Lezione 1- Tutorato

mercoledì 7 dicembre 2022 22:16

INSIEMI

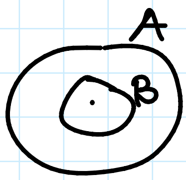
Un insieme X è una qualunque collezione di oggetti: ELEMENTI DELL'INSIEME.

$x \in S$: x appartiene a S

$|S|$: ordine dell'insieme $\to$ n° elementi

$P \Rightarrow Q$ (se P è vera, Q è vera)

$P \Leftrightarrow Q$ (P equivale a Q)



B si dice sottoinsieme di $A \Leftrightarrow b \in A \;\; \forall b \in B$

Teorema: Se A è un insieme finito con $|A| = n$ allora A possiede 2^n sottoinsiemi.

$A \cup B = \{x : x \in A$ o $x \in B\}$

($x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B$)

$A \cap B = \{x : x \in A$ e $x \in B\}$

($x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ o $x \notin B\}$

$A \setminus B = \{x : x \in A$ e $x \notin B\}$

($x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A$ o $x \in B\}$

$A \dot{\cup} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $\to$ unione disgiunta

$\left(x \notin A \dot{\cup} B \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \text{ opp } x \in (A \cap B) \right.$
$\left. \Leftrightarrow (x \notin A \text{ e } x \notin B) \text{ opp } (x \in A \text{ e } x \in B) \right)$

FORMULE DI DE MORGAN

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ $\to$ INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI A

Teorema $\forall n \geq 0, |A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Supponiamo di avere una successione infinita di proposizioni
$P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$

Sia $\bar{n} \in \mathbb{N}_0$.
Per dimostrare che P_n è vera $\forall n \geq \bar{n}$ posso provare che:

- $P_{\bar{n}}$ è vera (BASE DI INDUZIONE)
- se P_n è vera $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow P_{n+1}$ è vera

$\Rightarrow P_n$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$

2ª FORMA.
Sia $\bar{n}$ un numero naturale e sia P una proprietà relativa ai numeri naturali $n \geq \bar{n}$.
Se P è vera per $\bar{n}$ e con $t > \bar{n}$ P è vera per t ogni volta che P è vera per ogni numero naturale k che è tale: $\bar{n} \leq k < t$
Allora P è vera $\forall n \geq \bar{n}$.

1) P è vera per $\bar{n}$

2) Se P è vera per ogni $\bar{n} \leq k < t \Rightarrow P$ è vera per t

ESERCIZIO 1

$A = \{a, b, d, f\}$ e $B = \{a, c, g\}$

$A \cup B$?, $A \cap B$?, $A \setminus B$?, $A \dot{\cup} B$?

$A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$

$A \cap B = \{a\}$

$A \setminus B = \{b, d, f\}$

$A \dot{\cup} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$= \{a, b, c, d, f, g\} \setminus \{a\}$

$= \{b, c, d, f, g\}$

$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$.

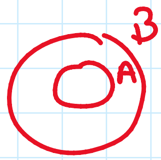
2

A, B, C insiemi

- Si dimostri che Ip. $A \subseteq B \Rightarrow$ Tesi $(C \setminus B \subseteq C \setminus A)$

$C \setminus B = X$, $C \setminus A = Y$, $\boxed{X \subseteq Y}$

$A \subseteq B$ $\quad x \in A \Rightarrow x \in B$



$\bullet x$

Se $x \in X \Rightarrow x \in Y$

Se $x \in C \setminus B \Rightarrow x \in C$ e $x \notin B \overset{(A \subseteq B)}{\Rightarrow} x \in C$ e $x \notin A$

$\Downarrow$

$x \in C \setminus A$

$\Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$

- Si dimostri che $(C \setminus B \subseteq C \setminus A) \not\Rightarrow A \subseteq B$

Bisogna esibire un controesempio:

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\qquad C \setminus B \subseteq C \setminus A$

$B = \{3, 4, 5, 7\}$ $\qquad C \setminus B = \{1, 2\}$ $\qquad C \setminus B \subseteq C \setminus A$

$A = \{4, 5, 8, 9\}$ $\qquad C \setminus A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ ma $A \not\subseteq B$

3

Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 2$ risulta

$$3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 9}{2}$$

$\bar{n} = 2$

Induzione su n

Base di induzione: $\bar{n} = 2$

$$3^2 = \frac{3^{2+1} - 9}{2} \Rightarrow 9 = \frac{3^3 - 9}{2} = \frac{27 - 9}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \checkmark$$

Passo induttivo: si vede se la formula è vera per $n \geq \bar{n}$ se allora è vera per $n+1$

IPOTESI INDUTTIVA: la formula è vera per n

$$* \quad \boxed{3^2 + 3^3 + \dots 3^n = \frac{3^{n+1} - 9}{2}}$$

$$\underbrace{3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}_{\overset{*}{=} \frac{3^{n+1} - 9}{2}} + 3^{n+1} \overset{?}{=} \frac{3^{n+1+1} - 9}{2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{3^{m+1}-9}{2}+3^{m+1} \stackrel{?}{=} \frac{3^{m+2}-9}{2} \qquad 1\cdot x+2x=3x$$

$$\frac{1\cdot 3^{m+1}-9+2\cdot 3^{m+1}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3^{m+2}-9}{2}$$

$$\frac{3\cdot 3^{m+1}-9}{2} = \frac{3^{m+2}-9}{2}$$

4) Per ogni $m \geq 9$ risulta

$$9+10+11+\dots+m=\frac{m^2+m-72}{2} \quad \leftarrow$$

Base di induzione: $\bar{m}=9$

$$9 \stackrel{?}{=} \frac{9^2+9-72}{2}=\frac{81+9-72}{2}=\frac{18}{2}=9 \qquad \text{OK!}$$

Passo induttivo:

IPOTESI INDUTTIVA*: $9+10+11+\dots+m=\frac{m^2+m-72}{2}$

$$\underbrace{9+10+11+\dots+m}_{\frac{m^2+m-72}{2}}+(m+1) \stackrel{?}{=} \frac{(m+1)^2+(m+1)-72}{2}$$

$$\frac{m^2+m-72}{2}+m+1 = \frac{m^2+m-72+2m+2}{2}$$

Devo provare che $m^2+m\cancel{-72}+2m+2=(m+1)^2+(m+1)\cancel{-72}$

E quindi che $m^2+3m+2=(m+1)^2+(m+1)=m^2+2m+1+m+1 = m^2+3m+2$

$$(m+1)(m+1)+(m+1)\cdot 1 = (m+1)[m+1+1]=(m+1)(m+2)=m^2+m+2m+2=m^2+3m+2$$

Dimostrare che

$$1+3+5+7+\dots+(2m-1)=m^2 \qquad \forall m\geq 1$$

$\uparrow \bar{m}$