应用高等工程数学

——矩阵论 & 数值分析

任课老师：徐海涛

hxumath@hust.edu.cn

Fall 2019

Syllabus

《应用高等工程数学》课程

- 开设时间：第 2 周—第 13 周，共 12 周
- 内容包括：
  - 矩阵论 (约 4 周)
  - 数值分析 (约 8 周)
- 成绩构成：期末考试
- 参考教材：
  - 自由参考矩阵论教材，如 (戴华)，(张贤达) 等等
  - 建议《数值分析》(李红)，会推荐上面习题
- 联系邮箱：**hxumath@hust.edu.cn**

Preliminaries

建议预备知识

- 集合论
  - 集合的交，并，子集和补集，常见空间、数域等；
- 线性代数
  - 矩阵的运算，矩阵的性质，特征值和特征空间等等；
- 微积分
  - 微分和积分的含义与运算，幂级数，Taylor 展开公式等
- 编程知识初步
- 其他数学初步知识

矩阵论大致内容

- 线性空间和线性变换
  - 线性空间的定义和基本性质;
  - 基底，坐标和变换矩阵;
  - 线性变换及其矩阵表示;
  - 子空间及不变子空间;
  - 特征值和特征向量，可对角化;
- 方阵的相似化简
  - 特征多项式和最小多项式;
  - Jordan 标准形
  - 可对角化和相似的条件

第一章：线性空间和线性变换

§1.1 线性空间

定义：设

- V 是一个非空集合
- F 是一个数域（常用实数域 $\mathbb{R}$，或复数域 $\mathbb{C}$）

对 V 中任意两个元素 α, β, 定义如下运算：

- 加法运算：
  $\alpha + \beta \in V$,（$\alpha + \beta$ 记作 α 与 β 的和）
- 数乘运算：
  $k\alpha \in V$, $k \in F$,（$k\alpha$ 记作 k 与 α 的数积）

这两种运算（称为 V 的线性运算）如果满足以下条件，那么称 V 是 F 上的线性空间.

线性运算满足的条件

- (1) 对于任意 $\alpha, \beta \in V$，有
  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$，（加法交换律）
- (2) 对于任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$，有
  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$，（加法结合律）
- (3) 存在零元 $0 \in V$, 使得对任意 $\alpha \in V$, 都有
  $\alpha + 0 = \alpha$，（加法零元）
- (4) 对于任意 $\alpha \in V$，存在负元 $-\alpha \in V$, 使得
  $\alpha + (-\alpha) = 0$，（加法负元）

线性运算满足的条件（续）

- (5) 对于任意 $k \in F$ 和 $\alpha, \beta \in V$，有
  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$，（乘法分配律 V）
- (6) 对于任意 $k, l \in F$ 和 $\alpha \in V$，有
  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$，（乘法分配律 F）
- (7) 对于任意 $k, l \in F$ 和 $\alpha \in V$，有
  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$，（乘法结合律）
- (8) F 中的数 1，使得对任意 $\alpha \in V$，有
  $1\alpha = \alpha$，（乘法数 1）

线性运算满足的条件（简）

- (1) (加法交换律)
- (2) (加法结合律)
- (3) (加法零元)
- (4) (加法负元)
- (5) (乘法分配律 V)
- (6) (乘法分配律 F)
- (7) (乘法结合律)
- (8) (乘法数 1)

线性空间的定义（继续）

当以上条件满足时，V 称为 F 上的线性空间（或向量空间），记为 $V(F)$. 称 V 中的元素为向量.

- 当 F 为实数域 $\mathbb{R}$ 时，对应的空间 $V(\mathbb{R})$ 称为实线性空间;
- 当 F 为复数域 $\mathbb{C}$ 时，对应的空间 $V(\mathbb{C})$ 称为复线性空间;

简单的例子（条件很容易验证, HW)

- $V = F = \mathbb{R}$, 运算取实数间的加法和乘法;
- $V = F = \mathbb{C}$, 运算取为复数间的加法和乘法;
- $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$，加法和数乘取一般向量的加法和数乘，则 $V(F)$ 是常见的 2 维向量空间.

多项式的定义

设 $a_i \in F$, $0 \le i \le m$, t 是变量，则

$$P(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

称为 F 上的一个多项式.

