Progettazione di Algoritmi
14/7/2022

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:

Spazio riservato alla correzione

1	2	3	4	5	Totale
/20	/19	/21	/22	18	/100

per i compiti da 6 CFU:
/35 /30 /35

La prova per l'esame di 6 CFU consiste degli esercizi 1, 2, 3 e di quelli riportati nell'ultima pagina (che non fanno parte della prova dell'esame da 9 CFU).

1. **Grafi**
   a) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo **ricorsivo** che effettua la visita DFS di un grafo e costruisce l'**albero DFS**. Si analizzi il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto. Analizzare il tempo di esecuzione significa fornire un limite superiore asintotico quanto migliore è possibile al tempo di esecuzione dell'algoritmo **giustificando la risposta**.

   b) Si disegni l'albero BFS generato da una visita BFS del grafo contenente i seguenti archi (a,b),(a,c), (a,d), (b,e), (b,c), (c,f),(c,g),(d,f), (e,f),(e,g),(f,g). La visita deve partire dal nodo sorgente **a**. Riportare vicino a ciascun nodo dell'albero un intero che indichi quando il nodo viene scoperto. Si assuma che i nodi siano disposti nelle liste di adiacenza in base all'ordine crescente delle proprie etichette.

   c) Si indichino gli archi che devono essere rimossi dal grafo dell'esercizio c) affinche' nel grafo non vi siano piu` cicli. **Per individuare gli archi da cancellare dovete utilizzare una tecnica algoritmica che possa essere applicata mediante ad un arbitrario grafo. Spiegare la tecnica che avete utilizzato per cancellare i suddetti archi. L'esercizio sara` valutato 0 punti se saranno semplicemente indicati gli archi da cancellare e i cicli su quali essi si trovano.**

2. **Algoritmi greedy [20 minuti]**

a) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo che restituisce la soluzione ottima per Interval Scheduling e si fornisca una stima asintotica del tempo di esecuzione dell'algoritmo nel caso pessimo giustificando con chiarezza la risposta.

b) Si consideri il problema dell'interval scheduling e sia $i_1, i_2, \ldots i_k$ l'insieme di job selezionati dall'algoritmo greedy e sia $j_1, j_2, \ldots j_m$ l'insieme di job nella soluzione ottima. Entrambe le sequenze di job $i_1, i_2, \ldots i_k$ e $j_1, j_2, \ldots j_m$ sono ordinate rispetto ai tempi di fine. Supponiamo che qualcuno ci abbia detto che l'esecuzione dei job $i_1, i_2, \ldots i_k$ termina non più tardi di quella dei job $j_1, j_2, \ldots j_k$. **A partire da questa informazione, dimostrate che la soluzione greedy è ottima.**

c) Si mostri l'esecuzione dell'algoritmo di Prim sul grafo contenente i seguenti archi (a,b)6, (a,c)3,(a,d)5, (a,e)8 , (b,e)2,(c,d)3,(c,e)4,(c,f)2, (d,f)4. I numeri rossi sono i pesi degli archi. La radice dell'albero deve essere il nodo a. **Per ogni passo occorre mostrare l'albero costruito fino a quel momento e il contenuto della coda a priorita` (indicando anche le chiavi).**

3. **Programmazione dinamica [25 minuti]**

a) Si consideri il problema dei cammini minimi.
   I. Si spieghi in modo chiaro cosa rappresenta OPT(i,v) e cosa rappresentano i parametri i e v. Nel fare questo, spiegare in modo chiaro **anche** cosa si intende per soluzione ottima.
   II. Si fornisca una relazione di ricorrenza per il calcolo di OPT(i,v) spiegando in modo chiaro come si ottiene la formula.

b) Si scriva lo pseudocodice dell'algoritmo di Bellman-Ford. Si fornisca una stima asintotica del tempo di esecuzione dell'algoritmo nel caso pessimo giustificano con chiarezza la risposta.

c) Si disegni la tabella M computata dall'algoritmo per minimum coin change problem quando la banconota da cambiare ha valore 6 e si hanno a disposizione monete con i seguenti tre valori: 1, 2, 3. Alla fine, fornire la soluzione ottima.

4. Analisi degli algoritmi e notazione asintotica [20 minuti]

a) Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

1. $n^2 \log^2 n+10n^3 = O(n^2\log^3 n)$ F ← Poucole
2. $n^{1/3} = \Omega\ (n^{1/3} +\log n)$ V
3. $n^{1/3} = \Omega\ (n^{1/3} + n^{1/4} \log n)$ V
4. $n^3-10n^2+8=\Omega(n^3+1000n^2+n+11)$ V
5. $\log(\log^3 n)=O((\log n)(\log n))$ V

b) Dimostrare che la seguente affermazione e` vera giustificando la risposta. Occorre fornire le costanti c ed n_0.

1. $2n^3+5n=O(n^3)$

c) Dimostrare che la seguente affermazione e` falsa giustificando **matematicamente** la risposta.

2. $n^3= \Omega(n^3 \log n)$

d) Si dimostri che se $0<f(n)=O(h(n))$ e $0<g(n)= O(p(n))$ e **a** e **b** sono costanti positive allora **a**$f(n)+$**b**$g(n)= O(h(n)+p(n))$. Occorre utilizzare solo la definizione di O e nessuna altra proprieta`.

e) Si analizzi il tempo di esecuzione nel caso pessimo del seguente segmento di codice fornendo una stima asintotica **quanto migliore è possibile** per esso. **Si giustifichi in modo chiaro la risposta.**

```
FOR(i=1; i<=n; i=3*i){
  FOR(j=1; j<=2^n; j=j*2) {
      print(j);
  }
}
```

5. **Divide et Impera [20 minuti]**
   a) Si scriva lo pseudocodice di un algoritmo ricorsivo che prende in input un array (**ed eventualmente altri input**) e computa la lunghezza della sottosequenza che contiene il massimo numero di occorrenze consecutive di uno stesso elemento (l'elemento **NON e` passato in input**). È sufficiente che l'algoritmo abbia tempo O(nlog n). **Evitate di invocare algoritmi ausiliari (punteggio inferiore se cio` viene fatto).**
   Bonus se l'algoritmo è lineare.

   b) Si fornisca la relazione di ricorrenza che esprime il limite superiore al tempo di esecuzione dell'algoritmo al punto a) . Si giustifichi la relazione fornita.

   c) A partire dalla relazione di ricorrenza da voi fornita al punto b) per il caso pessimo, si fornisca una funzione h(n) tale che T(n)=O(h(n)). **Giustificare la risposta** usando il metodo iterativo o quello della sostituzione (induzione).

Domande aggiuntive per l'esame da 6 CFU.

1.

c) Si fornisca l'algoritmo **ricorsivo** che prende in input un DAG G e restituisce l'ordinamento topologico di G. Fornire una stima del tempo di esecuzione dell'algoritmo nel caso pessimo giustificando la risposta.

2.

d) Si fornisca un'istanza del problema della minimizzazione dei ritardi con n=5 per cui il valore della soluzione ottima è 7 e al piu` una attivita` ha ritardo 0 nella soluzione ottima. Si mostri chiaramente perche' il valore della soluzione per l'istanza da voi fornita è 7 e qual è il ritardo di tutte le attivita`.

3.

d) Fornire la tabella costruita dall'algoritmo che computa il valore della soluzione ottima per **subset sums** quando l'istanza input è $w_1=1$, $w_2=2$, $w_3=7$, $w_4=5$, $w_5=4$, $W=6$.