in S \setminus (\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X) &\iff x \in S \text{ e } x \notin \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X \\
&\iff x \in S \text{ e } \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \notin Y \\
&\iff \exists\, Y \in \mathcal{F} : x \in S \setminus Y \\
&\iff x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (S \cup X).
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5.1. Se $S = \emptyset$, si ha $S \times T = \emptyset \times T = \emptyset \subseteq V \times W$ qualunque siano T, V, W e dunque anche se $T \not\subseteq W$.

Se $T = \emptyset$, si ha $S \times T = S \times \emptyset = \emptyset \subseteq V \times W$ qualunque siano S, V, W e dunque anche se $S \not\subseteq V$.

Esercizio 1.5.2. Se $S = T$, ovviamente $S \times T = T \times S$, se $S = \emptyset$ o $T = \emptyset$, $S \times T = \emptyset = T \times S$.

Sia ora $S \times T = T \times S$ e si supponga $S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$, da $S \times T \subseteq T \times S$ segue allora, per la (1.5.4), $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$, sicché $S = T$.

Esercizio 1.5.3. Si ha :

$$\begin{aligned}
V \times W &= \{(9,m),(9,\Diamond),(9,9),(9,\alpha),(\infty,m),(\infty,\Diamond),(\infty,9),(\infty,\alpha)\},\\
V \times V &= \{(9,9),(9,\infty),(\infty,9),(\infty,\infty)\},\\
W \times V &= \{(m,9),(m,\infty),(\Diamond,9),(\Diamond,\infty),(9,9),(9,\infty),(\alpha,9),(\alpha,\infty)\},\\
W \times W &= \{(m,m),(m,\Diamond),(m,9),(m,\alpha),(\Diamond,m),(\Diamond,\Diamond),(\Diamond,9),(\Diamond,\alpha),\\
&\qquad (9,m),(9,\Diamond),(9,9),(9,\alpha),(\alpha,m),(\alpha,\Diamond),(\alpha,9),(\alpha,\alpha)\},\\
\triangle_V &= \{(9,9),(\infty,\infty)\},\\
\triangle_W &= \{(m,m),(\Diamond,\Diamond),(9,9),(\alpha,\alpha)\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.5.4. Si ha :

$$\begin{array}{llll}
(-1,3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}; & (-1,3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}; & (-1,3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; & (-1,3) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N};\\
(1,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0; & (1,0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}; & (1,0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0; & (1,0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N};\\
(0,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; & (0,0) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0; & (0,0) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}; & (0,0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z};\\
(4,-5) \in 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; & (4,-5) \notin 2\mathbb{Z} \times \mathbb{N}; & (4,-5) \notin \mathbb{N} \times 2\mathbb{Z}; & (4,-5) \in 2\mathbb{N} \times \mathbb{Z}.
\end{array}$$

Esercizio 1.5.5. Si ha :

$$\begin{array}{rr}
(\mathbb{N}_0,\emptyset) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (\emptyset,\mathbb{N}_0) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z});\\
(\emptyset,\mathbb{Z}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (\mathbb{N},\mathbb{N}_0) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z});\\
(\mathbb{N},\mathbb{N}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (2,7) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z});\\
(\{\emptyset\},\{\emptyset\}) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (1,-5) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}).
\end{array}$$

Esercizio 1.5.6. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 1.6.1. Per $n = 2$ si ha $4 = 2(2+1)-2$. Con $h \geq 2$, supposto per ipotesi induttiva $4+6+8+\cdots+2h = h(h+1)-2$, si ha $4+6+8+\cdots+2(h+1) =$

$4+6+8+\cdots+2h+2(h+1) = h(h+1)-2+2(h+1) = h^2+h-2+2h+2 = h^2+3h+2-2 = (h+1)(h+2)-2$.

Esercizio 1.6.2. Per $n = 6$ si ha $12 = 6(6+1) - 30$. Con $h > 6$, supposto per ipotesi induttiva $12+14+\cdots+2(h-1) = (h-1)h-30$, si ha $12+14+\cdots+2h = 12+14+\cdots+2(h-1)+2h = (h-1)h-30+2h = h(h-1+2)-30 = h(h+1)-30$.

Esercizio 1.6.3. Per $n = 3$ si ha $3\cdot 2^3 = 3\cdot 8 = 24 = 8\cdot 3 = 8(2(3-1)-1)$. Con $h \geq 3$, supposto per ipotesi induttiva $3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+h\cdot 2^h = 8(2^{h-2}(h-1)-1)$ si ha $3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+(h+1)\cdot 2^{h+1} = 3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+h\cdot 2^h+(h+1)\cdot 2^{h+1} = 8(2^{h-2}(h-1)-1)+(h+1)\cdot 2^{h+1} = 2^{h-2}(8(h-1)+(h+1)2^3)-8 = 2^{h-2}(8(h-1)+8(h+1))-8 = 2^{h-2}(2\cdot 8h)-8 = 8(2^{h-1}h-1) = 8(2^{h+1-2}(h+1-1)-1)$.

Esercizio 1.6.4. Per $n = 5$ si ha $2^5 = 32 = 64-32 = 2^6-32 = 2^{5+1}-32$. Con $h > 5$, supposto per ipotesi induttiva $2^5+2^6+\cdots+2^{h-1} = 2^h-32$, si ha $2^5+2^6+\cdots+2^h = 2^5+2^6+\cdots+2^{h-1}+2^h = 2^h-32+2^h = 2\cdot 2^h-32 = 2^{h+1}-32$.

Esercizio 1.6.5. Per $n = 0$ si ha $6^0 = 1 = \frac{5}{5} = \frac{6^{(0+1)}-1}{5}$. Con $h > 0$, supposto per ipotesi induttiva $6^0+6^1+6^2+\cdots+6^{h-1} = \frac{6^h-1}{5}$, si ha $6^0+6^1+6^2+\cdots+6^h = 6^0+6^1+6^2+\cdots+6^{h-1}+6^h = \frac{6^h-1}{5}+6^h = \frac{6^h-1+5\cdot 6^h}{5} = \frac{6^h(1+5)-1}{5} = \frac{6^{h+1}-1}{5}$.

Esercizio 1.6.6. Per $n = 4$ si ha $4^3 = 64 = 100-36 = \frac{16\cdot 25}{4}-36 = \frac{4^2(4+1)^2}{4}-36$. Con $h > 4$, supposto per ipotesi induttiva $4^3+5^3+6^3+\cdots+(h-1)^3 = \frac{(h-1)^2h^2}{4}-36$, si ha $4^3+5^3+6^3+\cdots+h^3 = 4^3+5^3+6^3+\cdots+(h-1)^3+h^3 = \frac{(h-1)^2h^2}{4}-36+h^3 = \frac{(h-1)^2h^2+4h^3}{4}-36 = \frac{h^4-2h^3+h^2+4h^3}{4}-36 = \frac{h^4+2h^3+h^2}{4}-36 = \frac{h^2(h+1)^2}{4}-36$.

Esercizio 1.6.7. Per $n = 1$ si ha $1 = 3\cdot 1^2-2\cdot 1$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $1+7+13+\cdots+(6h-5) = 3h^2-2h$, si ha $1+7+13+\cdots+(6(h+1)-5) = 1+7+13+\cdots+(6h-5)+(6(h+1)-5) = 3h^2-2h+(6(h+1)-5) = 3h^2-2h+6h+6-5 = 3h^2+4h+1 = 3h^2+6h+3-2h-2 = 3(h^2+2h+1)-2(h+1)$.

Esercizio 1.6.8. Per $n = 1$ si ha $\frac{1}{5} = \frac{4}{4\cdot 5} = \frac{5^1-1}{4\cdot 5^1}$. Con $h \geq 1$ supposto per ipotesi induttiva $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^h} = \frac{5^h-1}{4\cdot 5^h}$, si ha $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^{h+1}} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^h}+\frac{1}{5^{h+1}} = \frac{5^h-1}{4\cdot 5^h}+\frac{1}{5^{h+1}} = \frac{5\cdot(5^h-1)+4}{4\cdot 5^{h+1}} = \frac{5^{h+1}-5+4}{4\cdot 5^{h+1}} = \frac{5^{h+1}-1}{4\cdot 5^{h+1}}$.

Esercizio 1.6.9. Per $n = 0$ si ha $44^0-1 = 1-1 = 0$ e $43|0$. Con $h \geq 0$, supposto per ipotesi induttiva $43|44^h - 1$, si ha $44^h - 1 = 43t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, e $44^{h+1} - 1 = 44^h \cdot 44 - 1 = 44^h \cdot (43+1) - 1 = 44^h \cdot 43 + 44^h - 1 = 44^h \cdot 43 + 43t = 43(44^h + t)$ da cui $43|44^{h+1}$.

Esercizio 1.6.10. Per $n = 1$ si ha $8^2 - 1 = 63$ e ovviamente $63|63$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $63|8^{2h} - 1$, si ha $8^{2h} - 1 = 63t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, e $8^{2(h+1)} - 1 = 8^{2h} \cdot 8^2 - 1 = 8^{2h} \cdot (63+1) - 1 = 8^{2h} \cdot 63 + 8^{2h} - 1 = 8^{2h} \cdot 63 + 63t = 63(8^{2h} + t)$ da cui $63|8^{2(h+1)}$.

Esercizio 1.6.11. Per $n = 2$ si ha $10 = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{5(2^2+2-2)}{2}$. Con $h > 2$, supposto per ipotesi induttiva $10 + 15 + \cdots + 5(h-1) = \frac{5((h-1)^2+(h-1)-2)}{2}$, si ha $10 + 15 + \cdots + 5h = 10 + 15 + \cdots + 5(h-1) + 5h = \frac{5((h-1)^2+(h-1)-2)}{2} + 5h = \frac{5(h^2-2h+1+h-3)+2\cdot 5h}{2} = \frac{5h^2-10h+5+5h-15+10h}{2} = \frac{5h^2+5h-10}{2} = \frac{5(h^2+h-2)}{2}$.

Esercizio 1.6.12. Per $n = 1$ si ha $10 = \frac{9+11}{2} = \frac{9 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1}{2}$. Con $h > 1$, supposto per ipotesi induttiva $10 + 19 + 28 + \cdots + (9(h-1)+1) = \frac{9(h-1)^2+11(h-1)}{2}$, si ha $10 + 19 + 28 + \cdots + (9h+1) = 10 + 19 + 28 + \cdots + (9(h-1) + 1) + (9h+1) = \frac{9(h-1)^2+11(h-1)}{2} + (9h+1) = \frac{9(h^2-2h+1)+11(h-1)+18h+2}{2} = \frac{9h^2-18h+9+11h-11+18h+2}{2} = \frac{9h^2+11h}{2}$.

Esercizio 1.6.13. Per $n = 1$ si ha $6^2 - 1 = 35$ e ovviamente $35|35$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $35|6^{2h} - 1$, si ha $6^{2h} - 1 = 35t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, e $6^{2(h+1)} - 1 = 6^{2h} \cdot 6^2 - 1 = 6^{2h} \cdot (35+1) - 1 = 6^{2h} \cdot 35 + 6^{2h} - 1 = 6^{2h} \cdot 35 + 35t = 35(6^{2h} + t)$ da cui $35|6^{2(h+1)}$.

Esercizio 1.6.14. Per $n = 1$ si ha $3^3 - 1 = 26$ e ovviamente $26|26$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $26|3^{3h} - 1$, si ha $3^{3h} - 1 = 26t$ per un opportuno $t \in \mathbb{Z}$, e $3^{3(h+1)} - 1 = 3^{3h} \cdot 3^3 - 1 = 3^{3h} \cdot (26+1) - 1 = 3^{3h} \cdot 26 + 3^{3h} - 1 = 3^{3h} \cdot 26 + 26t = 26(3^{3h} + t)$ da cui $26|3^{3(h+1)}$.

Esercizio 1.6.15. Per $n = 4$ si ha $4^2 = 16 = \frac{180}{6} - 14 = \frac{4(4+1)(2\cdot 4+1)}{6} - 14$. Con $h > 4$, supposto per ipotesi induttiva $4^2 + 5^2 + \cdots + (h-1)^2 = \frac{(h-1)h(2(h-1)+1)}{6} - 14$, si ha $4^2 + 5^2 + \cdots + h^2 = 4^2 + 5^2 + \cdots + (h-1)^2 + h^2 = \frac{(h-1)h(2(h-1)+1)}{6} - 14 + h^2 = \frac{(h^2-h)(2h-1)+6h^2}{6} - 14 = \frac{2h^3-2h^2-h^2+h+6h^2}{6} - 14 = \frac{2h^3+3h^2+h}{6} - 14 = \frac{(h^2+h)(2h+1)}{6} - 14 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} - 14$.

Esercizio 1.6.16. Per $n = 4$ si ha $4 \cdot 2^4 = 4 \cdot 16 = 16 \cdot 4 = 16(6-2) =$

$16(2^{4-3}(4-1)-2)$. Con $h \geq 4$, supposto per ipotesi induttiva $4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \cdots + h \cdot 2^h = 16(2^{h-3}(h-1)-2)$, si ha $4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \cdots + (h+1) \cdot 2^{h+1} = 4 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 + \cdots + h \cdot 2^h + (h+1)2^{h+1} = 16(2^{h-3}(h-1)-2) + (h+1)2^{h+1} = 16(2^{h-3}(h-1) - 2 + (h+1)2^{h-3}) = 16(2^{h-3}2h-2) = 16(2^{h-2}h-2) = 16(2^{(h+1)-3}((h+1)-1)-2)$.

Esercizio 1.6.17. Per $n = 1$ si ha $1 = \frac{9}{9} = \frac{10^1-1}{9 \cdot 10^{1-1}}$. Con $h \geq 1$, supposto per ipotesi induttiva $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{h-1}} = \frac{10^h-1}{9 \cdot 10^{h-1}}$, si ha $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{(h+1)-1}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^{h-1}} + \frac{1}{10^{(h+1)-1}} = \frac{10^h-1}{9 \cdot 10^{h-1}} + \frac{1}{10^h} = \frac{10(10^h-1)+9}{9 \cdot 10^h} = \frac{10^{h+1}-10+9}{9 \cdot 10^h} = \frac{10^{h+1}-1}{9 \cdot 10^h} = \frac{10^{h+1}-1}{9 \cdot 10^{(h+1)-1}}$.

Esercizio 1.6.18. Si ha:

$$\begin{array}{cccc}
V \cup V = V, & V \cup \emptyset = V, & \emptyset \cup V = V, & \emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \\
V \cap V = V, & V \cap \emptyset = \emptyset, & \emptyset \cap V = \emptyset, & \emptyset \cap \emptyset = \emptyset, \\
V \setminus V = \emptyset, & V \setminus \emptyset = V, & \emptyset \setminus V = \emptyset, & \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset, \\
V \dot\cup V = \emptyset, & V \dot\cup \emptyset = V, & \emptyset \dot\cup V = V, & \emptyset \dot\cup \emptyset = \emptyset.
\end{array}$$

Esercizio 1.6.19. Si ha:

$$\begin{array}{cccc}
-4 \in \mathbb{N} \cup 4\mathbb{Z}, & 8 \in \mathbb{N} \cup 4\mathbb{Z}, & -15 \notin \mathbb{N} \cup 4\mathbb{Z}, & 15 \in \mathbb{N} \cup 4\mathbb{Z}, \\
-4 \notin \mathbb{N} \cap 4\mathbb{Z}, & 8 \in \mathbb{N} \cap 4\mathbb{Z}, & -15 \notin \mathbb{N} \cap 4\mathbb{Z}, & 15 \notin \mathbb{N} \cap 4\mathbb{Z}, \\
-4 \notin \mathbb{N} \setminus 4\mathbb{Z}, & 8 \notin \mathbb{N} \setminus 4\mathbb{Z}, & -15 \notin \mathbb{N} \setminus 4\mathbb{Z}, & 15 \in \mathbb{N} \setminus 4\mathbb{Z}, \\
-4 \in \mathbb{N} \dot\cup 4\mathbb{Z}, & 8 \notin \mathbb{N} \dot\cup 4\mathbb{Z}, & -15 \notin \mathbb{N} \dot\cup 4\mathbb{Z}, & 15 \in \mathbb{N} \dot\cup 4\mathbb{Z}.
\end{array}$$

Esercizio 1.6.20. Si ha:

$$\begin{aligned}
(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, -3, 3\}, \\
(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A &= \{-6, 0, 6\}, \\
(2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}) \cap A &= \{-4, -2, 2, 4\}, \\
(2\mathbb{Z} \dot\cup 3\mathbb{Z}) \cap A &= \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.6.21. Si ha:

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P}(S \cap T) &\iff X \subseteq S \cap T \\
&\iff (X \subseteq S) \text{ e } (X \subseteq T) \\
&\iff X \in \mathcal{P}(S) \text{ e } X \in \mathcal{P}(T) \\
&\iff X \in \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T).
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(S) \cup \mathcal{P}(T) &\Longrightarrow (X \in \mathcal{P}(S)) \text{ o } (X \in \mathcal{P}(T)) \\ &\Longrightarrow (X \subseteq S) \text{ o } (X \subseteq T) \\ &\Longrightarrow X \subseteq S \cup T \\ &\Longrightarrow (X \in \mathcal{P}(S \cup T)). \end{aligned}$$

Se $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}$ si ha $\{b, c\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ma $\{b, c\} \notin \mathcal{P}(A)$ e $\{b, c\} \notin \mathcal{P}(B)$, pertanto $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Esercizio 1.6.22. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in (L \setminus N) \cup (M \setminus (L \cup N)) &\iff x \in L \setminus N \text{ o } x \in (M \setminus (L \cup N)) \\ &\iff (x \in L \text{ e } x \notin N) \text{ o } (x \in M \text{ e } x \notin L \cup N) \\ &\iff (x \in L \text{ e } x \notin N) \\ &\qquad \text{o } (x \in M \text{ e } x \notin L \text{ e } x \notin N) \\ &\iff (x \in L \text{ o } x \in M) \text{ e } (x \notin N) \\ &\iff x \in (L \cup M) \setminus N. \end{aligned}$$

Esercizio 1.6.23. Risulta $L \setminus (M \cup N) = (L \setminus M) \cap (L \setminus N)$ per le formule di De Morgan, da cui per la 1.4.4, l'Esercizio 1.4.10 e l'Esercizio 1.4.13 si ha:

$$\begin{aligned} L \setminus (M \cup N) = L \setminus M &\iff L \setminus M \subseteq L \setminus N \\ &\iff L \setminus (L \setminus N) \subseteq L \setminus (L \setminus M) \\ &\iff L \cap N \subseteq L \cap M \\ &\iff L \cap N \subseteq M. \end{aligned}$$

Esercizio 1.6.24. Per l'Esercizio 1.4.34 si ha $T = (T \setminus S) \cup (T \cap S)$, pertanto, per le proprietà commutativa e associativa dell'unione, per la proprietà commutativa dell'intersezione, per la (1.4.6) e per la 1.4.4: $S \cup T = S \cup ((T \setminus S) \cup (T \cap S)) = (S \cup (T \cap S)) \cup (T \setminus S) = (S \cup (S \cap T)) \cup T \setminus S = S \cup (T \setminus S)$. Ovviamente si ha poi $S \cap (T \setminus S) = \emptyset$.

Esercizio 1.6.25. Per l'esercizio precedente e per la 1.4.1 si ha: $S \subseteq T \iff S \cup T = T \iff T = S \cup (T \setminus S)$.

Esercizio 1.6.26. Per la proprietà distributiva a destra del complemento rispetto all'unione si ha: $(S \cup T) \setminus (S \cup V) = (S \setminus (S \cup V)) \cup (T \setminus (S \cup V)) = \emptyset \cup (T \setminus (S \cup V)) = T \setminus (S \cup V)$.

Esercizio 1.6.27. Per la (1.4.19) si ha $S \dot\cup T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$, pertanto

$$(S \dot\cup T) \setminus V = ((S \setminus T) \cup (T \setminus S)) \setminus V$$

$$\begin{aligned} &= ((S \setminus T) \setminus V) \cup ((T \setminus S) \setminus V) \\ &= (S \setminus (T \cup V)) \cup (T \setminus (S \cup V)), \end{aligned}$$

per l'Esercizio 1.4.14. Si ha poi

$$V \setminus (S \dot{\cup} T) = V \setminus ((S \cup T) \setminus (S \cap T)) = (V \setminus (S \cup T)) \cup (S \cap T \cap V),$$

ancora per l'Esercizio 1.4.14. Risulta allora

$$\begin{aligned} &(S \dot{\cup} T) \dot{\cup} V = (S \dot{\cup} T) \setminus V) \cup (V \setminus (S \dot{\cup} T)) \\ &\quad = (S \setminus (T \cup V)) \cup (T \setminus (S \cup V)) \cup (V \setminus (S \cup T)) \cup (S \cap T \cap V). \end{aligned}$$

Si ha poi, per la proprietà commutativa dell'unione, dell'intersezione e dell'unione disgiunta:

$$\begin{aligned} S \dot{\cup} (T \dot{\cup} V) &= (T \dot{\cup} V) \dot{\cup} S \\ &= (T \setminus (V \cup S)) \cup (V \setminus (T \cup S)) \cup (S \setminus (T \cup V)) \cup (T \cap V \cap S) \\ &= (S \setminus (T \cup V)) \cup (T \setminus (S \cup V) \cup (V \setminus (S \cup T) \cup (S \cap T \cap V) \\ &= (S \dot{\cup} T) \dot{\cup} V. \end{aligned}$$

Esercizio 1.6.28. Si ha:

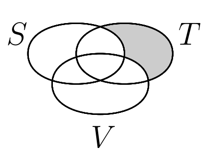
$$\begin{array}{ll} (\varnothing, 3) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0; & (\{-4\}, 3) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0; \\ (\{\varnothing\}, 3) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0; & (\mathbb{N}_0, 6) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0; \\ (\varnothing, 4) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); & (\{-4\}, 3) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); \\ (\mathbb{Z}, \varnothing) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); \\ (\{1, -1\}, 3\mathbb{N}) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); & (3\mathbb{N}, \{1, -1\}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}); \\ (3\mathbb{Z}, -3) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0; & (\mathbb{N}, 3) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Esercizio 1.6.29. Si ha:

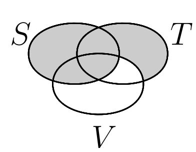
$$\begin{array}{ll} (5\mathbb{Z}, \{\mathbb{N}\}) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); & (\{-9\}, 2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); \\ (\varnothing, 8) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); & (\{\varnothing\}, 2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); \\ (\mathbb{N}_0, 6) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); & (\mathbb{N}, 2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); \\ (\{-4\}, 2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0); & (2\mathbb{Z}, -2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_0). \end{array}$$

Esercizio 1.6.30. Le rappresentazioni richieste sono le seguenti:

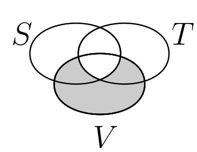
$T \setminus (S \cup V)$



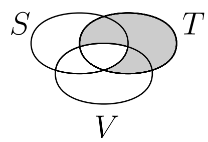
$S \cup (T \setminus V)$



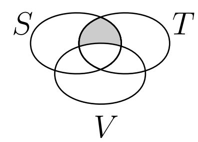
$V \setminus (S \cap T)$



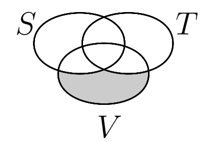
$T \setminus (S \cap V)$



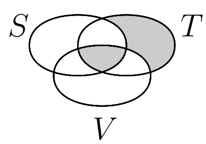
$S \cap (T \setminus V)$



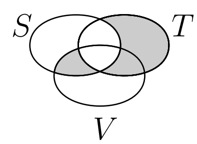
$V \setminus (S \cup T)$



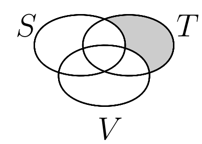
$T \setminus (S \,\dot\cup\, V)$



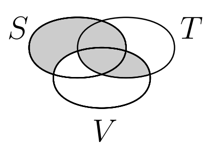
$(S \,\dot\cup\, T) \setminus (S \,\dot\cup\, V)$



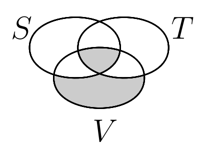
$(S \cup T) \setminus (S \cup V)$



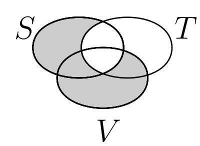
$(S \setminus V) \cup (T \cap V)$



$V \setminus (S \,\dot\cup\, T)$



$(S \setminus T) \cup (V \setminus S)$



Esercizio 1.6.31. Sono vere le affermazioni:

$$\begin{aligned} S \cup T = T &\iff S \subseteq T, \\ S \setminus T = S &\iff S \cap T = \emptyset. \end{aligned}$$

Le altre sono false.