- 当 $a_m \neq 0$ 时，$a_m t^m$ 称为多项式的首项，此时 $P(t)$ 称为m 次多项式.
  特别的，当 $a_m = 1$ 时，$P(t)$ 称为 m 次的首一多项式.
- 系数全为 0 的多项式称为零多项式，记作 0.
  注意：零多项式不讨论其次数，零多项式不同于零次多项式.

线性空间例 1

例 1.

- 实数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式全体, 按通常意义的多项式加法及数与多项式乘法, 构成一个实线性空间, 记为 $\boldsymbol{P}(t)$.

- 如果只考虑次数不大于 n 的多项式全体, 再添加零多项式所成的集合, 对于通常意义的多项式加法及数与多项式乘法, 也构成一个实线性空间, 记为 $\boldsymbol{P}_n(t)$.

线性空间例 2

例 2.
对实数域 $F=\mathbb{R}$ 和正实数集 $V=\mathbb{R}_+$ 定义加法和数乘运算如下

- 加法：$\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$，
$$\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$$
- 数乘：$k\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$，
$$k\circ\alpha=\alpha^k$$

则 $\mathbb{R}_+$ 成为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.
注意：对于如上定义的线性运算，这里

- $\mathbb{R}_+$ 中的零元其实是实数1, 因为 $1\oplus\alpha=\alpha$;
- α 在 $\mathbb{R}_+$ 中的负元是实数$\frac{1}{\alpha}$, 因为 $\alpha\oplus\frac{1}{\alpha}=1$.

线性空间基本性质

- (1) 零元是唯一的;
- (2) 对任意 $\alpha \in V$, 它的负元是唯一的.
  从而可以定义 V 中任意两个元素 α, β 的减法（记为 “$-$”)

$$\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$$

- (3) 对任意 $\alpha \in V$, (这里 $0 \in F$, $-1 \in F$)

$$0\alpha = 0, \quad (-1)\alpha = -\alpha$$

对任意 $k \in F$, (这里 $0 \in V$)

$$k0 = 0.$$

线性组合

定义: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V(F)$, $k_1, k_2, \ldots, k_m \in F$, 则

$$\beta := k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$$

是 $V(F)$ 中的元素，称为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的一个**线性组合**，或称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$**线性表出**.

- 例子: $2t^2 + 3t + 4$ 是 $t^2, t, 1$ 的线性组合, 也是 $t^2 + 1, t + 2$ 的线性组合，但是不能写成 $t, 1$ 的线性组合，也不能写成 t^2, t 的线性组合

线性相关与线性无关

定义： V 中的向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ $(m \geq 1)$ 称为线性相关的，如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \alpha_i = 0 \tag{1}$$

反之，若等式 (1) 只在 $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$（系数全为零）时成立，则称向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ 是线性无关的.

线性相关与线性无关（续）

注:

- (1) 当 $m > 1$ 时，向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$线性相关的充要条件是，其中至少有一个向量 $\alpha_j (1 \le j \le m)$ 可由组中其他向量线性表出.
- (2) 若某向量组线性无关, 则它的任一子向量组 必线性无关; 而若某向量组中有一个子向量组线性相关, 那么该向量组必线性相关.
- (3) 单个零向量组 $\{0\}$ 是线性相关的, 但单个非零向量组 $\{\alpha\} (\alpha \neq 0)$ 是线性无关的.

线性空间的维数

定义: 线性空间 V 中，称最大线性无关向量的个数为 rr V 的维数, 记为 $\dim(V)$.

- 如果在 V 中能找到无限多个线性无关的向量，则称 V 是无限维的;
- 如果在 V 中只能找到最多 n 个 (n 有限) 线性无关的向量，则称 V 是n 维的;
  此时 n 维线性空间 V 记作V^n.

例 1.

- 3 维向量组成的线性空间 $\mathbb{R}^3$, 线性无关向量 $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$, 且任一向量 $(a_1, a_{2,3})$ 可由这三个线性表出.

线性空间的维数（续）

例 2.

- $m \times n$ 矩阵组成的线性空间 $F^{m\times n}$ 是 $m \times n$ 维的，$F^{m\times n}$ 中的任一矩阵 $A = [a_{ij}]$ 可表示为

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

其中 E_{ij} 定义为第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 $m \times n$ 矩阵.

其中，$\{E_{ij}\}_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ 这 mn 个矩阵是线性无关的.

例 3.

- 全体多项式组成的空间$\mathbf{P}(t)$是无限维的，因为其中 $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ 无限多个都是线性无关的.
- 多项式空间 $\mathbf{P}_n(t)$是 $(n+1)$ 维的，因为其中有 $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$ $(n+1)$ 个多项式是线性无关的, 而且任一次数不大于 n 的多项式都可由这 $(n+1)$ 个多项式线性表出.

注意：若 V 中能找到 m 个线性无关的向量，则

$$\dim(V) \geq m$$

任一向量都可以由同样 m 个向量线性表出，则

$$\dim(V) \leq m.$$

线性空间的基

定义: V^n 中给定顺序的 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 所组成的向量组称为 V^n 的一组基(或基底)，记为 $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. $\mathcal{B}$ 中的向量 α_i $(1 \le i \le n)$ 称为第 i 个基向量.

几个例子 (通常的加法和乘法定义)

- $\mathbb{R}^3$中的一组基为 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$.
- $F^{m\times n}$中的一组基为 $\mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$.
- 考虑$V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}$, 则 $\{1\}$ 是它的基, 1 维. 如果$V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$, 则 $\{1, i\}$ 是它的基, 2 维.

定理: 设 $\mathcal{B}$ 是 V^n 的一组基，则 V 中任一向量都可以由 $\mathcal{B}$ 唯一表示.

证明: 设 $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, 对于任意 $\xi\in V$, 则 $(n+1)$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\xi$ 必线性相关. 所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\ldots.,k_n,k_{n+1}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i+k_{n+1}\xi=0.$$

这里k_{n+1} 必不为零：因为如果 $k_{n+1}=0$, 则存在不全为零的 k_j $(1\leq j\leq n)$ 使得 $\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i=0$, 但这与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关矛盾, 故 $k_{n+1}\neq 0$. 于是有$\xi=\sum_{i=1}^{n}(-\frac{k_i}{k_{n+1}})\alpha_i$ 可被线性表出.

定理: 设 $\mathcal{B}$ 是 V^n 的一组基，则 V 中任一向量都可以由 $\mathcal{B}$ 唯一表示.

证明 (续): 接下来证明线性表示的唯一性. 假设 ξ 由 $\mathcal{B}$ 有两种表示

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i.$$

那么 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\alpha_i = 0$. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关，必有 $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = ... = x_n - y_n = 0$, 即 $x_i = y_i$ $(i \le i \le n)$, 表示唯一. 证毕.

由定理可知，设在 V^n 中取一组基 $\mathcal{B}$，则 V 中任一向量 ξ, 都存在唯一的一组数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 使得

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

写成矩阵形式

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{B}X.$$

- $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 代表的矩阵仍记为 $\mathcal{B}$.
- $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 称为 ξ 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标向量 (坐标), x_i 称为 ξ 在 $\mathcal{B}$ 下的第 i 个坐标.

例 1:

在 $\mathbf{P}_2(t)$ 中取基$\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$, 则多项式 $P(t) = 2t^2 - t + 1$ 在基 $\mathcal{B}_1$ 下的坐标是$(1, -1, 2)^T$.

$$2t^2-t+1 = 1\cdot 1+t\cdot(-1)+t^2\cdot 2 = (1, t, t^2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbf{P}_2(t)$ 中取另一组基$\mathcal{B}_2 = \{t+1, t+2, t^2\}$,

$$2t^2 - t + 1 = (t+1)\cdot(-3) + (t+2)\cdot 2 + t^2\cdot 2 = (t+1, t+2, t^2)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

多项式 $P(t)$ 在基 $\mathcal{B}_2$ 下的坐标是$(-3, 2, 2)^T$.

例 2:

$\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的任一可逆矩阵 P, 其 n 个列向量 $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的基.

- $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 线性无关;
- $\mathbb{R}^n$ 中的任一向量 y, 都能写成

$$y = P(P^{-1}y) = Px = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i.$$

即 y 能被 P 的列向量线性表出, 其中这里的坐标 x 满足 $x = P^{-1}y$.

注: 由 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 的一组基作为列向量排列成的 n 阶方阵是可逆的.

