BHS Zentralmatura Cluster T2 (HTL2) September 2019

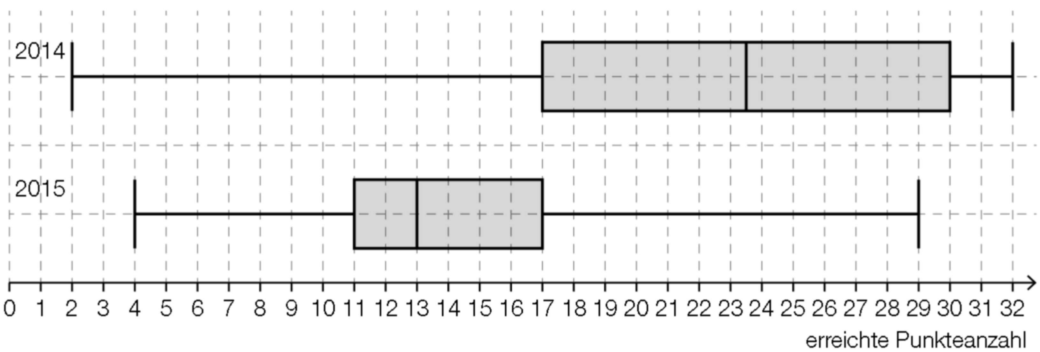
1 Mathematik-Olympiade

1.1 a)

Abbildung 1:

Die Mathematik-Olympiade ist ein bekannter Wettbewerb für Schüler/innen.

a) Beim Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade kann man im ersten Teil maximal 32 Punkte erreichen. Die nachstehenden Boxplots zeigen die erreichte Punkteanzahl der Teilnehmer/innen im Jahr 2014 und im Jahr 2015.

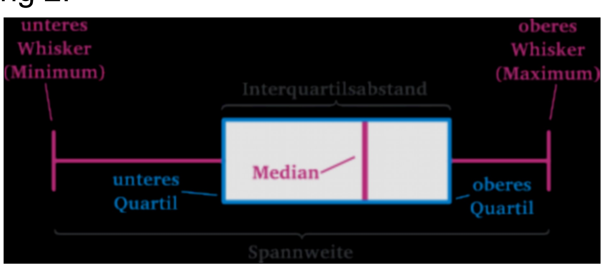


Lara hat in beiden Jahren beim Bundeswettbewerb teilgenommen. Im Jahr 2014 hat sie 29 Punkte erreicht, im Jahr 2015 waren es 18 Punkte.

1.1.1 Boxplot-Erklärung

Definition: Boxplot ist eine grafische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen, in der neben dem Median als Bezugspunkte außerdem der größte und der kleinste Ausprägungswert sowie die Quartile (Viertelwerte) vermerkt sind.

Abbildung 2:



Zerlegte Verteilung: Etwa 50% der Daten liegen innerhalb der Box, etwa 25% links und 25% rechts von der Box.

Die Breite der Box (der Interquartilsabstand) zeigt an, ob die mittlere Hälfte der Daten eher nahe dem Median oder weiter vertreut davon liegen. Je kleiner die Box, desto mehr konzentriert sich die mittlere Hälfte der Daten um den Median.

Die Lage des Median in der Box zeigt an, ob sich die mittlere Hälfte der Daten auf einer Seite des Median konzentrieren. Je kürzer eine Seite der Box im Vergleich zur anderen Seite ist, desto mehr konzentriert sich die mittlere Hälfte auf dieser Seite des Median.

MAXIMA:
load("descriptive");
A: [2,5,1,3.5,6];
wxboxplot(A, box_orientation = horizontal);
mean(A) => arithmetische Mittelwert
median(A) => Median
lmax(A) => obere Whiskers (Maximum)
lmin(A) => untere Whiskers (Minimum)
qrange(A) => IQD
lmax(A)-lmin(A) => Spannweite
std(A) => Standardabweichung

Abbildung 3:

1) Argumentieren Sie, dass Lara im Jahr 2015 im Vergleich zu den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein besseres Ergebnis als im Jahr 2014 erzielt hat. *[1 Punkt]*

2) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

Der Interquartilsabstand im Jahr 2014 ist mehr als doppelt so groß wie der Interquartilsabstand im Jahr 2015.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte.	☐
Die Spannweite im Jahr 2015 ist um rund 17 % kleiner als die Spannweite im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 ist der Median um 10,5 Punkte kleiner als im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen maximal 17 Punkte.	☐

1) Lara hat im Jahr 2015 ein besseres Ergebnis erzielt, da sie mit 18 erreichten Punkten unter den besten 25% der Teilnehmer/innen war und im Jahr 2014 mit 29 erreichten Punkten schlechter als die besten 25% der Teilnehmer/innen war.
2)
Aussage 1 ist richtig => 2014: IQD = 13; 2015: IQD = 6 (6*2=12 => 13 (= mehr als doppelt so groß))
Aussage 2 ist falsch => Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75% der Teilnehmer/innen MAXIMAL 17 Punkte.
Aussage 3 ist richtig => 2015 ist die Spannweite: 25; 2014 ist die Spannweite: 30; => Prozentrechnung (relative Änderung): 25-30/30 => -0.17 => -17% kleiner (relative Änderung)
Aussage 3 ist richtig => 2015 Median : 13; 2014: Median: 23,5 => 23,5 - 13 =
10,5
Aussage 4 ist richtig => war bei 2 falsch.

Prozentrechnung steht in der Formelsammlung:

Abbildung 4:

Relative (prozentuelle) Änderung von f in $[a; b]$

$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ mit $f(a) \neq 0$

1.2 b)

Abbildung 5:

b) 8 Jugendliche haben am Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade teilgenommen. Sie möchten das arithmetische Mittel und die Standardabweichung ihrer erreichten Punkteanzahlen berechnen. Für die Varianz s^2 ergibt sich die nachstehende Berechnung.

$$s^2 = \frac{1}{8} \cdot \left((16-16)^2 + (22-16)^2 + (21-16)^2 + (30-16)^2 + (4-16)^2 + (11-16)^2 + (9-16)^2 + (15-16)^2\right)$$

1) Lesen Sie aus der obigen Berechnung das arithmetische Mittel ab. *[1 Punkt]*

Aus der Formelsammlung:

Abbildung 6:

Streuungsmaße

s^2 ... (empirische) Varianz einer Datenliste
s ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

(da wir keine Häufigkeiten dabei haben, ist das die richtige Formel)
xi = einzelne Wert
_x = arithmetische Mittel

Ausdruck ist (xi - _x) und da man in der Formel sieht, dass immer mit 16 subtrahiert wird ist dieses auch das arithmetisches Mittel.
Antwort: arithmetisches Mittel = 16

1.3 c)

Abbildung 7:

c) Die nachstehende Häufigkeitstabelle zeigt die erreichten Punkteanzahlen der 40 Teilnehmer/innen des Bundeswettbewerbs der Mathematik-Olympiade im Jahr 2016.

erreichte Punkteanzahl	Anzahl der Teilnehmer/innen
0 – 8	7
9 – 16	22
17 – 24	9
25 – 32	2

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte erreicht haben. *[1 Punkt]*

Geamtteilnehmer = 40
Teilnehmeranzahl die mind. 17 Punkte erreicht haben: 11
Rechenweg: Prozentsatz = (Prozentwert*100)/Grundwert

In der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 8:

18 Statistik

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ... eine Liste von n reellen Zahlen
Dabei treten k verschiedene Werte $x_1, x_2, \dots, x_k$ auf.
H_i ... absolute Häufigkeit von x_i mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$

Relative Häufigkeit von x_i

$h_i = \frac{H_i}{n}$

```
→ ergebnis: (11·100)/40, numer;
(ergebnis) 27.5
```

Antwort: Es haben 27.5% der Teilnehmer/innen mindestens 17 Prozent erreicht.

2 Der Pauliberg

2.1 a)

Abbildung 9:

Der Pauliberg ist Österreichs jüngster erloschener Vulkan und ein beliebtes Ausflugsziel im Burgenland.

a) Beim Pauliberg befindet sich eine Fundstätte von großen Brocken aus vulkanischem Gestein. Für die nachfolgenden Aufgaben wird vereinfacht von kugelförmigen Brocken ausgegangen.

Ein bestimmter Brocken hat eine Masse von 4,5 t.
Die Dichte des Gesteins beträgt 3 000 kg/m³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Berechnen Sie den Durchmesser dieses Brockens. *[1 Punkt]*

Umwandlung in gleiche Einheit: 4.5t = 4500kg
In die Formel einsetzen: 4500 = 4/3*%pi*r^3*3000
=> Volumenformel ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 10:

Kugel

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$


```
kill(all);
```
(%o0) *done*

```
gleichung: 4500 = (4/3)·%pi·r^3·3000;
```
(gleichung) $4500 = 4000\,\pi\, r^3$

```
find_root(gleichung, r, 0, 100);
```
(%o2) 0.7101240423074943

r = 0.7m => d = r*2 = 1.4m

Antwort: Der Durchmesser beträgt rund 1.4m.

Abbildung 11:

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

m_1 ist das Zehnfache von m_2.	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 10 000 : 1.	☐
$m_2 = 1000 \cdot \pi \cdot m_1$	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 100 : 1.	☐
$m_1 = 1000 \cdot m_2$	☐

Antwort: Brocken 1 und Brocken 2 haben dieselbe Dichte und die Masse ergibt sich aus Volumen*Dichte. Wenn wir jetzt das Volumen mit 1dm ausrechnen möchten, kommt wegen dem r^3 ein 10er-Schritt zwischen dm und m, aber durch das r^3 ergibt das 10^3, also 1000. Somit ist die richtige Antwort m1 = 1000*m2.

POSAs Antwort: Da die Masse proportional zum Volumen ist, gilt dass 10^3 der Umrechnungsfaktor zwischen den Massen ist!

2.2 b)

Abbildung 12:

b) Beim Pauliberg gibt es einen beliebten Wanderweg.

Sarah benötigt für die *a* Kilometer lange Wanderung *b* Stunden. Leonie wandert auf der gleichen Strecke, startet aber 1,5 Stunden später. Sarah und Leonie erreichen gleichzeitig das Ziel.

1) Erstellen Sie aus *a* und *b* eine Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit *v* von Leonie in km/h.

$v =$ ______________________ *[1 Punkt]*

Geschwindigkeit = Weg/Zeit
Antwort: v = a / (b -1.5)

2.3 c)

Abbildung 13:

c) Unweit des Paulibergs liegt die Burgruine Landsee. Diese kann für private Veranstaltungen gemietet werden.

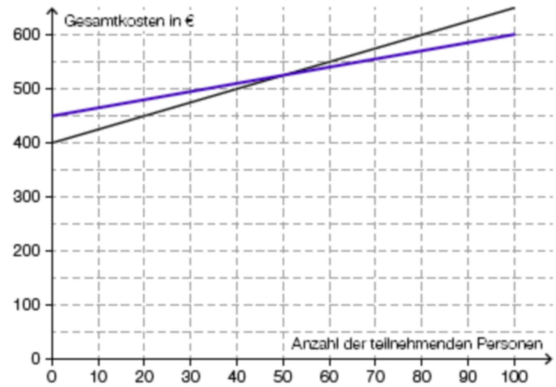
Die Raummiete für eine Veranstaltung beträgt € 450. Zusätzlich sind pro teilnehmender Person € 1,50 zu bezahlen.
Die Gesamtkosten (in €) sollen in Abhängigkeit von der Anzahl der teilnehmenden Personen *x* durch eine lineare Kostenfunktion *K* beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von *K*. *[1 Punkt]*

linear: y = k*x+d
Antwort: y = (1.5*x) + 450

Abbildung 14:

Der Vermieter schlägt eine neue Preisgestaltung vor. Zur Veranschaulichung wurde das folgende Diagramm erstellt:



2) Ermitteln Sie, ab welcher Anzahl an teilnehmenden Personen die Gesamtkosten mit der neuen Preisgestaltung höher als bisher sind. *[1 Punkt]*

=> DIE BLAUE LINIE IST SCHON DIE LÖSUNG
UND NICHT BEI DER ANGABE DABEI!

Funktion darstellen: Erster Punkt ist 0|450, da das die Raummiete ist. Um den 2. Punkt zu berechnen, setzte ich für x = 100 ein:
y = (1.5*100) + 450
y = 150 + 450 = 600
=> Somit ist P1(0|450) und P2(100|600)
=> Schnittpunkt ist ab 50 Teilnehmern

Antwort: Bei mehr als 50 teilnehmenden Personen ist die Preisgestaltung höher als die bisherige.

3 Pelletsheizung

3.1 a)

Abbildung 15:

Pellets sind Heizmaterial aus gepressten Sägespänen.

a) Die Gesamtkosten für eine Pelletslieferung setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und den Kosten für die Liefermenge zusammen. Dabei ist für jede Tonne Pellets der gleiche Preis zu bezahlen.

Ein Pelletshändler bietet auf seiner Website einen Online-Rechner an. Eine Kundin verwendet diesen Online-Rechner und notiert die Gesamtkosten für drei verschiedene Liefermengen:

Liefermenge in Tonnen	Gesamtkosten in Euro
2	500
4	960
5,5	1260

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Online-Rechner die Gesamtkosten wie oben beschrieben berechnet. *[1 Punkt]*

Lösungsvorgang 1)
Ich kann überprüfen, dass es sich um eine lineare Funktion handelt, indem man hier den Differenzenquotienten ausrechnet und das macht man für beide Abschnitte.
Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 16:

Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) von f in $[a; b]$ bzw. in $[x; x + \Delta x]$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bzw. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ mit $b \neq a$ bzw. $\Delta x \neq 0$

```
→ diff1: (960−500)/(4−2);
(diff1) 230
```

=> 230 Euro / t

```
→ diff2: (1260−960)/(5.5−4);
(diff2) 200.0
```

=> 200 Euro / t

Antwort: Nein, es ist keine lineare Funktion und somit wird es im Online-Rechner nicht so berechnet, wie es in der Angabe beschrieben ist.

Lösungsvorgang 2)
Ich mache eine lineare Regression und schaue mir an ob der Korrelationskoeffizient 1 ist. Ist er das nicht, dann ist die Funktion nicht linear.

```
m: matrix([2,500], [4,960], [5.5,1260]);
```

(m) $\begin{pmatrix} 2 & 500 \\ 4 & 960 \\ 5.5 & 1260 \end{pmatrix}$

```
load("stats");
```

(%o13) *C:\maxima−5.42.1\share\maxima\5.42.1\share\stats\stats.mac*

```
linear_regression(m);
```

(%o16)

$$\left|\begin{array}{c} \textit{LINEAR REGRESSION MODEL} \\ b_{estimation} = [71.62162162162076, 217.8378378378377] \\ b_{statistics} = [2.076850980028065, 25.85246205371316] \\ b\_p\_values = [0.2856747912412811, 0.02461284141925457] \\ b_{distribution} = [student_t, 1] \\ v_{estimation} = 437.83783783784 \\ v\_conf\_int = [87.15122546831641, 445831.9991745597] \\ v_{distribution} = [chi2, 1] \\ adc = 0.997012025674446 \end{array}\right.$$

```
0.99·4+437;
```

(%o3) 440.96

Korrelationskoeffizient = 0.997 != 1, somit nicht linear

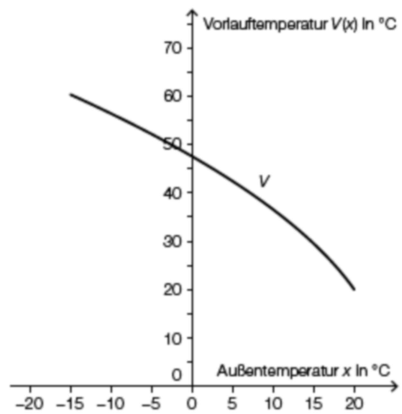
Antwort: Nein, es ist keine lineare Funktion und somit wird es im Online-Rechner nicht so berechnet, wie es in der Angabe beschrieben ist.

3.2 b)

Abbildung 17:

b) Die Temperatur, auf die das Wasser eines Heizsystems erwärmt wird, bezeichnet man als *Vorlauftemperatur*. Bei einer Pelletsheizung ist die Vorlauftemperatur abhängig von der Außentemperatur.

Den Graphen der zugehörigen Funktion V nennt man *Heizkurve*. In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Heizkurve für Außentemperaturen von –15 °C bis 20 °C dargestellt.



1) Kreuzen Sie die auf die Funktion V im Intervall]0; 20[zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*
[1 Punkt]

$V(x) > 0$ und $V'(x) > 0$	☐
$V'(x) > 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) > 0$	☐

Aussage 1 ist falsch: V(x) > 0 stimmt, weilch V(x) oberhalb von der x-Achse ist, aber V'(x) > 0 würde eine Steigung bedeuten - V(x) fällt aber.
Aussage 2 ist falsch: V'(x) > 0 würde eine Steigung bedeuten - V(x) fällt aber.
Ausage 3 ist falsch: V(x) < 0 würde bedeuten, dass V(x) unterhalb der x-Achse wäre, das ist aber falsch.
Aussage 4 ist richtig: V'(x) < 0 bedeutet, die Funktion ist fallend und V''(x) < 0 bedeutet, dass die Funktion negativ gekrümmt ist - was sie in der Abbildung auch ist
Ausage 5 ist falsch: V(x) < 0 würde bedeuten, dass V(x) unterhalb der x-Achse wäre, das ist aber falsch.

Abbildung 18:

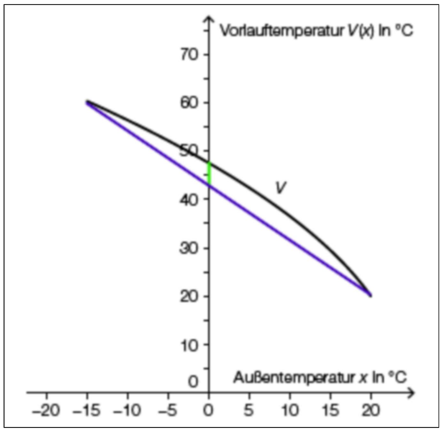
Die Funktion V soll im Intervall [–15; 20] durch eine lineare Funktion ersetzt werden. Diese soll an den Randpunkten des Intervalls die gleichen Funktionswerte wie V haben.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen dieser linearen Funktion ein. *[1 Punkt]*

3) Geben Sie an, um wie viel Grad Celsius die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C geringer ist, wenn anstelle der Funktion V die lineare Funktion verwendet wird.
[1 Punkt]

2) => siehe blaue Linie

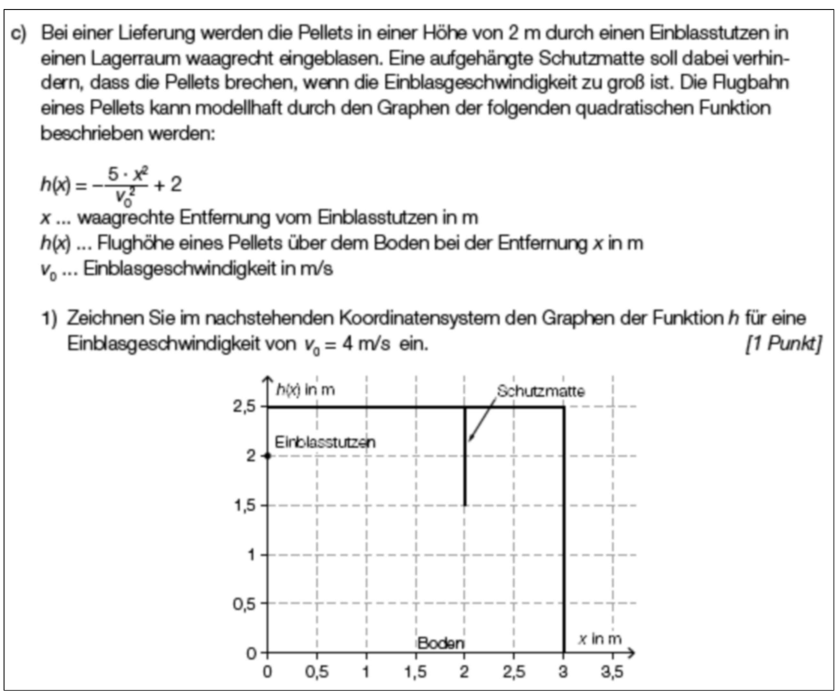
Abbildung 19:



3) => siehe grüne Linie. Das ist der Abstand auf der y-Achse. Und dieser Strich beträgt rund 5°C Vorlauftemperatur.
Antwort: Die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0°C ist um rund 5°C geringer.

3.3 c)

Abbildung 20:



c) Bei einer Lieferung werden die Pellets in einer Höhe von 2 m durch einen Einblasstutzen in einen Lagerraum waagrecht eingeblasen. Eine aufgehängte Schutzmatte soll dabei verhindern, dass die Pellets brechen, wenn die Einblasgeschwindigkeit zu groß ist. Die Flugbahn eines Pellets kann modellhaft durch den Graphen der folgenden quadratischen Funktion beschrieben werden:

$h(x) = -\frac{5 \cdot x^2}{v_0^2} + 2$

x ... waagrechte Entfernung vom Einblasstutzen in m
$h(x)$ ... Flughöhe eines Pellets über dem Boden bei der Entfernung x in m
v_0 ... Einblasgeschwindigkeit in m/s

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion h für eine Einblasgeschwindigkeit von $v_0 = 4$ m/s ein. *[1 Punkt]*

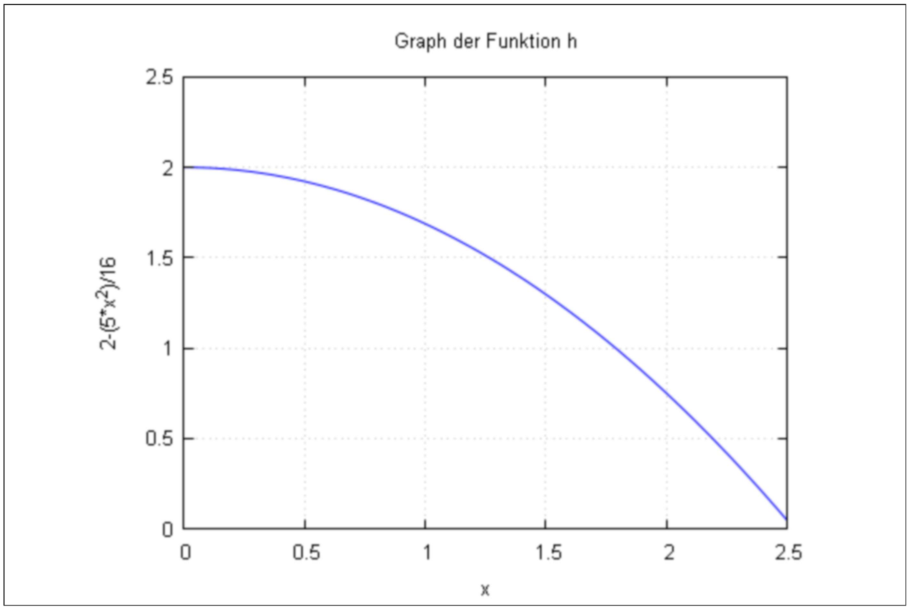
→ kill(all);
(%o0) *done*

```
→ h: −((5·x^2)/(4^2))+2;
```

(h) $2-\frac{5\,x^2}{16}$

```
→ wxplot2d(h,[x,0,2.5], [y,0,2.5], grid2d, [title, "Graph der Funktion h"]);
```

(%t16)



(%o16)

Antwort:

Abbildung 21:

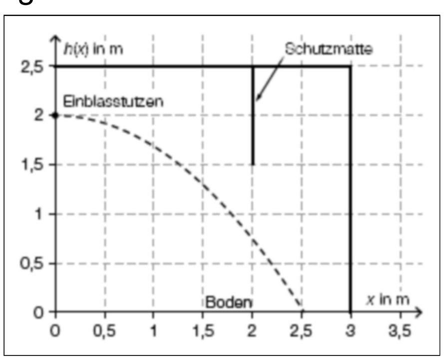


Abbildung 22:

Bei einer anderen Einblasgeschwindigkeit trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der 1 m langen Schutzmatte.

2) Bestimmen Sie diese Einblasgeschwindigkeit. *[1 Punkt]*

h(x) = 1.5; x = 2

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

```
gleichung: 1.5 = −((5·2^2)/(x^2))+2;
```

(gleichung) $1.5 = 2 - \frac{20}{x^2}$

```
find_root(gleichung, x, −1, 10);
```

(%o4) 6.324555320336758

Antwort: v0 = 6.32 m/s

4 Gewitter

4.1 a)

Abbildung 23:

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird. *[1 Punkt]*

Gegenereignis (in allen drei Städten tritt ein Gewitter auf): 0.5*0.8*0.8
Wahrscheinlichkeit, dass in mind. einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird:

```
1−(0.5·0.8·0.8);
```

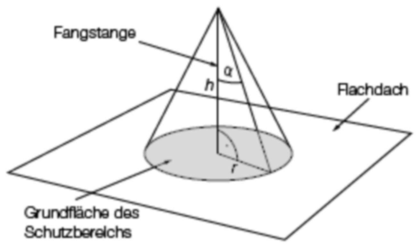
(%o16) 0.6799999999999999

Antwort: 68%

4.2 b)

Abbildung 24:

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert.
Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h ... Höhe der Fangstange
α ... Schutzwinkel
r ... Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h. *[1 Punkt]*

r = ______________________________

In der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 25:

Trigonometrie im rechtwinkeligen Dreieck

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Gegenkathete: r; Ankathete: h
tan(α) = r/h
Antwort: r = h * tan(α)

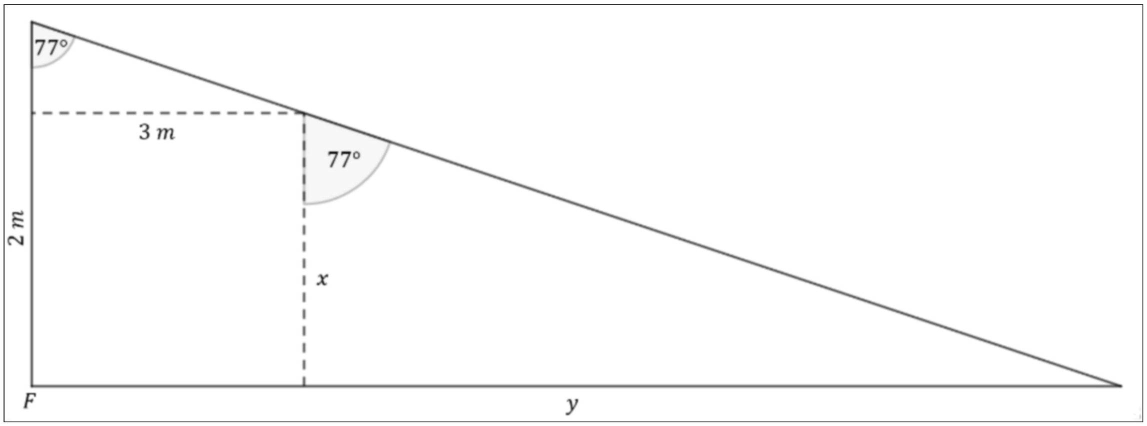
Abbildung 26:

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet. *[1 Punkt]*

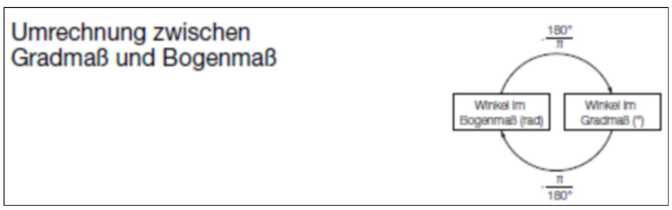
Skizze:

Abbildung 27:



Lösungsvorgang 1)
77 Grad in Radiant umrechnen:
Rechenweg in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 28:




```
77·(%pi/180), numer;
```
(%o11) 1.343903524035634

```
kill(all);
```
(%o0) *done*

```
gleichung: tan(1.344) = y/2;
```
(gleichung) $4.333383198778147 = \frac{y}{2}$

```
y: find_root(gleichung,y,−100,100);
```
(y) 8.666766397556295

y = 8.66

```
gleichung1: tan(1.344) = (y−3)/x;
```
(gleichung1) $4.333383198778147 = \frac{5.666766397556295}{x}$

```
→   x: find_root(gleichung1,x,1,10);
(x) 1.307700274269331
```

Lösungsvorgang 2)

```
→     var: 3/tan(1.344);
(var) 0.6922997257306689
```

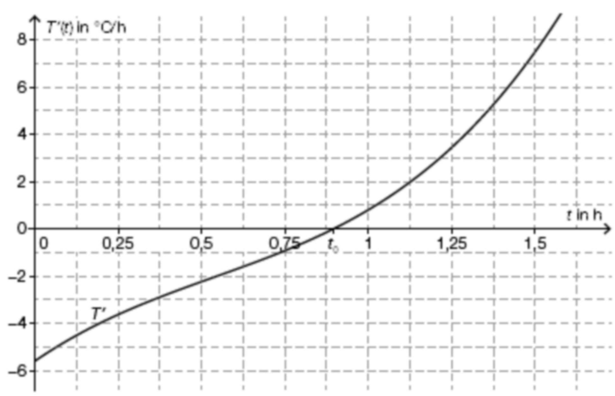
```
→      2−var;
(%o12) 1.307700274269331
```

Antwort: Die Antwort ist daher komplett geschützt.

4.3 c)

Abbildung 29:

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t ... Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die Funktion T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle (siehe obige Abbildung).

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine positive Steigung.	☐

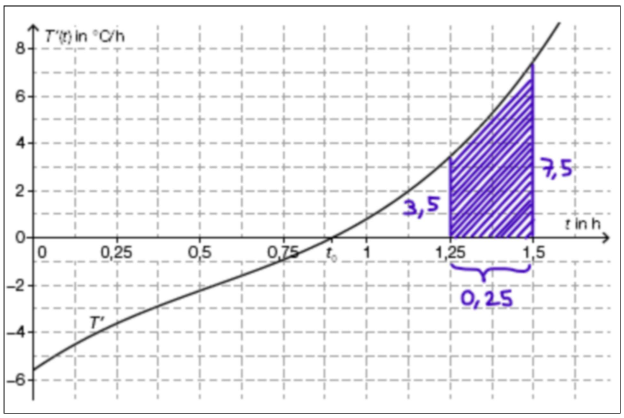
Immer wenn die Ableitung eine Nullstelle hat, hat die Stammfunktion eine Extremstelle (Maximum/Minimum). Erste Ableitung ist zuerst negativ (Funktion muss fallend sein) und nach t0 ist sie positiv und muss sie steigend sein. Wenn es zuerst fallend und dann steigend ist, liegt dazwischen sicher ein Tiefpunkt.
Wenn das T' von oben käme und t0 ins Negative übergeht, dann gäbe es einen Hochpunkt.
=> Antwort: 2. Aussage: Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t0 eine Minimumstelle.

Abbildung 30:

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,dt$ berechnet werden.

2) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5]. *[1 Punkt]*

Abbildung 31:



Das bestimmte Integral einer Funktion berechnet die absolute Änderung der Stammfunktion. Wenn man sich das als Fläche betrachtet, kann man sich diese Fläche ausrechnen, um sich dadurch die absolute Änderung der Stammfunktion auszurechnen.

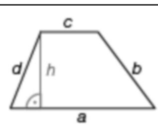
Man kann sich die Fläche als ein Trapez vorstellen.
Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 32:

Trapez

$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$

$u = a + b + c + d$



→ kill(all);

(%o0) *done*

```
→ flaecheninhalt: ((3.5+7.5)/2) · 0.25;
(flaecheninhalt) 1.375
```

Antwort: Im Zeitintervall [1.25; 1.5] verändert sich die Temperatur um rund 1.375°C.

5 Luftverschmutzung

5.1 a)

Abbildung 33:

a) Die Belastung der Luft durch Schwefeldioxid entsteht unter anderem durch Verbrennung von Heizöl und Kohle. Als gesetzliche Obergrenze für den Schwefeldioxidgehalt der Luft gilt ein Tagesmittelwert von 120 μg/m³. Im Jahr 1986 wurde dieser Wert am „schwarzen Freitag" in Linz um 857 % überschritten.

1) Berechnen Sie den Tagesmittelwert des Schwefeldioxidgehalts der Luft in μg/m³ an diesem Tag in Linz. *[1 Punkt]*

```
→ 120·(1+857/100), numer;
(%o3) 1148.4
```

Antwort: 1148.4 μg/m^3

5.2 b)

Abbildung 34:

b) In Linz ist die Staubbelastung der Luft im Zeitraum von 1985 bis 1996 stark zurückgegangen. Im Jahr 1985 wurde die Luft in Linz mit 11000 t Staub belastet. Im Jahr 1996 waren es nur noch 3000 t.

Im Zuge eines Forschungsprojekts hat man erkannt, dass die Funktion S, die die Staubbelastung $S(t)$ in Tonnen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren angibt, annähernd linear ist.

1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Daten eine Gleichung dieser linearen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1985. *[1 Punkt]*
2) Berechnen Sie den Funktionswert für das Jahr 2001 gemäß diesem Modell. *[1 Punkt]*
3) Erklären Sie, warum der berechnete Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll ist. *[1 Punkt]*

1) Lineare Funktion aufstellen:
S(t) = k * t + S0
k = (3000 - 11000)/11
s(t) = -727,3*t+11000

```
→ 1996−1985;
(%o1) 11
```

→ k: (3000 − 11000)/11, numer;

(k) −727.2727272727273

Antwort: s(t) = -727,3*t+11000
2) 2001 = 16 (wenn 1985 => t = 0)

→ k·16+11000;

(%o9) −636.363636363636

S(16) = -636.36
3) Da die Staubbelastung nicht negativ sein kann, ist der Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll.

5.3 c)

Abbildung 35:

c) Kohlenstoffmonoxid entsteht bei Verbrennungsprozessen und ist für Menschen giftig.

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in einer Region kann näherungsweise folgendermaßen beschrieben werden:

$c(t) = 1{,}29 \cdot 0{,}9659^t$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990
$c(t)$ ... Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in Tonnen

1) Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[1 Punkt]*

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 29 % pro Jahr zu.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt im Laufe der Zeit immer schneller ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt linear ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 96,59 % pro Jahr ab.	☐

c(t) = 1.29 * 0.9659^t
Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 36:

Exponentiell	
$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$ und $N_0 > 0$ a ... Änderungsfaktor	
exponentielles Wachstum	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $a > 1$
exponentielle Abnahme	$N(t) = N_0 \cdot a^t$ mit $0 < a < 1$

a = 0.9659 und da dieser Wert zwischen 0 und 1 liegt, ist es eine Abnahme.
Um wie viel Prozent nehmen wir ab?:

→ 1−0.9659;

(%o10) 0.03410000000000002

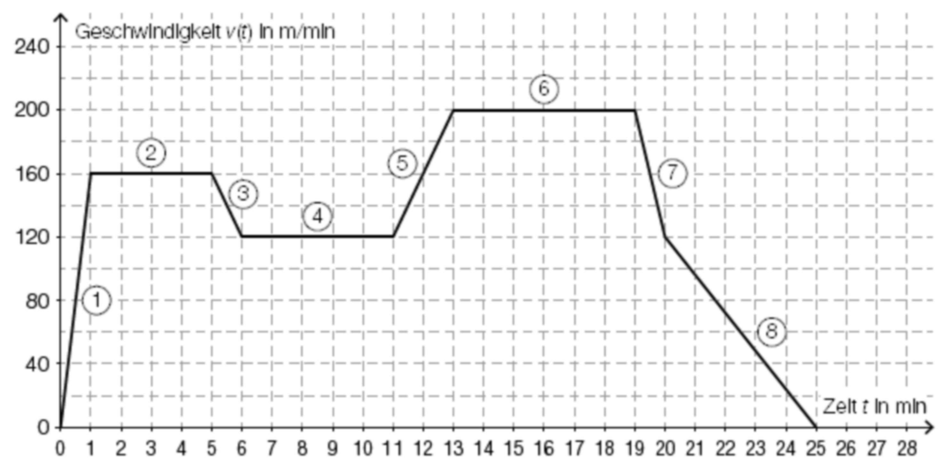
Die Abnahme beträgt 3.41%.
Somit ist die Aussage 4 richtig: Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3.41% pro Jahr ab.

Begründung der falschen Aussagen;
Aussage 1: Es ist eine Abnahme, keine Zunahme.
Aussage 2: Bei einem exponentiellen Zerfall wird die Abnahmegeschwindigkeit immer geringer.
Aussage 3: Es ist exponentiell nicht linear.
Aussage 5: 96.59% sind die Prozente, die im Vorjahr noch vorhanden sind

6 *Auf dem Laufband*

Abbildung 37:

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.



6.1 a)

Abbildung 38:

a) 1) Geben Sie an, in welchem der 8 Abschnitte die Beschleunigung am größten ist. *[1 Punkt]*

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* für den Abschnitt 5, also für das Zeitintervall [11 min; 13 min]. *[1 Punkt]*

1) Abschnitt 1, da dort die Steigung am steilsten/größten ist
2) Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 39:

20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ ... Wertepaare
$\overline{x}, \overline{y}$ ... arithmetisches Mittel der x_i bzw. y_i

Lineare Regressionsfunktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$d = \overline{y} - k \cdot \overline{x}$$

v(t) = k*t+d
k = (200-120)/(13-11)

```
-->  k: (200−120)/(13−11);
(k)  40
-->  gleichung: 120 = 40·11+d;
(gleichung)  120 = d + 440
-->  solve(gleichung,d);
(%o20)  [d = −320]
```

Antwort: v(t) = 40*t-320 mit 11 <= t <= 13
t ... Zeit in min
v(t) ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

6.2 b)

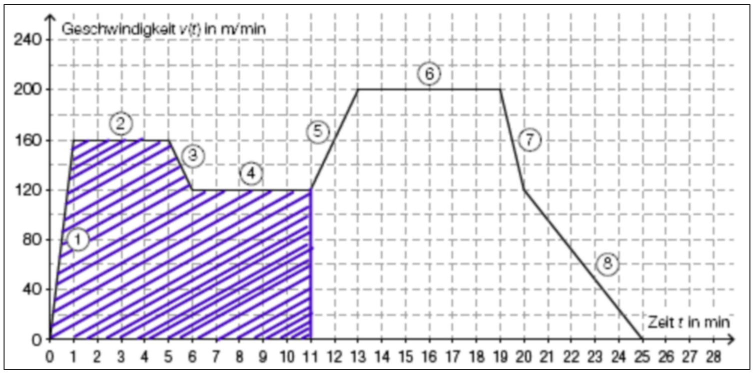
Abbildung 40:

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den der Läufer in den ersten 11 min zurücklegt. *[1 Punkt]*

2) Ermitteln Sie die Länge dieses Weges in Kilometern. *[1 Punkt]*

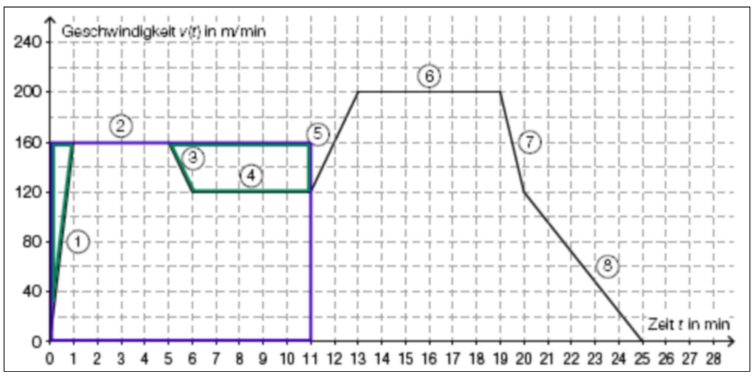
1) Antwort:

Abbildung 41:



2) Ich zerteile es in ein großtes Rechteck, dass ich dann mit einem Dreieck und einem Trapez abziehe:

Abbildung 42:



Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 43:

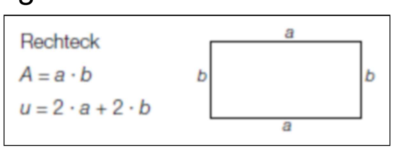


Abbildung 44:

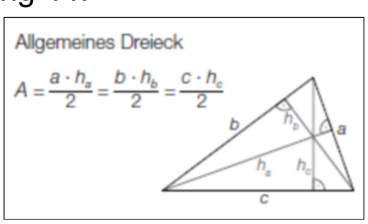
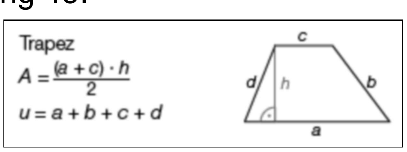


Abbildung 45:



```
→ s: (160·11)−((160·1)/2)−(((6+5)·40/2)), numer;
(s) 1460
```

Antwort: s = 1460m = 1.46km

6.3 c)

Abbildung 46:

c) Der im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellte Verlauf kann im Zeitintervall [0 min; 25 min] durch die Funktion v beschrieben werden.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an.

$\frac{1}{25} \cdot \int_0^{25} v(t)\,dt$ *[1 Punkt]*

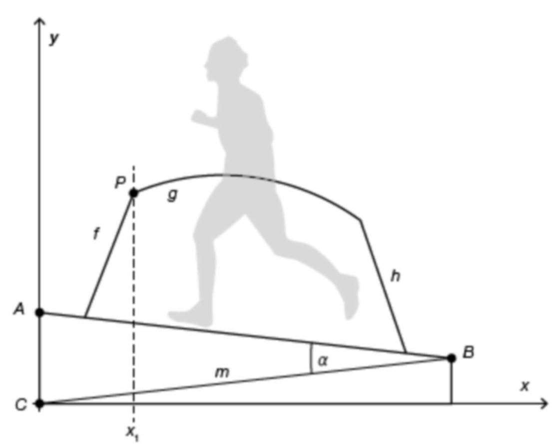
Dieses bestimmte Integral im Intervall von [0 min; 25 min] von v(t) berechnet die absolute Änderung des Weges im Intervall von [0 min; 25 min]. Die absolute Änderung s(25) - s(0) ist die durchschnittliche Geschwindigkeit.
Antwort: Das ist die Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit in den ersten 25 Minuten.

POSAs Antwort: Integral über Geschwindigkeit, wäre der Weg in dem Zeitraum. Dividiert durch die Zeitdauer = mittlere Geschwindigkeit

6.4 d)

Abbildung 47:

d) Die nachstehende Abbildung zeigt vereinfacht die Seitenansicht eines Laufbands.



1) Beschriften Sie im Dreieck ABC die Länge z und den Winkel φ so, dass gilt:

$\frac{m}{\sin(\varphi)} = \frac{z}{\sin(\alpha)}$ *[1 Punkt]*

1) Ist in der Formelsammlung zu finden:

Abbildung 48:

Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Antwort: Wegen dem Sinussatz weiß man, dass der Winkel φ genau gegenüber von m liegen muss und z gegenüber von α.

Abbildung 49:

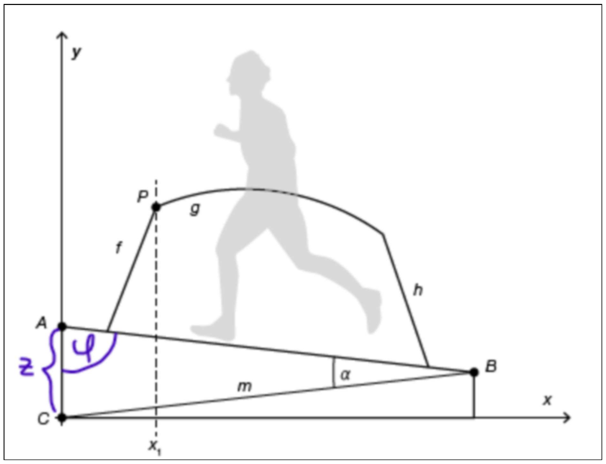


Abbildung 50:

Folgende Größen sind bekannt: $m = 155$ cm, $\alpha = 13°$ und $\overline{AB} = 150$ cm

2) Berechnen Sie die Höhe $\overline{AC}$ des Laufbands. *[1 Punkt]*

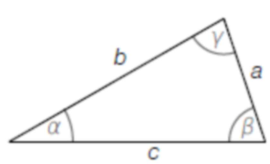
2) AC ist die 3. fehlende Seite in dem Dreieck. Wir kennen zwei Seiten und suchen die dritte Seite => Cosinussatz
Ist in der Formelsammlung vorhanden:

Abbildung 51:

Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Einsetzen in den Cosinussatz:
AC^2 = 155^2+150^2-2*155*150*cos(13°)

```
→ gradInRad: 13·(%pi/180), numer;
(gradInRad) 0.2268928027592629
```

→ AC: sqrt(155^2+150^2−2·155·150·cos(0.2268928027592629));

(AC) 34.88254559929022

Antwort: AC = 34.88cm

Abbildung 52:

Die Darstellung des Haltegriffs in der obigen Abbildung setzt sich aus den Graphen der Funktionen f, g und h zusammen.
f ist eine lineare Funktion mit der Steigung k.
f und g schneiden einander im Punkt P.

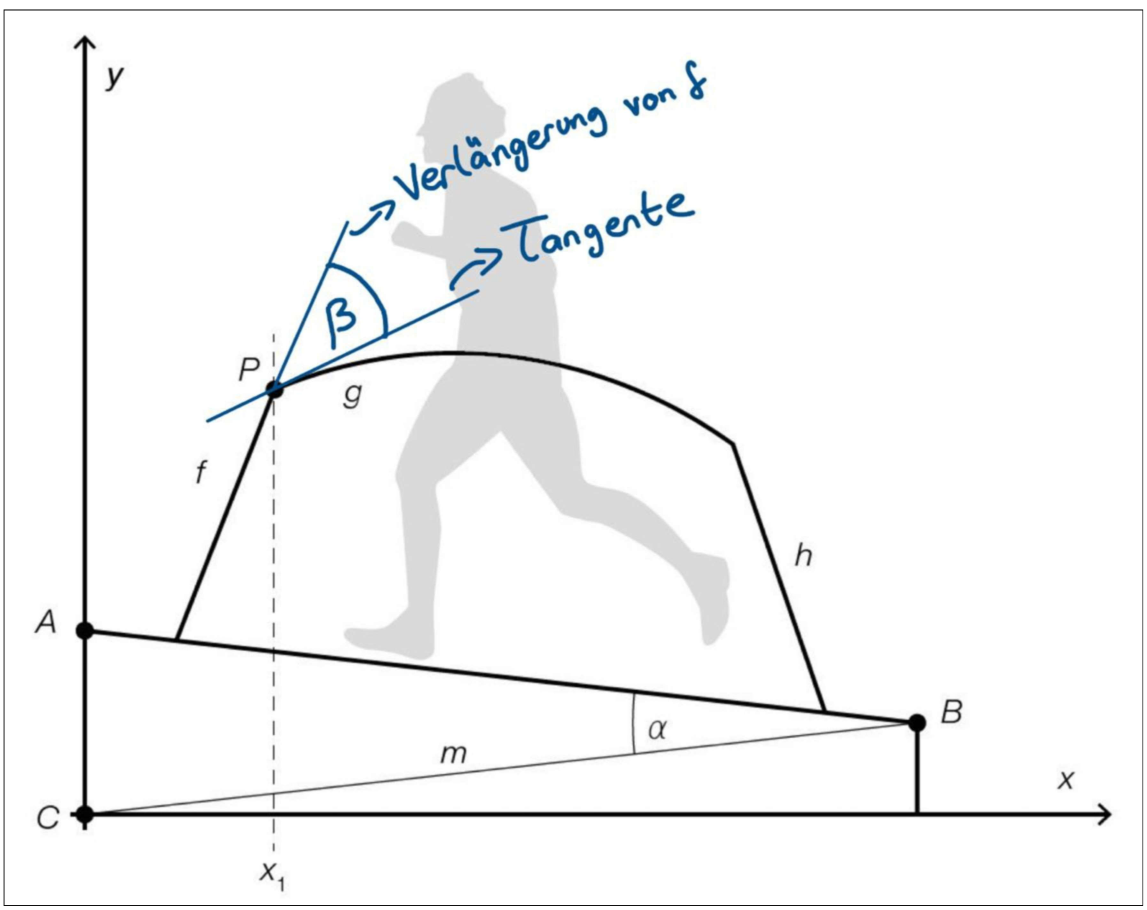
Der Winkel β wird mit folgender Formel berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}\right|}\right)$$

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel β ein. *[1 Punkt]*

3) k = Steigung der Funktion f; g'(x1) = Steigung der Tangente, die man an der Funktion g anlegt an der Stelle x1

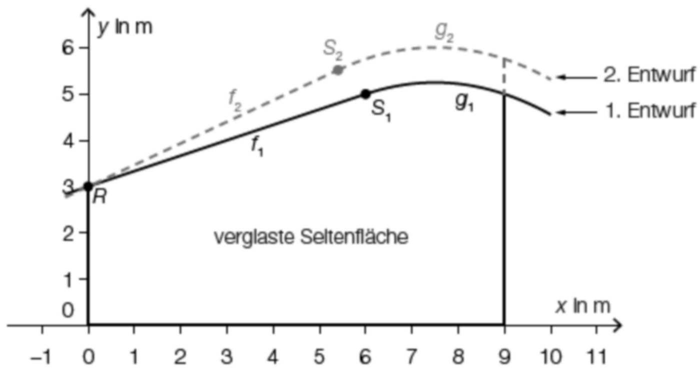
Abbildung 53:



7 Ausstellungshalle

Abbildung 54:

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



7.1 a)

Abbildung 55:

a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \le x \le 6$

$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \le x \le 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall [–0,5; 10]. *[1 Punkt]*