2

Relazioni tra insiemi

Esercizio 2.1.1. Esistono elementi di $\mathbb{N}_0$ che non hanno corrispondenti nella $\mathcal{R}_1$, per esempio $3 \not\mathcal{R}_1\ y$, per ogni $y \in \mathbb{Z}$. Esistono elementi di $\mathbb{N}_0$ con più di un corrispondente nella $\mathcal{R}_1$, per esempio $4\,\mathcal{R}_1\,2$ e $4\,\mathcal{R}_1 -2$.

Ogni elemento di $\mathbb{Z}$ ha uno e un solo corrispondente nella $\mathcal{R}_2$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ si ha infatti $x^2 \in \mathbb{N}_0$ e $x\,\mathcal{R}_2\,x^2$, con x^2 univocamente determinato.

Esercizio 2.1.2. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 2.1.3. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 2.1.4. Siano $S = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$. $\mathcal{R}$ non è simmetrica poiché $a\,\mathcal{R}\,c$ e $c \not\mathcal{R}\ a$, e non è asimmetrica poiché $a\,\mathcal{R}\,b$ e $b\,\mathcal{R}\,a$ con $a \neq b$.

Esercizio 2.1.5. Siano $S = \{a, b\}$, $\mathcal{R}_1 = \{(a, b)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(a, b), (b, b)\}$. $\mathcal{R}_1$ è antiriflessiva poiché $a \not\mathcal{R}_1\ a$ e $b \not\mathcal{R}_1\ b$; $\mathcal{R}_2$ non è riflessiva poiché $a \not\mathcal{R}_2\ a$ e non è antiriflessiva poiché $b\,\mathcal{R}_2\,b$.

Esercizio 2.1.6. Si ha $x\,\mathcal{R}_t\,y$ per ogni $x, y \in S$, pertanto ovviamente $\mathcal{R}_t$ è riflessiva, simmetrica e transitiva. Se $\mathcal{R}_t$ è asimmetrica, con $x, y \in S$, da $x\,\mathcal{R}_t\,y, y\,\mathcal{R}_t\,x$ segue $x = y$, pertanto S è un singleton. Il viceversa è ovvio.

Esercizio 2.1.7. Se S non è vuoto, la relazione vuota è antiriflessiva, simmetrica e transitiva. Se $S = \emptyset$ la relazione vuota è riflessiva, antiriflessiva, simmetrica e transitiva.

Esercizio 2.1.8. La relazione id_S è riflessiva, simmetrica e transitiva, ed è asimmetrica se e solo se S è vuoto o è un singleton. Inoltre è antiriflessiva se e solo se S è vuoto.

Esercizio 2.1.9. Segue subito dalla definizione.

Esercizio 2.1.10. Si ha:

$$\begin{array}{llllll} 2 \not\mathcal{R}\, 10, & 0 \not\mathcal{R}\, 0, & 3 \not\mathcal{R}\, 3, & 10\,\mathcal{R}\,13, & 1\,\mathcal{R}\,1, & 10 \not\mathcal{R}\, 17, \\ 4\,\mathcal{R}\,5, & 6 \not\mathcal{R}\, 9, & 7\,\mathcal{R}\,9, & 13\,\mathcal{R}\,17, & 5 \not\mathcal{R}\, 4, & 2 \not\mathcal{R}\, 2. \end{array}$$

$\mathcal{R}$ non è dunque riflessiva poiché per esempio $2 \not\mathcal{R}\, 2$ (né antiriflessiva poiché per esempio $1\,\mathcal{R}\,1$). Non è simmetrica, infatti per esempio $4\,\mathcal{R}\,5$ e $5 \not\mathcal{R}\, 4$; non è transitiva, poiché per esempio $10\,\mathcal{R}\,13, 13\,\mathcal{R}\,17$ e $10 \not\mathcal{R}\, 17$. Da $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,x$ segue $3+4x = 4+3y$ e $3+4y = 4+3x$, da cui, sottraendo membro a membro si ricava $4(x-y) = 3(y-x)$, cioé $7(x-y) = 0$, da cui $x-y = 0$, dunque $x = y$ e poi $x = y = 1$. Pertanto $\mathcal{R}$ è asimmetrica.

Esercizio 2.1.11. Si ha:

$$\begin{array}{llllll} 1 \not\mathcal{R}\, 4, & -1\,\mathcal{R}\,3, & 4 \not\mathcal{R}\, 3, & -4\,\mathcal{R}\,-1, & 1\,\mathcal{R}\,1, & -6\,\mathcal{R}\,5, \\ -1 \not\mathcal{R}\, -1, & 4\,\mathcal{R}\,1, & 9\,\mathcal{R}\,-1, & -2 \not\mathcal{R}\, 4, & 11\,\mathcal{R}\,5, & 0 \not\mathcal{R}\, -2. \end{array}$$

Pertanto $\mathcal{R}$ non è riflessiva (né antiriflessiva), non è simmetrica infatti per esempio $4\,\mathcal{R}\,1$ e $1 \not\mathcal{R}\, 4$, non è transitiva poiché per esempio $9\,\mathcal{R}\,-1, -1\,\mathcal{R}\,3$ ma $9 \not\mathcal{R}\, 3$, e non è un'applicazione perché per esempio 2 non ha corrispondenti. Infine la relazione è asimmetrica, poiché da $x\,\mathcal{R}\,y$, $y\,\mathcal{R}\,x$ segue $x = y = 1$. Infatti sia $x\,\mathcal{R}\,y$, allora ($2x-5 = 5y-8$ da cui $2x = 5y-3$ e $x = \frac{5y-3}{2}$) oppure ($2x-5 = 8-5y$, da cui $2x = 13-5y$ e $x = \frac{13-5y}{2}$). Nel primo caso risulta $5x-8 = \frac{25y-31}{2}$ e da $y\,\mathcal{R}\,x$ segue ($\frac{25y-31}{2} = 2y-5$ e $21y = 21$, sicché $y = 1$ e ancora $x = 1 = y$), oppure ($\frac{25y-31}{2} = 5-2y$ che conduce all'assurdo $29y = 41$). Nel secondo caso si ha $5x-8 = \frac{49-25y}{2}$ e da $y\,\mathcal{R}\,x$ segue ($2y-5 = \frac{49-25y}{2}$ e $y = \frac{59}{29}$ assurdo), oppure ($5-2y = \frac{49-25y}{2}$ e $y = \frac{13}{7}$ ancora assurdo).

Esercizio 2.1.12. Si ha $x\,\mathcal{R}\,y \iff (x = y)$ o $(x+y = 16)$. Si ha allora:

$$\begin{array}{llll} -3\,\mathcal{R}\,-3, & -3\,\mathcal{R}\,19, & 0 \not\mathcal{R}\, -8, & 0 \not\mathcal{R}\, 8, \\ 2\,\mathcal{R}\,14, & -2 \not\mathcal{R}\, 14, & 5\,\mathcal{R}\,5, & 5 \not\mathcal{R}\, -11. \end{array}$$

Ovviamente $\mathcal{R}$ è riflessiva e simmetrica, non è asimmetrica poiché per esempio $0\,\mathcal{R}\,16, 16\,\mathcal{R}\,0$. Infine è transitiva, infatti da $x\,\mathcal{R}\,y, y\,\mathcal{R}\,z$ segue ovviamente $x\,\mathcal{R}\,z$ se $x = y$ o $y = z$, se invece $x = 16-y$ e $y = 16-z$ si ha $x = 16-16+z$, da cui $x = z$ e $x\,\mathcal{R}\,z$.

Esercizio 2.1.13. Risulta:

$$\begin{array}{llllll} 3\,\mathcal{R}\,-3, & 3 \not\mathcal{R}\, 4, & 2 \not\mathcal{R}\, 5, & 2 \not\mathcal{R}\, -2, & 7\,\mathcal{R}\,1, & 4 \not\mathcal{R}\, 2, \\ 2 \not\mathcal{R}\, 1, & -4 \not\mathcal{R}\, 2, & 0\,\mathcal{R}\,-1, & 0 \not\mathcal{R}\, 0, & -3 \not\mathcal{R}\, 3, & -3\,\mathcal{R}\,2, \\ 1 \not\mathcal{R}\, 1, & 8\,\mathcal{R}\,2, & 5\,\mathcal{R}\,-1, & 4 \not\mathcal{R}\, 3, & -1\,\mathcal{R}\,0, & 3 \not\mathcal{R}\, 2. \end{array}$$

Pertanto $\mathcal{R}$ non è riflessiva e non è simmetrica essendo per esempio $3\,\mathcal{R}\,-3$ e $-3\,\not\mathcal{R}\,3$. Si ha $0\,\mathcal{R}\,-1$, $-1\,\mathcal{R}\,0$ ma $0\,\not\mathcal{R}\,0$, pertanto la relazione non è transitiva, infine $\mathcal{R}$ non è asimmetrica essendo ancora $0\,\mathcal{R}\,-1$, $-1\,\mathcal{R}\,0$ con $-1 \neq 0$.

Esercizio 2.1.14. $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione perché per esempio 2 non ha corrispondenti. $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{Z}$ ha come corrispondente, unico, $8x \in 8\mathbb{Z}$. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{Z}$ ha corrispondenti $8x$ e $-8x \in 8\mathbb{Z}$. $\mathcal{R}_4$ non è un'applicazione perché per esempio 2 non ha corrispondenti.

Esercizio 2.1.15. $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione perché tutti i numeri dispari non hanno corrispondenti e per lo stesso motivo non lo è $\mathcal{R}_2$. $\mathcal{R}_3$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{N}_0$ ha come corrispondente solo $2x \in 2\mathbb{N}_0$. $\mathcal{R}_4$ non è un'applicazione perché per esempio 2 ha come corrispondenti 6 e 10.

Esercizio 2.1.16. $\mathcal{R}_1$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{Z}$ ha come unico corrispondente il numero razionale $\frac{5}{6}x$. $\mathcal{R}_2$ non è un'applicazione perché vi sono numeri con più di un corrispondente: infatti ogni $x \in \mathbb{Z}$ ha come corrispondente $\frac{1}{4}x$ e $-\frac{1}{4}x$. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché per esempio 2 non ha corispondenti. $\mathcal{R}_4$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{Z}$ ha come unico corrispondente $\frac{x}{2}$.

Esercizio 2.1.17. $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono la stessa applicazione in cui ogni $x \in \mathbb{N}_0$ ha come unico corrispondente il numero razionale $\frac{x}{2}$. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché per esempio 2 non ha corrispondenti.

Esercizio 2.1.18. $\mathcal{R}_1$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{N}$ ha come unico corrispondente il numero razionale $\frac{2}{3}x$. $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{N}$ ha come unico corrispondente il numero razionale $\frac{2}{3}x^2$. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché vi sono elementi di $\mathbb{N}$ che non hanno corrispondenti, per esempio $1\,\not\mathcal{R}_3\,y$ per ogni razionale y. $\mathcal{R}_4$ non è un'applicazione perché vi sono elementi di $\mathbb{N}$ con più di un corrispondente, per esempio $1\,\mathcal{R}_4\,\frac{2}{3}$, $1\,\mathcal{R}_4\,-\frac{2}{3}$.

Esercizio 2.1.19. $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono applicazioni perché ogni elemento di S ha uno e un solo corrispondente in T. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché n non ha corrispondenti. $\mathcal{R}_4$ non è un'applicazione perché m non ha corrispondenti. $\mathcal{R}_5$ è un'applicazione perché ogni elemento di S ha uno e un solo corrispondente in S. $\mathcal{R}_6$ non è un'applicazione perché l'elemento l ha due corrispondenti o anche perché n non ha corrispondenti.

Esercizio 2.1.20. $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione perché ogni elemento maggiore di 3 non ha corrispondenti. $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{N}$ ha come corrispondente, unico, $x + 4 \in \mathbb{N}$. $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché ogni $x \in \mathbb{N}$ ha infiniti corrispondenti, tutti i numeri naturali maggiori o uguali a 3.

Esercizio 2.1.21. $\mathcal{R}$ non è una relazione d'equivalenza perché non è simmetrica, essendo per esempio $12\,\mathcal{R}\,6$ e $6 \not\!\mathcal{R}\ 12$. $\mathcal{R}$ non è una relazione d'ordine perché non è asimmetrica, infatti per esempio $6\,\mathcal{R}\,10$ e $10\,\mathcal{R}\,6$ con $6 \neq 10$.

Esercizio 2.1.22. $\mathcal{R}$ non è una relazione d'equivalenza né d'ordine perché non è transitiva, infatti per esempio $6\,\mathcal{R}\,12$, $12\,\mathcal{R}\,24$, $6 \not\!\mathcal{R}\ 24$.

Esercizio 2.1.23. Segue subito dalle definizioni.

3

Elementi di calcolo combinatorio

Esercizio 3.1.1. L'asserto vale per $k = 2$ (vedi 3.1.1). Con $k \geq 2$, supposto per ipotesi d'induzione $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$, si ha

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| + |A_{k+1}|$$

essendo, per la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1}) = \emptyset.$$

Pertanto si ha

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k+1} |A_i|\,,$$

e l'asserto vale per ogni $k \geq 2$ per il principio d'induzione.

Esercizio 3.1.2. Si ha:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Esercizio 3.1.3. I numeri tra 1 e 1250 divisibili per 17 sono 73, quelli divisibili per 31 sono 40, quelli divisibili per $17 \cdot 31 = 527$ sono 2. Il numero richiesto è dunque $73 + 40 - 2 = 111$.

Esercizio 3.1.4. Si proceda per induzione su k. Per $k = 2$ l'asserto segue da 3.1.3. Si assuma vera l'uguaglianza per k. Si ha allora

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| = \left|(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1}\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq k} |A_i \cap A_j| + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})\right|$$

osservato che, per 1.4.9, si ha $(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})$. Per le ipotesi d'induzione e per le proprietà (1.4.8), (1.4.7) e (1.4.9) si ottiene

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{k+1})\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1\leq i<j\leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| +$$
$$+ \sum_{1\leq i<j<h\leq k} |A_i \cap A_j \cap A_h \cap A_{k+1}| - ... + (-1)^{k-1}\left|\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right|.$$

Sostituendo nella prima espressione si ottiene l'asserto.

Esercizio 3.1.5. Sia N il numero richiesto, cioè il numero degli scontrini in cui compaiono sia un'aranciata che un chinotto. Il numero degli scontrini in cui compare un'aranciata vale 12, il numero degli scontrini in cui compare un chinotto vale 15, il numero degli scontrini in cui compare o un'aranciata o un chinotto vale 21, perché vi sono 21 giovani presenti e la consumazione è obbligatoria. Si ha allora $21 = 12 + 15 - N$, da cui $N = 12 + 15 - 21 = 6$.

Esercizio 3.1.6. I numeri tra 1 e 101 divisibili per 2 sono 50, quelli divisibili per 5 sono 20, quelli divisibili per $2 \cdot 5 = 10$ sono 10. I numeri tra 1 e 101 divisibili per almeno uno tra 2 e 5 sono dunque $50 + 20 - 10 = 60$.

I numeri divisibili per 7 sono 14, quelli divisibili per $2 \cdot 7 = 14$ sono 7, quelli divisibili per $5 \cdot 7 = 35$ sono 2 e c'è solo 1 numero divisibile per $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$. I numeri tra 1 e 101 divisibili per almeno uno tra 2, 5 e 7 sono dunque: $50 + 20 + 14 - 7 - 10 - 2 + 1 = 66$.

Esercizio 3.1.7. Si osservi innanzitutto che un numero n è divisibile per 6 e per 8 se e solo se è divisibile per 3 e per 8.

I numeri tra 1 e 1000 divisibili per 5 sono 200, quelli divisibili per 3 sono 333, quelli divisibili per 8 sono 125, i numeri divisibili per $5 \cdot 3 = 15$ sono 6, quelli divisibili per $5 \cdot 8 = 40$ sono 25, quelli divisibili per $3 \cdot 8 = 24$ sono 41, infine quelli divisibili per $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$ sono 8. I numeri tra 1 e 1000 divisibili per 5 o per 6 o per 8 sono dunque $200 + 333 + 125 - 66 - 25 - 41 + 8 = 534$. Il numero richiesto è $1000 - 534 = 466$.

Esercizio 3.1.8. Siano $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ le 6 facce del parallellepipedo e si supponga che A_1, A_2 siano le due facce che hanno dimensioni cm 7 e cm 7 e A_3, A_4, A_5, A_6 le quattro facce che hanno dimensioni cm 7 e cm 5. Per ogni i sia B_i l'insieme dei cubetti disposti sulla faccia A_i. Il numero richiesto è $\left|\bigcup_{i=1}^{6} B_i\right|$, che, per il principio di inclusione-esclusione, vale

$$\sum_{i=1}^{6} |B_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 6} |B_i \cap B_j| + \sum_{1 \leq i < j < h \leq 6} |B_i \cap B_j \cap B_h|,$$

essendo $B_i \cap B_j \cap B_h \cap B_k = \emptyset$ se $1 \leq i < j < h < k \leq 6$. Si ha $|B_1| = |B_2| = 7 \cdot 7 = 49$, $|B_3| = |B_4| = |B_5| = |B_6| = 5 \cdot 7 = 35$. Se $1 \leq i < j \leq 6$, $B_i \cap B_j$ è non vuoto se e solo se è uno spigolo del parallelepipedo. Poiché vi sono dodici spigoli di cui quattro da 5 centimetri e otto da 7 centimetri, si ha poi $\sum_{1 \leq i < j \leq 6} |B_i \cap B_j| = (4 \cdot 5) + (8 \cdot 7) = 76$. Infine, se $1 \leq i < j < h \leq 6$, $B_i \cap B_j \cap B_h$ è vuoto o è un vertice del solido; poiché i vertici sono otto si ha $\sum_{1 \leq i < j < h \leq 6} |B_i \cap B_j \cap B_h| = 8$.

Il numero richiesto è dunque $2 \cdot 49 + 4 \cdot 35 - 76 + 8 = 170$.

Esercizio 3.2.1. Basta ragionare per induzione su k, utilizzare 3.2.1 e osservare che, per ogni $h \geq 2$, è biettiva l'applicazione

$$\phi : (S_1 \times \cdots \times S_h) \times S_{h+1} \longrightarrow S_1 \times \cdots \times S_h \times S_{h+1}$$

definita ponendo $\phi(((x_1, \ldots, x_h), x_{h+1})) = (x_1, \ldots, x_h, x_{h+1})$.

Esercizio 3.2.2. $21^3 = 9261$.

Esercizio 3.2.3. $6^3 = 216$.

Esercizio 3.2.4. $7^2 = 49$.

Esercizio 3.2.5. $6 \cdot 4 = 24$.

Esercizio 3.2.6. I possibili pranzi diversi sono $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$, ciascun giapponese ha ordinato un pranzo diverso, pertanto il gruppo è formato da al più 40 turisti.

Esercizio 3.4.1. ψ è iniettiva per la cancellabilità a destra e a sinistra di una qualunque applicazione biettiva. È poi suriettiva in quanto, per ogni $g \in \mathbb{S}_y$, esiste $\phi^{-1} \circ g \circ \phi \in \mathbb{S}_x$ tale che $\psi(\phi^{-1} \circ g \circ \phi) = \phi \circ \phi^{-1} \circ g \circ \phi \circ \phi^{-1} = g$

Esercizio 3.4.2. $4! = 24$.

Esercizio 3.4.3. $5! = 120$.

Esercizio 3.4.4. $5! = 120$.

Esercizio 3.4.5. $\frac{8!}{3!2!2!1!} = 1680$.

Esercizio 3.4.6. $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

Esercizio 3.4.7. $\frac{7!}{2!3!} = 420$, $\frac{10!}{6!3!} = 840$.

Esercizio 3.4.8. $\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$.

Esercizio 3.4.9. Una su $5!$, cioè una su 120.

Esercizio 3.4.10. $4! = 24$.