引入 "坐标" 的好处:

- 在 V^n 中取定一组基 $\mathcal{B}$, 则存在一一对应
  V^n 中任一元素 $\alpha \Leftrightarrow \alpha$ 在 $\mathcal{B}$ 下的坐标 $x \in F^n$
  关于 V^n 的问题可以转化为关于 F^n 的问题,

- 例子: 考虑 $\mathbf{P}_2(t)$ 的基 $\mathcal{B} = \{t+1, t+2, t^2\}$.
  $P_1(t) = 2t^2 - t + 1$的坐标为$x_1 = (-3, 2, 2)^T$,
  $P_2(t) = t^2 - t + 1$的坐标为$x_2 = (-3, 2, 1)^T$.
  那么关于 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 的运算就是关于 x_1 和 x_2 的运算，如

$$3P_1(t)+2P_2(t) = \mathcal{B}(3x_1+2x_2) = \mathcal{B}(-15, 10, 8)^T.$$

两组基的变换关系

设$\mathcal{B}_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$和$\mathcal{B}_\beta = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$是 V^n 的两个基, 则每个 β_j $(1 \le j \le n)$ 都可由 $\mathcal{B}_\alpha$ 线性表出:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_{ij} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.$$

将 β_j 按 $j = 1, 2, ..., n$ 的顺序排列, 则

$$(\beta_1, \beta_2, .., \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

这个变换关系，简写为

$$\mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}_\alpha P$$

其中方阵 $P = [p_{ij}]$ 称为由 $\mathcal{B}_\alpha$ 到 $\mathcal{B}_\beta$ 的变换矩阵(或过渡矩阵). 其中 P 矩阵的第 j 个列向量 P_j 就是 $\mathcal{B}_\beta$ 中第 j 个向量 β_j 在 $\mathcal{B}_\alpha$ 下的坐标.

设 ξ 在基 $\mathcal{B}_\alpha$ 和基 $\mathcal{B}_\beta$ 下的坐标分别为 x 和 y，即

$$\xi = \mathcal{B}_\alpha x = \mathcal{B}_\beta y$$

利用变换矩阵, 可写成$x = Py$ 或 $y = P^{-1}x$, 这称为在不同基 $\mathcal{B}_\alpha$ 和 $\mathcal{B}_\beta$ 下的坐标变换公式.

例 1: 已知 $\mathcal{R}^3$ 的两个基是

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

求由 $\mathcal{B}_1$ 到 $\mathcal{B}_2$ 的变换矩阵 P.

解: 若 $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 P$, 那么 $P = (\mathcal{B}_1)^{-1}\mathcal{B}_2$, 即 $P =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 2: 已知 $\mathcal{R}^3$ 的两个基是

$$\mathcal{B}_1=\{e_1,e_2,e_3\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(标准基) 和 $\mathcal{B}_2=\left\{\begin{pmatrix}-3\\-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}$,

求在这两组基下坐标相同的所有向量.

解: 若 $\xi=\mathcal{B}_1x=\mathcal{B}_2x$, 那么 $(\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_2)x=0$, 因为

$$\mathcal{B}_1-\mathcal{B}_2=\begin{pmatrix}4&-3&2\\7&-5&3\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$ 可逆, 所以 $x=0$.

线性空间的子空间

定义: 设 W 是线性空间 V 的一个非空子集，如果 W 关于 V 中的线性运算也构成线性空间, 则称 W 为 V 的子空间, 记为 $W \subset V$.

- $W_1 = V$ 和 $W_2 = \{0\}$ 都是 V 的子空间，这两个被称为 V 的平凡子空间.
- 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ $(r > 1)$ 是 V 的 r 个向量, 它们所有可能的线性组合记为

$$\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} := \{\alpha \in V | \alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i\}$$

是 V 的一个子空间，称为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 张成的子空间.

例 1: 给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则

$$\begin{aligned} N(A) := &= \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}, \\ R(A) := &= \{y \in \mathbb{R}^m | y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，称为 A 的零空间和列空间.

例 2: $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中所有对称矩阵组成的集合

$$F := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^T = A\}$$

是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的一个子空间,

例 3: 对于 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中矩阵 A, 定义 $A^H := \overline{A^T} = (\bar{A})^T$ 为 A 的共轭转置.

