Lezione 5- Tutorato

martedì 3 gennaio 2023 11:29

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

ESERCIZIO

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

R :

$x R y \iff x + 2y \in 3\mathbb{Z}$

2. Si descriva la partizione di A determinata da R

Determiniamo le classi :

$[1]_R = \{x \in A : 1 R x\} = \{x \in A : 1 + 2x \in 3\mathbb{Z}\} = \{1,4,7\} = [4]_R = [7]_R$

$[2]_R = \{x \in A : 2 R x\} = \{x \in A : 2 + 2x \in 3\mathbb{Z}\} = \{2,5,8\} = [5]_R = [8]_R$

$[3]_R = \{x \in A : 3 R x\} = \{x \in A : 3 + 2x \in 3\mathbb{Z}\} = \{3,6,9\} = [6]_R = [9]_R$

$A/_R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$

$F = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6,9\}\}$ ← è una partizione di A rispetto ad R.

3. Motivando la risposta, si stabilisca se la relazione R' definita in A ponendo

$x R' y \iff x - 2y \in 3\mathbb{Z}$

è di equivalenza.

$1 - 2x \in 3\mathbb{Z}$

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$8 - 2x \in 3\mathbb{Z}$

- RIFLESSIVITÀ

$1 R' 1 \iff 1 - 2 \cdot 1 \in 3\mathbb{Z} \iff -1 \in 3\mathbb{Z}$

FALSO

R' non è riflessiva

$4 R' 4 \iff 4 - 8 \in 3\mathbb{Z} \iff -4 \notin 3\mathbb{Z}$

- SIMMETRICA

Ip: $x R' y \overset{?}{\Rightarrow} y R' x$ ← TESI $(y - 2x \in 3\mathbb{Z})$

o sottraendo

$x R' y \iff x - 2y \in 3\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$ $+3(y-x)$

Aggiungendo ad un multiplo di 3 quell'elemento resta ancora un multiplo di 3.

$x - 2y + 3y - 3x \in 3\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$y - 2x \in 3\mathbb{Z}$ → R' è simmetrica

R' non è transitiva: $(x R' y$ e $y R' z \overset{?}{\Rightarrow} x R' z)$

R' non è transitiva: $(xR'y \text{ e } yR'z \overset{?}{\Rightarrow} xR'z)$

$1R'8$ (perché $1-2\cdot 8 = -15 \in 3\mathbb{Z}$) $\quad 8R'4$ (perché $8-2\cdot 4 = 0 \in 3\mathbb{Z}$) $\overset{?}{\Rightarrow} 1R'4$ $\quad (1-2\cdot 4 \in 3\mathbb{Z})$

$1-8=-7 \notin 3\mathbb{Z}$

$1 \cancel{R'} 4 \Rightarrow R'$ non è transitiva

ESERCIZIO

Siano $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{4,5,6\}\dots\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A aventi ordine 3. Si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$\{a,b,c\} \sim \{d,e,f\} \Leftrightarrow a+b+c = d+e+f$$

per ogni $\{a,b,c\}, \{d,e,f\} \in B$

1. Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza in B
2. Si determinino le classi di equivalenza $[\{1,2,3\}]_\sim$, $[\{1,2,4\}]_\sim$, $[\{1,2,5\}]_\sim$, $[\{1,2,6\}]_\sim$
3. Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $B/\sim$?

1. • $\sim$ RIFLESSIVA (xRx)

$\{a,b,c\} \sim \{a,b,c\} \Leftrightarrow a+b+c = a+b+c$ VERO!

• $\sim$ SIMMETRICA $(xRy \overset{?}{\Rightarrow} yRx)$

IP. $\{a,b,c\} \sim \{d,e,f\} \overset{?}{\Rightarrow} \overbrace{\{d,e,f\} \sim \{a,b,c\}}^{\text{TESI}}$

$\{a,b,c\} \sim \{d,e,f\} \Leftrightarrow a+b+c = d+e+f \Leftrightarrow d+e+f = a+b+c$

$\Updownarrow$

$\{d,e,f\} \sim \{a,b,c\}$

$\Rightarrow \sim$ SIMMETRICA

• $\sim$ TRANSITIVA $(xRy \text{ e } yRz \overset{?}{\Rightarrow} xRz)$

$\underset{x}{\{a,b,c\}} \sim \underset{y}{\{d,e,f\}}$ e $\underset{y}{\{d,e,f\}} \sim \underset{z}{\{g,h,i\}} \overset{?}{\Rightarrow} \{a,b,c\} \sim \{g,h,i\}$ $(a+b+c = g+h+i)$

$\{a,b,c\} \sim \{d,e,f\} \Leftrightarrow a+b+c = \underline{d+e+f}$

$\{d,e,f\} \sim \{g,h,i\} \Leftrightarrow \underline{d+e+f} = g+h+i$

$\Rightarrow a+b+c = g+h+i$

$\Updownarrow$

$\{a,b,c\} \sim \{g,h,i\}$

$\Rightarrow \sim$ TRANSITIVA.

$\sim$ è di equivalenza.

