數值線性代數 HW2

b05502087 王竑睿

1

利用以下code製造出A矩陣

```
function A = GenA(n)
    A = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if(i==j)
                A(i,j) = 1;
            elseif(j==n)
                A(i,j) = 1;
            elseif(i>j)
                A(i,j) = -1;
            end
        end
    end
end
```

利用rand製造b向量

```
b=rand(60,1)
```

(a)

利用以下code,以partial pivoting計算Ax=b

```
function x = Gaussian(A,b);
    [row,col]=size(A);
    n = row;
    x = zeros(n,1);
    for k=1:n-1
        %select row
        maxRow = -1;
        for i = k:n
            if (A(i,k)>= maxRow)
                maxRow = A(i,k);
                maxRowIdx = i;
            end
        end
        %[maxRow, maxRowIdx] = max(A(k:n,k));
        %row change
        A( [k, maxRowIdx], : ) = A( [maxRowIdx, k], : );
        b([k,maxRowIdx]) = b([maxRowIdx,k]);
```

```
        for i=k+1:n
            xMultiplier = A(i,k)/A(k,k);
            for j=k:col
                A(i,j) = A(i,j)-xMultiplier*A(k,j);
            end
            b(i) = b(i)-xMultiplier*b(k);
        end
    end
    % backsubstitution:
    x(n) = b(n)/A(n,n);
    for i=n-1:-1:1
        summation = b(i);
        for j=i+1:n
            summation = summation-A(i,j)*x(j);
        end
        x(i) = summation/A(i,i);
    end
end
```

Observe of useless result

計算 $norm(||Ax - b||)$
得到26.9380
誤差相當大

Perturbed A矩陣的結果

- 利用rand產生δ,用$A_d = A + \delta$計算$A_d x_d = b$的解
- 用partial pivoting計算 x_d 和 x 的差距 $||x_d - x||$,可發現較Complete pivoting大

(b)

利用以下code,以complete pivoting計算Ax=b

```
function x = CompleteGaussian(A,b)
    [row,col]=size(A);
    n = row;
    x = zeros(n,1);
    Colname = [1:col];
    for k=1:n-1
        %select row
        maxVal = -1;
        for i = k:n
            for j = k:n
                if (A(i,j)> maxVal)
                    maxRow = A(i,j);
                    maxRowIdx = i;
                    maxColIdx = j;
                end
            end
        end
```

```
            %row change
            [maxRowIdx maxColIdx]
            A( [k, maxRowIdx], : ) = A( [maxRowIdx, k], : );
            b([k,maxRowIdx]) = b([maxRowIdx,k]);
            A( :,[k, maxColIdx] ) = A( : ,[k, maxColIdx]);
            Colname([k, maxColIdx]) = Colname([maxColIdx, k]);

            for i=k+1:n
                xMultiplier = A(i,k)/A(k,k);
                for j=k:col
                    A(i,j) = A(i,j)-xMultiplier*A(k,j);
                end
                b(i) = b(i)-xMultiplier*b(k);
            end
            Colname
        end
        % backsubstitution:
        x(n) = b(n)/A(n,n);
        for i=n-1:-1:1
            summation = b(i);
            for j=i+1:n
                summation = summation-A(i,j)*x(j);
            end
            x(i) = summation/A(i,i);
        end
    end
```

Observe of useless result

計算 $norm(||Ax-b||)$
得到1.2091
相較於partial pivoting,較為精確

Perturbed A矩陣的結果

- 利用rand產生δ,用$A_d = A + \delta$計算$A_d x_d = b$的解
- 用complete pivoting計算 x_d 和 x 的差距 $||x_d - x||$,可發現較partial pivoting小

2

(a)

$$\begin{aligned} &Let\ U = L^{-1}A \\ &\Rightarrow ||U|| \leq ||L^{-1}||||A|| \\ &\Rightarrow \frac{||L||||U||}{||A||} \leq ||L^{-1}||||L|| = \kappa(L) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Same\ Let\ L = AU^{-1} \\ &\Rightarrow ||L|| \leq ||A||||U^{-1}|| \\ &\Rightarrow \frac{||L||||U||}{||A||} \leq ||U^{-1}||||U|| = \kappa(U) \end{aligned}$$