例如, 若 $A = \begin{pmatrix} 2+i & 3i & -1-2i \\ -5 & 2-i & 1+i \end{pmatrix}$, 则 $A^H = \begin{pmatrix} 2-i & -3i & -1+2i \\ -5 & 2+i & 1-i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ -3i & 2+i \\ -1+2i & 1-i \end{pmatrix}$.

若在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中 $A = A^H$, 则称 A 为Hermite 矩阵, $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中所有 Hermite 矩阵组成的集合

$$F := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A^H = A\}$$

是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个子空间. (类似 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中对称矩阵)

定理: 设 W 是 V^n 的一个 r 维子空间, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ 是 W 的一组基, 则这 r 个向量必可扩充为 V^n 的基, 即在 V^n 中一定可以找到 $(n-r)$ 个向量 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, 使 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$ 是 V^n 的一组基.

证明: 若 $r = n$, 则定理得证.

若 $r < n$, 则 V^n 中必存在某向量 α_{r+1} 不能由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ 线性表出, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 彼此线性无关.

- 若 $r = n-1$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 为 V^n 的基,
- 若 $r < n-1$, 则可以经过 $(n-r)$ 步, 扩充得线性无关向量组, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n\}$, 构成 V^n 的一组基.

子空间的交与和

定义: 设 W_1 和 W_2 是 V 的两个子空间, 则

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &:= \{\xi \in V | \xi \in W_1, \xi \in W_2\}, \\ W_1 + W_2 &:= \{\xi \in V | \xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 \in W_1, \xi_2 \in W_2\} \end{aligned}$$

分别称为 W_1 与 W_2 的交, W_1 与 W_2 的和.

定理: 若 W_1, W_2 是 V 的两个子空间, 则

$$W_1 \cap W_2, \qquad W_1 + W_2$$

都是 V 的子空间.

定理: 设 W_1, W_2 是 V 的两个子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2$$

证明: 设 $\dim(W_1\cap W_2)=r$, $\dim W_1=n_1$, $\dim W_2=n_2$. 若 $\mathcal{B}_0=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基, 因为 $(W_1\cap W_2)\subset W_i$ $(i=1,2)$, 所以 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ 可以扩充为 W_1 的基

$$\mathcal{B}_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_{n_1-r}\},$$

又可以扩充为 W_2 的基

$$\mathcal{B}_2=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\gamma_1,\ldots,\gamma_{n_2-r}\}.$$

我们要证明 W_1+W_2 的一组基由 $\mathcal{B}_3=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_{n_1-r},\gamma_1,\ldots,\gamma_{n_2-r}\}$ 组成.

证明 (续): 先证明 $\mathcal{B}_3$ 中的向量彼此线性无关.
若有等式成立

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n_1-r} y_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n_2-r} z_i\gamma_i = 0,$$

则令 $\tilde{\xi} := \sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n_1-r} y_i\beta_i = -\sum_{i=1}^{n_2-r} z_i\gamma_i$.
由第一个等号 $\tilde{\xi} \in W_1$, 由第二个等号 $\tilde{\xi} \in W_2$,
于是 $\tilde{\xi} = W_1 \cap W_2$, 可被 $\mathcal{B}_0$ 表出 $\tilde{\xi} = \sum_{i=1}^{r} w_i\alpha_i$.

$$\sum_{i=1}^{r} w_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n_2-r} z_i\gamma_i = \tilde{\xi} - \tilde{\xi} = 0$$

因为 $\mathcal{B}_2$ 是一组基, 故 w_i 和 z_i 都为零, 即 $\tilde{\xi} = 0$.
也就是说, x_i, y_i, z_i 都为零, $\mathcal{B}_3$ 中的向量线性无关.

证明 (续): 再证明 $W_1 + W_2$ 中任一向量可由 $\mathcal{B}_3$ 线性表出.

根据和空间 $W_1 + W_2$ 的定义, 其中任一向量 ξ 可写成 $\xi = \xi_1 + \xi_2$. 其中 $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$.

- $x_1 \in W_1$, 且可由 $\mathcal{B}_1$ 线性表出;
- $x_2 \in W_2$, 且可由 $\mathcal{B}_2$ 线性表出.

于是, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 可由 $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_3$ 线性表出. 又因为 $\mathcal{B}_3$ 线性无关, 因此构成 $W_1 + W_2$ 的一组基. 证毕.