4

Strutture algebriche

Esercizio 4.1.1. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 4.1.2. L'operazione è commutativa: infatti, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, si ha $n \perp m = n + m - 1 = m + n - 1 = m \perp n$. L'operazione è associativa: infatti, per ogni $n, m, s \in \mathbb{Z}$, si ha : $(n \perp m) \perp s = (n + m - 1) \perp s = n + m - 1 + s - 1 = n + m + s - 2$, e $n \perp (m \perp s) = n \perp (m + s - 1) = n + m + s - 1 - 1 = n + m + s - 2$, pertanto $(n \perp m) \perp s = n \perp (m \perp s)$. 1 è elemento neutro: infatti, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $n \perp 1 = n + 1 - 1 = n = 1 \perp n$. Infine, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $n \perp (2 - n) = n + 2 - n - 1 = 1 = (2 - n) \perp n$, pertanto n è simmetrizzabile e ha simmetrico $2 - n$. La struttura $(\mathbb{Z}, \perp)$ è dunque un gruppo abeliano.

Esercizio 4.1.3. L'operazione è commutativa, infatti, per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, si ha $n \perp m = nm - 5n - 5m + 30 = mn - 5m - 5n + 30 = m \perp n$. L'operazione è associativa, infatti, per ogni $n, m, s \in \mathbb{Z}$, sia ha : $(n \perp m) \perp s = (nm - 5n - 5m + 30) \perp s = (nm)s - (5n)s - (5m)s + 30s - 5(nm - 5n - 5m + 30) - 5s + 30 = nms - 5ns - 5ms - 5nm + 30s + 25n + 25m - 150 - 5s + 30 = nms - 5ns - 5ms - 5nm + 25m + 25n + 25s - 120$ e $n \perp (m \perp s) = n \perp (ms - 5m - 5s + 30) = n(ms) - 5ns - 5nm + 30n - 5(ms - 5m - 5s + 30) - 5n + 30 = nms - 5ns - 5nm + 30n - 5ms + 25m + 25s - 150 - 5n + 30 = nms - 5ns - 5nm - 5ms + 25m + 25s + 25n - 120$, pertanto $(n \perp m) \perp s = n \perp (m \perp s)$. Si ha $n \perp e = n$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, se e solo se $ne - 5n - 5e + 30 = n$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, cioè $e(n - 5) = 6(n - 5)$, il che equivale a $e = 6$, pertanto 6 è elemento neutro. Da $n \perp n' = 6$ segue $nn' - 5n - 5n' + 30 = 6$, da cui $nn' - 5n - 5n' + 24 = 0, n'(n - 5) = 5n - 24$ e $n' = \frac{5n-24}{n-5} = \frac{5n-25+1}{n-5} = 5 + \frac{1}{n-5}$, si ha! $n' \in \mathbb{Z}$ se e solo se $n - 5$ divide 1 da cui $n - 5 = 1$ e $n = n' = 6$ o $n - 5 = -1$ da cui $n = n' = 4$; pertanto gli unici elementi simmetrizzabili sono 6 e 4. La struttura $(\mathbb{Z}, \perp)$ è dunque un monoide commutativo.

Esercizio 4.1.4. L'operazione è commutativa: infatti, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$, si ha $x \perp y = \frac{3}{2}xy = \frac{3}{2}yx = y \perp x$. Si ha poi, con $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x \perp y) \perp z = (\frac{3}{2}xy) \perp z = \frac{9}{4}xyz$ e $x \perp (y \perp z) = x \perp (\frac{3}{2}yz) = \frac{9}{4}xyz$, da cui $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ e l'operazione è associativa. Per ogni $x \in \mathbb{Q}$ si ha $x \perp \frac{2}{3} = \frac{3}{2}x\frac{2}{3} = x$, pertanto $\frac{2}{3}$ è elemento neutro. Da $0 \perp y = \frac{2}{3}$ segue l'assurdo $\frac{3}{2}0 = 0 = \frac{2}{3}$, dunque 0 non è simmetrizzabile. Per ogni elemento $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, posto $x = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, si ha invece $x \perp \frac{4n}{9m} = \frac{2}{3}$, sicché x è simmetrizzabile. La struttura $(\mathbb{Q}, \perp)$ è dunque un monoide commutativo e non è un gruppo.

Esercizio 4.1.5. L'operazione è commutativa: infatti, per ogni $n, m \in 5\mathbb{N}$, si ha $n \perp m = \frac{nm}{5} = \frac{mn}{5} = m \perp n$. Si ha poi, per ogni $n, m, s \in 5\mathbb{N}$, $(n \perp m) \perp s = \frac{nm}{5} \perp s = \frac{nms}{25}$ e $n \perp (m \perp s) = n \perp \frac{ms}{5} = \frac{nms}{25}$ sicché $(n \perp m) \perp s = n \perp (m \perp s)$ e l'operazione è associativa. Si ha $n \perp e = n$ per ogni $n \in 5\mathbb{N}$ se e solo se $\frac{ne}{5} = n$ per ogni $n \in 5\mathbb{N}$, cioè se e solo se $e = 5$. Pertanto 5 è elemento neutro. Infine, con $n, n' \in 5\mathbb{N}$, da $n \perp n' = 5$ segue $\frac{nn'}{5} = 5$, da cui $nn' = 25$ e $n = n' = 5$, pertanto 5 è l'unico elemento simmetrizzabile. La struttura $(5\mathbb{N}, \perp)$ è un monoide commutativo.

Esercizio 4.1.6. L'operazione è commutativa: infatti, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x \perp y = x + y - \frac{1}{3} = y + x - \frac{1}{3} = y \perp x$. Si ha poi $(x \perp y) \perp z = (x + y - \frac{1}{3}) \perp z = x + y - \frac{1}{3} + z - \frac{1}{3} = x + y + z - \frac{2}{3}$ e $x \perp (y \perp z) = x \perp (y + z - \frac{1}{3}) = x + y + z - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = x + y + z - \frac{2}{3}$, pertanto $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ e l'operazione è associativa. Si ha $x \perp e = x$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ se e solo se $x + e - \frac{1}{3} = x$, per ogni $x \in \mathbb{Q}$ e ciò succede se e solo se $e = \frac{1}{3}$, pertanto $\frac{1}{3}$ è elemento neutro per $\perp$. Per ogni $x \in \mathbb{Q}$ si ha poi $x \perp x' = \frac{1}{3}$ se e solo se $x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, cioè $x' = -x + \frac{2}{3}$, dunque ogni $x \in \mathbb{Q}$ è simmetrizzabile e ha per simmetrico $-x - \frac{2}{3}$. La struttura $(\mathbb{Q}, \perp)$ è dunque un gruppo abeliano.

Esercizio 4.1.7. L'operazione è commutativa e associativa: infatti, con $m, n \in 2\mathbb{N}$ si ha $n \perp m = 8 + n + m = 8 + m + n = m \perp n$, e, con $n, m, s \in 2\mathbb{N}$ risulta: $(n \perp m) \perp s = (8 + n + m) \perp s = 8 + 8 + n + m + s = 16 + n + m + s$ e $n \perp (m \perp s) = n \perp (8 + m + s) = 8 + n + 8 + m + s = 16 + n + m + s$, sicché $(n \perp m) \perp s = n \perp (m \perp s)$. Non esiste elemento neutro, infatti da $n \perp e = n$ per ogni $n \in 2\mathbb{N}$ segue $8 + n + e = n$ e $8 + e = 0$, impossibile per ogni $e \in 2\mathbb{N}$. La struttura $(2\mathbb{N}, \perp)$ è un semigruppo commutativo.

Esercizio 4.1.8. L'operazione è commutativa e associativa: infatti, con $m, n \in 2\mathbb{Z}$ si ha $n \perp m = 6 + n + m = 6 + m + n = m \perp n$, e, con $n, m, s \in 2\mathbb{Z}$ risulta: $(n \perp m) \perp s = (6 + n + m) \perp s = 6 + 6 + n + m + s = 12 + n + m + s$ e $n \perp (m \perp s) = n \perp (6 + m + s) = 6 + n + 6 + m + s = 12 + n + m + s$, sicché $(n \perp m) \perp s = n \perp (m \perp s)$. Da $n \perp e = n$ per ogni $n \in 2\mathbb{Z}$ segue $6 + n + e = n$ e $e = -6$. Pertanto -6 è elemento neutro per $\perp$. Per ogni $n \in 2\mathbb{Z}$ si ha poi $n \perp (-n - 12) = 6 + n - n - 12 = -6$, sicché n è simmetrizzabile ed ha simmetrico $-6 - n$. La struttura $(2\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 4.1.9. L'operazione è commutativa: infatti, per ogni $m, n \in 2\mathbb{Z}$ si ha $m \perp n = 4m + 4n - \frac{nm}{2} - 40 = 4n + 4m - \frac{mn}{2} - 40 = n \perp m$. L'operazione non è associativa, per esempio risulta $(2\perp -2)\perp 0 = -38\perp 0 = -152-40 = -192$ e $2\perp(-2\perp 0) = 2\perp -48 = -176$. Non esiste elemento neutro, infatti da $n\perp e = n$ per ogni $n \in 2\mathbb{Z}$ segue $4n + 4e - \frac{ne}{2} - 40 = n$, da cui, se $n = 2$, $3e = 34$ con $e \in 2\mathbb{Z}$, impossibile.

Esercizio 4.1.10. L'operazione è commutativa e associativa: infatti, per ogni $m, n \in 3\mathbb{Z}$, si ha $n\perp m = n+m-18 = m+n-18 = m\perp n$, e, con $n, m, s \in 2\mathbb{Z}$ risulta: $(n\perp m)\perp s = (n+m-18)\perp s = n+m-18+s-18 = n+m+s-36$ e $n\perp(m\perp s) = n\perp(m+s-18) = n+m+s-18-18 = n+m+s-36$, sicché $(n\perp m)\perp s = n\perp(m\perp s)$. Da $n\perp e = n$ per ogni $n \in 3\mathbb{Z}$ segue $n + e - 18 = n$ e $e = 18$. Pertanto 18 è elemento neutro per $\perp$. Per ogni $n \in 3\mathbb{Z}$ si ha poi $n\perp(-n + 36) = n - n + 36 - 18 = 18$, sicché n è simmetrizzabile ed ha simmetrico $-n + 36$. La struttura $(3\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano.

Esercizio 4.1.11. Sia $x \geq 1$, si ha $0 = x\perp x' = x + x' + |xx'|$, non esiste allora un simmetrico negativo x' di x altrimenti si avrebbe $0 = x + x' - xx'$ e $0 = 1$ se $x = 1$, $x' = \frac{x}{x-1} > 0$ se $x > 1$, né un simmetrico positivo x' altrimenti si avrebbe $0 = x + x' + xx'$ e $x' = -\frac{x}{1+x} < 0$.

Sia poi $0 \leq x < 1$, l'elemento $-\frac{x}{1-x}$ è allora non positivo ed è un simmetrico di x essendo $x - \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x-x^2-x+x^2}{1-x} = 0$, non esiste invece un simmetrico positivo x' di x altrimenti si avrebbe $x + x' + xx' = 0$ e $x' = -\frac{x}{1+x} < 0$.

Sia ora $-1 < x < 0$, l'elemento $-\frac{x}{1-x}$ è in tal caso positivo ed è un simmetrico di x essendo $x-\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x} = \frac{x-x^2-x+x^2}{1-x} = 0$, non esiste invece un simmetrico negativo x' di x altrimenti si avrebbe $x + x' + xx' = 0$ e $x' = -\frac{x}{1+x} > 0$.

Sia infine $x < -1$, allora x ha un simmetrico negativo, cioè $-\frac{x}{1+x}$ essendo $x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x} = \frac{x+x^2-x-x^2}{1+x} = 0$, ed un simmetrico positivo, cioè $-\frac{x}{1-x}$ essendo $x - \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x-x^2-x+x^2}{1-x} = 0$.

Esercizio 4.1.12. Si ha, per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $0\perp x = 0 + x - 0 = x$, $x\perp 0 = x + 0 - 0 = x$, pertanto x è elemento neutro. 0 è dunque simmetrizzabile, si ha poi $2\perp 2 = 2 + 2 - 4 = 0$ e anche 2 è simmetrizzabile ed ha come simmetrico se stesso. Da $x\perp x' = 0$ segue $x + x' - xx' = 0$ da cui $x'(1 - x) = -x$ e $x' = \frac{x}{x-1}$, ma $\frac{x}{x-1} \in \mathbb{Z}$ se e solo se $x - 1$ divide x cioè se e solo se $x - 1 = 1$ o $x - 1 = -1$ cioè se e solo se $x = 2$ o $x = 0$.

Si ha $0\perp 1 = 0 + 1 - 0 = 1$ e $-1\perp 1 = -1 + 1 + 1 = 1$ con $0 \neq -1$, sicché 1 non è regolare. Se $a \neq 1$ da $a\perp x = a\perp y$ segue $a + x - ax = a + y - ay$, da cui $(1 - a)x = (1 - a)y$ e $x = y$ essendo $1 - a \neq 0$, pertanto l'elemento a è cancellabile a sinistra e lo è anche a destra essendo l'operazione $\perp$ commutativa.

Esercizio 4.1.13. (i) Sia a cancellabile a sinistra. Da $T_a^s(x) = T_a^s(y)$ segue $a\perp x = a\perp y$ da cui $x = y$ per la cancellabilità; pertanto T_s^a è iniettiva. Viceversa, sia T_s^a iniettiva. Da $a\perp x = a\perp y$ segue $T_s^a(x) = T_s^a(y)$ da cui $x =$

y per l'iniettività di T_s^a; pertanto a è cancellabile a sinistra. La (ii) si prova analogamente.

5

Elementi di aritmetica

Esercizio 5.1.1. Si ha $11^2 = 121, 13^2 = 169$. Si verifica immediatamente che 151 non è divisibile per $2, 3, 5, 7, 11$, pertanto è un numero primo per il crivello di Eratostene.

Esercizio 5.1.2. Si ha $11^2 = 121, 13^2 = 169$. Si verifica immediatamente che 149 non è divisibile per $2, 3, 5, 7, 11$, pertanto è un numero primo per il crivello di Eratostene.

Esercizio 5.1.3. Si ha $13^2 = 169, 17^2 = 289$. Si verifica immediatamente che 191 non è divisibile per $2, 3, 5, 7, 11, 13$, pertanto è un numero primo per il crivello di Eratostene.

Esercizio 5.1.4. Si elenchino tutti i numeri naturali n, con $2 \leq n \leq 250$. Si ha $13^2 = 169, 17^2 = 289$. Si cancellino allora tutti i multipli di $2, 3, 5, 7, 11, 13$, i restanti numeri sono tutti primi. Si ottiene: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241.

Esercizio 5.2.1. $(11011011)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 1 + 2 + 8 + 16 + 64 + 128 = 219$,
$(12210)_3 = 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 = 3 + 18 + 54 + 81 = 156$,
$(12310)_4 = 0 \cdot 4^0 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^4 = 4 + 48 + 128 + 256 = 436$,
$(34024)_5 = 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 = 4 + 10 + 500 + 1875 = 2389$,
$(25401)_6 = 1 \cdot 6^0 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^4 = 6 + 144 + 1080 + 2592 = 3822$,
$(3456)_7 = 6 \cdot 7^0 + 5 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^3 = 6 + 35 + 196 + 1029 = 1266$,
$(277)_8 = 7 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^2 = 7 + 56 + 128 = 191$,
$(881)_9 = 1 \cdot 9^0 + 8 \cdot 9^1 + 8 \cdot 9^2 = 1 + 72 + 648 = 721$.

Esercizio 5.2.2. Risulta: $(324)_{10} = (110000)_3$, $(14)_{10} = (112)_3$, $(662)_{10} = (220112)_3$, $(201)_{10} = (21110)_3$, $(55)_{10} = (2001)_3$, $(1200)_{10} = (1122110)_3$. Inoltre si ha: $(324)_{10} = (1300)_6$, $(14)_{10} = (22)_6$, $(662)_{10} = (3022)_6$, $(201)_{10} = (533)_6$, $(55)_{10} = (131)_6$, $(1200)_{10} = (5320)_6$. Si verifica anche che: $(324)_{10} = (504)_8$, $(14)_{10} = (16)_8$, $(662)_{10} = (1226)_8$, $(201)_{10} = (311)_8$, $(55)_{10} = (67)_8$, $(1200)_{10} = (2260)_8$. Infine: $(324)_{10} = (400)_9$, $(14)_{10} = (15)_9$, $(662)_{10} = (815)_9$, $(201)_{10} = (243)_9$, $(55)_{10} = (61)_9$, $(1200)_{10} = (1573)_9$.

Esercizio 5.2.3. Innanzitutto si ha: $(245)_8 = (165)_{10}$, $(54)_9 = (49)_{10}$, $(2001)_4 = (129)_{10}$, $(22222)_3 = (242)_{10}$, $(2020)_5 = (260)_{10}$. Si verifica poi facilmente che: $(165)_{10} = (10100101)_2$, $(49)_{10} = (110001)_2$, $(129)_{10} = (10000001)_2$, $(242)_{10} = (11110010)_2$, $(260)_{10} = (100000100)_2$. Infine: $(165)_{10} = (324)_7$, $(49)_{10} = (100)_7$, $(129)_{10} = (243)_7$, $(242)_{10} = (464)_7$, $(260)_{10} = (521)_7$.

Esercizio 5.2.4. $(5432)_6 = (1244)_{10}$.

Esercizio 5.2.5. $(10234)_7 = (2524)_{10}$.

6

Alcune strutture algebriche notevoli

Esercizio 6.1.1. Siano $A, B, C \in \mathcal{P}(S)$, si ha allora $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$. Sia infatti $x \in (A \times B) \times C$, esistono allora $a \in A, b \in B, c \in C$ tali che $x = (ab)c$; per la proprietà associativa di $\times$ si ha allora $x = a(bc) \in A\times(B\times C)$, pertanto $(A \times B) \times C \subseteq A \times (B \times C)$. Viceversa sia $x \in A \times (B \times C)$, esistono allora $a \in A, b \in B, c \in C$ tali che $x = a(bc) = (ab)c \in (A \times B) \times C$, sicché $A \times (B \times C) \subseteq (A \times B) \times C$. Ne segue l'asserto.

Esercizio 6.1.2. Sia $x \in X$. Da $X \subseteq S = \overline{Y}$ segue che esistono $t \geq 1$ e $y_1, \ldots, y_t \in Y$ tali che $x = y_1 \ldots y_t$. Si vuole provare che è $t = 1$. Da X base e quindi sistema di generatori di S segue che, per ogni $i \in \{1, \ldots, t\}$, esistono $s_i \geq 1$ e elementi $x_{i1}, \ldots, x_{is_i} \in X$ tali che $y_i = x_{i1} \ldots x_{is_i}$. Pertanto $x = x_{11} \ldots x_{1s_1} \ldots x_{t1} \ldots x_{ts_t}$. La proprietà (6.1.1) assicura allora che $t = 1$ e $s_1 = 1$ sicché $x = x_{11} = y_1 \in Y$, come volevasi.

Supposto poi X' base di S, si ha $X' \supseteq X$, essendo $\overline{X'} = S$, e $X \supseteq X'$, essendo $\overline{X} = S$ e X' base di S. Pertanto $X = X'$.

Esercizio 6.1.3. Sia $A = \{a\}$. Si ha allora $A^+ = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ ed è immediato verificare che l'applicazione

$$\varphi : n \in \mathbb{N} \longmapsto a^n \in A^+$$

è un isomomorfismo di $(\mathbb{N}, +)$ in $(A^+, \cdot)$: infatti $\varphi(n + m) = a^{n+m} = a^n a^m = \varphi(n)\varphi(m)$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{a^n : n \in \mathbb{N}\} = A^+$, e da $a^n = a^m$ segue $n = m$ essendo $\{a\}$ base di A^+.

Esercizio 6.1.4. Siano $w, w' \in A^+$; esistano quindi, univocamente determinati, interi $s, t \geq 1$ e elementi $a_1, \ldots, a_t, a'_1, \ldots, a'_s \in A$ tali che $w = a_1 \ldots a_t, w' = a'_1 \ldots a'_s$. Si ha allora $l(w) = t$, $l(w') = s$ e $ww' = a_1 \ldots a_t a'_1 \ldots a'_s$, sicché $l(ww') = t + s = l(w) + l(w')$. Ciò assicura che l è un omomorfismo di $(A^+, \cdot)$ in $(\mathbb{N}, +)$.

Ovviamente se $A = \emptyset$ si ha $l(A^+) = l(\emptyset) = \emptyset \subset \mathbb{N}$ e l non è suriettiva. Se poi $A \neq \emptyset$, allora ha senso considerare $a \in A$, sicché per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a^n \in A^+$ tale che $n = l(a^n)$.

Se $|A| \leq 1$, ovviamente l è iniettiva giacché $A^+ = \emptyset$ o $A^+ = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposto poi $|A| > 1$ e considerati $a, b \in A$, con $a \neq b$, si ha $l(a) = 1 = l(b)$ sicché l non è iniettiva.

Esercizio 6.1.5. Si consideri $t\mathbb{Z}_m = \{t[x]_m | [x]_m \in \mathbb{Z}_m\} = \{[tx]_m | x \in \mathbb{Z}\}$, con $t \geq 0$, e siano $t[a]_m, t[b]_m \in t\mathbb{Z}_m$. Si ha $t[a]_m + t[b]_m = t([a]_m + [b]_m) = t[a+b]_m \in t\mathbb{Z}_m$ (vedi (4.1.5)) e $t[a]_m \cdot t[b]_m = t^2[a]_m[b]_m = t(t[ab]_m) = t[tab]_m \in t\mathbb{Z}_m$ (vedi (4.1.2)).

Esercizio 6.1.6. A partire dal semigruppo libero S e dall'immersione i, si considerino ancora S come semigruppo ed i come applicazione di X in S. La proprietà universale assicura che esiste un unico omomorfismo $\sigma : S \longrightarrow S$ tale che $\sigma \circ i = i$. Ovviamente id_S soddisfa tale proprietà ma anche $\psi \circ \varphi$ la soddisfa: infatti si ha $(\psi \circ \varphi) \circ i = \psi \circ (\varphi \circ i) = \psi \circ j = i$. Pertanto $\mathrm{id}_S = \sigma = \psi \circ \varphi$. Ragionando analogamente con X^+ e j si ottiene $\mathrm{id}_{X^+} = \varphi \circ \psi$.

Esercizio 6.1.7. Con $s, s' \in S$ si ha $\varphi(s)\varphi(s') = \varphi_s \varphi_{s'} = \varphi_{ss'} = \varphi(ss')$. Infatti, per ogni $x \in V$, risulta $\varphi_s \varphi_{s'}(x) = \varphi_{s'}(\varphi_s(x)) = \varphi_{s'}(xs) = (xs)s' = x(ss') = \varphi_{ss'}(x)$. Supposto poi $\varphi(s) = \varphi(s')$, cioè $\varphi_s = \varphi_{s'}$, con $s, s' \in S$, si ha in particolare $s = \varphi_s(1) = \varphi_{s'}(1) = s'$.

