Lezione 3- Tutorato

martedì 27 dicembre 2022 10:06

CORRISPONDENZE e APPLICAZIONI

ESERCIZIO 1

A, B arbitrari e $f: A \to B$ applicazione. Si dimostri che se f è iniettiva allora $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, per ogni $A_1, A_2 \subseteq A$. Si provi poi che ciò non vale, in generale, se f non è iniettiva.

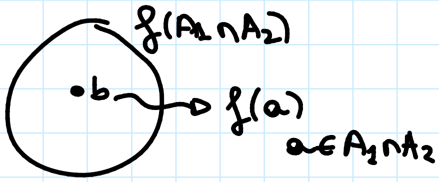
Per provare che $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ abbiamo dimostrare la doppia inclusione:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$
e
$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

$\left.\begin{array}{l} \cdot \subseteq \\ \cdot \supseteq \end{array}\right) \Rightarrow =$

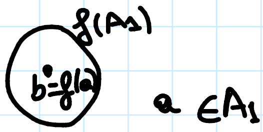
Partiamo dal dimostrare che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$



$\forall b \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow b = f(a)$ con $a \in A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow \underline{b = f(a) \text{ con } a \in A_1}$ e $\underline{b = f(a) \text{ con } a \in A_2}$

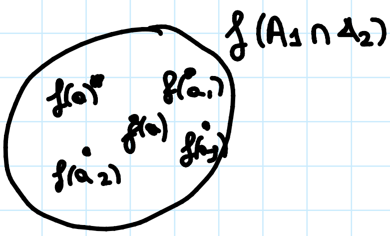


$\Rightarrow b \in f(A_1)$ e $b \in f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$(b \in A$ e $b \in B \Rightarrow b \in A \cap B)$

$\Downarrow$

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ (1)



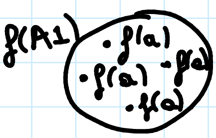
(1) vale anche se la f. non è iniettiva perchè non lo abbiamo sfruttato nella dimostrazione.

Ora andiamo a provare l'altra inclusione: $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$

$(b \in A \cap B \Rightarrow b \in A$ e $b \in B)$

$\forall b \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow b \in f(A_1)$ e $b \in f(A_2) \Rightarrow$

$b = f(a_1)$ con $a_1 \in A_1$ e $b = f(a_2)$ con $a_2 \in A_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow$



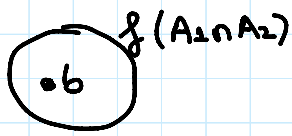
$\Rightarrow$ Sapendo che la funzione è iniettiva

$\Downarrow$

$a_1 = a_2 \in A_1 \cap A_2$ (essendo $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$)

$\quad \shortparallel$
$\quad a$

Quindi $b = f(a)$ dove $a \in \underline{A_1 \cap A_2}$



$\Downarrow$

$\Downarrow$

$b \in f(A_1 \cap A_2)$ $\boxed{6}$

$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ se la f. è iniettiva

(2) vale solo per le f. iniettive

Se f non è iniettiva in generale $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subseteq f(A_1 \cap A_2)$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$ $-1 \xmapsto{(\,)^2} 1$, $1 \longmapsto 1$ $\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$ $-1 \neq 1 \not\Rightarrow 1 \neq 1$

$A_1 = \{1, 2\}$ $A_2 = \{-1, 2\}$

$f(A_1) = \{\underset{f(1)}{1}, \underset{f(2)}{4}\}$ $f(A_2) = \{\underset{f(-1)}{1}, \underset{f(2)}{4}\} \Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = \{1,4\} \cap \{1,4\} = \{1,4\}$ (*)

$A_1 \cap A_2 = \{2\}$ $f(A_1 \cap A_2) = \{4\}$, $f(2) = 2^2 = 4$

$f(A_1) \cap f(A_2) \overset{(*)}{=} \{1,4\} \not\subseteq \{4\} = f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow$ non vale $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

ESERCIZIO

Si dimostri che l'applicazione $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \in \mathbb{N}_p \to f \text{ è } \geq 0 \\ -\frac{x+1}{2} & \text{se } x \in \mathbb{N}_d \to f \text{ è } < 0 \end{cases}$$

è biettiva e se ne determini l'applicazione inversa.

f INIETTIVA: $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$, $x \neq y \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \neq f(y)$

Per assurdo, supponiamo che $f(x) = f(y)$. Dobbiamo distinguere 2 casi:

1) $f(x) = f(y) \geq 0$
2) $f(x) = f(y) < 0$

(1) Se $f(x) = f(y) \geq 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}_p \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$, $f(y) = \frac{y}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} = \frac{y}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow x = y$ ASSURDO POICHÉ

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{x}{\cancel{2}} = \frac{y}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \Rightarrow x = y$ ↯ ASSURDO POICHÉ $x \neq y$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$

(2) Se $f(x) = f(y) < 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}_d \Rightarrow f(x) = -\frac{x+1}{2}$, $f(y) = -\frac{y+1}{2}$

$\Downarrow$

$+\frac{x+1}{2} = +\frac{y+1}{2} \Rightarrow x + \cancel{1} = y + \cancel{1} \Rightarrow x = y$ ↯ ASSURDO

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\Rightarrow f$ è INIETTIVA

f SURIETTIVA $\quad \forall y \in \mathbb{Z}, \overset{?}{\exists} x \in \mathbb{N}_0 : f(x) = y$

$f(x) = \frac{x}{2} = y$

$\Updownarrow$ $x = 2y$

$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = y$

$\forall y \in \mathbb{Z}$, $y \geq 0$ oppure $y < 0$

- Se $y \geq 0 \Rightarrow \underbrace{2y}_{x} \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(\underset{\in \mathbb{N}_p}{2y}) = \frac{2y}{2} = y$

  $f(x) = y \quad (x = 2y \in \mathbb{N}_0)$

$f(x) = -\frac{x+1}{2} = y$

- Se $y < 0 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow -y \geq 1 \overset{(\cdot 2)}{\Rightarrow} -2y \geq 2$

  $-2 < 0$

  $2 > 0$

  $-y \to 1, 2, 3, 4 \ldots$

  $-y \to 1, 2, 3, 4 \ldots$

  $-2y - 1 \geq 2 - 1$

  $\Updownarrow$

  $-2y - 1 \geq 1$

$\Rightarrow -2y - 1 \in \mathbb{N}_0$ ed è dispari

$f(\underbrace{-2y-1}_{x}) = -\frac{-2y - \cancel{1} + \cancel{1}}{2} = -\frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}} = +y$

$= -\frac{x+1}{2}$

$\Rightarrow f$ SURIETTIVA