

**大 连 理 工 大 学 本 科 外 文 翻 译**

**广义随机和准随机图的矩阵及其差异性**

**Matrix and discrepancy view of generalized**

**random and quasirandom graphs**

学 部（院）： 数学科学学院

专 业： 计算数学

学 生 姓 名： 张俊

学 号： 201411063

指 导 教 师： 翁国标

完 成 日 期： 2018.4.26

大连理工大学

Dalian University of Technology

**外文翻译要求：**

1．毕业设计（论文）外文翻译的译文不得少于5千汉字。

2．译文内容必须与题目（或专业内容）有关，且正式出版日期为近5年内的外文期刊。

3．外文原文、译文应用标准A4纸单面打字成文。

4．译文的基本格式与外文格式相同，页边距：上3.5cm，下2.5cm，左2.5cm、右2.5cm；页眉：2.5cm，页眉：译文的中文题目，页脚：2cm。文中标题为宋体，小四号，字体加粗。

5．原文中的图、表等名称必须翻译，参考文献内容不翻译。

6．外文翻译装订顺序：封面、外文原文、中文译文。

**广义随机和准随机图的矩阵及其差异性**

Marianna Bolla ;Ahmed Elbanna

布达佩斯技术与经济大学数学研究所，匈牙利

摘要：我们将讨论基于图的矩阵如何能够通过小的簇内和簇间的差异找到图顶点的分类。利用归一化模块矩阵的结构特征值及其相关的谱子空间来寻找一个图的块结构。这些概念被扩展到非负的矩形阵列和有向图。我们也探讨了广义随机图的谱性质、多路差异、度分布之间的关系。这些属性被视为广义准随机性质，我们猜想并部分证明了它们对于某些确定性图序列也是等价的（不考虑随机模型）。

关键词：模块化矩阵，谱聚类，多路差异，广义随机图，广义准随机性质

**1 引言**

人们可能认为随机图是非常无序的。然而，我们将展示广义随机图拥有几乎确定的性质，这些性质与它们的谱性质、差异性、顶点度相关。广义随机图模型，有时称为随机块模型，首先在[ 24 ]中被引入，随后在[ 4, 15, 22，27, 30, 33 ]中被讨论。经典的Erdős–Rényi随机图是历史上第一个随机图（[23]中引入，[13]中讨论）。而这个模型则是它的推广，对应于单簇情况。

具有n个顶点的图是一个广义随机图，伴有对称概率矩阵。其中，顶点的k-划分（如果顶点集和以概率独立连接的话，）；此外，中的任意一对顶点都以概率相连接。因此局限于顶点集的的子图是一个Erdős–Rényi随机图，而连接顶点集和的则是边概率为的随机二分图。有时我们把称为聚类，称为为其中的簇。

在[8]的第三章我们证明了对于一个给定的正整数,在一些簇大小平衡条件下随着广义随机图的归一化模块谱中几乎确定有outstanding，即所谓的邻接图结构特征值，和outstandings。 在相同条件下，由对应于结构特征值的特征子空间创建的，顶点代表的-variances为数量级。的差异也趋向于0，并且定义于顶点类上的子图和二分子图分别是渐进正则和双正则的。这些性质可以被视为广义的准随机性质，只要在任何图序列中它们的等价性都能得到证明即可。更确切的讲，我们关注一个扩展的图类，对它们来说，不管是在什么随机模型下以上任意一个性质都暗含另外一个性质。当时，它们被称为准随机或伪随机图序列（首先被Thomason [36]讨论，后来又被Chung, Graham和Wilson [19, 20]还有Lovász [29]所讨论）。当时，广义随机图的确定性对应部分在[28]中首先被定义为收敛于一个顶点和边的加权图的图序列（顶点权重对应于分划的相对大小，边权重对应于概率矩阵），在同态密度意义上。由于谱的收敛性[17],广义准随机图在谱意义上等价于广义随机图。

按照Szemerédi规则引理的想法，给定一个大图，我们寻找其顶点的一个，例如根据差异性诱导的子图和二分图应该是准随机的。为此，我们定义可以与谱相关的差异。基于多路差异和伴有谱子空间的谱，我们将制定出准随机性质并猜想它们与随机模型无关的等价性。实际上，渐进捕获这些性质之一的扩展图序列像是随机的，而这些图序列局限于它们的子图和随机子图。这种等价性也表明谱方法能够用簇内和簇间差异找到顶点的；此外，也能帮助我们利用谱内间隔找到最优。这个新奇的想法是如此之大—实际中的图是扩展图序列的实例并且如果它们有一个簇结构的话，我们还能通过谱方法恢复这个图。