7

L'algebra delle matrici

Esercizio 7.1.1. Si ha:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 4 \\ -4 & -7 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$
$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 32 & -7 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 21 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -50 \\ 1 & -50 & 42 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.1.2. Risulta:

$$M_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{\mathcal{R}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{R}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.1.3. $\mathcal{R}_1$ è una relazione d'equivalenza e non è una relazione d'ordine perché non è asimmetrica; $\mathcal{R}_2$ è sia una relazione d'ordine che di equivalenza; $\mathcal{R}_3$ non è una relazione di equivalenza e non è una relazione d'ordine perché non è transitiva; $\mathcal{R}_4$ non è né simmetrica né antisimmetrica pertanto non è d'equivalenza né d'ordine.

Esercizio 7.1.4. Risulta:

$$M_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{\mathcal{R}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{R}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\mathcal{R}_1$ non è un'applicazione in quanto sia nella seconda che nella quarta riga non ci sono termini uguali ad 1, $\mathcal{R}_2$ è un'applicazione iniettiva, $\mathcal{R}_3$ non è un'applicazione perché nella prima riga non compare 1, $\mathcal{R}_4$ è un'applicazione.

Esercizio 7.1.5. $\mathcal{R}$ è un'applicazione iniettiva ma non suriettiva mentre $\mathcal{R}^T$ non è un'applicazione.

Esercizio 7.1.6. Si ha $B = A^T$.

Esercizio 7.2.1. Posto $A = (a_{ij})$, $A^T = (c_{ij})$ e $B = A + A^T = (b_{ij})$, si noti che $c_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pertanto considerati comunque $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si ha che $b_{ij} = a_{ij} + c_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji}$ il che vuol proprio dire che la matrice B è simmetrica.

Esercizio 7.2.2. Si ha

$$2A^T + 3B^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 22 \\ 27 & 2 & 9 & 2 \\ 23 & 3 & 7 & 21 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.3. Si ha

$$3A + 4B - 2C = \begin{pmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$A^T + 2B^T - C^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.4. Si ha
$$AB = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.5. Si ha
$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.6. Il prodotto è sempre definito.

Esercizio 7.2.7. Si ha
$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
e
$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.8. Si ha
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{pmatrix}$$
e
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{pmatrix}.$$
Tali matrici sono uguali se e solo se $z = 0$ e $x = w$. Pertanto le matrici richieste sono tutte e sole le matrici
$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
con $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.2.9. L'uguaglianza $BU = 6U$ è verificata da tutte e sole le matrici del tipo
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.10. Si ha
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 18 & 30 \\ -8 & -23 & 26 & 54 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 34 & 29 & -42 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.2.11. Si ha:

$$\begin{aligned} 3A &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 12 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, & A+B &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 5 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}, \\ A-C &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, & 2C-5A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -14 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}, \\ -7A+3B &= \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -5 & -25 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}, & A+C+B &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 8 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}, \\ D &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 9 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}, & E &= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 3 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.2.12. Per $n = 1$ l'asserto è verificato, essendo

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 1 & 5 \cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con $n > 1$, si assuma per ipotesi di induzione che

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1) & 5(n-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

allora risulta:

$$\begin{aligned} A^n = AA^{(n-1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2(n-1) & 5(n-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 5n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.2.13. Si ragioni come nell'esercizio precedente.

Esercizio 7.2.14. Si ragioni come nell'Esercizio 7.2.12.

Esercizio 7.3.1. La relazione è banalmente riflessiva; infatti ogni matrice A si ottiene da A effettuando 0 operazioni elementari sulle righe e quindi $A \sim A$.

Se $A \sim B$, allora B si ottiene da A effettuando n operazioni elementari sulle righe, siano $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, si denoti con γ_i^* l'operazione γ_i se γ_i è l'operazione $R^h \leftrightarrow R^k$, l'operazione $R^h \to \lambda^{-1}R^h$ se γ_i è $R^h \to \lambda R^h$ con $\lambda \neq 0$, l'operazione $R^h \to R^h - \lambda R^k$ se γ_i è $R^h \to R^h + \lambda R^k$. Allora A si ottiene da B effettuando le n operazioni elementari sulle righe $\gamma_n^*, \gamma_{n-1}^*, \dots, \gamma_1^*$. Pertanto $B \sim A$.

Infine, per provare che $\sim$ è transitiva basta notare che date le matrici A, B, C, se $A \sim B$ e $B \sim C$ allora B si ottiene da A effettuando un numero finito n di operazioni elementari sulle righe, C si ottiene da B effettuando un numero finito m di operazioni elementari sulle righe e questo comporta che C si ottiene da A effettuando $n + m$ operazioni elementari sulle righe. Quindi $A \sim C$ come si voleva.

Esercizio 7.3.2. Effettuando sulle righe della matrice A nell'ordine le operazioni elementari $R^3 \to R^3 - 2R^1$, $R^4 \to R^4 - 3R^1$, $R^4 \to R^4 - \frac{13}{9}R^3$, si ottiene la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invece effettuando sulle righe di B l'operazione elementare $R^2 \to R^2 - \frac{3}{2}R^1$ si ottiene la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.3.3. Eseguendo sulle righe della matrice A le operazioni elementari $R^2 \to R^2 - 2R^1$, $R^3 \to R^3 - 3R^1$ e $R^3 \to R^3 - \frac{5}{4}R^2$, sulle righe di B le operazioni elementari $R^2 \to R^2 - 2R^1$, $R^3 \to R^3 - 3R^1$ e $R^3 \to R^3 - \frac{7}{3}R^2$, sulle righe di C le operazioni $R^2 \to R^2 + \frac{4}{6}R^1$, $R^3 \to R^3 - \frac{1}{6}R^1$ e $R^3 \to R^3 - \frac{1}{2}R^2$ si ottengono le matrici a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} \end{pmatrix},$$

che sono equivalenti ad A, B, C rispettivamente.

Esercizio 7.3.4. Eseguendo sulle righe della matrice A le operazioni elementari $R^2 \to R^2 - R^1$, $R^3 \to R^3 - R^1$ e $R^3 \to R^3 - 2R^2$, sulle righe di B le operazioni $R^2 \to R^2 - 2R^1$ e $R^3 - 3R^2$, sulle righe di C le operazioni $R^2 \to R^2 - 3R^1$,

$R^3 \to R^3 - R^1$ e $R^3 \to R^3 - R^2$, si ottengono le matrici a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

che sono equivalenti ad A, B, C rispettivamente.

Esercizio 7.3.5. Si ha:

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{32}^{-5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{21}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.3.6. Si ha

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $E = E_{43}^{-2} E_{23} E_{12}$.

Esercizio 7.3.7. Risulta:

$$A \sim \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{5} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}, \qquad B \sim \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{6} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

Per ottenere tali matrici a scala basta eseguire sulle righe di A le operazioni elementari $R^1 \leftrightarrow R^2$, $R^3 \to R^3 + \overline{2}R^1$, $R^3 \to R^3 + \overline{2}R^2$ e sulle righe di B le operazioni elementari $R^2 \to R^2 + \overline{3}R^1$ e $R^3 \to R^3 + \overline{2}R^1$.

Esercizio 7.3.8. Eseguendo sulle righe di A, nell'ordine, le operazioni elementari $R^3 \to R^3 + R^1$, $R^3 \to R^3 + 3R^2$, $R^1 \to 2R^1$, $R^3 \to 3R^3$, $R^1 \to R^1 + 3R^2$, $R^1 \to R^1 + 3R^3$, $R^2 \to R^2 + 4R^3$ si ottiene la matrice I_3 identica di ordine 3. Invece la matrice a scala ridotta equivalente a B è la matrice

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

che si ottiene eseguendo sulle righe di B le operazioni elementari $R^1 \to 2R^1$, $R^1 \to R^1 + 2R^2$.

Esercizio 7.3.9. La matrice a scala ridotta equivalente ad A è la matrice I_4 identica di ordine 4, mentre la matrice a scala ridotta equivalente a B è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.4.1. Se $n = 2$, banalmente $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$. Si osservi che sviluppando il determinante di Vandermonde secondo l'ultima colonna si ottiene un polinomio di grado $n-1$ in α_n il cui coefficiente del termine di grado massimo è $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. È poi immediato osservare che $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono radici di tale polinomio, pertanto, applicando il teorema di Ruffini (vedi Teorema 6.6.5) si ha che $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_1) \cdots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$. Da questa considerazione segue subito l'asserto.

Esercizio 7.4.2. Si ha: $\det A = -12$, $\det B = -50$.

Esercizio 7.4.3. Si ha:

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{35} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_{41} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.4.4. Si ha:

$$\det A = 35 + 18 - 15 = 38, \qquad \det B = 6 + 28 - 28 - 12 = -6.$$

Esercizio 7.4.5. Risulta $\det A = \overline{3}$.

Esercizio 7.4.6. Si ha $\det B = \overline{5}$.

Esercizio 7.4.7. Si ha: $\det A = 6\pi$, $\det B = -3$, $\det C = -1$.

Esercizio 7.4.8. Si ha: $\det A = \overline{4} + \overline{6} + \overline{2} + \overline{6} = \overline{0}$.

Esercizio 7.4.9. Il complemento algebrico dell'elemento di posto $(2, 2)$ è $3/25$, quello dell'elemento di posto $(1, 4)$ è $23/10$, quello dell'elemento di posto $(3, 2)$ è $27/5$ e quello dell'elemento di posto $(2, 4)$ è $61/20$.

Esercizio 7.4.10. Si denotino con I la matrice identica, con K la matrice che si ottiene sostituendo alla h-esima riga di I la sua k-esima riga moltiplicata per λ e con H la matrice che si ottiene da I sostituendo alla riga h-esima la riga k-esima. Allora si ha:

$$\begin{aligned}\det E_{hk} &= -\det I = -1;\\ \det E_h^\lambda &= \lambda \det I = \lambda;\\ \det E_{hk}^\lambda &= \det I + \det K = 1 + \lambda \det H = 1 + \lambda \cdot 0 = 1\end{aligned}$$

(si noti che $\det H = 0$ perché la matrice H ha due righe uguali).

Esercizio 7.4.11. L'esercizio precedente assicura che ogni matrice elementare è non singolare. Se $A \sim B$, allora esiste una matrice T, prodotto di matrici elementari, tale che $B = TA$. Per il teorema di Binet si ha che $\det T \neq 0$ e che $\det B = \det T \det A$. Dunque $\det A \neq 0$ comporta che $\det B \neq 0$.

Esercizio 7.4.12. Risulta: $\det A = -1 \cdot 7 \cdot -5 \cdot 3 = 105$; $\det B = -3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 11 = -660$; $\det C = -140$; $\det D = -48$; $\det E = 0$ perché la terza riga della matrice E è l'opposto della prima; $\det F = 0$ perché la quarta colonna di F è il doppio della seconda; $\det G = 0$ perché la prima riga di G è la differenza tra la terza e la seconda; $\det H = 0$ perché la terza colonna della matrice H è la somma delle prime due.

Esercizio 7.5.1. Posto

$$B := \begin{pmatrix} d\,(\det A)^{-1} & -b\,(\det A)^{-1} \\ -c\,(\det A)^{-1} & a\,(\det A)^{-1} \end{pmatrix},$$

basta osservare che

$$AB = \begin{pmatrix} (ad - bc)\,(\det A)^{-1} & (-ab + ba)\,(\det A)^{-1} \\ (cd - dc)\,(\det A)^{-1} & (-cb + da)\,(\det A)^{-1} \end{pmatrix} = I_2 = BA.$$

Esercizio 7.5.2. Si ha $\det A = 6 \neq 0$, pertanto A è invertibile e la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & 11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici B e C invece non sono invertibili perché sono entrambe singolari.

Esercizio 7.5.3 Risulta $\det A = \overline{2}$ e poiché tale elemento è invertibile modulo 9 la matrice A è invertibile e la sua inversa è

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{7} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.5.4. Risulta $\det B = 0$ pertanto la matrice considerata non è invertibile.

Esercizio 7.5.5. Risulta $\det A = \overline{7}$, elemento invertibile modulo 9; pertanto la matrice A è invertibile e la sua inversa è la matrice

$$\begin{pmatrix} \overline{7} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{7} \end{pmatrix}.$$

Invece poiché $\det B = \overline{6}$ e tale elemento non è invertibile modulo 9, la matrice B non è invertibile.

Esercizio 7.6.1. Riducendo a scala le matrici A, B e C si ottengono le matrici

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Pertanto tutte e tre la matrici hanno rango 3.

Esercizio 7.6.2. Si ha:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

pertanto A ha rango 3 e B ha rango 2.

Esercizio 7.6.3. La matrice C è una matrice 4×3 pertanto ha rango ≤ 3; d'altro canto è possibile individuare un minore di ordine massimo non nullo e quindi essa ha rango 3. Per quanto riguarda la matrice D, questa è una matrice 3×4 e come tale ha rango al più 3. I minori di ordine massimo sono però tutti nulli quindi il suo rango è < 3 e, osservando che possiede un minore di ordine 2 non nullo si può concludere che essa ha rango 2.

Esercizio 7.6.4. Il rango di M è 2 per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; se $t = 1$ allora $\rho(M) = 1$.

Esercizio 7.6.5. La matrice A ha rango 2.

Esercizio 7.6.6. Si osservi che poiché A è una matrice 2×3 non nulla si ha che $1 \leq \rho(A) \leq 2$. Se $a = b = c$ allora i minori di ordine 2 di A sono tutti nulli e questo comporta che $\rho(A) = 1$. Se invece l'insieme $\{a, b, c\}$ ha ordine almeno 2 allora A possiede un minore di ordine 2 non nullo e quindi ha rango 2.

Esercizio 7.7.1. Si ha: $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{5}{2}$, $z = -3$.

Esercizio 7.7.2. Si ha: $x = \overline{11}$, $y = \overline{6}$, $z = \overline{8}$.

Esercizio 7.7.3. Il primo sistema ha come unica soluzione $x = \overline{10}$, $y = \overline{2}$; il secondo sistema ha come unica soluzione $x = \overline{2}$, $y = \overline{6}$.

Esercizio 7.7.4. L'unica soluzione del primo sistema è $x = \overline{1}$, $y = \overline{0}$, $z = \overline{4}$; quella del secondo è $x = \overline{2}$, $y = \overline{3}$.

Esercizio 7.7.5. Il primo sistema ammette come unica soluzione la terna $(2, 3, 4)$, il secondo $(-2, 0, 1)$.

Esercizio 7.7.6. La soluzione del primo sistema è $(\overline{3}, \overline{4}, \overline{3})$; il secondo sistema ha come soluzione $(\overline{0}, \overline{0}, \overline{3})$.

Esercizio 7.7.7. Il sistema considerato ammette come unica soluzione la quaterna $(-1, 2, -3, 2)$.

Esercizio 7.7.8. Il primo dei due sistemi ammette soluzioni non banali perché il determinante della matrice incompleta è 0; il secondo sistema ha solo la soluzione banale perché la sua matrice incompleta ha determinante non nullo.

Esercizio 7.7.9. Il determinante della matrice incompleta del sistema considerato è 0, pertanto per risolvere il sistema occorre utilizzare il metodo di Gauss-Jordan. Con tale metodo si scopre che il sistema considerato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + \dfrac{5}{3}t = -\dfrac{2}{3} \\ y = 1 \\ z + \dfrac{2}{3}t = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Le soluzioni di quest'ultimo costituiscono l'insieme infinito

$$\left\{ \left(\frac{-2-5t}{3}, 1, \frac{-2-2t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Esercizio 7.7.10. Il sistema considerato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + 10w = 1 \\ y + 6w = 8 \\ z + 4w = 9, \end{cases}$$

e l'insieme delle sue soluzioni è quindi $\{(1+w, 8+5w, 9+7w, w) : w \in \mathbb{Z}_{11}\}$.

Esercizio 7.7.11. L'insieme delle soluzioni del primo sistema è

$$\left\{ \left(\frac{11t-1}{18}, \frac{7t+1}{18}, \frac{4t-2}{9}, t \right) : t \in \mathbb{Q} \right\};$$

il secondo sistema ammette invece un'unica soluzione e precisamente la terna $(\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Esercizio 7.7.12. Il sistema considerato non è compatibile.

Esercizio 7.7.13. Il sistema ha un'unica soluzione: $x = -3$, $y = \frac{19}{4}$, $z = \frac{1}{4}$.

Esercizio 7.7.14. Il sistema è compatibile ed ha infinite soluzioni.

Esercizio 7.7.15. L'unica soluzione del sistema è $(1, \frac{1}{3}, 0)$.

Esercizio 7.7.16. Si ha : $x = \overline{9}$, $y = \overline{3}$, $z = \overline{1}$, $t = \overline{8}$.

Esercizio 7.7.17. Si ha: $x = \frac{7}{22}$, $y = \frac{13}{44}$, $z = -\frac{15}{44}$.

Esercizio 7.7.18. L'insieme delle soluzioni del sistema considerato è

$$S = \{(\overline{3} + z, \overline{3} + \overline{3}z, z) : z \in \mathbb{Z}_5\},$$

ossia $\{(\overline{3}, \overline{3}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{4}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{4})\}$.

Esercizio 7.7.19. Il sistema ammette l'unica soluzione $(\overline{5}, \overline{0}, \overline{3})$.

Esercizio 7.8.1. Per $n = 1$ il polinomio caretteristico della matrice A è $-\lambda + a_{11}$ che ha grado 1 e coefficiente direttivo -1. Sia $n > 1$ e si supponga, per ipotesi di induzione, che il polinomio caratterisico di una matrice quadrata di ordine $n-1$ abbia grado $n-1$ e coefficiente direttivo $(-1)^{n-1}$; allora tenendo presente che il polinomio caratteristico di A è $\det(A - \lambda I)$, si ha l'asserto.

Esercizio 7.8.2. Gli autovalori reali di entrambe le matrici sono 1 e 2.

Esercizio 7.8.3. Il polinomio caratteristico di A è $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + 25$, gli autovalori 1 e 5; il polinomio caratteristico di B è $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4$ e gli autovalori reali 4, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$.

Esercizio 7.8.4. $-\lambda^3 + 12\lambda + 16$ è il polinomio caratteristico di entrambe le matrici, gli autovalori sono 4 e -2.

Esercizio 7.8.5. Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$, gli autovalori 1, 3, -2.

Esercizio 7.8.6. Il polinomio caratteristico di A è $-\lambda^3$, l'unico autovalore è 0, gli autovettori costituiscono l'insieme

$$V_0 = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}.$$

La matrice B ha polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$ e autovalori 1, 3, -2; i corrispondenti autovettori sono

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(2y, y, 2y) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}, \\ V_3 &= \left\{ \left(0, y, \frac{2}{5}y\right) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}, \\ V_{-3} &= \{(0, 0, y) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

La matrice C ha polinomio catteristico $(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)$, autovalori $2, 4, 1$ e autovettori

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(-y,y,y) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}, \\ V_2 &= \{(y,0,0) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}, \\ V_4 &= \left\{ \left(\frac{7}{2}y, -2y, 0 \right) : y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.8.7. I polinomi caratteristici delle matrici A, B e C sono rispettivamente $-\lambda^3+7\lambda^2-2\lambda-2$, $-\lambda^3+4\lambda^2+9\lambda-2$ e $-\lambda^3-3\lambda^2+16\lambda+94$, nessuno dei quali possiede radici in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7.8.8. La matrice A ha polinomio caratteristico $\lambda^2+\overline{4}$, autovalori $\overline{1}$ e $\overline{4}$, autovettori

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(\overline{3},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{4},\overline{3}),(\overline{2},\overline{4})\}, \\ V_4 &= \{(\overline{1},\overline{1}),(\overline{2},\overline{2}),(\overline{3},\overline{3}),(\overline{4},\overline{4})\}. \end{aligned}$$

La matrice B ha polinomio caratteristico $(\lambda+\overline{3})^2$, autovalore $\overline{2}$ e autovettori

$$V_2 = \{(\overline{3},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{4},\overline{3}),(\overline{2},\overline{4})\}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice C è λ^2, l’unico autovalore è $\overline{0}$, gli autovettori sono

$$V_0 = \{(\overline{3},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}),(\overline{4},\overline{3}),(\overline{2},\overline{4})\}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice D è $\lambda^2+\lambda+\overline{2}$ che non ha radici in $\mathbb{Z}_5$.

