§2.2 矩阵的 Jordan 标准形

定义: 形式为

$$J_{\lambda_i,r} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r\times r}$$

的 r $(r \geq 1)$ 阶方阵称为一个Jordan 块. 其中 λ 是实数或复数.

由若干个 (包括单个)Jordan 块构成的对角块矩阵 $J = \mathrm{diag}\{J_{\lambda_1,r_1}, J_{\lambda_2,r_2}, \ldots, J_{\lambda_s,r_s}\}$ 称为Jordan 矩阵.

例如

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ & 1-i \end{pmatrix}$$

都是 Jordan 块 (每个 Jordan 块也可以看作单个 Jordan 块的 Jordan 矩阵).

特别的, 如 $(2)_{1\times 1}, (3)_{1\times 1}$ 是 1 阶的 Jordan 块, 因此对角矩阵是 1 阶 Jordan 块组成的 Jordan 矩阵.

再例如 $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$, 是由

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, J_{-2,1} = (-2), J_{-2,2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & -2 \end{pmatrix}$$

组成的 Jordan 矩阵. 即 $J = \mathrm{diag}\{J_{1,2}, J_{2,1}, J_{-2,2}\}$.

我们将说明: 复数域上任一方阵都相似于一个 Jordan 矩阵, 其中 Jordan 块的个数为方阵线性无关的特征向量的个数.

例 1 考虑方阵 A 的对角化问题

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: A 的特征多项式是

$$\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

两个特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$(二重).

关于 $\lambda_1 = 1$ 的一个特征向量可由 $(A - I)x = 0$ 解出, 得 $x_1 = (1, 2, 1)^T$. 代数重数 $=$ 几何重数 $=1$.

关于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量由 $(A - 2I)x = 0$ 解出,

由于 $A - 2I = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -7 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 则解空间的维数为 1, 即 $\lambda_2 = 2$ 的线性无关的特征向量最多只有一个, 可有 $x_2 = (-1, -1, 1)^T$.

即 $\lambda_2 = 2$ 对应的几何重数 $\dim E_{\lambda_2} = 1 < 2$ 代数重数, 故 A 不能对角化.

(若方阵 A 能够对角化, 则 k 重特征值 λ 对应的 n 阶方阵 $(A - \lambda_2 I_n)$ 的秩应该为 $n - k$.)

由 $(A-2I)$ 的 "秩过大" 注意到: 考虑矩阵乘积,

$$\operatorname{rank}(A-2I)^2 \le \operatorname{rank}(A-2I)$$

考虑求解下述齐次线性方程组

$$(A-2I)^2 x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

这里 $\operatorname{rank}(A-2I)^2 = 1$, 故 $\dim N((A-2I)^2) = 2$, 即方程组有两个线性无关的解.

又由于 $N((A-2I)) \subset N((A-2I)^2)$, 所以之前的 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量 $x_2 = (-1,-1,1)^T$ 也是解向量.

另一与 x_2 线性无关的解可取 $x_3=(-1,-2,0)^T$.
这里 x_3 满足
$$(A-2I)x_3=x_2$$
或
$$Ax_3=x_2+2x_3.$$
则有
$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,2x_2,x_2+2x_3) \\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
上式可简写为
$$AP=PJ,$$

其中 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$J=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 为 Jordan 矩阵.

由 $AP=PJ$, 则 $P^{-1}AP=J$, 即方阵 A 相似于 Jordan 矩阵 J.

之后说明结论的一般性: 即使不能对角化的矩阵 A 在复数域上也相似于一个 Jordan 矩阵.

或说, 一个复数域上的线性变换在某组基下的矩阵表示是一个 Jordan 矩阵.

特征值的 k 级根向量

定义: 设 λ_0 是方阵 A 的特征值. 对于向量 x, 若存在正整数 k, 使得

$$(A-\lambda_0 I)^k x = 0, \quad (A-\lambda_0 I)^{k-1} x \neq 0$$

则称为 x 为 A 关于 λ_0 的 k 级根向量(或广义特征向量). 简称 x 为 λ_0 的 k 级根向量.

特别的, λ_0 的特征向量是 λ_0 的 1 级根向量.

例: 之前的 x_2 和 x_3 分别为 $\lambda_2 = 2$ 的 1 级和 2 级根向量.

定理: 设 λ_0 是方阵 A 的特征值, 则 A 关于 λ_0 的不同级的根向量是线性无关的.