Therefore

$$\gamma_2 \le min(\kappa(L), \kappa(U))$$

(b)

- 矩陣的1-norm是 maximum column abolute sum,所以 $\big\||A|\big\|_1 = \|A\|_1$
- 矩陣的∞-norm是 maximum row abolute sum,所以 $\big\||A|\big\|_\infty = \|A\|_\infty$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\big\||L||U|\big\|}{\|A\|} \\ &\le \frac{\big\||L|\big\|\big\||U|\big\|}{\|A\|} \\ &= \frac{\|L\|\|U\|}{\|A\|} \\ &= \gamma_2\end{aligned}$$

(c)

In 2-norm case

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \frac{\|L\|_2\|U\|_2}{\|A\|_2} \\ &= \frac{\|L\|_2\|U\|_2}{\|LU\|_2} \\ &= \frac{\|L\|_2\|U\|_2}{\|U\|_2} \qquad \text{(because L is unitary and preserve norm)} \\ &= \|L\|_2 \\ &= 1 \qquad \text{(2-norm of unitary matrix is 1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\big\||L||U|\big\|_2}{\|A\|_2} \\ &\le \frac{\big\||L|\big\|_2\big\||U|\big\|_2}{\|A\|_2} \\ &= \sqrt{n} \times \frac{\big\||L|\big\|_F\big\||U|\big\|_F}{\|A\|_F} \qquad \text{(norm equivalence)} \\ &= \sqrt{n} \times \frac{\|L\|_F\|U\|_F}{\|A\|_F} \qquad \text{(Frobenius norm is not influenced by absolute value)} \\ &= \sqrt{n} \times \frac{\|L\|_F\|U\|_F}{\|U\|_F} \qquad \text{(because L is unitary and preserve norm)} \\ &= \sqrt{n} \times \|L\|_F \\ &= \sqrt{n} \times \sqrt{n} \\ &= n\end{aligned}$$

In Frobenius-norm case

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{\|L\|_F \|U\|_F}{\|A\|_F} \\
&= \frac{\|L\|_F \|U\|_F}{\|LU\|_F} \\
&= \frac{\|L\|_F \|U\|_F}{\|U\|_F} \qquad \text{(because L is unitary and preserve norm)} \\
&= \|L\|_F \\
&= \sqrt{n} \qquad \text{(Frobenius-norm of unitary matrix is } \sqrt{n}\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\||L||U|\|_F}{\|A\|_F} \\
&\le \frac{\||L|\|_F \||U|\|_F}{\|A\|_F} \\
&= \frac{\|L\|_F \|U\|_F}{\|A\|_F} \qquad \text{(Frobenius norm is not influenced by absolute value)} \\
&= \gamma_2 \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

(d)

verify the result in (a)

- kappaL_norm1 = 120
- kappaU_norm1 = 3
- gamma2_norm1 = 3
- kappaL_norm2 = 77.0072
- kappaU_norm2 = 3.6731
- gamma2_norm2 = 3.0474
- kappaL_normInf = 120
- kappaU_normInf = 6
- gamma2_normInf = 3

所以，$\gamma_2 \le \min(\kappa(L), \kappa(U))$

verify the result in (b)

- gamma1_norm1 = 2.9667
- gamma2_norm1 = 3
- gamma1_normInf = 2.9667
- gamma2_normInf = 3

所以，$\gamma_1 \le \gamma_2$, for 1-norm, ∞-norm

3

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(b)

令variable數n為20, k為6

$$A = \begin{bmatrix}
0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166 & 0.166
\end{bmatrix}$$

random取得x並且建構b = Ax

$$x = \begin{bmatrix} 0.4173 \\ 0.0497 \\ 0.9027 \\ 0.9448 \\ 0.4909 \\ 0.4893 \\ 0.3377 \\ 0.9001 \\ 0.3692 \\ 0.1112 \\ 0.7803 \\ 0.3897 \\ 0.2417 \\ 0.4039 \\ 0.0965 \\ 0.1320 \\ 0.9421 \\ 0.9561 \\ 0.5752 \\ 0.0598 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.5491 \\ 0.5358 \\ 0.6776 \\ 0.5887 \\ 0.4497 \\ 0.4980 \\ 0.4814 \\ 0.4654 \\ 0.3827 \\ 0.3372 \\ 0.3407 \\ 0.3676 \\ 0.4620 \\ 0.5176 \\ 0.4603 \end{bmatrix}$$