Esercizio 7.8.9. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2+\overline{5}$, gli autovalori sono $\overline{3}$ e $\overline{4}$, gli autovettori sono

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(\overline{2},\overline{1}),(\overline{4},\overline{2}),(\overline{6},\overline{3}),(\overline{1},\overline{4}),(\overline{3},\overline{5}),(\overline{5},\overline{6})\}, \\ V_4 &= \{(\overline{5},\overline{1}),(\overline{3},\overline{2}),(\overline{1},\overline{3}),(\overline{6},\overline{4}),(\overline{4},\overline{5}),(\overline{2},\overline{6})\}. \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico di B è $\lambda^2+\lambda$, gli autovalori sono $\overline{0}$ e $\overline{6}$, gli autovettori

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(\overline{1},\overline{1}),(\overline{2},\overline{2}),(\overline{3},\overline{3}),(\overline{4},\overline{4}),(\overline{5},\overline{5}),(\overline{6},\overline{6})\}, \\ V_6 &= \{(\overline{1},\overline{6}),(\overline{2},\overline{5}),(\overline{3},\overline{4}),(\overline{4},\overline{3}),(\overline{5},\overline{2}),(\overline{6},\overline{1})\}. \end{aligned}$$

La matrice C ha polinomio caratteristico $\lambda^2+\overline{3}\lambda+\overline{3}$, autovalori $\overline{1}$ e $\overline{3}$, autovettori

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(\overline{1},\overline{3}),(\overline{2},\overline{6}),(\overline{3},\overline{2}),(\overline{4},\overline{5}),(\overline{5},\overline{1}),(\overline{6},\overline{4})\}, \\ V_3 &= \{(\overline{1},\overline{4}),(\overline{2},\overline{1}),(\overline{3},\overline{5}),(\overline{4},\overline{2}),(\overline{5},\overline{6}),(\overline{6},\overline{3})\}. \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico di D è $\lambda^2+\overline{5}\lambda$, gli autovalori sono $\overline{0}$ e $\overline{2}$, gli autovettori

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(\overline{1},\overline{5}),(\overline{2},\overline{3}),(\overline{3},\overline{1}),(\overline{4},\overline{6}),(\overline{5},\overline{4}),(\overline{6},\overline{2})\}, \\ V_2 &= \{(\overline{6},\overline{1}),(\overline{5},\overline{2}),(\overline{4},\overline{3}),(\overline{3},\overline{4}),(\overline{2},\overline{5}),(\overline{1},\overline{6})\}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.8.10. La matrice A ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + 8$, autovalori 6 e 5, autovettori

$$V_6 = \{(4y, y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\},$$
$$V_5 = \{(y, 8y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\}.$$

La matrice B ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + 6\lambda$, autovalori 0 e 5, autovettori

$$V_0 = \{(9y, y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\},$$
$$V_5 = \{(y, 2y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\}.$$

La matrice C ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + 7\lambda + 4$, autovalore 2, autovettori

$$V_2 = \{(2y, y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\}.$$

La matrice D ha polinomio caratteristico $\lambda^2 + 5\lambda + 9$, autovalore 3, autovettori

$$V_3 = \{(y, 2y) : y \in \mathbb{Z}_{11} \setminus \{0\}\}.$$

Esercizio 7.9.1. I risultati dei calcoli proposti sono rispettivamente le matrici:

$$\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{7} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{0} & \overline{5} \\ \overline{1} & \overline{6} & \overline{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{7} \\ \overline{4} & \overline{6} & \overline{7} & \overline{5} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{2} \end{pmatrix}, \qquad (\overline{0}, \overline{0}).$$

Esercizio 7.9.2. Si ha $\det H = 0$, quindi H non è invertibile; $\det K = -\frac{112}{45} \neq 0$, pertanto K è invertibile e

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 165/56 & -15/56 & -75/56 \\ 15/28 & -1/4 & -45/28 \\ 45/56 & -9/28 & -51/56 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.9.3. Si ha

$$C^T = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{2} \end{pmatrix}$$

Essendo $\det C = \overline{0}$, la matrice C non è invertibile. Inoltre risulta

$$D^T = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

Poiché poi $\det D = \overline{2} \neq \overline{0}$, la matrice D è invertibile e di ha

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.9.4. Si ha:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -4 & -3 & -9 \\ 7 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poiché poi $\det A = 0 = \det B$, le due matrici sono non invertibili.

Esercizio 7.9.5. Se $n = 0$, si ha

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l’asserto è verificato. Sia dunque $n > 0$ e si supponga

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.9.6. Entrambi i sistemi ammettono un’unica soluzione che può essere determinata per esempio con la regola di Cramer. La soluzione del primo sistema è $(-113/19, -83/19, -106/19)$, quella del secondo $(\overline{10}, \overline{4})$.

Esercizio 7.9.7. Se $n = 2$ si ha

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 8^2 & 0 \\ 0 & 8^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8^2 & 4 + (-1)^{2-1}4 \\ 0 & (-8)^2 \end{pmatrix}.$$

Supposto $n > 2$ e, per ipotesi di induzione,

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 8^{n-1} & 8^{n-3}(4 + (-1)^{n-2}4) \\ 0 & (-8)^{n-1} \end{pmatrix},$$

l’asserto si ottiene subito eseguendo il prodotto righe per colonne $A^n = A^{n-1}A$. Si ha poi che:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 47 & -33 \\ 0 & 8 & -56 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -33 & 34 & 30 \\ 10 & -16 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/64 \\ 0 & -1/8 \end{pmatrix}.$$

Infine $\det C = 91$.

Esercizio 7.9.8. Si consideri il generico elemento di G, cioè una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

allora risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I tre sottoinsiemi S, T, V di G sono non vuoti perché contengono la matrice identica. Inoltre si ha:

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a-x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$$

per ogni

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in S;

$$HC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b-y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$$

per ogni

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in T;

$$MN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c-z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$$

per ogni

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V.$$

Quindi i sottoinsiemi S, T e V sono sottogruppi di G. Si può poi osservare che l'unico normale è S.

L'applicazione g è ben posta, è un omomorfismo, è suriettiva ma non è iniettiva. Infine se $K = \mathbb{Z}_2$, allora G ha ordine 8 e non è abeliano.

Esercizio 7.9.9. Se $n = 1$, allora $\det A^1 = \det A = -6 - 6 = -12 = (-1)12$ e l'asserto è verificato. Sia $n > 1$ e si assuma, per ipotesi di induzione, $\det A^{n-1} = (-1)^{n-1}12^{n-1}$; allora applicando il teorema di Binet si ha $\det A^n = \det(A^{n-1}A) = \det A^{n-1} \det A = (-1)^{n-1}12^{n-1}(-1)12 = (-1)^n 12^n$.

Esercizio 7.9.10. Il ragionamento è analogo a quello dell'esercizio precedente.

Esercizio 7.9.11. Se $n = 1$, allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} A^1 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$$

e l'asserto è verificato. Si assuma $n > 1$ e, per ipotesi di induzione,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} A^{n-1} = \begin{pmatrix} 8^{n-1} & 8^{n-1} \\ 8^{n-1} & -8^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Allora da $A^n = A^{n-1}A$ segue l'asserto.

Esercizio 7.9.12. Si ragioni come nell'Esercizio 7.9.11.

Esercizio 7.9.13. Si ragioni come nell'Esercizio 7.9.11.

Esercizio 7.9.14. Si ragioni come nell'Esercizio 7.9.11.

Esercizio 7.9.15. Si veda l'Esercizio 7.9.4.

Esercizio 7.9.16. Si veda l'Esercizio 7.9.3.

Esercizio 7.9.17. Per quanto riguarda la matrice A si veda l'Esercizio 7.9.2. Si ha poi

$$B^T = \begin{pmatrix} 2/5 & 7/2 & 0 \\ -1/3 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 2/3 \end{pmatrix};$$

risulta $\det B = -17/9$, ed infine

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 60/17 & -2/17 & -30/17 \\ 21/17 & -12/85 & -36/17 \\ 63/85 & -18/85 & -285/170 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.9.18. Si ha

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 5 & -12 & 10 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

risulta $\det H = 24$, pertanto H ha rango 3, è invertibile, e

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -37/12 & 16/12 & 31/12 \\ -10/12 & 1/3 & 10/12 \\ 13/24 & -1/6 & -7/24 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ammette come unica soluzione la terna $(47/12, 7/6, -11/24)$. Il polinomio caratteristico di T è $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda$ e gli autovalori sono 0, $(3+\sqrt{37})/2$ e $(3-\sqrt{37})/2$.

Esercizio 7.9.19. Si osservi che $\det A_n = n + 1$ e $\det B_n = n + 10$. Le matrici A_n e B_n sono non invertibili se e solo se i loro determinanti sono non invertibili modulo 11 e 13 rispettivamente, quindi se e solo se $n - 10 \equiv 0 \pmod{11}$ e $n - 3 \equiv 0 \pmod{13}$. Il sistema di equazioni congruenziali che si ottiene può essere risolto utilizzando il teorema cinese del resto, ed ammette come soluzione tutti e soli i numeri interi della classe di 120 modulo 143. Tra questi i numeri positivi minori di 500 sono 120, 263 e 406.

Esercizio 7.9.20. Si ha

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -10 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

risulta $\det H = 96$, pertanto H ha rango 3, è invertibile e

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 7/24 & -1/6 \\ 1/4 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.9.21. Si veda l'esercizio precedente.

Esercizio 7.9.22. Risulta $\det H = 5$, pertanto H è invertibile e si ha

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix};$$

Esercizio 7.9.23. Si ha

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 11 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

inoltre $\det H = -24$, per cui H ha rango 3, è invertibile, e

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & -11/24 & -1/4 \\ -7/8 & -5/8 & -1/4 \\ 3/8 & 19/24 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ammette come unica soluzione la terna $(-5/8, -5/8, 5/8)$.

Esercizio 7.9.24. Risulta $\det H = 6$, quindi H ha rango 3 ed è invertibile. Si ha

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -8/3 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'unica soluzione del sistema è $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$.

Esercizio 7.9.25. La matrice B_t è invertibile se e solo se $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$; B_2 ha rango 4. Poiché $\det H = 10$, H è invertibile e

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & -9/5 & 1/5 & 4/5 \\ -2 & 3 & -4/5 & 3/2 \\ 6/5 & -2/5 & 1/5 & -3/5 \\ -1/5 & 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

L'unica soluzione del sistema lineare è $(1, -9/2, 1, 3/2)$.

Esercizio 7.9.26. La matrice B_t è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 2\}$. Il rango di B_2 è 3. Poiché $\det H = -312$, H è invertibile e si ha

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -3/52 & -1/52 & 11/52 \\ 3/52 & 1/52 & 19/156 \\ 1/52 & -9/52 & -11/156 \end{pmatrix}.$$

L'unica soluzione del sistema è $(-7/3, 0, -1/3, 0)$.

8

Spazi vettoriali

Esercizio 8.1.1. Poiché l'addizione in F è associativa è immediato osservare che, per ogni $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n), (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in F^n$, si ha

$$((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n)) + (\nu_1, \ldots, \nu_n) = \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + ((\mu_1, \ldots, \mu_n) + (\nu_1, \ldots, \nu_n)).$$

La commutatività dell'addizione in F comporta poi che

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) + (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

per ogni $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in F^n$. È poi facile verificare che la n-upla le cui coordinate sono tutte uguali all'elemento di F neutro rispetto all'addizione è elemento neutro rispetto all'addizione in F^n. Per concludere che la struttura $(F^n, +)$ è un gruppo abeliano basta infine osservare che ogni elemento $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$ è dotato di opposto: la n-upla $(-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n)$ le cui coordinate sono gli opposti in F delle coordinate di ugual posto della n-upla considerata.

Siano $\lambda \in F$ e $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in F^n$, allora la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione in F comporta che:

$$\lambda((\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n)) = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \lambda(\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Sempre in virtù della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione in F si ha che, per ogni $\lambda, \mu \in F$ e per ogni $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$,

$$(\lambda + \mu)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

La proprietà associativa della moltiplicazione in F assicura poi che

$$(\lambda\mu)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda(\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$$

per ogni $\lambda, \mu \in F$ e per ogni $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$.

Infine, se 1 è l'elemento di F neutro rispetto alla moltiplicazione, si ha

$$1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (1\lambda_1, \ldots, 1\lambda_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

per ogni $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$.

Esercizio 8.1.2. Siano A un anello unitario, F un sottoanello di A unitario e con la stessa unità di A e si supponga che F sia un campo. Allora considerato $A^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in A\}$ e posto

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

per ogni $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ e

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

per ogni $\alpha \in F$ e per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ si ottiene la struttura $(A^n, +, \cdot)$ che, come è facile verificare in analogia a quanto fatto nel precedente esercizio, è un F-spazio vettoriale.

Si noti che nel testo, erroneamente, non è esplicitamente richiesto che A e F siano unitari e che abbiano la stessa unità.

Esercizio 8.1.3. Siano $\alpha, \beta \in F$ e $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in F[x]$; applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione in F e le proprietà commutativa ed associativa dell'addizione, si ha che:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) f(x) &= (\alpha + \beta)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \beta(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x).\end{aligned}$$

Inoltre la proprietà associativa di cui gode l'addizione in F assicura che

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) f(x) &= (\alpha\beta)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= \alpha(\beta(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)) \\ &= \alpha(\beta f(x)).\end{aligned}$$

Se poi si considera $1 \in F$ è immediato osservare che $1f(x) = f(x)$. Siano infine $\alpha \in F$ e $f(x), g(x) \in F[x]$; è facile verificare che $\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$. Tutto questo assicura che $(F[x], +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su F.

Esercizio 8.1.7. Si può per esempio osservare che non vale la proprietà (vii) della definizione di spazio vettoriale. Infatti se si considerano $2, 3 \in \mathbb{R}$ e $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$, risulta $(2 + 3) \star (1, 1) = 5 \star (1, 1) = (25, 25)$ mentre $2 \star (1, 1) + 3 \star (1, 1) = (4, 4) + (9, 9) = (13, 13)$.

Esercizio 8.2.1. Se W è un sottospazio di V, allora è non vuoto ed è stabile rispetto alle operazioni; pertanto per ogni $\alpha, \beta \in F$ e per ogni $x, y \in W$ si ha che $\alpha x, \beta y \in V$ e poi $\alpha x + \beta y \in V$.

Viceversa se W è non vuoto e gode della proprietà di cui all' enunciato allora per ogni $\alpha \in F$ e $x \in W$ si ha che $\alpha x = \alpha x + 0 = \alpha x + 0x \in W$ e quindi W è stabile per la legge esterna; inoltre per ogni $x, y \in W$ si ha che $x - y = 1x + (-1)y \in W$. La 8.2.1 assicure che W è un sottospazio di V.

Esercizio 8.2.2. Se W è un sottospazio di V allora $(W, +)$ è un sottogruppo di $(V, +)$ per cui $0 \in W$. Per provare che $\alpha x + \beta y \in W$ per ogni $\alpha, \beta \in F$ e per ogni $x, y \in W$ si procede come nell'esercizio precedente. Il viceversa è immediato; basta osservare che $W \neq \emptyset$, perché $0 \in W$ e poi l'asserto segue dalla 8.2.2.

Esercizio 8.2.3. Per esempio si consideri il campo reale e lo si riguardi come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Dall'esempio 8.2.3 segue che gli unici sottospazi sono $\{0\}$ e $\mathbb{R}$ e quindi per esempio il sottogruppo $(\mathbb{Q}, +)$ del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ non è un sottospazio.

Esercizio 8.2.4. La matrice nulla è una matrice singolare per cui l'insieme W delle matrici non singolari, non essendo un sottogruppo di $(M_2(\mathbb{R}), +)$, certamente non è un sottospazio.

Per quanto riguarda l'insieme delle matrici singolari, questo non è stabile rispetto alla somma di matrici infatti per esempio le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono singolari ma hanno come somma la matrice identica che non è singolare.

Esercizio 8.2.5. W_3 non è un sottospazio infatti il vettore nullo $(0, 0)$ non è un suo elemento essendo $0 + 0 \neq 1$.

W_1 è un sottospazio perché $(0, 0) \in W_1$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, per ogni $(x, x), (a, a) \in W_1$ si ha che $\alpha(x, x) + \beta(a, a) = (\alpha x + \beta a, \alpha x + \beta a)$ e quest'ultimo è un elemento di W_1 perché ha le coordinate uguali.

Analogamente si osserva che W_2 e W_4 sono sottospazi.

Esercizio 8.2.6. Gli insiemi W_3 e W_4 non sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ perché, come è facile osservare, non contengono il vettore nullo. Invece $W_1 = \{(0, 0, 0)\}$, W_2 e W_5 sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$: per verificarlo si può procedere come nel precedente esercizio.

Esercizio 8.2.7. Il sottoinsieme W_1 non è un sottospazio di $\mathbb{Q}^3$ infatti per esempio $(0, 1, -1), (0, 1, 1) \in W_1$ mentre la loro somma $(0, 1, -1) + (0, 1, 1) = (0, 1, 0) \notin W_1$. Ragionando come negli esercizi precedenti si può poi osservare che W_2, W_3, W_4 sono sottospazi di $\mathbb{Q}^3$.

Esercizio 8.2.8. Procedendo come negli esercizi precedenti è facile verificare che ciascuno dei sottoinsiemi considerati è un sottospazio di $\mathbb{Z}_7^4$.

Esercizio 8.2.9. La matrice nulla è elemento di W pertanto $W \neq \emptyset$. Per provare che tale insieme è un sottospazio basta osservare che, per ogni $h, k \in \mathbb{Q}$ e per ogni $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \in W$, si ha che

$$h \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h\alpha + k\alpha_1 \\ h\beta + k\beta_1 & h\gamma + k\gamma_1 \end{pmatrix} \in W.$$

Esercizio 8.2.10. Poiché per ogni $i \in I$ il sottoinsieme W_i è un sottospazio di V si ha che il vettore nullo $0 \in W_i$ per ogni $i \in I$ e questo comporta che $0 \in \bigcap_{i \in I} W_i$ pertanto l'intersezione è non vuota.

Per provare che $\bigcap_{i \in I} W_i$ è un sottospazio di V basta quindi notare che per ogni $\alpha, \beta \in F$ e per ogni $u, v \in\in \bigcap_{i \in I} W_i$ si ha che $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{i \in I} W_i$ perché $u, v \in W_i$ per ogni $i \in I$ e quindi, per ogni $\alpha, \beta \in F$, è $\alpha u + \beta v \in W_i$ per ogni $i \in I$.

Esercizio 8.2.11. Si noti che con $x \in F \setminus \{0\}$ risulta $\langle x \rangle = \{\alpha x : \alpha \in F\}$ e poiché per ogni $y \in F$ è $y = (yx^{-1})x \in \langle x \rangle$ si ha che $\langle x \rangle = F$. Questo comporta che $\{x\}$ è un sistema di generatori dell'F-spazio vettoriale F. L'unico sottoinsieme proprio di $\{x\}$ è $\emptyset$, ed essendo $\langle \emptyset \rangle = \{0\} \subset F$, si ha che $\{x\}$ è un insieme di generatori minimale.

Per quanto riguarda F^n con $n > 1$, si noti che

$$\begin{aligned} \langle e_1, \ldots, e_n \rangle &= \{x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n : x_1, \ldots, x_n \in F\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in F\} \\ &= F^n. \end{aligned}$$

Questo comporta che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è un sistema di generatori di F^n.

Sia $X \subset \{e_1, \ldots, e_n\}$, allora esiste $m \in \{e_1, \ldots, e_n\}$ tale che $e_m \notin X$ e non è difficile osservare che per ogni $(y_1, \ldots, y_n) \in \langle X \rangle$ si ha che $y_m = 0$. Questo comporta che $e_m \notin \langle X \rangle$ e quindi $\langle X \rangle \subset F^n$. Dunque $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è minimale tra i sistemi di generatori di F^n.

Esercizio 8.2.12. È immediato osservare che $\langle 1, x, \ldots, x^n \rangle = F[x; n]$; infatti

$$\begin{aligned} \langle 1, x, \ldots, x^n \rangle &= \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in F\} \\ &= \{f(x) \in F[x] : v(f(x)) \leq n\}. \end{aligned}$$

Sia $X \subset \{1, x, \ldots, x^n\}$, allora esiste $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tale che $x^m \notin X$. Pertanto $\langle X \rangle$ non contiene polinomi di grado m e questo comporta che $x^m \notin \langle X \rangle$.

Esercizio 8.2.13. Si noti che

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \langle (2, 0, 0), (0, -3, 0) \rangle \\ &= \{\alpha(2, 0, 0) + \beta(0, -3, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2\alpha, -3\beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ovvero
$$\langle V\rangle = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
perché per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha che $(x, y, 0) = (2\alpha, -3\beta, 0)$ con $\alpha = x/2$ e $\beta = -y/3$.

In particolare, il vettore $(5, -2, 0) \in \langle V\rangle$, infatti $(5, -2, 0) = (2\alpha, -3\beta, 0)$ con $\alpha = 5/2$ e $\beta = 2/3$.

Esercizio 8.3.1. Per assurdo si supponga $\{x + y, x - y, x - 2y + z\}$ linearmente dipendente. Allora esistono $\alpha, \beta, \gamma \in F$ non tutti nulli tali che
$$\alpha(x+y)+\beta(x-y)+\gamma(x-2y+z) = (\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha-\beta-2\gamma)y+\gamma z = 0.$$
Poiché però x, y, z sono linearmente indipendenti, si ha che $\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha - \beta - 2\gamma = 0, \gamma = 0$. Queste ultime tre relazioni danno luogo ad un sistema omogeneo nelle incognite α, β, γ che ammette una soluzione non banale il che è in contraddizione con il fatto che la sua matrice è non singolare.

Esercizio 8.3.8. Si osservi che con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\alpha(1, 0, 0) + \beta(2, 1, 0) = (0, 0, 0)$ se e solo se $(\alpha + 2\beta, \beta, 0) = (0, 0, 0)$ ovvero se e solo se $\alpha + 2\beta = 0$ e $\beta = 0$ e quindi se e solo se $\alpha = 0 = \beta$. Questo comporta che A è linearmente indipendente.

Si noti che gli scalari non nulli $2, 1 \in \mathbb{R}$ sono tali che la combinazione lineare $2(0, 2, 3) + 1(0, -4-, 6) = (0, 0, 0)$. Pertanto B è linearmente dipendente.

Analogamente si può provare che C è linearmente dipendente e che D è linearmente indipendente.

Esercizio 8.3.9. A è una base di $\mathbb{R}^2$ infatti è linearmente indipendente massimale; B è linearmente dipendente, non è un sistema di generatori né una base di $\mathbb{R}^2$; C è linearmente indipendente massimale e quindi è una base di $\mathbb{R}^2$; D è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$ ma non è una base (infatti avendo ordine maggiore della dimensione dello spazio è linearmente dipendente).

Esercizio 8.3.10. L'insieme $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ è una base di V che quindi ha dimensione 3. L'insieme $\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1)\}$ è una base di W che quindi ha dimensione 2.

Esercizio 8.3.11. Una base del sottospazio considerato è per esempio l'insieme $\{(1, 1, 2, 3), (0, -1, -5, -9), (0, 0, -2, -4)\}$; quindi la dimensione è 3.

Esercizio 8.3.12. Una base è per esempio l'insieme costituito dai due polinomi $-3 + x + x^2$ e $-5 + 6x + x^3$ e quindi la dimensione è 2.

Esercizio 8.3.13. Sono basi di W_1 gli insiemi:

$$\{(1,0,1),(0,1,9)\},\{(1,0,1),(1,1,10)\},\{(1,10,3),(0,1,9)\};$$

sono basi di W_2 gli insiemi:

$$\{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\},\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$
$$\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\};$$

sono basi di W_3 gli insiemi:

$$\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$
$$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}.$$

Esercizio 8.3.14. Le tre matrici considerate sono linearmente indipendenti ma non costituiscono una base dello spazio vettoriale considerato perché quest'ultimo ha dimensione 6.

Esercizio 8.3.15. È facile osservare che

$$\langle B\rangle = \{(-x+y-z,-x-y,-x) : x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

Per ogni $a,b,c\in\mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} -x+y-z=a \\ -x-y=b \\ -x=c \end{cases}$$

nelle incognite x,y,z è di Cramer. Questo vuol dire che per ogni $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ esistono e sono univocamente determinati i numeri reali x,y,z tali che $(a,b,c) = (-x+y-z,-x-y,-x)$ e quindi che B è una base di $\mathbb{R}^3$.