证明: 设 x_i $(1 \le i \le p)$ 是 A 关于 λ_0 的 i 级根向量, 要证明 $x_1, x_2, ..., x_p$ 线性无关.

设有等式

$$a_1 x_1 + ... + a_p x_p = 0.$$

用 $(A - \lambda_0 I)^{p-1}$ 左乘等式两边, 得:

$$a_1 (A - \lambda_0 I)^{p-1} x_1 + ... + a_p (A - \lambda_0 I)^{p-1} x_p = 0.$$

证明 (续): 因为 x_i 是 A 关于 λ_0 的 i 级根向量

$(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_i = 0, (1 \le i \le p-1), \quad (A-\lambda_0 I)^{p-1}x_p \ne 0.$

则原式变为 $a_p(A-\lambda_0 I)^{p-1}x_p = 0$, 即 $a_p = 0$. 同时我们有

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{p-1}x_{p-1} = 0.$$

再用 $(A-\lambda_0 I)^{p-2}$ 左乘等式两边, 得 $a_{p-1} = 0$.

继续类似的步骤可得 $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$. 即 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ 线性无关.

定理: 方阵 A 关于不同特征值的根向量是线性无关的.

证明: 设 λ_i $(1 \le i \le s)$ 是 A 的特征值, 而 x_i $(1 \le i \le s)$ 是关于 λ_i 的 n_i 级根向量, 要证明 $x_1, x_2, \ldots, x_s$ 线性无关.

设有等式

$$a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s = 0.$$

用 $(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(A-\lambda_s I)^{n_s}$ 左乘两边:

$$\begin{aligned} & a_1(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(A-\lambda_s I)^{n_s}x_1 \\ = \ & a_1(A-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(A-\lambda_s I)^{n_s}(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}x_1 \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

证明 (续): 其中 $y=(A-\lambda_1 I)^{n_1-1}x_1\neq 0$, 且满足 $(A-\lambda_1 I)y=(A-\lambda_1 I)^{n_1}x_1=0$, 即 y 是 A 关于 λ_1 的特征向量. 则上式变为

$$a_1(\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}...(\lambda_1-\lambda_s)^{n_s}y=0$$

由于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ 是不同的, 且 $y\neq 0$, 则上式左边为零必有 $a_1=0$.

用类似的方法同样可以证明 $a_2=a_3=...a_s=0$. 即向量组 $x_1,x_2,...,x_s$ 线性无关.

根空间

定义: 设 λ_0 是 A 的 k 重特征值, 则 $(A-\lambda_0 I)^k$ 的零空间

$$N((A-\lambda_0 I)^k)=\{x|(A-\lambda_0 I)^k x=0\}$$

称为 A 关于 λ_0 的根空间, 记为 N_{λ_0}.

- N_{λ_0} 是 λ_0 的所有不同级数 (不会超过 k 级) 的根向量张成的线性空间, 且 N_{λ_0} 是 A 的不变子空间.
- λ_0 的特征子空间包含在 λ_0 的根空间中, 即 $V_{\lambda_0}\subset N_{\lambda_0}$.

- N_{λ_0} 中的 λ_0 的根向量的最高级数可能小于 λ_0 的代数重数 k.
  比如, $A = \mathrm{diag}\{(2), \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}$,
  特征值 $\lambda = 2$ 的代数重数为 3, 但根向量的最高级数为 2, 小于 3.
- 由上, 我们称 N_{λ_0} 中根向量的最高级数 r 为 λ_0 的指标. 从而

$$N_{\lambda_0} = N((A - \lambda_0 I)^k) = N((A - \lambda_0 I)^r).$$

这里 λ_0 的指标 r 小于等于 λ_0 的代数重数 k.

之后, 将讨论 λ_0 的指标与 λ_0 对应的 Jordan 块的关系.

定理: 设 n 阶方阵 A 的特征值多项式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 A 的所有不同的特征值, 而 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ 是相应的代数重数, 则有

$$N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_s} = \mathbb{C}^n$$

证明: 由之前两个关于根向量线性无关性的定理,

$$N_{\lambda_1} + N_{\lambda_2} + \ldots + N_{\lambda_s} = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_s} \subset \mathbb{C}^n$$

还需证明 $\dim N_{\lambda_1} + \dim N_{\lambda_2} + \ldots + \dim N_{\lambda_s} \geq n$.

证明 (续): 又因为

$$f(A) = (A-\lambda_1 I)^{n_1}(A-\lambda_2 I)^{n_2}\ldots(A-\lambda_s I)^{n_s} = O.$$

利用$A_1A_2\ldots A_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n - \mathrm{rank}A_i) \geq n$

$$\sum_{i=1}^{s}(n - \mathrm{rank}(A-\lambda_i I)^{n_i}) \geq n$$

又因为 $n - \mathrm{rank}(A-\lambda_i I)^{n_i} = N((A-\lambda_i I)^{n_i})$,

$$\dim N_{\lambda_1} + \dim N_{\lambda_2} + \ldots + \dim N_{\lambda_s} \geq n.$$

从而 $N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_s} = \mathbb{C}^n.$

这个定理告诉我们, $\mathbb{C}^n$ 总可以写成 A 的不同特征值 λ_i 的根空间 N_{λ_i} 的直和, 从而方阵 A 必定相似于一个对角块矩阵 B. 即 $B = P^{-1}AP$.

为了求得方阵 B, 以及由 A 变换到 B 的矩阵 P, 我们需要确定每个根空间 N_{λ_i} 的基, 即求解 λ_i 的各级根向量.

首先, λ_i 的 1 级根向量 (即特征向量) 满足

$$(A - \lambda_i I)x = 0$$

解空间的维数为 $n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I)$, 若 $n - \operatorname{rank}(A - \lambda_i I) < n_i$, 则存在 λ_i 的 2 级根向量. 而 2 级根向量满足 $(A - \lambda_i I)^2 x = 0, (A - \lambda_i I)x \neq 0$

一般的. A 关于 λ_i 的各级根向量满足:

1. 首先, λ_i 的 1 级根向量 (即特征向量) 来自 $(A-\lambda_i I)x=0$ 的解空间 (除去零向量);

2. 对于 $1<k\leq r$, 这里 r 是 λ_i 的指标, λ_i 的 k 级根向量的集合为 $(A-\lambda_i I)^k x=0$ 的解空间除去 $(A-\lambda_i I)^{k-1}x=0$ 的解空间;

3. 直到 $k=r$, λ_i 的所有根向量的集合为 $(A-\lambda_i I)^r x=0$ 的解空间除去零向量.

按照 k 由小到大的顺序, 可以依此找到 λ_i 的 k 级根向量, 由线性无关性, 即找到了根空间 N_{λ_i} 的基.

这样求解根向量得到的对角块矩阵未必是 Jordan 矩阵, 除非我们将 k 级根向量和 $(k-1)$ 级根向量联系起来.

若 x 是 λ_i 的 k 级 $(k \geq 2)$ 根向量, 则

$$(A-\lambda_i I)^k x = 0, \quad (A-\lambda_i I)^{k-1} x \neq 0.$$

我们设 $y = (A-\lambda_i I)x$, 则

$$(A-\lambda_i I)^{k-1} y = 0, \quad (A-\lambda_i I)^{k-2} y \neq 0,$$

则 y 是 $k-1$ 级根向量.

这里 $Ax = y + \lambda_i x$, 如果在基中 y 排在 x 前面, 则 Ax 对应的坐标表示为 $(\dots, 1, \lambda_i, \dots)^T$, 刚好为 Jordan 矩阵的对应列.

例 3 求方阵 A 的根向量

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: 由于 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$, 故 A 有三重特征值 2. 又因齐次线性方程组

$$(A - 2I)x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

的系数矩阵 $A - 2I$ 的秩为 1, 则线性无关的特征向量个数为 $3 - 1 = 2$, 可取为 $x_1 = (0, 1, 0)^T$, $x_2 = (1, 0, -1)^T$.

解 (续): $\lambda = 2$ 的几何重数为 2, 小于代数重数 3.
故存在一个 2 级根向量.
这里我们通过 $(A-2I)x_3 = y$ 求解二级根向量 x_3,
其中 y 是一级根向量, 这里可写为

$$\begin{aligned} y &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ &= c_1(0,1,0)^T + c_2(1,0,-1)^T \\ &= (c_2, c_1, -c_2)^T. \end{aligned}$$

则方程组 $(A-2I)x_3 = y$ 写作

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

解 (续): 当且仅当 $c_1 = 0$ 时, 方程组 $(A-2I)x_3 = y$ 存在解 $x_3 = (x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, c_2 - x_3^{(1)})^T$, 或者可以写为

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3^{(1)}(1,0,-1)^T + x_3^{(2)}(0,1,0)^T + c_2(0,0,1)^T \\ &= x_3^{(1)}x_1 + x_3^{(2)}x_2 + c_2(0,0,1)^T. \end{aligned}$$

因为 x_3 与 x_1, x_2 线性无关, 必须要求 $c_2 \neq 0$.

简单起见, 我们取 $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = 0$ 和 $c_2 = 1$, 则 $x_3 = (0,0,1)^T$, 满足 $(A-2I)x_3 = y = x_2$. 这时 $N_{\lambda=2} = \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$.

注意: 当我们求得 $\lambda = 2$ 的一级根向量 $x_1 = (0,1,0)^T$ 和 $x_2 = (1,0,-1)^T$, 以及二级根向量 $x_3 = (0,0,1)^T$, 且有

$$Ax_1 = 2x_1, Ax_2 = 2x_2, Ax_3 = x_2 + 2x_3.$$

设 $P = (x_1, x_2, x_3)$, 则

$$AP = (2x_1, 2x_2, x_2 + 2x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

即相似变换而得的对角矩阵 B 为 Jordan 矩阵.

例 4 设方阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -12 & 4 & 8 \\ -6 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 矩阵.

解: $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$, 故 A 有三重特征值 2.

$$(A - 2I)x = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -12 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} x = 0$$

的系数矩阵 $A - 2I$ 的秩为 1, 则线性无关的特征向量个数为 $3 - 1 = 2$, 可取为例如 $x_1 = (4, 4, 5)^T$, $x_2 = (5, 2, 7)^T$.

解 (续): 这里线性无关的特征向量个数为 2, 小于代数重数 3. 故存在且只存在 1 个二级根向量. 将通过 $(A-2I)x_3 = y$ 求解二级根向量 x_3, 其中 y 是一级根向量, 这里可写为

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
&= c_1 (4,4,5)^T + c_2 (5,2,7)^T \\
&= (4c_1 + 5c_2, 4c_1 + 2c_2, 5c_1 + 7c_2)^T.
\end{aligned}
$$

则方程组 $(A-2I)x_3 = y$ 写作

$$
\begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -12 & 2 & 8 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_3^{(1)} \\ x_3^{(2)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4c_1 + 5c_2 \\ 4c_1 + 2c_2 \\ 5c_1 + 7c_2 \end{pmatrix}
$$

解 (续): 我们对增广矩阵作初等变换进行求解

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2 \\ -12 & 2 & 8 & 4c_1+2c_2 \\ -6 & 1 & 4 & 5c_1+7c_2 \end{array}\right)
$$

$$
\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 4 & 4c_1+5c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4c_1-8c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1+2c_2 \end{array}\right)
$$

则由后两行知 $c_1=-2c_2$, 代入第一行得 $-6x_3^{(1)}+x_3^{(2)}+4x_3^{(3)}=-3c_2$, 即 x_3 的三个分量中任一个可由另两个表示出来, 简单起见, 可以取 $x_3^{(2)}=-3c_2+6x_3^{(1)}-4x_3^{(3)}$.

解 (续): 此时

$$\begin{aligned} x_3 &= (x_3^{(1)}, -3c_2 + 6x_3^{(1)} - 4x_3^{(3)}, x_3^{(3)})^T \\ &= x_3^{(1)}(1,6,0)^T + x_3^{(3)}(0,-4,1)^T - 3c_2(0,1,0)^T \end{aligned}$$

且 x_3 应与 $x_1 = (4,4,5)^T$, $x_2 = (5,2,7)^T$ 线性无关

可验证:

$(1,6,0)^T = \frac{7}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2, \quad (0,-4,1)^T = \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_1,$

但 $(0,1,0)^T$ 不能由 x_1 和 x_2 线性表出. 从而为了 x_3 是线性无关的根向量, 必有 $c_2 \neq 0$ (则 $c_1 \neq 0$).

简单起见, 我们可以取 $c_2 = -\frac{1}{3}$. $x^{(1)} = x^{(3)} = 0$, 即

$$x_3 = (0,1,0)^T, \quad y = (A - 2I)x_3 = (1,2,1)^T$$

解 (续): 此时 $y = (-\frac{2}{3})x_1 + (-\frac{1}{3})x_2$, 与 x_1 线性无关, 即 $N_{\lambda=2} = \mathrm{span}\{x_1, x_2, x_3\} = \mathrm{span}\{x_1, y, x_3\}$,

为了得到的对角块矩阵为 Jordan 矩阵, 我们令

$$P = (x_1, y, x_3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} AP = (2x_1, 2y, y + 2x_3) &= (x_1, y, x_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= PJ \end{aligned}$$

例 5 设方阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求可逆矩阵 P 是 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 矩阵.