这篇论文探讨了两方面：一方面我们想要在前人结果上（[19,20]和[8]的第三章）建立广义准随机性质的等价性，另一方面补足这种含义下缺失的部分。在命题2中，我们也给出了非正则图的扩展混合引理（Expander Mixing Lemma）的简短证明，并且在定理1中，我们估计了具有差异的归一化矩阵的第k个最大奇异值。我们也把这种多路差异的概念拓展到了矩形阵列上（rectangular arrays），它们的无向或有向图，无权重或有权重图对应于不同的情况。结果得到基于有向图的计算机模拟与处理迁移数据的支持，在这之中介绍了谱松弛方法（the spectral relaxation techniques）。

论文的组织如下。在第2节，我们介绍了基于图的矩阵，连同它们的谱、谱子空间和相应的谱聚类方法等概念。在第3节，我们讨论了广义随机图和准随机图，连同与谱相关的性质、差异性和顶点度。在猜想1中，我们陈述了这些性质的等价性，一部分是已知的，一部分在本论文中得到证明；实际上只有等价性与顶点度的联系未被论述。特别地，在第4节中我们证明了归一化矩阵的第个最大奇异值与该矩阵的差异之间的联系，而这是证明准随机性质之间的一个重要隐含意义的关键。在第5节我们总结了本论文的观点。

**2 记法和基于矩阵的图**

模块化矩阵的概念首先用于简单图（参见Newman[31]的概述）来捕捉社交网络中所谓的社区结构。在[7]中我们把这个概念扩展到了加权图上，如下所述。令为元素顶点集合上的边加权图，其中为对称权重矩阵；这些项满足而且它们在顶点对之间是相似的。的模块矩阵被定义为，其中的各项为广义顶点度。这里以这样一种方式归一化：，这是一种不会损害一般性的假设，因此大多数情况下使用的如下归一化模块矩阵并没有受到项缩放比例的影响:



其中的是对角度矩阵。我们将证明模块化矩阵能够衡量基础图的差异性，当我们想要找在图中寻找齐次模式（homogeneous patterns）时这一概念变得至关重要。首先介绍一些其他的概念。

如果边加权图的顶点不能被划分为两个不相交的子集（这些不相交的子集之间无权重），则称之为连通的边加权图。这等价于在广义顶点度都是正的情况下权重矩阵是不可约的。模块矩阵总是有一个0特征值并伴有特征向量，因为它的行和为0。由于的迹小于0，所以必须至少有一个负特征值，并且通常是不定的。在[11]中我们证明了一个简单图的模块矩阵是半负定的当且仅当它是一个完整的多部图。这同样适用于归一化模块矩阵，因为它具有相同的惯量。在[8]中我们证明了的特征值位于之间，并且当连通时1不能为特征值。与归一化拉普拉斯矩阵算子密切相关。的归一化拉普拉斯算子定义为，并且当连通时可以建立和的谱之间的联系。令表示的特征值。0是一个具有相应单位范数特征向量的单特征值。的特征值为 具有相同的特征向量；而0特征值对应单位特征向量。

令为一个固定的整数。通常的谱聚类方法使用的最小的个特征值以及相应的特征向量来寻找个属于这些顶点的松散连接（loosely connected）簇；关于所谓的最小k路归一化切割问题的谱松弛参见[8]第2章。更一般地说，在基于模块的谱聚类中我们寻找顶点的适当的划分使得簇内和簇间差异最小化。

为了引入精确的差异度量，注意观察的项是,而这就是顶点*i,j*的实际连接和它们分别在在概率下预期的连接之间的差异。因此，子集的实际连接和预期连接之间的差异是



其中为的加权切割，是顶点子集的容量。更进一步，令为的密度。

定义1.边加权图在其顶点聚类中的多路差异为



其中



的最小*k-*路差异为



请注意对于每一个对以及每一个来说，是保持如下不等式的最小的，



因此，在顶点的*k-*划分中，给出*G*的最小*k-*路差异，每个对就是所谓的-容量正则（参见[2]），而且这是通过图*G*顶点的合适的*k-*分划才能达到的最小的差异。它类似于Szemerédi正则性引理（Szemerédi regularity lemma）[35]中的正则对的概念，尽管用了一些给定的经常不平衡（equitable）的顶点簇;此外用了容量而不是基数。

在第4节中，我们会我们将证明以下最小*k-*路差分的谱逼近问题。令的特征值按递减的绝对值排列，为。假设并且用表示相应的两两正交的单位特征向量。令为具有列向量的矩阵的行向量；它们被称为-维顶点的代表。

这些代表的加权*k*-方差定义为



其中是簇的加权中心。加权的*k*-means算法求得了上述的最小，并且特别指出最优的仅仅是与相关的特征子空间和在*V*的*k-*划分之上适当改变步向量（step-vector）所得的特征子空间之间的最小距离。在[8]的第2章中我们也讨论了，从子空间摄动定理看之间的间隔越大就越小。在使*G*的加权*k-*方差最小的*k-*划分下，图*G*的*k-*路差异也是“相当小”的。在第4节中建立了这个确切的联系，需要知道的是，不像通常的谱聚类方法那样，与最大绝对特征值相关的特征向量不得不用在这里。