例: $\mathcal{R}^4$ 的两个子空间是
$W_1 = \mathrm{span}\{\alpha_1 = (1,1,0,0)^T, \alpha_2 = (0,1,1,0)^T\}$,
$W_2 = \mathrm{span}\{\alpha_3 = (0,0,1,1)^T, \alpha_4 = (1,0,0,1)^T\}$,
求 $W_1 + W_2$ 及 $W_1 \cap W_2$ 的基和维数.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\dim(W_1 + W_2) \geq 3$.
又因 $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$, 故 $\dim(W_1 + W_2) \leq 3$.
所以$\dim(W_1 + W_2) = 3$, 一组基为$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

由定理知$\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$,
另外由 $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = (1,0,-1,0)^T$,
知$(1,0,-1,0)^T$是 $W_1 \cap W_2$ 的基.

注: 和空间 W_1+W_2 的定义仅表示, 其中任一向量 ξ 可以表示为

$$\xi=\xi_1+\xi_2,\quad \xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2,$$

但这种表示不一定是唯一的. 即可能有

$$\xi=\xi_1+\xi_2=\xi_3+\xi_4,\quad \xi_1,\xi_3\in W_1,\xi_2,\xi_4\in W_2,$$

例如, 考虑 $\mathbb{R}^3$ 的子空间
$W_1=\text{span}\{\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T\}$,
$W_2=\text{span}\{\alpha_3=(1,1,0)^T,\alpha_4=(0,0,1)^T\}$,
则在 $\mathbb{R}^3$ 中 $0=0+0=(\alpha_1+\alpha_2)+(-\alpha_3-\alpha_4)$.
(另: 这与向量在基下的坐标唯一并不矛盾.)

定义: 若 $W_1 + W_2$ 中任一向量只能**唯一**的分解为 W_1 中的一个向量与 W_2 中的一个向量之和, 则 $W_1 + W_2$ 称为**W_1 与 W_2 的直和**, 记为 $W_1 \oplus W_2$.

- 根据定义, W_1 与 W_2 的直和首先是 W_1 与 W_2 的和空间, 反之则不然.
- 两个线性子空间的交、和与直和，可以推广到多个子空间的交、和与直和. 例如:
  子空间的交, $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_m = \cap_{i=1}^{m} W_i$,
  子空间的和, $W_1 + W_2 + \ldots + W_m = \sum_{i=1}^{m} W_i$,
  子空间的直和, $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m = \oplus_{i=1}^{m} W_i$.

定理: $W_1+W_2=W_1\oplus W_2$ 的充分必要条件是下列条件之一满足:

- (1). $W_1\cap W_2=\{0\}$;
- (2). 若 $\xi_1+\xi_2=0$, $\xi_1\in W_1$, $\xi_2\in W_2$, 则 $\xi_1=\xi_2=0$;
- (3). $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_1$.

证明: 易证 (1)(2)(3) 三个条件等价, 只证明 (1).
充分条件: 如果 $W_1\cap W_2=\{0\}$且

$\xi=\xi_1+\xi_2=\xi_3+\xi_4,\quad \xi_1,\xi_3\in W_1,\xi_2,\xi_4\in W_2,$

$\xi_1-\xi_3=\xi_4-\xi_2\in W_1\cap W_2$, 有 $\xi_1=\xi_3$, $\xi_2=\xi_4$.

即 ξ 对 W_1,W_2 的分解唯一, $W_1+W_2=W_1\oplus W_2$.

证明 (续): 必要条件:

如果 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ 且 $\xi \in W_1 \cap W_2$, 因为同时 $-\xi \in W_1 \cap W_2$ 和 $0 \in W_1 \cap W_2$. 所以有

$$0 = 0 + 0 = \xi + (-\xi).$$

又因为 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, 而 0 关于 W_1, W_2 的分解应当唯一, 所以 $\xi = 0$, 即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

定理: 设 V_1 是 V^n 的一个子空间, 则必存在 V^n 的子空间 V_2, 使得 $V_1 \oplus V_2 = V^n$.

证明: 设 $\dim V_1 = r$, 且 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ 是 V_1 的一组基, 则它可扩充为 V^n 的基

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\}.$$

另

$$V_2 = \mathrm{span}\{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\},$$

则 V_2 即满足条件.