解: 由于 $\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$, 故 A 有四重特征值 1. 此时齐次线性方程组

$$(A-I)x=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}x=0$$

的系数矩阵 $A-I$ 的秩为 2.

解 (续): 此时线性无关的特征向量个数为 $4-2=2$, 小于代数重数 4. 故存在二级根向量. 取两个线性无关的特征向量 $x_1=(1,-2,0,0)^T$ 和 $x_2=(0,0,1,-1)^T$. 将通过 $(A-I)x=y$ 求解二级根向量 x, 其中 y 是一级根向量, 这里可写为

$$
\begin{aligned}
y &= c_1x_1+c_2x_2 \\
&= (c_1,-2c_1,c_2,-c_2)^T.
\end{aligned}
$$

则方程组 $(A-I)x=y$ 写作

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}
$$

解 (续): 我们对增广矩阵作初等变换进行求解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ -4 & -2 & -1 & -1 & -2c_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -c_2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

则由后两行知 $x^{(3)} + x^{(4)} = c_2$, 代入第一行得 $2x^{(1)} + x^{(2)} = c_1 - c_2$, 即 x 的四个分量中有两个可由另两个表示出来, 简单起见, 可以取 $x^{(2)} = c_1 - c_2 - 2x^{(1)}$ 和 $x^{(4)} = c_2 - x^{(3)}$.

解 (续): 此时

$$\begin{aligned} x &= (x^{(1)}, c_1 - c_2 - 2x^{(1)}, x^{(3)}, c_2 - x^{(3)})^T \\ &= x^{(1)}(1, -2, 0, 0)^T + x^{(3)}(0, 0, 1, -1)^T \\ &\quad + c_1(0, 1, 0, 0)^T + c_2(0, -1, 0, 1)^T \end{aligned}$$

因为 x 应与 $x_1 = (1, -2, 0, 0)^T$, $x_2 = (0, 0, 1 - 1)^T$ 线性无关, 则 c_1 和 c_2 至少有一个不为零.

而 $y = (A - I)x = c_1(1, -2, 0, 0)^T + c_2(0, 1, 1, -1)^T$. 因为 $(1, -2, 0, 0)^T$ 和 $(0, 1, 1, -1)^T$ 线性无关, 而线性无关的向量的原像必然线性无关, 则必可以找到两个线性无关的二级根向量.

解 (续): 已知
$x = x^{(1)}x_1 + x^{(3)}x_2 + c_1(0,1,0,0)^T + c_2(0,-1,0,1)^T$,
$y = (A-I)x = c_1(1,-2,0,0)^T + c_2(0,1,1,-1)^T$.

令 $y = x_1 = (1,-2,0,0)^T$, 此时 $c_1 = 1, c_2 = 0$. 同时取 $x^{(1)} = x^{(3)} = 0$, 则对应的 $x_3 = (0,1,0,0)^T$.

若令 $y = (0,1,1,-1)^T$, 此时 $c_1 = 0, c_2 = 1$. 同时取 $x^{(1)} = x^{(3)} = 0$, 则对应的 $x_4 = (0,-1,0,1)^T$.

解 (续): 由 $N_{\lambda=1} = \text{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \text{span}\{x_1, x_3, (A-I)x_4, x_4\}$,
为了得到的对角块矩阵为 Jordan 矩阵, 我们令

$$P = (x_1, x_3, (A-I)x_4, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} = PJ.$$

一般由若干个 Jordan 块组成的 Jordan 矩阵, 常将对应同样对角线元素 λ_i 的 Jordan 块放在一起, 组成一个关于 λ_i 的子 Jordan 矩阵. 如

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & \\ & 3 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix},$$

前者可看作有 2 个子 Jordan 矩阵, 4 个 Jordan 块,
后者可看作有 3 个子 Jordan 矩阵, 5 个 Jordan 块.