在第3节中，我们也会需要的简单*k-*方差,而是矩阵的行向量，其列向量为与*W*的最大*k*特征值相关的两两正交的单位特征向量。这个*k-*方差为



其中是簇的中心。这就是找到这个最小值得普通的*k-means*算法。实际上，在一些条件下该算法有多种变体，而这些变体在多项式时间内找到一个“接近”最优解的谱聚类。我们不会讨论这些算法，详细参见[26]。

**3 广义随机和准随机图**

广义随机和准随机图是这样的样本，其中“大”谱间隔和“小”*k-*方差伴随着*k-*路差异一起出现。

定义2. 令n为一个自然数而为一个正整数。图是一个具有概率矩阵**P**和合适的顶点*k-*划分的广义随机图，如果它满足如下条件：顶点集是*V*,对称矩阵**P**的各项满足。然后的顶点以概率独立连接；进一步地，的任何顶点对都以概率相连接。

可以在[4,22,27,30,33]等资料中找到不同符号表示的上述定义。有时它也被称为随机块模型，这个块模型在[24]中首次被提到，并且很久以后在[15]中作为非齐次随机图的一个特殊例子被讨论。注意这个模型是经典的Erdős–Rényi随机图对应于的情况的推广，而后者是历史上第一个随机图，在[23]中被引入并在[13]中被讨论。在这种情况下，概率矩阵归结为,而边以相同的概率*p*独立存在并用表示。

注意，如果概率矩阵P包含至少一个非零项，则定义2是有意义的。在许多情况下**P**的一个或更多的项都是0。特别地，当时，图有一个所谓的软核多部结构，定义参见[11]。在的特殊情况中，它就是的独立顶点集之上的完全*k-*部图，其中。

如果,那么这个模型给出了具有预期度序列的随机图，这一点首先在[21]中被讨论，其中。这是捕获幂律图的一个很好的模型，而随机幂律图（在[3]中介绍）则是幂律图的一个特殊例子。

然而，广义随机图模型能更好地应用于*k*远小于*n*的情况。现在我们保持*k*和**P**固定而*n*在一些簇大小平衡条件下趋于无穷。在[5,6,8]我们证明了广义随机图的如下性质。

命题1. 令为一个*n*个顶点的广义随机图，具有大小分别为的顶点集和对称概率矩阵**P**。令*k*为一个固定的正整数，满足，为某些常数（平衡条件）。然后如下结论对于邻接矩阵和归一化模块矩阵几乎肯定成立。

1. 有一个所谓的结构特征值绝对值大小为，而剩余的特征值的为。更进一步地，基于与的结构特征值相关的特征向量的*k*-维顶点代表的*k-*方差（见（5））的大小是。
2. 存在一个不依赖*n*的正常数(它只依赖*k*)例如正好有绝对值大于的*k-*1个结构特征值，而对每一个来说其它所有特征值的绝对值小于。进一步地，基于与的结构特征值相关的转换特征向量（见（4）），-维顶点代表的加权 *k-*方差的大小是。
3. 存在一个连续的例如，并且*k-*路差异是的。
4. 对每一个：



对每一个：



对于性质1-2的证明参见[8]的定理3.16,3.18和命题3.1.10，3.1.12。2-3在差异和谱之间的联系将会在第4部分被讨论，而性质4的证明如下。我们将会使用下面版本的切尔诺夫不等式。

引理1（大偏差切尔诺夫不等式）。令为独立随机变量，。然后对每一个：



性质4的证明。考虑广义随机图序列，其子图和二分子图有如下的期望度。我们会删掉下标，并使用记号表示其邻接矩阵的各项。至于对（），对任意，顶点关于的平均度是

，

中的每一个顶点在中有相同的期望邻接点数。

观察对于，求和具有以上期望和方差的二项分布。因此通过引理1，在簇大小平衡条件下簇间平均度随着高度集中于它们的期望。事实上，对任意：



即使选择它也趋于0。因此下式几乎肯定成立

。

这就完成这个证明。

至于每一，任意对在中的普通邻接点数量具有二项分布，期望为和方差为，用上面相同的计算我们必然得到



这就完成了这个证明。

因此，局限于顶点类的子图展现出正则性，而广义随机图的诱导二部子图展现出渐进双正则结构。

现在我们会讨论准随机图相似的性质，它们是广义随机图的确定性的对应部分，并且与之谱等价。

让我们从的例子开始。准随机或伪随机图序列首先被Thomason讨论[36]。后来，Chung，Graham and Wilson[19]使用准随机术语来描述简单图，这些简单图满足任意一个等价性质（包括“大”谱间隔），其中这些等价性质又与扩展图的性质紧密相关。对于这些准随机性质的采样器也可参见Lovász[29]。Chung and Graham [20]研究了给定度序列的准随机图。另外一些人证明了“小”差异是由“大”谱间隔导致的，即。下面的命题总结了这个关系，而这个命题就是对非正则图的扩展器混合引理的简单概括。

命题2.

，

其中是*G*的 模块矩阵的谱范数。

尽管在[20]中用不同的记号证明了这个命题的一个更强的版本，我们还是在这里给出了另外一个简短的证明。

证明. 通过奇异值的分离定理可知，的最大奇异值是单位球上双线性形式的最大值。令为任意的并用它们的指标向量表示。然后



取子集上右手边最大值，所需的关系如下所示。如果我们仅取不相交子集对上的最大值，以上估计也是有效的。

在[20]中，作者也证明了在稠密图（最小度是对一些常数*c*和顶点数*n*）情况下反之亦然。考虑到扩展混合引理，一个“大”谱间隔是指在图的任意两个子集之间的加权切割接近于随机图中期望，图的顶点是独立连接的，概率与它们的广义度成正比。差异概率连同扩展混合引理首先用于简单图（有时是正则的），参见[1,25]，并在[14]中扩展到埃尔米特矩阵。历史上，Thomason[36,37]最先证明准随机性质之间的等价性，尽管，用了一些不同的记号：他用了术语jumbled graph而不是discrepancy。

准随机图的多类扩展（）在Lovász和Sós [28]中被彻底地讨论了，其中定义了广义准随机图。这里小差异的簇或簇对表现的像扩展器或二分扩展器。事实上，这些都是广义随机图的定性对应部分。更早地，在[34]中作者建立了准随机性质之间的有价值的联系和开创性的Szemerédi规则引理的划分[35]。对定义来说，边和顶点加权图序列的收敛概念非常重要。没有讨论细节，我们会使用在[16]中介绍的图收敛的概念。

边加权和可能的顶点加权图序列（）称为收敛的，当对任何简单图的同态密度随着收敛。他们也定义了极限对象，它是一个对称的、有界的、可测量的函数：，称为graphon。步函数graphon 以如下的方式分配给加权图：单位正方形的边被分成相对顶点权重的长度的间隔，并且在矩形上步函数取值为顶点*i*和*j*之间的边权重。的收敛性也等价于步函数graphon 收敛于有限的graphon称为cutmetric。粗略地说，一个收敛图序列的成员在一些小细节上变得越来越相似。在图收敛性方面，我们在[8]的第4节证明了如下命题。

命题3. 考虑广义随机图序列。让以这样一种式：伴随某些。然后随着，其中*H*为一个*k*个顶点的顶点加权和边加权图并具有顶点权重，边权重则是的项，并且是与*H*相关的步函数。

在[28]中给出了下面的广义准随机图序列的定义。

定义3. 给定一个具有*k*个顶点随机图模型，顶点权重为和边权重（的项），是一个*H-*随机的当在同态密度上随着。

[28]的作者也证明了一个广义准随机图的顶点集*V*能够被划分成类其中，并且由诱导的子图为一个广义准随机图的一般项伴随着边密度趋于，而之间的二分子图为一个准随机二分图序列的一般项伴随着边密度趋于。

由于广义准随机图定义中的极限关系，和收敛图序列的谱等价性，这些性质对广义准随机图也同样有效。事实上，[17]中的作者证明了对任意*k*,一个收敛图序列的归一化邻接特征值的*k*个最大绝对值收敛（收敛到极限graphon的相应特征值）。在[9]中我们证明了对于收敛图序列的归一化模块谱也是一样的。

如何用给定的和模型图的顶点权重建立一个广义准随机图？考虑存在顶点的*k*个簇，大小分别为例如。让我们选择独立的无理数。然后顶点集上的子图用下面的方法构建：是邻接的当且仅当



其中表示实数的小数部分。和之间的二分子图用如下方式构建：和是邻接的当且仅当



解析数论（参见[13,32]）保证了，对任意,序列



在中对称均匀分布，。因此，考虑[32]，



当且对于时准随机图的更多的例子参见[12,13,36]。

因此，一个以这种方式创建的大随机图将会是“几乎”*k-*部的，*k-*正则的，并且它的归一化模块谱包含*k-*1个结构特征值，然而，所有其它的特征值都是，类似于最优的（k-1）维代表的加权*k-*方差。在这种情况下，最优谱聚类中的*k-*路差异是。至于完整的*k-*部图（纯例子），它的归一化模块谱包含*k-*1个结构负特征值和个0.同样，以上的*k-*方差是0；更进一步地，并且。

为了说明广义随机和准随机图参见图1,2,3。

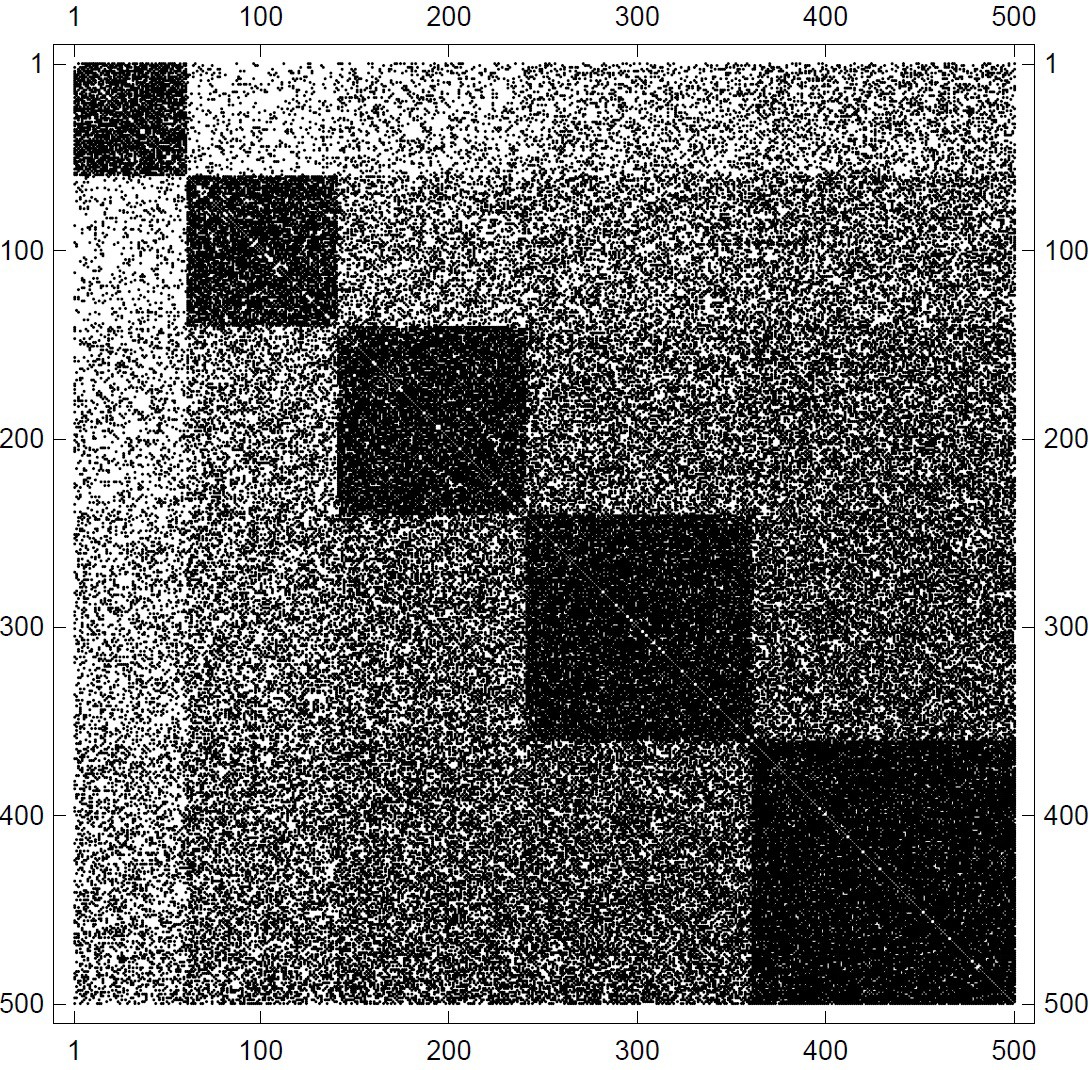
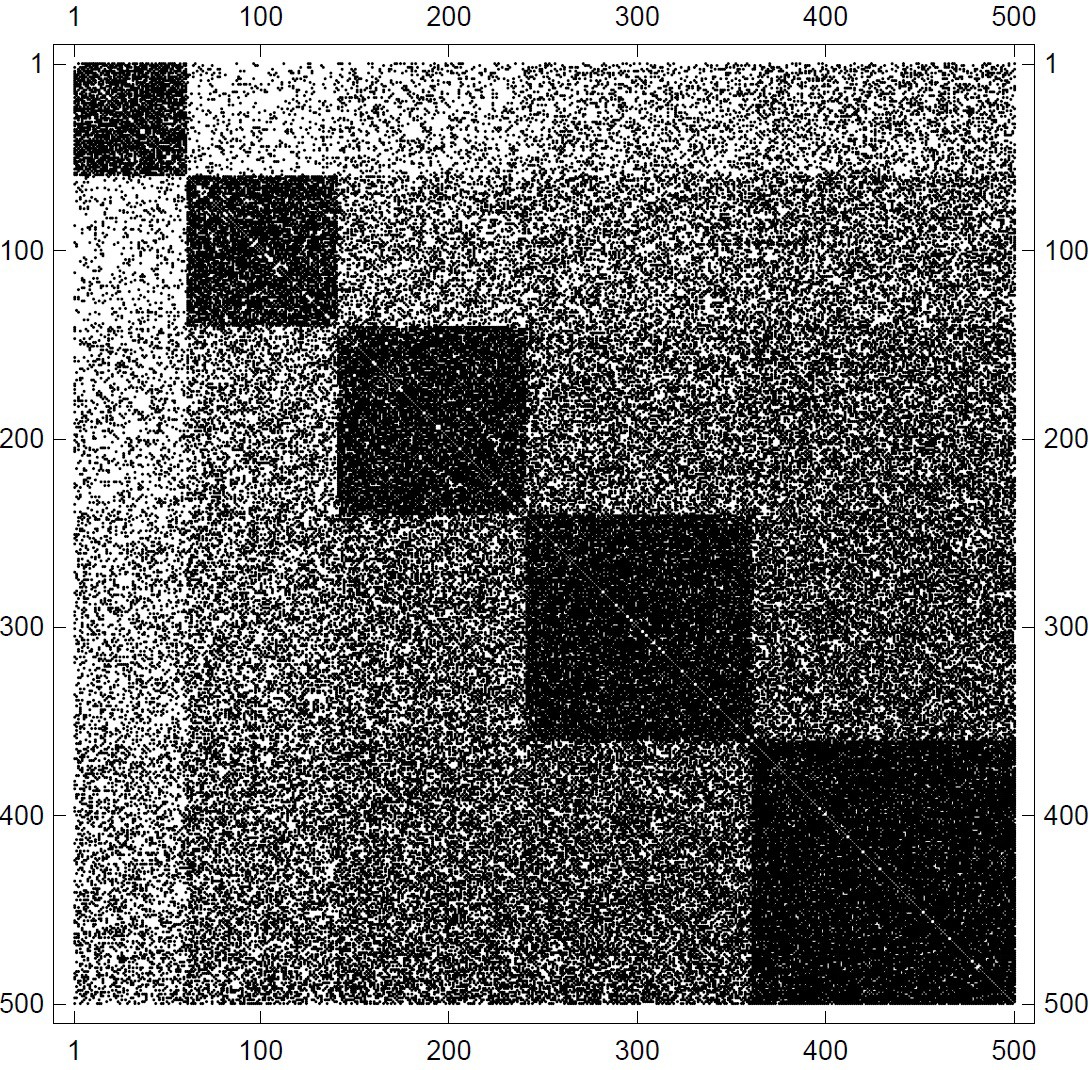
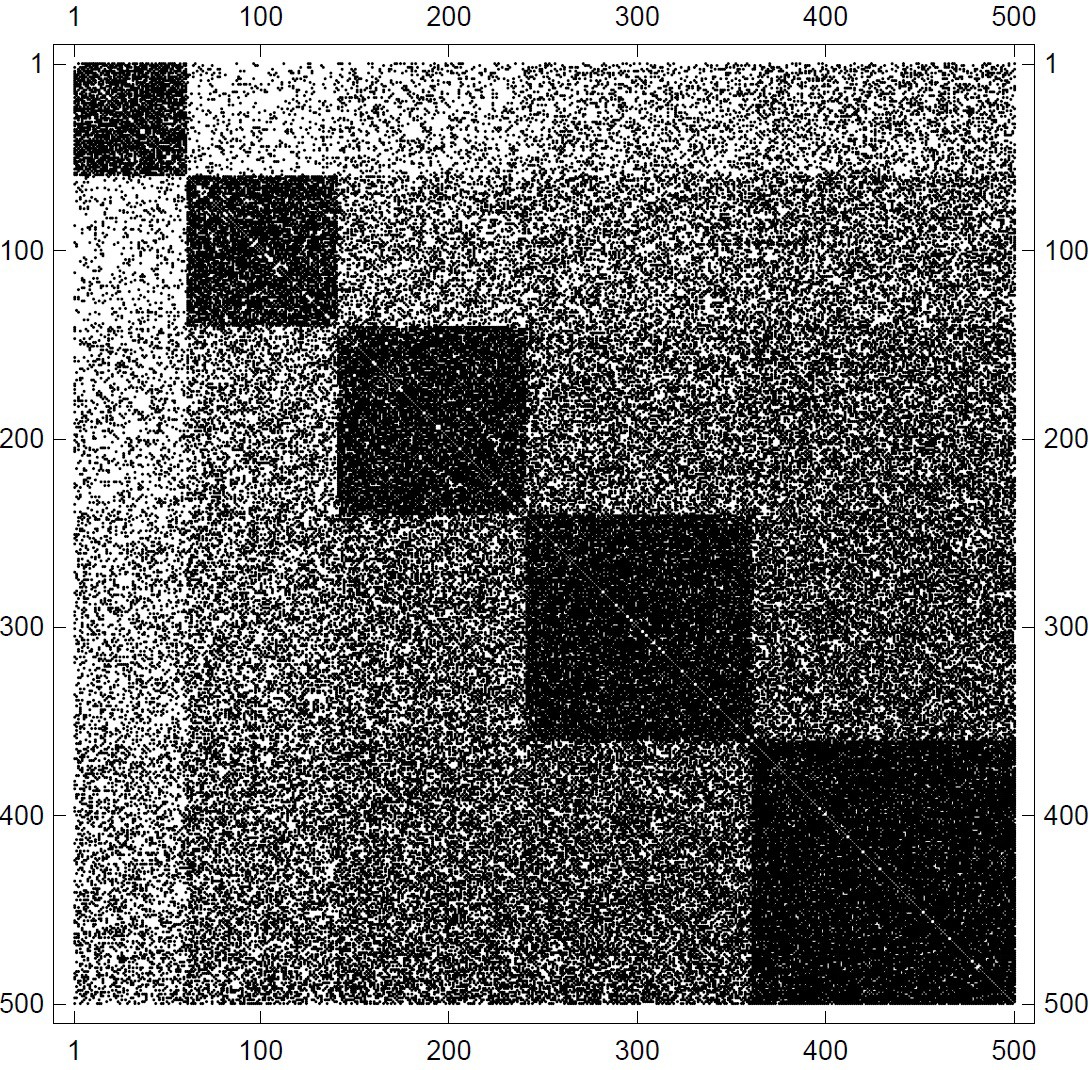