(i)

$$A^T = QR$$

$$Q = \begin{bmatrix}
-0.41 & 0.62 & -0.07 & -0.07 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & -0.35 & 0.05 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
-0.41 & -0.12 & 0.61 & -0.07 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & -0.35 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
-0.41 & -0.12 & -0.13 & 0.60 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & 0.34 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
-0.41 & -0.12 & -0.13 & -0.15 & 0.58 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & 0.34 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
-0.41 & -0.12 & -0.13 & -0.15 & -0.17 & 0.57 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & -0.08 & 0.33 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
-0.41 & -0.12 & -0.13 & -0.15 & -0.17 & -0.19 & 0.55 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & -0.08 & -0.09 & 0.33 & 0.33 & 0.33 \\
0.00 & -0.74 & -0.07 & -0.07 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & -0.35 & 0.05 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & -0.74 & -0.07 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & -0.35 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.75 & -0.08 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & 0.34 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.75 & -0.09 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & 0.34 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.76 & -0.11 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & -0.08 & 0.33 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.76 & 0.07 & 0.07 & -0.08 & -0.08 & -0.09 & 0.33 & 0.33 & 0.33 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.84 & 0.05 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.84 & -0.05 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.84 & -0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.85 & -0.06 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.85 & -0.07 & -0.07 & -0.07 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.85 & -0.85 & -0.85 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00
\end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix}
-0.41 & -0.34 & -0.27 & -0.20 & -0.14 & -0.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & -0.23 & -0.21 & -0.18 & -0.16 & -0.14 & -0.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & -0.22 & -0.20 & -0.18 & -0.16 & -0.13 & -0.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.22 & -0.20 & -0.17 & -0.15 & -0.14 & -0.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.22 & -0.19 & -0.17 & -0.15 & -0.14 & -0.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.22 & -0.19 & -0.17 & -0.16 & -0.14 & -0.13 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.22 & -0.20 & -0.18 & -0.16 & -0.15 & -0.13 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.20 & 0.19 & 0.17 & 0.16 & 0.15 & 0.14 & 0.14 & 0.14 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.20 & 0.19 & 0.17 & 0.16 & 0.15 & 0.15 & 0.15 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & -0.18 & -0.17 & -0.16 & -0.16 & -0.16 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & -0.18 & -0.17 & -0.17 & -0.17 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & -0.18 & -0.18 & -0.18 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.20 & -0.20 & -0.20 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00
\end{bmatrix}$$

$$x = A^T(AA^T)^{-1}b = QR^{-T}b$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.4173 \\ 0.0497 \\ 0.9027 \\ 0.9448 \\ 0.4909 \\ 0.4893 \\ 0.3377 \\ 0.9001 \\ 0.3692 \\ 0.1112 \\ 0.7803 \\ 0.3897 \\ 0.2417 \\ 0.4039 \\ 0.0965 \\ 0.1320 \\ 0.9421 \\ 0.9561 \\ 0.5752 \\ 0.0598 \end{bmatrix}$$

(ii)

利用matlab左除 $x = A\backslash b$ 得到

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0101 \\ 0 \\ 3.7715 \\ 0 \\ -0.4669 \\ -0.0795 \\ 0.8403 \\ -0.5335 \\ 2.9380 \\ 0.2894 \\ -0.5664 \\ -0.1756 \\ 0.3441 \\ -0.8063 \\ 2.9587 \\ 0.4512 \\ 0 \\ 0.1579 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(iii)

- 利用QR分解以及左除所得到的x都能夠滿足Ax=b的逼近
- 但QR分解和左除得到的x的norm不一樣，QR分解的norm比較短
- 左除是在所有滿足Ax=b的x中選擇一個，QR分解則是選擇norm最短的那一個