考虑 Jordan 块 $\quad J_{\lambda_i,r} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \cdots & \\ & & \cdots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r\times r}$

- 最小多项式 $m_{J_{\lambda_i,r}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^r$.
- 由 Jordan 块 $J_{\lambda_i,s_1}, J_{\lambda_i,s_2}, \ldots, J_{\lambda_i,s_k}$ 组成的 Jordan 子矩阵的最小多项式为 $(\lambda - \lambda_i)^s$, 这里 $s = \max\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.
- 若 A 相似于 $J_{\lambda_i,r}$, 且 x 为 A 关于 λ_i 的 r 级根向量, 设
  $P = ((A-\lambda_i I)^{r-1}x, (A-\lambda_i I)^{r-2}x, \ldots, (A-\lambda_i I)x, x)$,
  则 $AP = PJ_{\lambda_i,r}$, 即 $P^{-1}AP = J_{\lambda_i,r}$.

关于矩阵 A 的 Jordan 标准形:

1. A 的Jordan 标准形中子 Jordan 矩阵的数目等于 A 的不同特征值的数目;
2. 关于 λ_i 的子 Jordan 矩阵的阶数等于 λ_i 的根空间的维数, 即 λ_i 的代数重数;
3. 关于 λ_i 的子 Jordan 矩阵中Jordan 块的个数等于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数, 即 λ_i 特征子空间的维数, 或 λ_i 的几何维数;
4. 关于 λ_i 的子 Jordan 矩阵中Jordan 块的最大阶数等于 λ_i 的指标, 即 λ_i 的根向量的最高级数.

求 A 的 Jordan 标准形 (课程要求计算三阶情况, 更一般流程如下):

1. 按照 k 从 1 到 r 的顺序 (r 为 λ 的指标), 利用 $(A-\lambda)^k x = 0$, 求出 λ 的 k 级根向量所张成的子空间. 设最多有 m_k 个线性无关的 λ 的 k 级根向量.

   注意: 对于 $k < r$ 有 $m_k \geq m_{k+1}$, 且 $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = \mathrm{dim} N_\lambda = \lambda$ 的几何重数.

2. 从 λ 的 r_i 级根向量中取一个最大线性无关向量组, 设为 $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m_r}\}$.

3. 若 $\mathcal{B}$ 中已含有 λ_i 的 k 级 (这里 $1 < k \le r$) 根向量 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{m_k}}$, 则计算 $(A - \lambda I)x_{k_1}, (A - \lambda I)x_{k_2}, \dots, (A - \lambda I)x_{k_{m_k}}$, 这些都是 λ 的 $k-1$ 级根向量, 将它们分别添加在 $\mathcal{B}$ 中 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{m_k}}$ 的前面, 再另外找到 $m_{k-1} - m_k$ 个线性无关的 λ 的 $k-1$ 级根向量, 添加到 $\mathcal{B}$ 中的最前面.

4. 对于 k 从 $r-1$ 到 2, 重复第三步.

5. 对于 A 的每一个特征值, 重复以上四步.

例 (Jordan 块的乘方): 设

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -2 \end{pmatrix}.$$

求 J^5.

解: 一个 Jordan 块可以写成对角部分和幂零部分的和 $J = -2I + N$, 其中

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

解 (续): 幂零矩阵 N 满足:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^4 = O.$$

因单位矩阵 I 和任意方阵的乘法可交换顺序, 故

$$J^5 = (-2I + N)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (-2I)^{5-i} N^i$$

这里 n 中取 i 个的组合数 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

解 (续): 幂零矩阵 N 满足:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, N^4 = O.$$

因单位矩阵 I 和任意方阵的乘法可交换顺序, 故

$$J^5 = (-2I + N)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (-2I)^{5-i} N^i$$

这里从 n 中取 i 个对应的组合数为 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

解 (续): 则

$$\begin{aligned}
J^5 &= (-2I)^5 + 5\cdot(-2I)^4 N + 10\cdot(-2I)^3 N^2 \\
&\quad +10\cdot(-2I)^2 N^3 + 5\cdot(-2I) N^4 + N^5 \\
&= (-2)^5 I + 5(-2)^4 N + 10(-2)^3 N^2 + 10(-2)^2 N^3 \\
&= \begin{pmatrix} (-2)^5 & 5(-2)^4 & 10(-2)^2 & 10(-2) \\ & (-2)^5 & 5(-2)^4 & 10(-2)^2 \\ & & (-2)^5 & 5(-2)^4 \\ & & & (-2)^5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Jordan 块 (Jordan 矩阵则不一定) 的乘方在每条对角线上元素相同!