Le componenti di v in B sono $(2,-3,-2)$, quelle di w sono $(0,-1,-1)$.

Esercizio 8.4.3. L'applicazione $gof : V_1 \to V_3$ è lineare: infatti considerati comunque $v,u\in V_1$ e $\alpha,\beta\in F$ si ha che $(gof)(\alpha v+\beta u) = g(f(\alpha v+\beta u)) = g(\alpha f(v)+\beta f(u)) = \alpha g(f(v))+\beta g(f(u)) = \alpha(gof)(v)+\beta(gof)(u)$

Esercizio 8.4.4. Siano $x\in V_1$ e $n\in\mathbb{Z}$; se $n=0$ allora $f(nx)=f(0x)=f(0)=0$ per la 6.3.16; sia dunque $n>0$ e si supponga $f((n-1)x)=(n-1)f(x)$. Allora $f(nx)=f(x+(n-1)x)=f(x)+f((n-1)x)=f(x)+(n-1)f(x)=nf(x)$. Il principio di induzione assicura dunque l'asserto per ogni $n\geq 0$.

Sia $n < 0$, allora $nx = (-n)(-x)$ con $-n > 0$ e per quanto prima provato e per la 6.3.16 si ha $f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)f(-x) = (-n)(-f(x)) = nf(x)$.

Esercizio 8.4.5. Siano $x, y \in V_2$ e $\alpha, \beta \in F$; allora $f(f^{-1}(\alpha x + \beta y)) = id_{V_2}(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha f(f^{-1}(x)) + \beta f(f^{-1}(y)) = f(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y))$ da cui, essendo f iniettiva, segue $f^{-1}(\alpha x+\beta y) = \alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)$. Quest'ultima uguaglianza assicura che f^{-1} è lineare.

Esercizio 8.4.6. L'applicazione f non è linerare, infatti $f((0,0)) = (1,1) \neq (0,0)$.

Esercizio 8.4.7. La prima applicazione considerata non è lineare, infatti per esempio $f((0,0,0)) = (3,0,0) \neq (0,0,0)$. Anche la seconda non è lineare, infatti $f((0,0,1)) + f((1,1,1)) = (0,-1,1) + (1,0,1) = (1,-1,2) \neq (1,-1,4) = f((1,1,2)) = f((0,0,1) + (1,1,1))$. La terza ed ultima applicazione considerata è invece lineare: infatti $f(\alpha(a,b,c)+\beta(x,y,z)) = (2(\alpha b+\beta y)-(\alpha c+\beta z), \alpha a+\beta x + 4(\alpha c + \beta z), 0) = \alpha f(a,b,c) + \beta f(x,y,z)$.

9

Elementi di geometria analitica

Esercizio 9.2.1. Le componenti di un vettore direttore delle rette OA, OB e AB sono rispettivamente $(-5, 7)$, $(3, 2)$ e $(8, -5)$.

Esercizio 9.2.2. Una coppia di giacitura di π_1 è costituita dai vettori di componenti $(1, 2, -5)$ e $(-2, -3, 2)$; una coppia di giacitura di π_2 è costituita dai vettori di componenti $(0, 3, -2)$ e $(1, 5, -7)$; una coppia di giacitura di π_3 è costituita dai vettori di componenti $(0, 3, -2)$ e $(-2, 0, 0)$.

Esercizio 9.2.3. Un vettore direttore di HK ha componenti $(14, -2, 5)$.

Esercizio 9.3.3. Il piano per i punti A, B, C ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha - 3\beta \\ z = 5 - 4\alpha - 3\beta \end{cases}$$

e il punto D non appartiene ad esso perché il sistema

$$\begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha - 3\beta = 0 \\ -4\alpha - 3\beta = -3 \end{cases}$$

nelle incognite α, β non ammette soluzioni.

Le rette AB e CD sono sghembe.

Esercizio 9.3.4. (i) Il piano π_1 ha equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 + 6\beta \\ z = -\alpha + 9\beta. \end{cases}$$

Il piano π_2 ha equazioni

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 1 + \alpha - 3\beta \\ z = -1 + 2\alpha. \end{cases}$$

(ii) Le rette considerate non sono complanari.

Esercizio 9.3.5. (i) Le rette considerate sono incidenti e quindi complanari. Le coordinale del punto P_0 comune alle due rette sono $(-1, -2, -1)$ e il piano che contiene le due rette, ovvero il piano per P_0 una cui coppia di giacitura è quella dei vettori direttori delle due rette, ha equazioni:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\alpha + \beta \\ y = -2 + \alpha + 4\beta \\ z = -1 + 3\alpha + 3\beta. \end{cases}$$

(ii) Per provare che i punti considerati non sono allineati basta scrivere per esempio le equazioni parametriche della retta AB e osservare che non esistono valori del parametro per i quali si ottengono le coordinate di C. Il piano π_1 ha equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 8\beta \\ y = \alpha \\ z = 3 - 2\alpha + 6\beta. \end{cases}$$

(iii) I piani π e π_1 non sono paralleli.

Esercizio 9.3.6. Le rette considerate sono complanari incidenti. Le coordinate del punto comune alle due rette sono $(3, 4, 0)$, mentre le equazioni parametriche del piano che contiene le due rette sono:

$$\begin{cases} x = 3 + \alpha + \beta \\ y = 4 + 3\alpha + \beta \\ z = -\alpha + \beta. \end{cases}$$

Esercizio 9.3.7. (i) Le equazioni parametriche del piano π_1 sono:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + 2\beta \\ z = \alpha + 3\beta. \end{cases}$$

Le equazioni parametriche del piano π_2 sono:

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -1 + 2\alpha + 5\beta. \end{cases}$$

Le equazioni parametriche del piano π_3 sono:

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = 1 - 2\alpha + \beta \\ z = 2\beta. \end{cases}$$

(ii) Le rette considerate sono complanari incidenti e le coordinate del punto comune alle due rette sono $(2, 4, 3)$.

Esercizio 9.3.8. (i) La retta r ha parametri direttori $(-1, 0, 1)$ e la retta s_h ha parametri direttori $(-1, h + 2, 1)$. Dunque le due rette sono parallele se e solo se $h + 2 = 0$ cioè se e solo se $h = -2$.
(ii) Non esistono siffatti valori di h.

Esercizio 9.3.9. (i) Le equazioni parametriche di s sono:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$$

(ii) Le equazioni parametriche di π sono:

$$\begin{cases} x = -1 + \alpha + \beta \\ y = 1 + \beta \\ z = -2 + 3\alpha + 2\beta. \end{cases}$$

(iii) Il punto Q_1 appartiene sia alla retta s che al piano π.

Esercizio 9.3.10. Le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$$

Il punto Q non appartiene ad r.

Esercizio 9.3.11. Le due rette si intersecano nel punto P di coordinate $(2/5, 9/5)$.

Esercizio 9.3.12. L'origine del riferimento, ossia il punto di coordinate $(0, 0)$, è un punto di r_a se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $t + 2 = 0 = -1 + at$, e ciò accade se e solo se $a = -1/2$.

Esercizio 9.3.13. La retta r_1 ha parametri direttori $(1, 0)$ e la retta r_2 ha parametri direttori $(-1, -2)$. Poiché $-2 + 1 = -1 \neq 0$ tali rette sono incidenti. Le coordinate del punto di intersezione sono $(3/2, 1)$.

Esercizio 9.3.14. Le due rette si intersecano se e solo se $a = -1$ e le coordinate del punto di intersezione sono $(-8, -1)$.

Esercizio 9.3.15. La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2t \\ z = 4 - 6t, \end{cases}$$

e la retta r_1 ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 5 - 8t'. \end{cases}$$

Poiché il sistema

$$\begin{cases} 3 - 4t = 2 - 2t' \\ \quad\ 2t = 2 - 2t' \\ 4 - 6t = 5 - 8t' \end{cases}$$

è compatibile, tali rette sono incidenti e le coordinate del punto di incidenza sono $(1, 1, 1)$.

Esercizio 9.3.16. Le due rette si intersecano per ogni $a \neq 0$ e le coordinate del punto di intersezione sono $(-1/2, 1, 3/2)$.

Esercizio 9.4.1. La retta AB ha equazione $13x + 8y - 107 = 0$, la retta CD ha equazione $45x + 7y + 41 = 0$. Le due rette sono incidenti e le coordinate del punto di intersezione sono $(23435/3497, 5348/269)$.

Esercizio 9.4.2. La retta A_hC ha equazione cartesiana $13x+(h+6)y-45-14h = 0$, ed è parallela all'asse y se e solo se $h = -6$.

Esercizio 9.4.3. (i) Non esistono valori di h per i quali i tre punti sono allineati.
(ii) L'equazione cartesiana del piano per A, B e C_0 è $x + y - 2z - 2 = 0$.

Esercizio 9.4.4. (i) I punti sono complanari se e solo se $h = 4$.
(ii) Le equazioni cartesiane della retta AB sono

$$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ y + 3z - 6 = 0. \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane della retta CD_h sono

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + (h-1)y - h + 2 = 0. \end{cases}$$

Non esistono valori di h per i quali le due rette sono parallele.

Esercizio 9.4.5. L'equazione cartesiana del piano π è $14x + 25y + 8z = 0$, quelle della retta r sono

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$$

Il piano e la retta sono incidenti e le coordinate del punto di incidenza sono $(109/63, -2/21, -172/63)$.

Esercizio 9.4.6. La retta r ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 7x + 8y = 0 \\ 5y + 7z = 0, \end{cases}$$

ed il piano π ha equazione cartesiana $29x + 26y - 10z - 75 = 0$. Il piano e la retta sono paralleli.

Esercizio 9.4.7. Si veda l'Esercizio 9.4.5.

Esercizio 9.4.8. (i) Le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 7y - 3z - 23 = 0. \end{cases}$$

(ii) Le equazioni cartesiane di s sono

$$\begin{cases} x - 3z + 23 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

(iii) La retta r ha parametri direttori $(6, -3, 9)$, la retta s ha parametri direttori $(9, 0, 3)$ e, poiché la matrice che ha per righe tali vettori numerici ha rango 2, le due rette non sono parallele. Il punto di intersezione ha coordinate $(-1, 7, 0)$.

Esercizio 9.5.1. L'origine del riferimento non appartiene alla circonferenza considerata: infatti sostituendo le coordinate $(0, 0)$ del punto O al posto di x e y nell'equazione si ottiene $17 \neq 0$.

Esercizio 9.5.2. L'equazione richiesta è $x^2 + y^2 + 14x - 2y + 9 = 0$.

Esercizio 9.5.3. Poiché il numero reale $49/4+144/4+9 = 229/4$ è positivo, l'equazione considerata rappresenta una circonferenza, e precisamente quella il cui centro ha coordinate $(7/2, -6)$ e raggio $\sqrt{229}/2$. La circonferenza considerata interseca l'asse x nei punti di coordinale $((7 - \sqrt{85})/2, 0)$ e $((7 + \sqrt{85})/2, 0)$ ed interseca l'asse delle y nei punti di coordinate $(0, -6 - 3\sqrt{5})$ e $(0, -6 + 3\sqrt{5})$.

Esercizio 9.5.4. I punti di intersezione della circonferenza considerata con la retta considerata sono due, e hanno coordinate $((-51-3\sqrt{209})/20, (-17-\sqrt{209})/20)$ e $((-51 + 3\sqrt{209})/20, (-17 + \sqrt{209})/20)$.

Esercizio 9.5.5. Le circonferenze Γ e Γ_0 hanno in comune i due punti di coordinate $(3(5 - \sqrt{93})/34, (-9 - 5\sqrt{93})/34)$ e $(3(5 + \sqrt{93})/34, (-9 + 5\sqrt{93})/34)$.

Esercizio 9.6.1. Le rette considerate sono ortogonali; infatti hanno parametri direttori $(2, 3)$ e $(-6, 4)$ rispettivamente, e si ha $2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 = -12 + 12 = 0$.

Esercizio 9.6.2. La retta richiesta ha equazione $bx - ay = 0$.

Esercizio 9.6.3. Le rette r e r_k hanno parametri direttori $(3, 2, -5)$ e $(k, 2 - k, 0)$ rispettivamente. Dunque r e r_k sono perpendicolari se e solo se $3k+2(2-k) = 0$, cioè se e solo se $k = -4$. Poiché poi i vettori numerici $(3, 2, -5)$ e $(k, 2 - k, 0)$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha che non esistono valori di k per cui le due rette sono parallele.

Esercizio 9.7.1. (i) Il punto P ha coordinate $(-59/10, 7/5, 43/10)$.
(ii) La retta OP non è ortogonale ad r ed ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -59/10t \\ y = 7/5t \\ z = 43/10t. \end{cases}$$

(iii) L'equazione cartesiana di Γ è $50x^2 + 50y^2 + 100x - 2713 = 0$.
(iv) L'intersezione della circonferenza Γ con la retta s è costituita da due punti.

Esercizio 9.7.2. (i) La circonferenza Γ_a ha centro nel punto di coordinate $(-a, 2)$ e raggio $\sqrt{a^2 - 3a + 4}$.
(ii) L'origine del riferimento è un punto di Γ_a se e solo se $a = 0$.
(iii) La circonferenza è tangente all'asse y se $a = 4/3$, non ha punti di intersezione con tale retta se $a > 4/3$, mentre se $a < 4/3$ l'intersezione è costituita da due punti.
(iv) La retta in questione ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -a - t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$$

Esercizio 9.7.3. La circonferenza ha equazione $4x^2 + 4y^2 - 8kx + 8(k-2)y + 4(k^2+(k-2)^2)-1 = 0$, la retta ha equazione $x+y-2 = 0$. Retta e circonferenza hanno in comune due punti, un punto o nessun punto rispettivamente quando $k > -1/8$, $k = -1/8$, $k < -1/8$.

Esercizio 9.7.4. (i) I punti sono allineati se e solo se $h = 11$.
(ii) Il piano ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - 3\beta \\ y = -1 + 4\alpha + \beta \\ z = 2 - 3\alpha - 9\beta. \end{cases}$$

(iii) I piani considerati sono paralleli.

Esercizio 9.7.5. (i) Le rette sono parallele se e solo se $k = 1$.
(ii) Le rette sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(iii) Non esistono valori di k per i quali le rette sono incidenti.
(iv) La retta è parallela al piano se $k = 47$.

Esercizio 9.7.6. (i) Le rette sono parallele se e solo se $k = -2$.
(ii) Le rette sono sghembe per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
(iii) Non esistono valori di k per i quali le rette sono incidenti.
(iv) La retta è parallela al piano se $k = -11/2$.

10

Reticoli, grafi, alberi

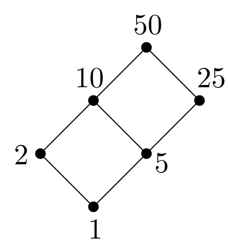
Esercizio 10.1.1. Sia S un insieme, e si consideri l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, dove $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S e $\subseteq$ è la usuale relazione d'inclusione insiemistica. Per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ risulta $X \cup Y \in \mathcal{P}(S)$; inoltre $X, Y \subseteq X \cup Y$, e da $X, Y \subseteq Z$ segue $X \cup Y \subseteq Z$. Pertanto $X \cup Y = \sup_{\mathcal{P}(S)}\{X, Y\}$ per la (2.4.4). Analogamente si prova che $X \cap Y = \inf_{\mathcal{P}(S)}\{X, Y\}$ per la (2.4.3). In particolare $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo avente S come massimo e Ø come minimo. Siccome poi l'unione e l'intersezione di due sottoinsiemi finiti di S sono ancora sottoinsiemi finiti di S, ne segue che i sottoinsiemi finiti di S costituiscono un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Se S è infinito tale sottoreticolo risulta evidentemente privo di massimo, perché dato un qualunque sottoinsieme finito X di S, e scelto un qualunque elemento $a \in S \setminus X$, il sottoinsieme finito $X \cup \{a\}$ contiene propriamente X.

L'insieme parzialmente ordinato $(\mathbb{N}_0, |)$, dove $|$ denota la relazione del "divide", è un reticolo, in quanto per ogni $x, y \in \mathbb{N}_0$ dalle definizioni date segue subito che $\sup_{\mathbb{N}_0}\{x, y\} = \mathrm{mcm}(x, y)$ e $\inf_{\mathbb{N}_0}\{x, y\} = \mathrm{MCD}(x, y)$ (vedi 5.4). Siccome per ogni $a \in \mathbb{N}_0$ si ha $a|0$ e $1|a$, è chiaro che $0 = \max \mathbb{N}_0$, $1 = \min \mathbb{N}_0$. Fissato $n \in \mathbb{N}_0$, sia $D^*(n)$ l'insieme dei divisori positivi di n. Con $a, b \in D^*(n)$ ancora per definizione risulta $\mathrm{MCD}(a, b) \in D^*(n)$ e $\mathrm{mcm}(a, b) \in D^*(n)$, quindi $D^*(n)$ costituisce un sottoreticolo di $(\mathbb{N}_0, |)$, avente n come massimo e 1 come minimo.

Sia G un gruppo, e si denoti con $L(G)$ l'insieme dei sottogruppi di G. Denotata con $\subseteq$ l'usuale inclusione, l'insieme ordinato $(L(G), \subseteq)$ è un reticolo. Infatti per ogni $H, K \in L(G)$ per definizione $\sup_{L(G)}\{H, K\}$ è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottogruppo di G contenente H e K, dunque coincide con $\langle H, K\rangle$ (vedi 6.3); analogamente $\inf_{L(G)}\{H, K\}$ è il più grande (rispetto all'inclusione) sottogruppo di G contenuto in H e in K, dunque coincide con $H \cap K$ (vedi 6.3). Tale reticolo ha G come massimo e $\{1\}$ come minimo. Se il gruppo G è infinito, l'insieme dei sottogruppi finiti di G non è, in generale, un sottoreticolo di $L(G)$, in quanto il sottogruppo generato da una parte finita di G può ben risultare infinito. Invece l'insieme dei sottogruppi normali di G è sempre un sottoreticolo di $L(G)$. Infatti utilizzando l'Esercizio 6.3.8 si verifica subito che l'intersezione di due sottogruppi normali di G è a sua volta un sottogruppo normale di G, e che il sottogruppo generato da due sottogruppi normali di G è a sua volta normale in G. Per quest'ultima verifica si tenga presente che se $H, K \trianglelefteq G$ e $x \in \langle H, K\rangle$ allora risulta $x = x_1 x_2 \dots x_n$ con $x_i \in H \cup K$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora per ogni $g \in G$ risulta $g^{-1}xg = (g^{-1}x_1 g)(g^{-1}x_2 g) \dots (g^{-1}x_n g)$, e ciascun $g^{-1}x_i g \in H \cup K$ per la normalità in G di H e di K. Ne segue che $g^{-1}xg \in \langle H, K \rangle$ per ogni $x \in \langle H, K \rangle$ e per ogni $g \in G$, e ciò equivale al fatto che $\langle H, K \rangle \trianglelefteq G$ per l'Esercizio 6.3.8.

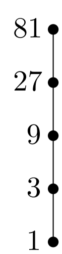
Sia S uno spazio vettoriale su un campo F, e si denoti con L l'insieme dei sottospazi di S. Allora $(L, \subseteq)$ è un reticolo. Infatti, per ogni H, $K \in L$, per definizione $\sup_L\{H, K\}$ è il più piccolo (rispetto all'inclusione) sottospazio di S contenente H e K, dunque coincide con $H + K$ (vedi 8.2.12); analogamente $\inf_L\{H, K\}$ è il più grande (rispetto all'inclusione) sottospazio di S contenuto in H e in K, dunque coincide con $H \cap K$. Tale reticolo ha S come massimo e il sottospazio nullo $\{0\}$ come minimo.

Esercizio 10.1.2. Risulta $A = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$. Il diagramma di Hasse del reticolo $(A, |)$ è il seguente:



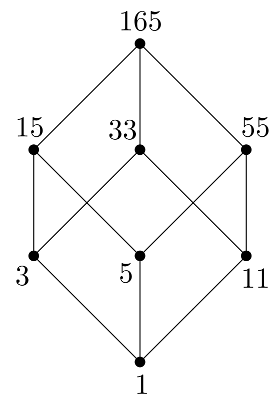
Risulta infine $(5 \vee 2) \wedge 25 = 10 \wedge 25 = 5$, $(1 \wedge 2) \vee 25 = 1 \vee 25 = 25$.

Esercizio 10.1.3. Risulta $B = \{1, 3, 9, 27, 81\}$. Il diagramma di Hasse del reticolo $(B, |)$ è il seguente:



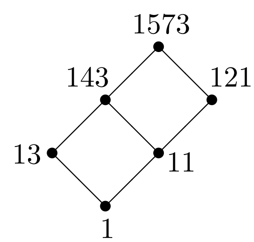
Risulta infine $(9 \vee 27) \wedge 3 = 27 \wedge 3 = 3$, $(1 \wedge 9) \vee 81 = 1 \vee 81 = 81$.

Esercizio 10.1.4. Risulta $C = \{1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165\}$. Il diagramma di Hasse del reticolo $(C, |)$ è il seguente:



Risulta infine $(55 \vee 5) \wedge 11 = 55 \wedge 11 = 11$, $(5 \wedge 11) \vee 33 = 1 \vee 33 = 33$.

Esercizio 10.1.5. Si ha $1573 = 11 \cdot 11 \cdot 13$, e $D = \{1, 11, 13, 121, 143, 1573\}$. Il diagramma di Hasse del reticolo $(D, |)$ è il seguente:



Risulta infine $(143 \vee 121) \wedge 13 = 1573 \wedge 13 = 13$, $(143 \wedge 11) \vee 13 = 11 \vee 13 = 143$.

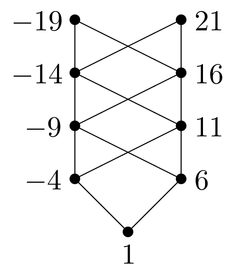
Esercizio 10.1.6. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.1.7. Sia a un elemento minimale del reticolo $(L, \leq)$. Per ogni $x \in L$ risulta $a \wedge x \leq a$, quindi $a = a \wedge x$ per la minimalità di a, e da 10.1.3 segue $x \leq a$. Pertanto a è il minimo di L. L'unicità del minimo prova allora l'unicità di a come elemento minimale in L.

