Relazioni d'ordine

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme e sia $R \subseteq A \times A$ una relazione in A

La relazione R si dice ASIMMETRICA se

$$(aRb \text{ e } bRa) \Rightarrow a=b \qquad \forall a,b \in A$$

R è una relazione d'ordine in A se e solo se è:

- RIFLESSIVA $aRa \quad \forall a \in A$

(SIMMETRIA $aRb \Rightarrow bRa$ (nelle rel. di equivalenza))

- ASIMMETRICA aRb e $bRa \Rightarrow a=b \quad \forall a,b \in A$
- TRANSITIVA aRb e $bRc \Rightarrow aRc \quad \forall a,b,c \in A$

Se in un insieme A è definita una relazione d'ordine $\sqsubseteq$ allora la coppia $(A,\sqsubseteq)$ si dice INSIEME ORDINATO.

Si definisce

$$\underset{\uparrow \text{ minore stretto}}{a \sqsubset b} \iff \begin{cases} a \sqsubseteq b \\ a \neq b \end{cases}$$

Il diagramma di Hasse di un insieme ordinato $(A,\sqsubseteq)$ si ottiene rappresentando sul piano gli elementi di A:

- se $a \sqsubset b$, il punto a sarà più in basso di b
- se $a \sqsubset b$ e $\nexists c \in A : a \sqsubset c$ e $c \sqsubset b$ allora i punti che rappresentano a e b devono essere uniti con un segmento.

Due elementi $a,b \in A$ si dicono CONFRONTABILI $\iff a \sqsubseteq b$ o $b \sqsubseteq a$

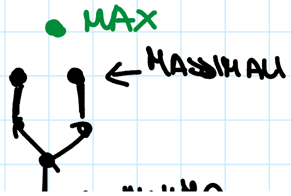
La relazione $\sqsubseteq$ in questo caso si dice ORDINE TOTALE.

Sia $(A,\sqsubseteq)$ un insieme ordinato. Un elemento $m \in A$ si dice

MINIMO DI A $\iff m \sqsubseteq a \quad \forall a \in A$

MASSIMO DI A $\iff a \sqsubseteq m \quad \forall a \in A$

se esistono sono unici

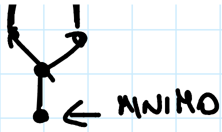


Un elemento $x \in A$ si dice
MINIMALE $\iff \nexists a \in A : \quad a \sqsubseteq x$

un elemento $x \in A$ si dice

MINIMALE $\iff \nexists\, a \in A : a \sqsubseteq x$

MASSIMALE $\iff \nexists\, a \in A : x \sqsubseteq a$



MINIMO $\Rightarrow$ MINIMALE

$\not\Leftarrow$

Se A possiede più elementi minimali $\rightarrow \nexists \min A$
(massimali) ($\nexists \max A$)

Sia $(A, \sqsubseteq)$ un insieme ordinato e sia $B \subseteq A$. Un elemento $a \in A$ si dice

- un **minorante** di B $\iff a \sqsubseteq b \quad \forall b \in B$
- un **maggiorante** di B $\iff b \sqsubseteq a \quad \forall b \in B$
- **estremo inferiore** di B $\iff$ a è max dell'insieme dei minoranti di B
  $a = \inf_A(B)$
- **estremo superiore** di B $\iff$ a è min dell'insieme dei maggioranti di B
  $a = \sup_A(B)$

Un insieme ordinato $(A, \sqsubseteq)$ si dice un RETICOLO se $\forall a, b \in A \quad \exists \inf_A\{a,b\} \quad \exists \sup_A\{a,b\}$

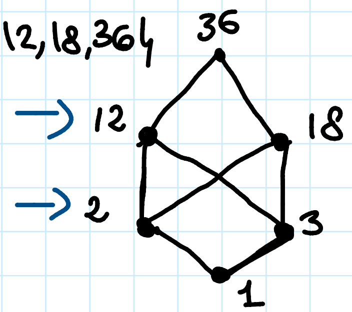
ESERCIZIO

Sia $A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$ dove $|$ denota la relazione del divide tra numeri naturali.

1. Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$
2. Si dimostri che $(A, |)$ non è un reticolo
3. Si determini un sottoinsieme di ordine 5 di A che sia un reticolo e se ne disegni il diagramma di Hasse.