图1：广义随机图，, 图2：广义准随机图， 图3：前一个广义准随机图

簇大小为60,80,100,120, **,簇大小为60,80, 通过适当的块内顶点的排列。

140以及概率矩阵**P**如下。 100，120,140以及概率

的第一个非平凡特 矩阵**P**如下。的第一

征值是0.304,0.214, 个非平凡特征值是0.318，

0.17,0.153,-0.097, 0.207,0.154, 0.115，

-0.094,-0.093,-0.092, -0.100，-0.090,0.084

-0.091在第4个之后 展示了递减的特征值直到

具有间隔。 第4个。



从[8]中的第3章叙述可以看出的含义。的含义在[9]中被证明，并在第4节中被讨论。至于的含义，我们将会在第4节中的定理1中证明。基于[19,37]的结果，我们会猜想暗示，并且反之亦然。通过一些转换，[36，37]中关于-jumbled图的定理可能应用于子图和二分子图，其中*p*是某些，与*k-*路差异相关。

**4 与谱相关的差异**

略。

**5 总结**

我们描述了广义随机和准随机图的谱和差异。通过基于矩阵的图对给定数量的簇构建了性诸如“大”谱间隔，顶点代表的“小”簇内方差和“小”簇内和簇间差异等性质。然而，我们的理论帮助从业者找到了簇的最优数目。

作为准随机图的一个推广，这同样适用于单簇情形，我们也考虑了广义准随机图的性质，并且证明了它们之间的隐含意义，这是与随机模型无关的。真实的扩展图序列渐进地捕捉这些性质之一是类随机的，局限于它们的子图和二分子图。这些等价性也表明了谱方法能够用“小”多路差异找到这些顶点的划分。我们将这些记号扩展到了具有非负项的矩形阵列，其中有向图是特殊的例子。

**致谢**：作者希望感谢Vera T. Sós和Gergely Kiss的关于构建准随机图的有用的建议。Ahmed Elbanna的研究部分是在MTA-BME随机研究小组赞助下完成的。

**参考文献**

[1] N. Alon, J. H. Spencer, The Probabilistic Method. Wiley (2000).

[2] N. Alon et al., Quasi-randomness and algorithmic regularity for graphs with general degree distributions, Siam J. Comput. 39, 2336-2362 (2010).

[3] A. L. Barabási, R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks, Science 286, 509-512 (1999).

[4] P. J. Bickel, A. Chen, A nonparametric view of network models and Newman-Girvan and other modularities, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 106, 21068-21073 (2009).

[5] M. Bolla, Recognizing linear structure in noisy matrices, Linear Algebra Appl. 402, 228-244 (2005).