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

2. $[\{1,2,3\}]_\sim = \{ \{a,b,c\} \in B : \{1,2,3\} \sim \{a,b,c\}\} = \{\{1,2,3\}\}$ $\quad 1+2+3 = 6 = a+b+c$

$[\{1,2,4\}]_\sim = \{ \{a,b,c\} \in B : \{1,2,4\} \sim \{a,b,c\}\} = \{\{1,2,4\}\}$ $\quad \Leftrightarrow 1+2+4 = a+b+c$, $\quad 1+2+4 = 7$

$[\{1,2,5\}]_\sim = \{ \{a,b,c\} \in B : \{1,2,5\} \overset{\Leftrightarrow\, 1+2+5 = a+b+c}{\sim} \{a,b,c\}\} = \{\{1,2,5\}, \{1,3,4\}\}$ $\quad 1+2+5 = 8$

$[\{1,2,6\}]_\sim = \{\{1,2,6\}, \{2,3,4\}, \{1,3,5\}\} = [\{2,3,4\}]_\sim = [\{1,3,5\}]_\sim$ $\quad 1+2+6 = 9$

$[\{1,3,6\}] = \{\{1,4,5\}, \{1,3,6\}, \{2,3,5\}\}$ $\quad 1+3+6 = 10$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad 4+5+6 = 15$

3.
$B/_\sim = \{ \underset{6}{[\{1,2,3\}]_\sim}, \underset{7}{[\{1,2,4\}]_\sim}, \underset{8}{[\{1,2,5\}]_\sim}, \underset{9}{[\{1,2,6\}]_\sim}, \underset{10}{[\{1,3,6\}]_\sim},$

$\underset{11}{[\{1,4,6\}]_\sim}, \underset{12}{[\{1,5,6\}]_\sim}, \underset{13}{[\{2,5,6\}]_\sim}, \underset{14}{[\{3,5,6\}]_\sim}, \underset{15}{[\{4,5,6\}]_\sim} \}$

$$|B/_\sim| = 10$$

ESERCIZIO

Sia $A = \{a,b,c\}$. Nell'insieme $P(A)$ dei sottoinsiemi di A, si consideri la relazione R definita ponendo

$$X \, R \, Y \Leftrightarrow X \setminus \{a\} = Y \setminus \{a\}$$

1. Si dimostri che R è una relazione di equivalenza in $P(A)$.
2. Si descrivano le classi di equivalenza $[\emptyset]_R, [\{a\}]_R, [\{b\}]_R$
3. Si determini la partizione di $P(A)$ associata ad R.

1. • R riflessiva

$$X R X \quad \forall X \in P(A) \overset{\text{def. della relazione}}{\iff} X \setminus \{a\} = X \setminus \{a\}$$

VERO

• R simmetrica

$$XRY \overset{?}{\Rightarrow} YRX \rightarrow \text{TESI: } Y\setminus\{a\} = X\setminus\{a\}$$

$$XRY \iff X\setminus\{a\} = Y\setminus\{a\} \iff Y\setminus\{a\} = X\setminus\{a\} \iff YRX$$

VERO!

• R transitiva

$$\left.\begin{matrix} XRY \\ YRZ \end{matrix}\right) \overset{?}{\Rightarrow} XRZ$$

$$\left.\begin{matrix} XRY \iff X\setminus\{a\} = \underline{Y\setminus\{a\}} \\ YRZ \iff \underline{Y\setminus\{a\}} = Z\setminus\{a\} \end{matrix}\right) \Rightarrow X\setminus\{a\} = Z\setminus\{a\} \iff XRZ \quad \text{VERO!}$$

$$X\setminus\{a\} = Y\setminus\{a\} = Z\setminus\{a\}$$

$\Rightarrow$ R è una relaz di equivalenza

2. $[\emptyset]_R$, $[\{a\}]_R$, $[\{b\}]_R$ $\qquad [a]_R = \{x \in A : a R x\}$

$$[\emptyset]_R = \{X \in P(A) : \emptyset R X\} \overset{\text{def}}{=} \{X \in P(A) : \underset{\emptyset}{\underbrace{\emptyset \setminus \{a\}}} = X\setminus\{a\}\} =$$

$$= \{X \in P(A) : \emptyset = X\setminus\{a\}\} = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$\{a\}$

$A = \{a, b, c\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

$[\{a\}]_R = [\emptyset]_R$

$$[\{b\}]_R = \{X \in P(A) : \{b\} R X\} = \{X \in P(A) : \underset{\{b\}}{\underbrace{\{b\}\setminus\{a\}}} = X\setminus\{a\}\} =$$

$$= \{X \in P(A) : \{b\} = X\setminus\{a\}\} = \{\{b\}, \{a,b\}\} = [\{a,b\}]_R$$

$\{a,b\}$

3. $$[\{c\}]_R = \{X \in P(A) : \{c\} R X\} = \{X \in P(A) : \{c\} = X\setminus\{a\}\}$$

$$= \{\{c\}, \{a,c\}\} = [\{a,c\}]_R$$

$$[\{b,c\}]_R = \{X \in P(A) : \underbrace{\{b,c\} R X}_{\{b,c\}\setminus\{a\} = X\setminus\{a\}}\} \overset{def}{=} \{X \in P(A) : \{b,c\} = X\setminus\{a\}\} =$$

$$= \{\{b,c\}, A\} = [A]_R$$

$$F = \{\{\emptyset, \{a\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\{c\}, \{a,c\}\}, \{\{b,c\}, A\}\}$$