Lezione 11- Tutorato

martedì 24 gennaio 2023 17:17

MATRICI

Matrice $(s \times t)$: tabella rettangolare contenente $|s \cdot t|$ numeri disposti su s righe e t colonne

Se $s = t \Rightarrow$ MATRICE QUADRATA

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A: matrice quadrata di ordine 3

a_{11}, a_{22}, a_{33} costituiscono la diagonale principale della matrice.

MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE : se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli.

" " **INFERIORE**: se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli.

MATRICE IDENTICA : se ha tutti 1 sulla diagonale e gli altri elementi nulli

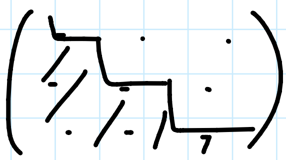
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si dice TRASPOSTA DI A, A^T, la matrice che ha come righe le colonne di A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Quando si vuole calcolare il prodotto tra 2 matrici si procede con il prodotto righe · colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix}$$



MATRICI A SCALA

Il 1° elemento non nullo della i-esima riga di A viene detto PIVOT.

Una matrice a scala:

- NON PUÒ AVERE RIGHE NON NULLE AL DI SOTTO DI UNA RIGA NULLA

- IL PIVOT DI CIASCUNA RIGA SI TROVA PIÙ A SINISTRA DEL PIVOT DELLA RIGA SUCCESSIVA.

Per ottenere una matrice a scala equivalente a quella data inizialmente si può effettuare un nº finito di operazioni:

- SCAMBIARE 2 RIGHE

- MOLTIPLICARE TUTTI GLI EL. DELLA RIGA PER UNO STESSO NUMERO

- SOSTITUIRE LA RIGA H CON LA RIGA CHE SI OTTIENE SOMMANDO QUESTA CON UN'ALTRA RIGA K MOLTIPLICATA PER UN Nº REALE.

OSS. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

$\uparrow$ det A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0$$

Si sceglie la riga o colonna con più zeri

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \det A = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{s} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

$$= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

MATRICE INVERSA

Una matrice A è invertibile $\iff |A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$$

A^*: matrice dei complementi algebrici

ESERCIZI

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. - Si verifichi che A è invertibile

1 - Si verifichi che A è invertibile
2 - Si determini la matrice inversa di A.

1 $$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot (2+2) = 2 \cdot 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow A$$ invertibile

2 $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$(-1)^{i+j} |A_{ij}|$

si ottiene eliminando i-esima riga e j-esima colonna

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

TR - rgA è uguale al n° pivot di una qualunque matrice a scala equivalente ad A.

Si dice MINORE DI ORDINE k il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A di ordine k

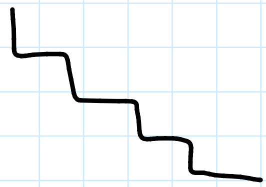
Sia B una sottomatrice di A. Si dice MINORE ORLATO DI B il determinante di una qualsiasi sottomatrice di A che si ottenga da B aggiungendovi una riga e una colonna

TR - $rgA = h \Leftrightarrow \exists$ un minore di A non nullo di ordine h e tutti i minori orlati di questo sono nulli.

ESERCIZIO

Si determini una matrice a scala equivalente a

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$R_2 \leftrightarrow R_5$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-3+(-2)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

$1+(-\cancel{2})\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=0$

$R_2 \leftrightarrow R_2 + R_1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

$R_3 \leftrightarrow R_3 + R_1\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{7}{2}+\frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{7}{\cancel{5}}=0$

$R_4 \leftrightarrow R_4 + R_3\cdot\frac{7}{5}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 4$

ESERCIZIO

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Si determini rg A attraverso il metodo della riduzione a scala

(2) " " " con il Th. degli orlati

$R_3 \; R_1$

$1-\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=0$

$2-\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=0$

(1) $R_3 \leftrightarrow R_3 + R_1\cdot\frac{1}{3}$

$R_4 \leftrightarrow R_4 + R_1\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$2-1(2)$

$$R_4 \leftrightarrow R_4 + R_1 \cdot \frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2-1(2)$$

$$R_3 \leftrightarrow R_3 + R_2 \cdot 2$$
$$R_4 \leftrightarrow R_4 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{rg\,A = 2}$$

$R_4 \leftrightarrow R_4 - R_3$

(2) $1 \leq rg\,A \leq 3$ perchè la matrice è (4×3) quindi non posso considerare sottomatrici quadrate di ordine 4.

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$ DI ORDINE 2 (*)

MINORE NON NULLO

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \underbrace{(-1)^{3+1}}_{=1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{2} + 2(-1)^{3+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{3} = -6 + 6 = 0$$

Quindi abbiamo trovato un minore non nullo di ordine 2 (*) i cui orlati sono invece nulli

$$\Rightarrow rg\,A = 2$$