① $1|2 \quad 1|3 \quad 1|12 \quad 1|18 \quad 1|36$ $\qquad a \sqsubseteq b$ a sarà più in basso

$A = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$



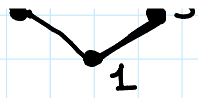
$\nexists \inf \{12, 18\}$

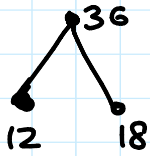
$\{2, 3\}$ $\qquad \sup_A \{2,3\}$ // B

② MAGGIORANTI DI $\{2,3\} = \{12, 18, 36\}$

36

ma $\nexists \min \{12, 18, 36\}$



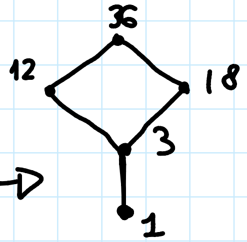


ma $\nexists$ min $\{12, 18, 36\}$

$\Rightarrow \nexists$ sup $\{2,3\}$

$\Rightarrow (A, |)$ non è un reticolo

③ $A' = \{1, 3, 12, 18, 36\} \rightarrow$



$\sup_{A'}\{12, 18\} = 36$
↑ min dei maggioranti

maggioranti di $\{12, 18\} = 36$

$\inf_{A'}\{12, 18\} = 3$
↑ max dei minoranti

minoranti $\{12, 18\} = \{1, 3\}$

$\Rightarrow (A', |)$ è un reticolo

ESERCIZIO

Si consideri l'insieme $S = \{a, b, c, d\}$ e sia $P(S)$ l'insieme delle parti di S.

① Quanti sono gli elementi di $P(S)$?

② Nell'insieme ordinato $(P(S), \subseteq)$ si calcoli

$\sup_{P(S)}(\{a,c\}, \{a,d\})$, $\inf_{P(S)}(\{a,c\}, \{a,d\})$

③ Sia $A = \{X \in P(S) : |X| \leq 2\}$. Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, massimo e minimo di A.

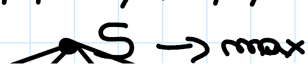
④ Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \subseteq)$

⑤ Si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.

① $|P(S)| = 2^{|S|} = 2^4 = 16$ $\qquad S = \{a, b, c, d\}$

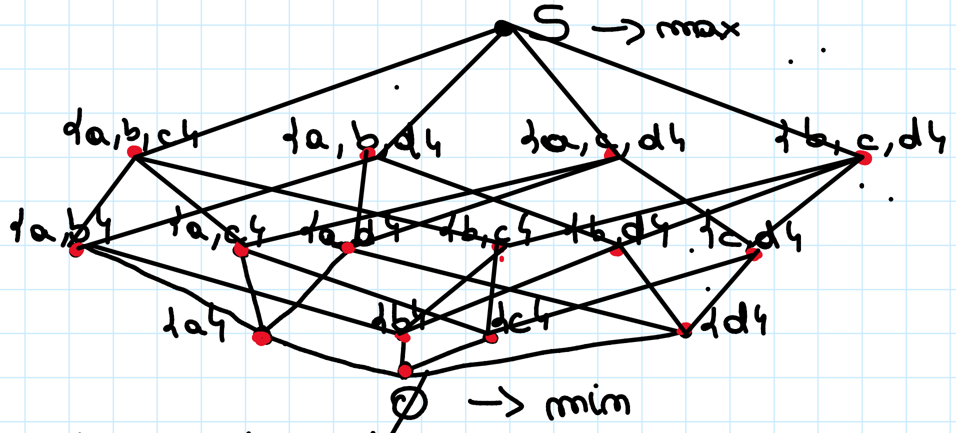
$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$

$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, S\}$



$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, S\}$

2



$\sup(\{a,c\}, \{a,d\}) = \{a,c,d\}$

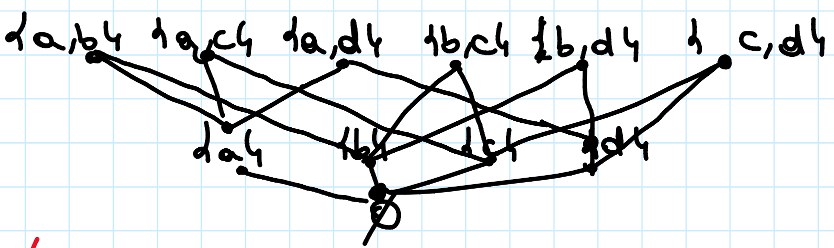
min dei maggioranti → $\{a,c,d\}, S$

$\inf(\{a,c\}, \{a,d\}) = \{a\}$

max dei minoranti → $\{a\}, \emptyset$

3 $A = \{X \in \mathcal{P}(S) : |X| \leq 2\}$

$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}\}$



minimali: $\emptyset$

massimali: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$

minimo: $\emptyset$

massimo: $\nexists \max A$

$(A, \subseteq)$ non è totalmente ordinato, ad esempio $\{a\}, \{b,c\}$ non sono confrontabili

ESERCIZIO

$A = \{2,3,4\}$ e si ponga $B = A \times A$. In B si consideri

$$(a,b) \sqsubseteq (c,d) \iff a \leq c \text{ e } b \mid d$$

→ $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine