Lezione 12- Tutorato

mercoledì 25 gennaio 2023 18:51

Simulazione PROVA D'ESAME

(1) Siano A, B, C insiemi arbitrari. Si stabilisca se le seguenti sono vere oppure false:

1. $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$
2. $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap C$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

(2) Si considerino le applicazioni

$f: x \in \mathbb{Z} \mapsto 5 - x \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $g: y \in \mathbb{Z} \mapsto |y| + 2 \in \mathbb{N}$

1. Si dimostri che f è biettiva e si determini f^{-1}
2. Si stabilisca se g è iniettiva, suriettiva o biettiva
3. Si determini $g \circ f$ e si precisi se essa è iniettiva, suriettiva o biettiva.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Si determini il rgA utilizzando il Th. degli orlati
2. Si determini il rgA utilizzando la riduzione a scala
3. Si determini l'inversa della sottomatrice $A^{2,3}_{1,2}$ ← selezionando 1ª e 2ª riga di A e la 2ª e 3ª colonna.

(4) Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si consideri la relazione R:

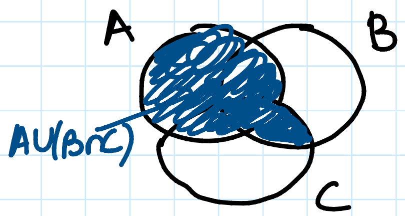
$$x R y \iff 2x + 3y \in 5\mathbb{Z}$$

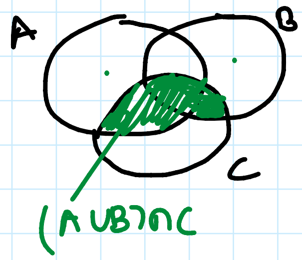
1. Si dimostri che R è una relazione di equivalenza in A
2. Si descriva la partizione di A

2. Si descriva la partizione di A determinata da R

3. Si stabilisca se la relazione R':
$x R' y \iff 2x - 3y \in 5\mathbb{Z}$
è di equivalenza.

(1)





AU (B∩C)
(AUB) ∩ C

Dal disegno si vede che $(A\cup B)\cap C \subseteq A\cup(B\cap C)$

1. $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap C$ $\not\subseteq$

FALSO! Quindi bisogna esibire un controesempio

$A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,4\}$ $C=\{2,5\}$

$B\cap C=\{2\}$ $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3\}$

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$ $(A\cup B)\cap C=\{2\}$

$\{1,2,3\}\not\subseteq\{2\}$

2. $(A\cup B)\cap C \subseteq A\cup(B\cap C)$

$B\subseteq A$
$x\in B \Rightarrow x\in A$

$\forall\, x\in (A\cup B)\cap C \Rightarrow x\in A\cup B$ e $x\in C$

$\Rightarrow (x\in A$ o $x\in B)$ e $x\in C$

$\Rightarrow x\in A$ o $(x\in B$ e $x\in C) \Rightarrow x\in A$ o $x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap C \subseteq A\cup(B\cap C)$

3. $(A\cup B)\cap C = A\cup(B\cap C)$

Per valere = devono valere sia $\subseteq$ che $\supseteq$ quindi nel nostro caso non

Per valere = devono valere sia ≤ che ≥
quindi nel nostro caso non
vale l'=.

2 1

INIETTIVA: $\forall x,y \in \mathbb{Z},\ x \neq y \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \neq f(y)$

Se per assurdo $f(x) = f(y) \Rightarrow 5 - x = 5 - y \Rightarrow x = y$ ↯

$\Rightarrow f$ INIETTIVA

SURIETTIVA: $\forall y \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{Z} : f(x) = y$

$y = 5 - x \Rightarrow x = 5 - y$ ← basta prendere questa come x

$\Rightarrow f$ SURIETTIVA

FUNZIONE INVERSA $\Rightarrow$ $y = 5 - x \Rightarrow x = 5 - y$

$\Rightarrow y = 5 - x$

$$f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto 5 - x \qquad f^{-1} = f$$

2 INIETTIVA: $1, -1$

$g(1) = 1 + 2 = 3$
$g(-1) = 1 + 2 = 3$
$\Rightarrow g$ NON È INIETTIVA

SURIETTIVA: $\forall z \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{Z} : g(y) = z$

$g(y) = \underbrace{|y|}_{\text{negativo} = -1} + 2 = 1$

Se prendiamo $1 \in \mathbb{N}$
non esiste un elemento y
di Z tale che $g(y) = 1$
perché altrimenti
dovrebbe risultare
$|y| = -1$ ↯

$\Rightarrow g$ non è biettiva

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 5 - x$ $\quad g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ y \mapsto |y| + 2$ $\quad g(y) = |y| + 2$

3 $g \circ f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{N}$

da il codominio di questa (g)

da il dominio di questa

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5 - x) =$

$= |5 - x| + 2$

$$g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto |5 - x| + 2$$

INIETTIVA: $1, 9$

$g \circ f(1) = |5-1|+2 = 6$
$g \circ f(9) = |5-9|+2 = 6$
$g \circ f$ non è iniettiva

SURIETTIVA:
Per le f. composte si può utilizzare il seguente Teorema:

$g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

Dato che g non è suriettiva allora $g \circ f$ non può essere suriettiva perché se lo fosse per il Th dovrebbe esserlo anche g

Th. Se f, g INIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ INIETTIVA

$g \circ f$ non è biettiva.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $1 \leq rg A \leq 3$

Siccome $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ottengo minore non nullo di ordine 2

Gli orlati di questo minore sono 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4+4 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$$

Quindi per il Th. degli orlati $rg A = 2$

(2) $R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ MATRICE A SCALA CON 2 PIVOT

$\Rightarrow rg A = 2$

③ $B = A_{1,2}^{2,3}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$|B| = -1 \cdot (-2) + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow B$ è invertibile

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B^{*T}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-2) & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot 0 & (-1)^{2+2}(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{*T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot B^{*T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

④ $xRy \Leftrightarrow 2x + 3y \in 5\mathbb{Z}$ $\qquad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

R riflessiva: $xRx \Leftrightarrow 2x + 3x \in 5\mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x \in 5\mathbb{Z}$ VERO

R simmetrica: $\underset{\text{IPOTESI}}{xRy} \overset{?}{\Rightarrow} yRx \; (\underline{2y + 3x \in 5\mathbb{Z}})$

$\underline{xRy} \Leftrightarrow 2x + 3y \in 5\mathbb{Z} \xRightarrow{\cdot(-1)} -2x - 3y \in 5\mathbb{Z}$

$\xRightarrow{+5x+5y} -2x - 3y + 5x + 5y \in 5\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2y + 3x \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow \underline{yRx}$

R transitiva: $\left.\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} xRz$

$\left.\begin{matrix} xRy \Rightarrow 2x + 3y \in 5\mathbb{Z} \\ yRz \Rightarrow 2y + 3z \in 5\mathbb{Z} \end{matrix}\right\}$ li sommo perché la somma $\in 5\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x + 3y + 2y + 3z \in 5\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x + 5y + 3z \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow 2x + 3z \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow xRz$

sottraggo $5y$ che è un multiplo di 5

② $[1]_R = \{x \in A : 1Rx\}$ $\qquad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$= \{x \in A : 2 + 3x \in 5\mathbb{Z}\} = \{1, 6\} = [6]_R$

$[1]_R = \{x \in A : 1Rx\}$ $\qquad A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$\parallel$$

$$\{x \in A : 2 + 3x \in 5\mathbb{Z}\} = \{1, 6\} = [6]_R$$

$$[2]_R = \{x \in A : 4 + 3x \in 5\mathbb{Z}\} = \{2\}$$

$$[3]_R = \{x \in A : 6 + 3x \in 5\mathbb{Z}\} = \{3\}$$

$$[4]_R = \{x \in A : 8 + 3x \in 5\mathbb{Z}\} = \{4\}$$

$$[5]_R = \{5\}$$

$$F = \{\{1, 6\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$$

3) $x R' y \iff 2x - 3y \in 5\mathbb{Z}$

RIFLESSIVA $\quad 1 R' 1 \iff 2 - 3 \overset{?}{\in} 5\mathbb{Z}$

$$\underset{}{-1} \notin 5\mathbb{Z} \Rightarrow 1 \not R' 1$$

$\Rightarrow R'$ non è di equivalenza