Esercizio 1

$1+3+5+7+\dots+(2m-1)=m^2 \qquad \forall m \geq \underbrace{1}_{\bar{m}}$

- BASE INDUTTIVA

$1 = 1^2 = 1$ ✓

- $1+3+5+7+\dots+(2m-1)+(2\underbrace{(m+1)-1}_{2m+2-1=2m+1}) \overset{?}{=} (m+1)^2$

$\underbrace{1+3+5+7\dots+(2m-1)}_{m^2 \text{ per l'ipotesi induttiva}}+(2m+1) \overset{?}{=} (m+1)^2$

$\underbrace{m^2+2m+1}_{(m+1)^2} \overset{?}{=} (m+1)^2$

$\Rightarrow$ FORMULA È VERA $\forall m \geq 1$

2ª FORMA PRINCIPIO DI INDUZIONE

$\bar{m}$ P: proprietà relativa ai numeri naturali $m \geq \bar{m}$

- Se P è vera per $\bar{m}$
- se quando P è vera per ogni k t.c. $\bar{m} \leq k < t$, allora P è vera per t

$\Rightarrow$ P è vera $\forall m \geq \bar{m}$

ESERCIZIO 2

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA IN N

Sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Allora o

(i): m o è primo o è prodotto di numeri primi

La dimostrazione procede per induzione (con la 2ª forma) su m:

Se $m=2 \Rightarrow$ m è primo $\Rightarrow$ BASE INDUZIONE VERIFICATA

Sia $m>2$: si suppone che (i) sia vera per ogni t: $2 \leq t < m$

Si possono distinguere 2 casi:

- m è privo di divisori non banali $\Rightarrow$ m è primo $\Rightarrow$ la i è verificata

- n ha divisori non banali: n_1 ed n_2 tali che $n = n_1 \cdot n_2$ dove $2 \leq n_1, n_2 < n$

quindi la (i) è vera per n_1 ed n_2

$\Downarrow$

$n_1 = p_1 \cdots p_r \qquad n_2 = q_1 \cdots q_e$

$\Rightarrow n = n_1 \cdot n_2 = p_1 \cdots p_r \cdot q_1 \cdots q_e$ CIOÈ PRODOTTO DI NUMERI PRIMI

$\Rightarrow$ l'asserto è dimostrato

ESERCIZIO 3

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Allora esistono $q, r \in \mathbb{N}$ (detti rispettivamente quoziente e resto della divisione di m per n) tali che

$$\rightarrow \quad m = nq + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < n$$

Si ragiona per induzione su m (applicando la 2ª FORMA)

Se $m = 0$. Allora $0 = n \cdot 0 + 0 \leftarrow$ basta porre $q = 0 = r$

$\Downarrow$ BASE DI INDUZIONE VERIFICATA

Sia $m > 0$ e si supponga che l'asserto sia vero per ogni $t : 0 \leq t < m$. Abbiamo considerare 2 casi

Se $m < n \qquad m = nq + r$

$q \neq 0 \qquad m = nq > m$ PORTA AD UN ASSURDO $\Downarrow$ $q = 0$

essendo $m = nq + r$

basta porre $q = 0$ (perchè $m < n$) ed $r = m$

- Se $m \geq n$

$$\left.\begin{array}{l} m - n \geq 0 \\ m - n < m \end{array}\right) \Rightarrow 0 \leq m - n < m$$

POSSIAMO APPLICARE L'IPOTESI DI INDUZIONE

$\exists\ q_1, r_1$ tali che

$$m - n = nq_1 + r_1 \quad \text{con} \quad 0 \leq r_1 < n$$

$\Downarrow$

$$m = n + nq_1 + r_1 = n \underbrace{(1 + q_1)}_{q} + \underbrace{r_1}_{r}$$

Per cui posto $q = 1 + q_1$ ed $r = r_1$

Per cui posto $q = 1 + q_1$ ed $r = r_1$

abbiamo trovato che $m = nq + r$

CORRISPONDENZE e APPLICAZIONI

$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$

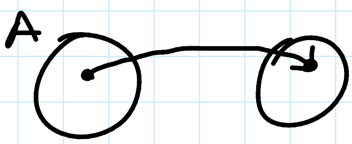
Un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$ viene detto corrispondenza tra A e B.

Quindi una corrispondenza può essere scelta in $2^{|A \times B|}$ modi

($\text{oss. } |A \times B| = |A| \cdot |B|$)

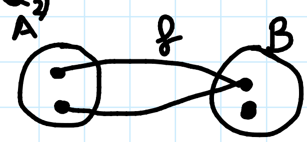
Una corrispondenza si dice un'applicazione tra A e B
$\overset{DEF}{\iff} \forall a \in A\ \exists!\ b \in B : a \mathcal{R} b$

A: DOMINIO
B: CODOMINIO



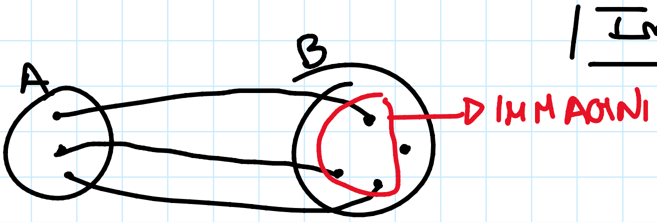
Un'applicazione $f: A \to B$ si dice INIETTIVA
$\iff (\forall a_1, a_2 \in A \text{ con } a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$

$\iff (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$



Un'applicazione $f: A \to B$ si dice SURIETTIVA
$\iff \forall b \in B\ \exists$ almeno un elemento $a \in A : f(a) = b$

$\boxed{\operatorname{Im} f = \text{Codominio}}$



ESERCIZIO 4

Si stabilisca se le corrispondenze seguenti sono applicazioni:

$R_1: \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = 2y - 1\}$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$
$x \rightsquigarrow y = \frac{x+1}{2}$

$R_2: \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : y = \frac{1}{x}\}$

$R_3: \{(\frac{a}{b}, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : y = a + b\}$

- $R_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = \frac{x+1}{2} \}$

$x = 2y - 1 \Rightarrow 2y = x+1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$

Se $x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\Rightarrow R_1$ non è un' applicazione

- $R_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : y = \frac{1}{x} \}$

Per $x = 0 \in \mathbb{Z}$ si ottiene $y = \frac{1}{0} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow R_2$ non è un' applicazione

- $R_3 = \{ (\frac{a}{b}, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : y = a+b \}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b} + 1 \rightarrow \overset{?}{\in} \mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$$
$$\frac{a}{b} \rightsquigarrow a+b$$
$$\frac{3}{2} \rightsquigarrow 5$$

$x = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

$y = 3$ $\quad y = 6$ ad $x \in \mathbb{Q}$ corrispondono due y diverse $\in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow R_3$ non è un' applicazione.

ESERCIZIO 5

Siano A e B insiemi arbitrari ed $f: A \to B$ un' applicazione.
Si dimostri che se f è iniettiva allora
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{per ogni } A_1, A_2 \subseteq A.$$
$$\subseteq, \supseteq \Rightarrow =$$

Ip f è iniettiva

Tesi. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ $\quad A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Sia $b \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow b = f(a)$ con $a \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = f(a)$ con $a \in A_1$ e $b = f(a)$ con $a \in A_2$