Esercizio 10.1.8. La relazione $\sqsubseteq$ è banalmente riflessiva, essendo $a = a$ e quindi $a \sqsubseteq a$ per ogni $a \in \mathbb{N}_0$. Con $a, b \in \mathbb{N}_0$ si abbia $a \sqsubseteq b$ e $b \sqsubseteq a$. Se fosse $a \neq b$ dovrebbe aversi $2a < b$ e $2b < a$, quindi $2a < b \leq 2b < a$, assurdo. Pertanto $a = b$ e la relazione è asimmetrica. Infine, con $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ si abbia $a \sqsubseteq b$ e $b \sqsubseteq c$. Se $b = c$ oppure $b = a$ si ottiene subito $a \sqsubseteq c$. Ovviamente ciò vale anche se $a = c$. Si può dunque assumere che a, b e c siano a due a due distinti. Allora si ha $2a < b$ e $2b < c$, da cui $2a < c$ e di nuovo $a \sqsubseteq c$. Ciò prova che la relazione $\sqsubseteq$ è transitiva, pertanto essa è una relazione d'ordine.

In $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ i minoranti dell'insieme $\{5, 6\}$ sono 0, 1 e 2; siccome però l'insieme $\{0, 1, 2\}$ è privo di massimo in $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ (in quanto 1 e 2 non sono confrontabili), non esiste $\inf_{\mathbb{N}_0}\{5, 6\}$. Quindi $(\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ non è un reticolo.

Esercizio 10.1.9. (i) La relazione $\sqsubseteq$ è banalmente riflessiva, in quanto $a = a$ e quindi $a \sqsubseteq a$ per ogni $a \in V$. Con $a = 5h + 1$, $b = 5k + 1 \in V$, si abbia $a \sqsubseteq b$ e $b \sqsubseteq a$. Se fosse $a \neq b$ si avrebbe $|a| < |b|$ e $|b| < |a|$, una contraddizione. Pertanto $a = b$ e la relazione è asimmetrica. Infine con $a = 5h + 1$, $b = 5k + 1$, $c = 5l + 1 \in V$, si abbia $a \sqsubseteq b$ e $b \sqsubseteq c$. Se $b = c$ oppure $b = a$ si ottiene subito $a \sqsubseteq c$. Ovviamente ciò vale anche se $a = c$. Si può dunque assumere che a, b e c siano a due a due distinti. Allora si ha $|h| < |k|$ e $|k| < |l|$, da cui $|h| < |l|$ e di nuovo $a \sqsubseteq c$. Ciò prova che la relazione $\sqsubseteq$ è transitiva, pertanto essa è una relazione d'ordine.
(ii) In $(V, \sqsubseteq)$ i minoranti dell'insieme $\{11, -9\}$ sono 1, 6 e -4; siccome però l'insieme $\{1, 6, -4\}$ è privo di massimo in $(V, \sqsubseteq)$ (in quanto 6 e -4 non sono confrontabili), non esiste $\inf_V\{11, -9\}$. Quindi $(V, \sqsubseteq)$ non è un reticolo.
(iii) Si ha: $-19 = 5(-4) + 1$, $-14 = 5(-3) + 1$, $-9 = 5(-2) + 1$, $-4 = 5(-1)+1$, $1 = 5\cdot 0+1$, $6 = 5\cdot 1+1$, $11 = 5\cdot 2+1$, $16 = 5\cdot 3+1$, $21 = 5\cdot 4+1$. Pertanto il diagramma di Hasse di $(W, \sqsubseteq)$ è il seguente:



Esercizio 10.1.10. Sia X un sottoinsieme finito di un reticolo L (non necessariamente finito). Si ragioni per induzione su $|X|$. Se $|X| \leq 2$, esistono certamente $\sup_L X$ e $\inf_L X$, in quanto L è un reticolo. Si assuma ora $|X| = n > 2$, ed esista $\sup_L X = s \in L$ per ipotesi induttiva. Si consideri poi un elemento $a \in L \setminus X$, e si ponga $Y = X \cup \{a\}$. L'elemento $s \vee a \in L$, che certamente esiste in quanto L è un reticolo, risulta un maggiorante di X essendo $s = \sup_L X$. Inoltre ovviamente $a \leq s \vee a$, pertanto $s \vee a$ è un maggiorante di Y. Sia ora $m \in L$ un maggiorante di Y. Allora $x \leq m$ per ogni $x \in X$, quindi $s \leq m$ per la $(2.4.4)$. Inoltre $a \in Y$, quindi $a \leq m$. Pertanto $s \vee a \leq m$ ancora per la $(2.4.4)$. Così risulta $s \vee a = \sup_L Y$. Il principio di induzione (vedi 1.3.1) assicura allora che $\sup_L X$ esiste per ogni sottoinsieme finito X di L. Con un analogo ragionamento induttivo si dimostra che $\inf_L X$ esiste per ogni sottoinsieme finito X di L.

Ovviamente, se L è finito, ogni sottoinsieme di L lo è; così quanto appena provato dimostra l'asserto.

Esercizio 10.1.11. Sia S un insieme, e si consideri il reticolo $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, dove $\mathcal{P}(S)$ è l'insieme delle parti di S e $\subseteq$ è la usuale relazione d'inclusione insiemistica. Siccome per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(S)$ risulta $X \vee Y = X \cup Y$ e $X \wedge Y = X \cap Y$, si vede facilmente che per ogni sottoinsieme $\Omega \in \mathcal{P}(S)$ risulta

$$\sup\nolimits_{\mathcal{P}(S)}\Omega = \bigcup_{X_i \in \Omega} X_i \in \mathcal{P}(S), \qquad \inf\nolimits_{\mathcal{P}(S)}\Omega = \bigcap_{X_i \in \Omega} X_i \in \mathcal{P}(S),$$

quindi $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è completo.

Si denoti ora con $\mathcal{F}$ il sottoreticolo costituito dai sottoinsiemi finiti di S. Se S è finito allora $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ risulta completo per quanto appena dimostrato (oppure anche per l'Esercizio 10.1.10, essendo in tal caso $\mathcal{F}$ un reticolo finito). Se invece S è infinito allora $\mathcal{F}$ non è completo, in quanto l'unione di tutti i sottoinsiemi finiti di S coincide con S e dunque non è un elemento di $\mathcal{F}$.

Esercizio 10.1.12. Per quanto provato nella prima parte dell'Esercizio 10.1.10, basterà provare che esistono $\sup_{\mathbb{N}_0} X$ e $\inf_{\mathbb{N}_0} X$ per ogni sottoinsieme infinito X di $\mathbb{N}_0$. Sia X un tale sottoinsieme.

Essendo il massimo di $(\mathbb{N}_0, |)$, l'elemento 0 è certamente un maggiorante di X. Inoltre esso è l'unico maggiorante di X, in quanto un maggiorante di X deve essere multiplo delle infinite potenze di primi positivi che dividono gli elementi di X. Pertanto $0 = \sup_{\mathbb{N}_0} X$.

Un minorante di X è un elemento di $\mathbb{N}_0$ che divide ogni elemento di X. L'insieme Y dei minoranti di X è certamente non vuoto, in quanto contiene l'elemento 1. Inoltre Y è finito, in quanto ogni numero naturale ha solo un numero finito di divisori. Per quanto provato nella prima parte dell'Esercizio 10.1.10, esiste $\sup_{\mathbb{N}_0} Y$. Si denoti con s tale elemento di $\mathbb{N}_0$. Siccome ogni elemento di Y divide ciascun elemento $x \in X$, ogni $x \in X$ è maggiorante di Y in $\mathbb{N}_0$, pertanto $s|x$ per la $(2.4.4)$. Ciò prova che $s \in Y$, quindi $s = \max Y$, da cui $s = \inf_{\mathbb{N}_0} X$.

Esercizio 10.1.13. Sia G un gruppo, e sia $L(G)$ il reticolo dei sottogruppi di G. Sia Ω un insieme non vuoto di sottogruppi di G. Come osservato nel testo a pag. 222 (subito dopo 6.3.10), l'intersezione degli elementi di Ω è un sottogruppo di G. Quindi risulta $\sup_{L(G)} \Omega = \langle H : H \in \Omega \rangle$ e $\inf_{L(G)} \Omega = \cup_{H \in \Omega} H$, e $L(G)$ è completo.

Sia ora $N(G)$ il reticolo dei sottogruppi normali di G. Ragionando come nell'Esercizio 10.1.1 si può provare che l'intersezione di un insieme non vuoto di sottogruppi normali di G è ancora un sottogruppo normale di G, e che il sottogruppo generato da sottogruppi normali di G è normale in G. Pertanto anche $N(G)$ è completo.

Esercizio 10.1.14. Sia S uno spazio vettoriale su un campo F, e si denoti con L il reticolo dei sottospazi di S. La 8.2.8 assicura che l'intersezione di un insieme non vuoto di sottospazi di S è un sottospazio di S, il reticolo L risulta completo. Inoltre banalmente il sottospazio generato da sottospazi di S è un sottospazio di S. Pertanto L è completo.

Esercizio 10.1.15. Sia L il reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale S su un campo F, E sia L^* l'insieme dei sottospazi di S di dimensione finita su F. Se $W_1, W_2 \in L^*$, la formula di Grassmann (vedi 8.5.1) assicura che $W_1 + W_2 \in L^*$ e $W_1 \cap W_2 \in L^*$, pertanto L^* è un sottoreticolo di L. Se S ha dimensione finita su F allora 8.2.23 garantisce che $L = L^*$, quindi L^* è completo per l'esercizio precedente. Se invece S ha dimensione infinita su F, scelta una qualunque base

$B = \{b_i : i \in I\}$ di S, si considerino i sottospazi $B_i = \langle b_i \rangle$, con $i \in I$. Ovviamente per ogni $i \in I$ risulta $\dim_F B_i = 1$, quindi $B_i \in L^*$. Però il sottospazio $\langle B_i : i \in I \rangle = S \notin L^*$, quindi L^* non è completo.

Esercizio 10.1.16. Sia L un reticolo completo. Allora esistono $m_1 = \sup_L L$ ed $m_2 = \inf_L L$, ed ovviamente risulta $m_1 = \max L$ e $m_2 = \min L$.

Esercizio 10.1.17. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.1.18. Sia X un sottoinsieme non vuoto di L. Allora $0 = \min L$ è un minorante di X, quindi l'insieme Y dei minoranti di X è non vuoto. Per ipotesi, esiste $y_1 = \sup_L Y$. Per ogni $x \in X$ e $y \in Y$ risulta $y \leq x$, quindi ogni elemento di X è un maggiorante di Y. Pertanto per la (2.4.4) risulta $y_1 \leq x$ per ogni $x \in X$. Ciò significa che $y_1 \in Y$, quindi $y_1 = \min Y$. Per definizione allora $y_1 = \inf_L X$. Ne segue che L è un reticolo completo.

Esercizio 10.1.19. Siccome $b \vee d$ è un maggiorante di $\{b, d\}$, da $a \leq b$ e $c \leq d$ segue che $a \leq b \leq b \vee d$ e $c \leq d \leq b \vee d$. Quindi $b \vee d$ è un maggiorante di $\{a, c\}$, pertanto $a \vee c \leq b \vee d$ per la (2.4.4). Siccome l'enunciato

$$\mathrm{P} : a \leq b\,,\ c \leq d \implies a \vee c \leq b \vee d \ \ (\forall a, b, c, d \in L)$$

è valido per ogni reticolo L, il principio di dualità dei reticoli (vedi 10.1.2) assicura che è valido per ogni reticolo L anche l'enunciato duale

$$\mathrm{P}^* : a \geq b\,,\ c \geq d \implies a \wedge c \geq b \wedge d \ \ (\forall a, b, c, d \in L).$$

Esercizio 10.2.1. Sia $f : L \longrightarrow M$ un'applicazione tra i reticoli $(L \leq)$ e $(M, \sqsubseteq)$. Se f è un isomorfismo di reticoli allora per la 10.2.1 f ed f^{-1} sono applicazioni crescenti, quindi f è un isomorfismo di insiemi ordinati.

Viceversa, sia ora f un isomorfismo di insiemi ordinati. Per ogni $a, b \in L$, da $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$ segue $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ e $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, quindi $f(a \vee b)$ è un maggiorante in M di $\{f(a), f(b)\}$. Se $f(c) \in M$ è un maggiorante di $\{f(a), f(b)\}$, allora $a \leq c$ e $b \leq c$, da cui $a \vee b \leq c$ e $f(a \vee b) \sqsubseteq f(c)$. Per la (2.4.4) risulta allora $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Analogamente si prova che $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Pertanto f è un isomorfismo di reticoli.

Esercizio 10.2.2. Sia $f : L \longrightarrow M$ un isomorfismo tra i reticoli $(L \leq)$ e $(M, \sqsubseteq)$. Per l'esercizio precedente f è un isomorfismo di insiemi ordinati, quindi $a \leq b$ in L se e solo se $f(a) \sqsubseteq f(b)$ in M. Ciò comporta che i diagrammi di Hasse di L e $M = \{f(a) : a \in L\}$ sono identici.

Esercizio 10.2.3. Con $A, B \in \mathcal{P}(S)$, da $A \subseteq B$ segue ovviamente $f(A) \leq f(B)$, quindi f è un omomorfismo di insiemi ordinati. Risulta però $\{1, 2\} \vee \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$, ma $f(\{1, 2\}) \vee f(\{2, 3\}) = 3 \vee 5 = 5 \neq 6 = f(\{1, 2, 3\})$, pertanto f non è un omomorfismo di reticoli.

Esercizio 10.3.1. Basta applicare la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione oppure dell'intersezione rispetto all'unione (vedi 1.4.6).

Esercizio 10.3.2. Si osservi innanzitutto che con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ risulta sempre

$$\max\{\alpha, \min\{\beta, \gamma\}\} = \min\{\max\{\alpha, \beta\}, \{\max\{\alpha, \gamma\}\}.$$

Se infatti $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \leq \gamma$ allora entrambi i termini della precedente espressione valgono $\min\{\beta, \gamma\}$; altrimenti valgono entrambi α.

Si osservi poi che con $a, b \in \mathbb{N}_0$, posto $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ e $b = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}$, dove $p_1, \dots, p_s$ sono primi positivi e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$ per ogni $i = 1, \dots, s$, nel reticolo dei naturali risulta ovviamente

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \mathrm{MCD}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_s^{\min\{\alpha_s, \beta_s\}}, \\ a \vee b &= \mathrm{mcm}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_s^{\max\{\alpha_s, \beta_s\}}. \end{aligned}$$

Siano ora $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, e si ponga

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}, \quad b = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}, \quad c = p_1^{\gamma_1} \dots p_s^{\gamma_s},$$

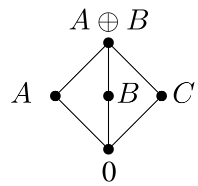
dove $p_1, \dots, p_s$ sono primi positivi e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}_0$ per ogni $i = 1, \dots, s$. Allora

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= a \vee (p_1^{\min\{\beta_1, \gamma_1\}} \dots p_s^{\min\{\beta_s, \gamma_s\}}) \\ &= p_1^{\max\{\alpha_1, \min\{\beta_1, \gamma_1\}\}} \dots p_s^{\max\{\alpha_s, \min\{\beta_s, \gamma_s\}\}} \\ &= p_1^{\min\{\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\max\{\alpha_1, \gamma_1\}\}} \dots p_s^{\min\{\max\{\alpha_s, \beta_s\}, \{\max\{\alpha_s, \gamma_s\}\}} \\ &= p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_s^{\max\{\alpha_s, \beta_s\}} \wedge p_1^{\max\{\alpha_1, \gamma_1\}} \dots p_s^{\max\{\alpha_s, \gamma_s\}} \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Ciò prova che il reticolo dei naturali è distributivo.

Esercizio 10.3.3. Il reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione 0 oppure 1 ha ordine rispettivamente 1 oppure 2, quindi è banalmente distributivo.

Sia ora S uno spazio vettoriale di dimensione ≥ 2 su un campo F. Considerati due vettori linearmente indipendenti $a, b \in S$, i sottospazi $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle a + b \rangle$ sono a due a due distinti ed hanno dimensione 1. Si verifica poi immediatamente che $A \oplus B = A \oplus C = B \oplus C$. Quindi il reticolo dei sottospazi di S contiene il sottoreticolo trirettangolo



e pertanto non è distributivo per 10.3.4.

Esercizio 10.3.4. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.3.5. Siano $x, y, z \in L$ con $x \leq z$. Essendo $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$ e $y \wedge z \leq z$ risulta $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$ per (2.4.3). Del resto da $x \leq x \vee y$ e $x \leq z$ segue $x \leq (x \vee y) \wedge z$ ancora per (2.4.3). Dunque $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ per (2.4.4).

Esercizio 10.3.6. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.3.7. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.4.1. Vedi svolgimento nel testo.

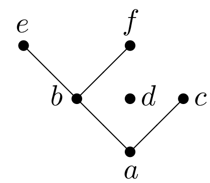
Esercizio 10.4.2. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.5.1. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.5.2. Vedi svolgimento nel testo.

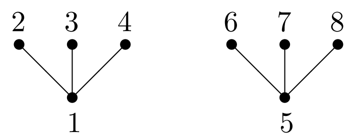
Esercizio 10.5.3. Vedi svolgimento nel testo.

Esercizio 10.6.1. Il grafo considerato può essere disegnato come segue:



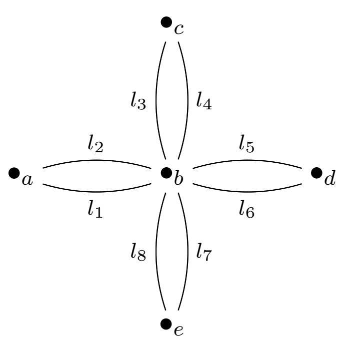
Essendo costituito da 2 componenti connesse, Γ non è connesso. Il vertice b ha grado 3, il vertice a ha grado 2 mentre c, e ed f hanno grado 1. Il vertice d ha grado 0 e quindi è un punto isolato.

Esercizio 10.6.2. Il grafo considerato può essere disegnato come segue:



Le sue componenti connesse sono $[1] = \{1, 2, 3, 4\}$ e $[5] = \{5, 6, 7, 8\}$. Il grafo Γ è una foresta ma non un albero.

Esercizio 10.6.3. Il multigrafo Υ può essere disegnato come segue:



Esso è connesso e tutti i suoi vertici sono pari; pertanto, in virtù del Teorema 10.6.4, Υ possiede un circuito euleriano.

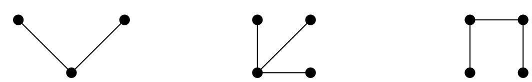
Esercizio 10.6.4. Per assurdo si suppongano Γ_1 e Γ_2 isomorfi e sia $f : V_1 \to V_2$ un isomorfismo. Il vertice a di Γ_1 ha grado 3 essendo $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{a, d\}$ lati incidenti in a, dunque anche $f(a)$ ha grado 3 perché $\{f(a), f(b)\}$, $\{f(a), f(c)\}$ e $\{f(a), f(d)\}$ sono lati incidenti in $f(a)$; ma questo è in contraddizione con il fatto che tutti i vertici di Γ_2 hanno grado 2.

Esercizio 10.6.5. È facile osservare che le applicazioni $f : V_1 \to V_2$ che scambia a e b e fissa ogni altro elemento di V_1 e $g : V_2 \to V_3$ che scambia a con c e b con d sono isomorfismi di grafi.

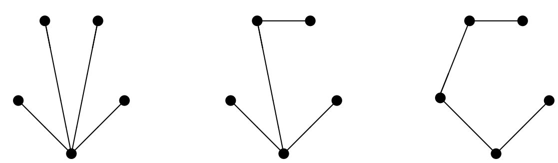
Esercizio 10.6.6. Non esiste un tale grafo. Infatti se un tale grafo esistesse la somma dei gradi dei suoi vertici sarebbe 35 e quindi dispari, in contraddizione con quanto osservato subito dopo 10.6.3.

Esercizio 10.6.7. Il sottografo richiesto è $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ con $E_1 = \{\{3, 5\}\}$.

Esercizio 10.7.1. A meno di isomorfismi esistono esattamente un albero di ordine 3 e due alberi di ordine 4. Tali alberi possono essere schematizzati come segue:



Esercizio 10.7.2. A meno di isomorfismi esistono esattamente tre alberi di ordine 5:



Esercizio 10.7.3. Γ è connesso ma non è un albero perché possiede per esempio il circuito $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$. Per avere un albero di supporto si può per esempio considerare (V, E') con $E' = \{\{a, e\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, f\}\}$.

Esercizio 10.7.4. Γ è un grafo di ordine 10 connesso con 9 lati, pertanto, per la 10.7.3, è un albero. Le fogli sono 3, 8 e 10.

Esercizio 10.7.5. Un tale grafo ha esattamente 7 lati.