[6] M. Bolla, Noisy random graphs and their Laplacians, Discret. Math. 308, 4221-4230 (2008). [7] M. Bolla, Penalized versions of the Newman–Girvan modularity and their relation to

normalized cuts and k-means clustering, Phys. Rev. E 84, 016108 (2011).

[8] M. Bolla, Spectral Clustering and Biclustering. Learning Large Graphs and Contingency Tables. Wiley (2013).

[9] M. Bolla, Modularity spectra, eigen-subspaces and structure of weighted graphs, European J. Combin. 35, 105-116 (2014).

[10] M. Bolla, SVD, discrepancy, and regular structure of contingency tables, Discret. Appl. Math. 176, 3-11 (2014).

[11] M. Bolla, B. Bullins, S. Chaturapruek, S. Chen, K. Friedl, Spectral properties of modularity matrices, Linear Algebra Appl. 73, 359-376 (2015).

[12] B. Bollobás, P. Erdős, An extremal problem of graphs with diameter 2, Math. Mag. 48, 419-427 (1975).

[13] B. Bollobás, Random Graphs, 2nd edition. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).

[14] B. Bollobás, V. Nikiforov, Hermitian matrices and graphs: singular values and discrepancy, Discret. Math. 285, 17-32 (2004).

[15] B. Bollobás, S. Janson, O. Riordan, The phase transition in inhomogeneous random graphs, Random Struct. Algorithms 31, 3-122 (2007).

[16] C. Borgs, J. T. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, K. Vesztergombi, Convergent graph sequences I: Subgraph Frequencies, metric properties, and testing, Advances in Math. 219, 1801-1851 (2008).

[17] C. Borgs, J. T. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, K. Vesztergombi, Convergent sequences of dense graphs II: Multiway cuts and statistical physics, Ann. Math. 176, 151-219 (2012).

[18] S. Butler, Using discrepancy to control singular values for nonnegative matrices, Linear Algebra Appl. 419, 486-493 (2006).

[19] F. Chung, R. Graham, R. K. Wilson, Quasi-random graphs, Combinatorica 9, 345-362 (1989).

[20] F. Chung, R. Graham, Quasi-random graphs with given degree sequences, Random Struct. Algorithms 12, 1-19 (2008).

[21] F. Chungm L, Lu, V. Vu, Eigenvalues of random power law graphs. Ann. Comb. 7, 21-33 (2003).

[22] A. Coja-Oghlan, A. Lanka, Finding planted partitions in random graphs with general degree distributions, J. Discret. Math. 23, 1682-1714 (2009).

[23] P. Erdős, A. Rényi, On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5, 17-61 (1960).

[24] P. Holland, K. B. Laskey, S. Leinhardt, Stochastic blockmodels: some first steps, Social Networks 5, 109-137 (1983).

[25] S. Hoory, N. Linial, A. Widgerson, Expander graphs and their applications, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 43, 439-561 (2006).

[26] T. Kanungo et al., An eflcient k-means clustering algorithm: analysis and implementation, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 24, 881-892 (2002).

[27] B. Karrer, M. E. J. Newman, Stochastic blockmodels and community structure in networks, Phys. Rev. E 83, 016107 (2011).

[28] L. Lovász, V. T. Sós, Generalized quasirandom graphs, J. Comb. Theory B 98, 146-163 (2008).

[29] L. Lovász, Very large graphs. In: D. Jerison et al. (Ed.), Current Developments in Mathematics, International Press, Somerville MA (2008), pp. 67-128.

[30] F. McSherry, Spectral partitioning of random graphs. In: 42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), Las Vegas, Nevada (2001), pp. 529–537.

[31] M. E. J. Newman, Networks. An Introduction. Oxford University Press (2010).

[32] R.G.E. Pinch, Sequences well distributed in the square, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 99, 19-22 (1986).

[33] K. Rohe, S. Chatterjee, B. Yu, Spectral clustering and the high-dimensional stochastic blockmodel, Ann. Stat. 39, 1878-1915 (2011). Brought to you by | Dalian University of Technology Authenticated Download Date | 4/26/18 10:28 AM Matrices of generalized random graphs | 45

[34] M. Simonovits, V. T. Sós, Szemerédi’s partition and quasi-randomness, Random Struct. Algorithms 2, 1-10 (1991).

[35] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs. In: J-C. Bermond et al. (Ed.), Colloque Inter. CNRS. No. 260, Problémes Combinatoires et Théorie Graphes (1976), pp. 399–401.

[36] A. Thomason, Pseudo-random graphs, Ann. Discret. Math. 33, 307-331 (1987).

[37] A. Thomason, Dense expanders and pseudo-random bipartite graphs, Discret. Math. 75, 381-386 (1989).

[38] R. C. Thompson, The behavior of eigenvalues and singular values under perturbations of restricted rank, Linear Algebra Appl. 13, 69-78 (1976).