Esercizio 10.8.1. (i) Ovviamente $2^a3^b \sqsubseteq 2^a3^b$ essendo $a \leq a$ e $b \leq b$, quindi $\sqsubseteq$ è riflessiva. Da $2^a3^b \sqsubseteq 2^c3^d$ e $2^c3^d \sqsubseteq 2^a3^b$ segue $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq a$ e $d \leq b$, quindi $a = c$ e $b = d$, cioè $2^a3^b = 2^c3^d$, e $\sqsubseteq$ è asimmetrica. Infine da $2^a3^b \sqsubseteq 2^c3^d$ e $2^c3^d \sqsubseteq 2^e3^f$ segue $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq e$ e $d \leq f$, quindi $a \leq e$ e $b \leq f$, cioè $2^a3^b \sqsubseteq 2^e3^f$, e $\sqsubseteq$ è transitiva. Pertanto $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(ii) L'insieme ordinato $(L, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato, in quanto per esempio $2 = 2^13^0$ e $3 = 2^03^1$ non sono confrontabili. Di conseguenza, per 2.4.12, $(L, \sqsubseteq)$

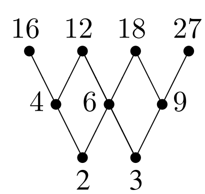
non è ben ordinato. L'unico elemento minimale in $(L, \sqsubseteq)$ è $1 = 2^0 3^0$; risulta anche $1 = \min L$. É poi evidente che in $(L, \sqsubseteq)$ non ci sono elementi massimali, quindi non esiste $\max L$.
(iii) Per ogni $2^a 3^b, 2^c 3^d \in L$ risulta $\sup_L\{2^a 3^b, 2^c 3^d\} = 2^{\max\{a,c\}} 3^{\max\{b,d\}}$, $\inf_L\{2^a 3^b, 2^c 3^d\} = 2^{\min\{a,c\}} 3^{\min\{b,d\}}$. Pertanto $(L, \sqsubseteq)$ è un reticolo.
(iv) Per ogni $2^a 3^b, 2^c 3^d, 2^e 3^f \in L$, tenendo presente quanto provato all'inizio dello svolgimento dell'Esercizio 10.3.2, risulta

$$\begin{aligned}
2^a 3^b \vee (2^c 3^d \wedge 2^e 3^f) &= 2^a 3^b \vee 2^{\min\{c,e\}} 3^{\min\{d,f\}} \\
&= 2^{\max\{a,\min\{c,e\}\}} 3^{\max\{b,\min\{d,f\}\}} \\
&= 2^{\min\{\max\{a,c\},\max\{a,e\}\}} 3^{\min\{\max\{b,d\},\max\{b,f\}\}} \\
&= 2^{\max\{a,c\}} 3^{\max\{b,d\}} \wedge 2^{\max\{a,e\}} 3^{\max\{b,f\}} \\
&= (2^a 3^b \vee 2^c 3^d) \wedge (2^a 3^b \vee 2^e 3^f),
\end{aligned}$$

e ciò prova che L è distributivo.
(v) Tenendo presente quanto provato nel punto (iii) risulta:

$$\begin{aligned}
4 \wedge 6 &= 2^2 3^0 \wedge 2^1 3^1 = 2^1 3^0 = 2, \\
12 \wedge 18 &= 2^2 3^1 \wedge 2^1 3^2 = 2^1 3^1 = 6, \\
4 \vee 6 &= 2^2 3^0 \vee 2^1 3^1 = 2^2 3^1 = 12, \\
6 \vee 9 &= 2^1 3^1 \vee 2^0 3^2 = 2^1 3^2 = 18.
\end{aligned}$$

(vi) Per ogni $2^a 3^b, 2^c 3^d \in L$ da $2^a 3^b \sqsubseteq 2^c 3^d$ segue $h(2^a 3^b) = a + b \leq c + d = h(2^c 3^d)$, quindi h è un omomorfismo tra gli insiemi ordinati $(L, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
(vii) Risulta $h(2^1 3^0) = 1 = h(2^0 3^1)$, $2^1 3^0 \vee 2^0 3^1 = 2^1 3^1$, $h(2^1 3^0 \vee 2^0 3^1) = h(2^1 3^1) = 2 \neq 1 = 1 \vee 1 = h(2^1 3^0) \vee h(2^0 3^1)$. Quindi h non è un omomorfismo tra i reticoli $(L, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
$(viii)$ Il diagramma di Hasse di $(F, \sqsubseteq)$ è il seguente:



È poi evidente che $(F, \sqsubseteq)$ non è un sottoreticolo di $(L, \sqsubseteq)$: per esempio $2 \wedge 3 = 1 \notin F$.

Esercizio 10.8.2. (i) Ovviamente $2^a 3^b \sqsubseteq 2^a 3^b$ essendo $a \leq a$ e $b|b$, quindi $\sqsubseteq$ è riflessiva. Da $2^a 3^b \sqsubseteq 2^c 3^d$ e $2^c 3^d \sqsubseteq 2^a 3^b$ segue $a \leq c$, $b|d$, $c \leq a$ e $d|b$, quindi $a = c$ e $b = d$, cioè $2^a 3^b = 2^c 3^d$, e $\sqsubseteq$ è asimmetrica. Infine da $2^a 3^b \sqsubseteq 2^c 3^d$ e

$2^c3^d \sqsubseteq 2^e3^f$ segue $a \le c$, $b|d$, $c \le e$ e $d|f$, quindi $a \le e$ e $b|f$, cioè $2^a3^b \sqsubseteq 2^e3^f$, e $\sqsubseteq$ è transitiva. Pertanto $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(ii) L'insieme ordinato $(L, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato, in quanto per esempio $9 = 2^03^2$ e $27 = 2^03^3$ non sono confrontabili. Di conseguenza, per 2.4.12, $(L, \sqsubseteq)$ non è ben ordinato. L'unico elemento minimale in $(L, \sqsubseteq)$ è $3 = 2^03^1$; risulta anche $3 = \min L$. É poi evidente che in $(L, \sqsubseteq)$ non ci sono elementi massimali, quindi non esiste $\max L$.
(iii) Per ogni $2^a3^b, 2^c3^d \in L$ risulta $\sup_L\{2^a3^b, 2^c3^d\} = 2^{\max\{a,c\}}3^{\mathrm{mcm}(b,d)}$, $\inf_L\{2^a3^b, 2^c3^d\} = 2^{\min\{a,c\}}3^{\mathrm{MCD}(b,d)}$. Pertanto $(L, \sqsubseteq)$ è un reticolo.
(iv) Si osservi innanzitutto che, come provato nell'Esercizio 10.3.2, per ogni b, d, $f \in \mathbb{N}_0$ risulta

$$\mathrm{mcm}(b, \mathrm{MCD}(d, f)) = \mathrm{MCD}(\mathrm{mcm}(b, d), \mathrm{mcm}(b, f)).$$

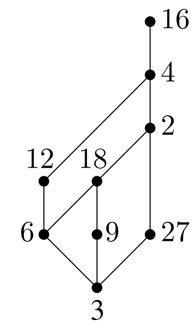
Per ogni $2^a3^b, 2^c3^d, 2^e3^f \in L$, tenendo presente anche quanto provato all'inizio dello svolgimento dell'Esercizio 10.3.2, risulta

$$\begin{aligned} 2^a3^b \vee (2^c3^d \wedge 2^e3^f) &= 2^a3^b \vee 2^{\min\{c,e\}}3^{\mathrm{MCD}(d,f)} \\ &= 2^{\max\{a,\min\{c,e\}\}}3^{\mathrm{mcm}(b,\mathrm{MCD}(d,f))} \\ &= 2^{\min\{\max\{a,c\},\max\{a,e\}\}}3^{\mathrm{MCD}(\mathrm{mcm}(b,d),\mathrm{mcm}(b,f))} \\ &= 2^{\max\{a,c\}}3^{\mathrm{mcm}(b,d)} \wedge 2^{\max\{a,e\}}3^{\mathrm{mcm}(b,f)} \\ &= (2^a3^b \vee 2^c3^d) \wedge (2^a3^b \vee 2^e3^f), \end{aligned}$$

e ciò prova che L è distributivo.
(v) Tenendo presente quanto provato nel punto (iii) risulta:

$$\begin{aligned} 4 \wedge 6 &= 2^23^0 \wedge 2^13^1 = 2^13^1 = 6, \\ 12 \wedge 18 &= 2^23^1 \wedge 2^13^2 = 2^13^1 = 6, \\ 4 \vee 6 &= 2^23^0 \vee 2^13^1 = 2^23^0 = 4, \\ 6 \vee 9 &= 2^13^1 \vee 2^03^2 = 2^13^2 = 18. \end{aligned}$$

(vi) Per ogni $2^a3^b, 2^c3^d \in L$, da $\sigma(2^a3^b) = \sigma(2^c3^d)$ segue immediatamente $a = c, b = d$, dunque $2^a3^b = 2^c3^d$, e σ è iniettiva. è poi evidente che σ non è suriettiva: per esempio, non esiste alcun elemento $2^a3^b \in L$ tale che $\sigma(2^a3^b) = \{1, 3\}$.
(vii) Con $2^a3^b, 2^c3^d \in L$ sia $2^a3^b \sqsubseteq 2^c3^d$. Se $b = 0$ allora necessariamente $d = 0$ e $a \le c$, quindi $\sigma(2^a3^b) \subseteq \sigma(2^c3^d)$; se invece $b \ne 0$ allora $a \le c$ e $b|d$, quindi $b \le d$, da cui ancora $\sigma(2^a3^b) \subseteq \sigma(2^c3^d)$. Pertanto h è un omomorfismo tra gli insiemi ordinati $(L, \sqsubseteq)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.
$(viii)$ Risulta per esempio $\sigma(6) = \sigma(2^13^1) = \{2\}$, $\sigma(12) = \sigma(2^23^1) = \{3\}$, e $\sigma(6 \vee 12) = \sigma(12) = \{3\} \ne \{2, 3\} = \sigma(6) \vee \sigma(12)$. Quindi σ non è un omomorfismo tra i reticoli $(L, \sqsubseteq)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.
(ix) Il diagramma di Hasse di $(F, \sqsubseteq)$ è il seguente:



È poi evidente che $(F, \sqsubseteq)$ non è un sottoreticolo di $(L, \sqsubseteq)$: per esempio $9 \vee 27 = 2^0 3^6 = 729 \notin F$.

Esercizio 10.8.3. (i) Ovviamente $3n+1 \sqsubseteq 3n+1$ poiché $n|n$, quindi $\sqsubseteq$ è riflessiva. Da $3n+1 \sqsubseteq 3m+1$ e $3m+1 \sqsubseteq 3n+1$ segue $n|m$ e $m|n$, quindi $n = m$ e $3n+1 = 3m+1$, per cui $\sqsubseteq$ è asimmetrica. Infine da $3n+1 \sqsubseteq 3m+1$ e $3m+1 \sqsubseteq 3r+1$ segue $n|m$ e $m|r$, quindi $n|r$ e $3n+1 \sqsubseteq 3r+1$, cioè $\sqsubseteq$ è transitiva. Pertanto $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(ii) L'insieme ordinato $(L, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato, in quanto per esempio $7 = 3 \cdot 2 + 1$ e $10 = 3 \cdot 3 + 1$ non sono confrontabili. Di conseguenza, per 2.4.12, $(L, \sqsubseteq)$ non è ben ordinato.
(iii) Per ogni $3n+1, 3m+1 \in L$ risulta:

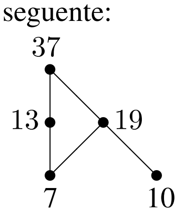
$$\sup_L\{3n+1, 3m+1\} = 3(\mathrm{mcm}(n,m)) + 1,$$
$$\inf_L\{3n+1, 3m+1\} = 3(\mathrm{MCD}(n,m)) + 1.$$

Pertanto $(L, \sqsubseteq)$ è un reticolo.
(iv) L'applicazione f è banalmente biettiva. Inoltre per ogni $3n+1, 3m+1 \in L$ risulta:

$$\begin{aligned} f(3n+1 \vee 3m+1) &= f(3(\mathrm{mcm}(n,m)) + 1) \\ &= \mathrm{mcm}(n,m) \\ &= f(3n+1) \vee f(3m+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3n+1 \wedge 3m+1) &= f(3(\mathrm{MCD}(n,m)) + 1) \\ &= \mathrm{MCD}(n,m) \\ &= f(3n+1) \wedge f(3m+1), \end{aligned}$$

quindi f è un isomorfismo tra i reticoli $(L, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, |)$.
(v) Risulta $\min L = 1 \cdot 3 + 1 = 4$, $\max L = 0 \cdot 3 + 1 = 1$.
(vi) Essendo $7 = 2 \cdot 3 + 1, 10 = 3 \cdot 3 + 1, 13 = 4 \cdot 3 + 1, 19 = 6 \cdot 3 + 1, 37 = 12 \cdot 3 + 1$ il diagramma di Hasse di F è il seguente:

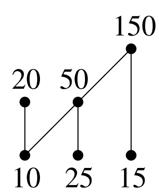


(vii) F non è un sottoreticolo di L: per esempio, $7 \wedge 10 = 4 \notin F$.

Esercizio 10.8.4. (i) Ovviamente $5a \sqsubseteq 5a$ poiché $a|a$, quindi $\sqsubseteq$ è riflessiva. Da $5a \sqsubseteq 5b$ e $5b \sqsubseteq 5a$ segue $a|b$ e $b|a$, quindi $a = b$ e $5a = 5b$, per cui $\sqsubseteq$ è asimmetrica. Infine da $5a \sqsubseteq 5b$ e $5b \sqsubseteq 5c$ segue $a|b$ e $b|c$, quindi $a|c$ e $5a \sqsubseteq 5c$, cioè $\sqsubseteq$ è transitiva. Pertanto $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.
(ii) L'insieme ordinato $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ non è totalmente ordinato, in quanto per esempio $10 = 5{\cdot}2$ e $15 = 5{\cdot}3$ non sono confrontabili. Di conseguenza, per 2.4.12, $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ non è ben ordinato. Risulta $\min 5\mathbb{N}_0 = 5$, $\max 5\mathbb{N}_0 = 0$.
(iii) Per ogni $5a, 5b \in 5\mathbb{N}_0$ risulta:

$$\sup_{5\mathbb{N}_0}\{5a, 5b\} = 5(\mathrm{mcm}(a, b)),$$
$$\inf_{5\mathbb{N}_0}\{5a, 5b\} = 5(\mathrm{MCD}(a, b)).$$

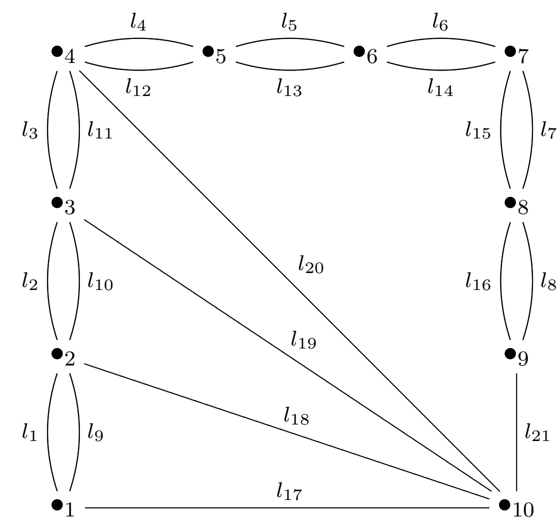
Pertanto $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ è un reticolo.
(iv) Si ha $15 \vee 25 = (5 \cdot 3) \vee (5 \cdot 5) = 5 \cdot \mathrm{mcm}(3, 5) = 75$.
(v) Con $5a, 5b \in 5\mathbb{N}_0$, risulta $\omega(5a \vee 5b) = \omega(5 \cdot \mathrm{mcm}(a, b)) = \mathrm{mcm}(a, b)$ e $\omega(5a \wedge 5b) = \omega(5 \cdot \mathrm{MCD}(a, b)) = \mathrm{MCD}(a, b)$, quindi ω è un omomorfismo tra i reticoli $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, |)$.
(vi) Risulta $5 \cdot 1 \sqsubseteq 5 \cdot 0$, ma $\sigma(5 \cdot 1) = 1 > 0 = \sigma(5 \cdot 0)$ quindi σ non è un omomorfismo tra gli insiemi ordinati $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, \leq)$.
(vii) Risulta $\sigma((5 \cdot 0) \vee (5 \cdot 1)) = \sigma(0) = 0$, ma $\sigma(5 \cdot 0) \vee \sigma(5 \cdot 1) = 0 \vee 1 = 1$, quindi σ non è un omomorfismo tra i reticoli $(5\mathbb{N}_0, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}_0, \leq)$. Si osservi che il risultato segue anche direttamente dalla (iv) di 10.2.1 e da quanto provato al punto precedente.
$(viii)$ Il diagramma di Hasse di H è il seguente:



(ix) H non è un sottoreticolo di $5\mathbb{N}_0$: per esempio, $10 \wedge 15 = 5 \notin H$.
(x) In $(H, \sqsubseteq)$ l'unico maggiorante dell'insieme $\{15, 25\}$ è 150, quindi risulta $\sup_H\{15, 25\} = 150$.
(xi) Gli elementi minimali in $(H, \sqsubseteq)$ sono 10, 15 e 25; pertanto non esiste $\min H$.
(xii) Gli elementi massimali in $(H, \sqsubseteq)$ sono 20 e 150; pertanto non esiste $\max H$.

Esercizio 10.8.5. Per ogni $X, Y \in V$ con $X \neq Y$ si ha che $X \cup Y \in V$ e $L = \{l_1, l_2\}$ con $l_1 = \{X, X \cup Y\}$ e $l_2 = \{X \cup Y, Y\}$ è un cammino da X a Y. Dunque Γ è connesso. Un circuito è per esempio $\{\emptyset, \{a\}\}$, $\{\{a\}, \{a, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, c\}\}$,$\{\emptyset, \{c\}\}$. Un albero di supporto è $\Gamma_1 = (V, E_1)$ dove l'insieme E_1 è costituito dai lati $\{\{\emptyset, \{a\}\}$, $\{\emptyset, \{c\}\}$, $\{\emptyset, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\{\{b\}, \{b, c\}\}$, $\{\{c\}, \{a, c\}\}$, $\{S, \{b, c\}\}\}$. Per il Corollario 10.6.5 il multigrafo considerato non possiede cammini euleriani: infatti ciascuno dei suoi vertici ha grado 3 ed è quindi dispari.

Esercizio 10.8.6. Si può per esempio considerare il multigrafo (V, E, ψ) con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $E = \{l_i : i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 21\}$ e $\psi : E \to [V]^2$ tale che $\psi(l_1) = \{1, 2\} = \psi(l_9)$, $\psi(l_2) = \{2, 3\} = \psi(l_{10})$, $\psi(l_3) = \{3, 4\} = \psi(l_{11})$, $\psi(l_4) = \{4, 5\} = \psi(l_{12})$, $\psi(l_5) = \{5, 6\} = \psi(l_{13})$, $\psi(l_6) = \{6, 7\} = \psi(l_{14})$, $\psi(l_7) = \{7, 8\} = \psi(l_{15})$, $\psi(l_8) = \{8, 9\} = \psi(l_{16})$, $\psi(l_{17}) = \{1, 10\}$, $\psi(l_{18}) = \{2, 10\}$, $\psi(l_{19}) = \{3, 10\}$, $\psi(l_{20}) = \{4, 10\}$, $\psi(l_{21}) = \{9, 10\}$:



Tale grafo è del tipo richiesto: infatti è connesso e privo di punti isolati, ed avendo 6 vertici dispari (precisamente: 1, 2, 3, 4, 9, 10) non possiede cammini euleriani per il Corollario 10.6.5.

A

Cenni di logica proposizionale e predicativa

Esercizio A.1. Posto $\mathrm{P} = \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$, $\mathrm{Q} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})$, la prima forma enunciativa considerata ha la seguente tavola di verità:

A	B	C	$\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}$	P	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	$\mathrm{A} \vee \mathrm{C}$	Q	$\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

quindi essa è una tautologia.

Posto poi $\mathrm{P} = \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$, $\mathrm{Q} = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$, la seconda forma enunciativa considerata ha la seguente tavola di verità:

A	B	C	$\mathrm{B} \vee \mathrm{C}$	P	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}$	Q	$\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

quindi anch'essa è una tautologia.

Esercizio A.2. Le tavole di verità richieste sono le seguenti:

A	B	$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$	$(\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

A	B	C	$\neg\mathrm{C}$	$A \wedge \neg\mathrm{C}$	$(A \wedge \neg\mathrm{C}) \Longleftrightarrow \mathrm{B}$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

Esercizio A.3. Per verificare che le forme enunciative considerate sono tautologie è sufficiente scrivere le rispettive tavole di verità. Le prime quattro sono le seguenti:

A	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{A}$
V	V	V
F	F	V

A	$\mathrm{A} \vee \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \Longleftrightarrow \mathrm{A}$
V	V	V
F	F	V

A	B	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	$\mathrm{B} \vee \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Longleftrightarrow \mathrm{B} \vee \mathrm{A}$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

A	B	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	$\mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \Longleftrightarrow \mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Posto poi $\mathrm{P} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}$ e $\mathrm{Q} = \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$ si ha:

A	B	C	A ∨ B	P	B ∨ C	Q	P ⟺ Q
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*

Infine, posto $\mathrm{P} = (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$ e $\mathrm{Q} = \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$ si ha:

A	B	C	A ∧ B	P	B ∧ C	Q	P ⟺ Q
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*

Esercizio A.4. Per verificare che le forme enunciative considerate sono contraddizioni è sufficiente scrivere le rispettive tavole di verità, che sono le seguenti:

A	B	A ∧ B	¬A	¬B	¬A ∨ ¬B	A ∧ B ⟺ ¬A ∨ ¬B
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*

A	B	A ∨ B	¬A	¬B	¬A ∧ ¬B	A ∨ B ⟺ ¬A ∧ ¬B
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*

Esercizio A.5. Posto:

$$\mathrm{P}_1: \text{ Carla è francese}$$

$$\mathrm{P}_2: \text{ Luigi è americano}$$

la proposizione P si scrive al modo seguente:

$$\neg \mathrm{P}_1 \vee (\mathrm{P}_2 \wedge \mathrm{P}_1).$$

Posto poi:

$$\mathrm{Q}_1: \text{ Il bambino è felice}$$

$$\mathrm{Q}_2: \text{ È domenica}$$

$$\mathrm{Q}_3: \text{ C'è il sole}$$

$$\mathrm{Q}_4: \text{ Il bambino mangia il gelato}$$

la proposizione Q si scrive al modo seguente:

$$\mathrm{Q}_1 \iff (\mathrm{Q}_2 \wedge \mathrm{Q}_3 \wedge \mathrm{Q}_4).$$

Esercizio A.6.

Esercizio A.7. Gli enunciati considerati possono essere scritti come segue:
A : $(\exists x, y \in \mathbb{Z})(x + y = 12)$;
B : $(\forall x \in 2\mathbb{N}_0)(2x + 16 \in 2\mathbb{N})$;
C : $(\forall x \in \mathbb{N}, x > 7)(\exists y \in \mathbb{N})(x = y + 7)$;
D : $(\forall x \in \mathbb{P})(x$ è dispari oppure $x = 2)$.

Esercizio A.8. Le negazioni richieste sono le seguenti:
$\neg$H : $(\exists x)(\forall y)(x - 3y \neq 15)$;
$\neg$K : $(\exists x)((\forall y)(x \leq y + 7) \wedge (\forall y)(x - 7 > y))$;
$\neg$L : $(\forall x)(\exists y)(x - 15 > y)$.

Esercizio A.9.

Esercizio A.10. Per assurdo, esista $a = \max \mathbb{N}_0$. Allora $a \in \mathbb{N}_0$, e ovviamente $a + 1 \in \mathbb{N}_0$. Ma $a < a + 1$, in contraddizione con la massimalità di a in $\mathbb{N}_0$. Ciò prova che $\mathbb{N}_0$ non ha massimo.