Ist in der Formelsammlung vorhanden:

Abbildung 56:

Bogenlänge s des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

```
f: 3+(x/3);
```

(f) $\frac{x}{3}+3$

```
g: −(1/9)·x^2+(5/3·x−1);
```

(g) $-\frac{x^2}{9}+\frac{5\,x}{3}-1$

```
f1: diff(f,x,1);
```

(f1) $\frac{1}{3}$

```
g1: diff(g,x,1);
```

(g1) $\frac{5}{3}-\frac{2\,x}{9}$

```
→ integrate(sqrt(1+f1^2),x,−0.5,6)+integrate(sqrt(1+g1^2),x,6,10), numer;
```

rat: replaced 6.5 by 13/2 = 6.5
rat: replaced −0.5 by −1/2 = −0.5
rat: replaced 6.5 by 13/2 = 6.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 1.666666666666667 by 5/3 = 1.666666666666667
rat: replaced 0.2222222222222222 by 2/9 = 0.2222222222222222
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 1.666666666666667 by 5/3 = 1.666666666666667
rat: replaced −0.2222222222222222 by −2/9 = −0.2222222222222222
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat:
replaced 0.11111111111
11111 by 1/9 = 0.111111111111
1111
rat: replaced 0.1111111111111111
by 1/9 = 0.111111111
1111111
rat: replaced 1.666666666666667 by 5/3 = 1.666666666666667
rat: replaced −0.2222222222222222 by −2/9 = −0.2222222222222222
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.1571348402636772 by 10662952/67858611 = 0.1571348402636771
rat: replaced 3.777777777777778 by 34/9 = 3.777777777777778
rat: replaced −0.7407407407407407 by −20/27 = −0.7407407407407407
rat: replaced 0.04938271604938271 by 4/81 = 0.04938271604938271
rat: replaced 2.25 by 9/4 = 2.25
rat: replaced −0.7407407407407407 by −20/27 = −0.7407407407407407
rat: replaced 0.09876543209876543 by 8/81 = 0.09876543209876543
rat: replaced 0.1111111111111111 by 1/9 = 0.1111111111111111
rat: replaced 2.250000000000001 by 9/4 = 2.25
rat: replaced −3.75 by −15/4 = −3.75
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5
rat: replaced 3.777777777777778 by 34/9 = 3.777777777777778
rat: replaced −0.7407407407407407 by −20/27 = −0.7407407407407407
rat: replaced 0.04938271604938271 by 4/81 = 0.04938271604938271
rat: replaced 2.25 by 9/4 = 2.25
rat: replaced −0.7407407407407407 by −20/27 = −0.7407407407407407
rat: replaced 0.09876543209876543 by 8/81 = 0.09876543209876543
rat: replaced 0.1111111111111111 by 1/9 = 0.1111111111111111
rat: replaced 2.250000000000001 by 9/4 = 2.25
rat: replaced −3.75 by −15/4 = −3.75
rat: replaced 0.5 by 1/2 = 0.5

(%o6) 11.00215332757622

Antwort: Die Länge der Dachlinie beträgt rund 11m.

7.2 b)

Abbildung 57:

b) Für den 1. Entwurf soll der Inhalt A der zu verglasenden Seitenfläche unterhalb der Graphen der Funktionen f_1 und g_1 im Intervall [0; 9] berechnet werden.

1) Beschreiben Sie, welcher Fehler in der nachstehenden Berechnung gemacht wurde.
$A = \int_0^6 f_1(x)\,dx + \int_6^9 g_1(x)\,dx = \int_0^9 (f_1(x) + g_1(x))\,dx$ *[1 Punkt]*

Antwort: Beide Integrale dürfen nicht zusammengefasst werden!

7.3 c)

Abbildung 58:

c) Im 2. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_2 und g_2 beschrieben.
Der Graph der linearen Funktion f_2 soll durch den Punkt $R = (0|3)$ verlaufen und einen Steigungswinkel von 25° haben.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_2 auf. *[1 Punkt]*

Die Funktion f_2 geht im Punkt $S_2 = (x_{S_2}|y_{S_2})$ knickfrei in die Funktion g_2 über, das heißt, die Funktionen g_2 und f_2 haben im Punkt S_2 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

Die Funktion g_2 ist gegeben durch:
$g_2(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x + c$ mit $x_{S_2} < x < 10$

2) Berechnen Sie die x-Koordinate x_{S_2}. *[1 Punkt]*

3) Berechnen Sie c. *[1 Punkt]*

1) d = 3, da es der Schnittpunkt auf der y-Achse ist. Der Tangens entspricht der Steigung selbst dieser Geraden, da wir ja den Steigungswinkel wissen.
Antwort: f2(x) = tan(25°)*x+3
2) Die Steigung von g1 und g2 gleichsetzen, damit man sich die x-Koordinate ausrechnen kann:

```
→ g2: −(1/9)·x^2+(5/3)·x+c;
```

(g2) $-\frac{x^2}{9}+\frac{5x}{3}+c$

```
→ g21: diff(g2,x,1);
```

(g21) $\frac{5}{3}-\frac{2x}{9}$

→ winkel: 25·((%pi/180));

(winkel) $\frac{5\,\pi}{36}$

→ solve(g21 = tan(winkel), x), numer;

rat: replaced 1.200359008511668 by 23606055/19665829 = 1.200359008511668
rat: replaced −0.2222222222222222 by −2/9 = −0.2222222222222222
rat: replaced 1.200359008511668 by 23606055/19665829 = 1.200359008511668
rat: replaced −0.2222222222222222 by −2/9 = −0.2222222222222222
rat: replaced −5.649958164037281E−9 by −1/176992461 = −5.649958164037281E−9
rat: replaced −5.401615538302504 by −100917373/18682813 = −5.401615538302503

(%o13) $[x = 5.401615538302503]$

xs2 = 5.4

3) g2 und f2 gleichsetzen und mit xs2 einsetzen:

→ f: tan(winkel)·x+3;

(f) $\tan\left(\frac{5\,\pi}{36}\right) x + 3$

→ solve(subst([x=5.401615538302503], g2)=subst([x=5.401615538302503],f),c), numer;

rat: replaced 0.24193893
59590083 by 9398147/38845120 = 0.2419389359
590085
rat: repla
ced 0.24193893595900
85 by 9398147/38845120 = 0.2419389359590085
rat:
replaced 2.574325938496264E−8 by
1/38845120 = 2.574325938496264E−8
rat: re
placed 0.2419389359590085 by 93981
47
/38845120 = 0.2419389359590085

(%o21) $[c = -0.2419389359590085]$

Antwort: c = -0.24

7.4 d)

Abbildung 59:

d) Der Schallpegel in der Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$

A … Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m²

$L(A)$ … Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird. *[1 Punkt]*

L(A) = 10

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

```
→ L: 10·log(1+(A/10))/log(10);
```

(L) $\dfrac{10\log\left(\frac{A}{10}+1\right)}{\log(10)}$

```
→ solve(L = 10, A), numer;
```

rat: replaced 4.342944819032518 by 48857430/11249839 = 4.342944819032521
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 4.342944819032521 by 48857430/11249839 = 4.342944819032521
rat: replaced 8.889016100585974E−7 by 10/11249839 = 8.889016100585974E−7
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 0.1 by 1/10 = 0.1
rat: replaced 9.999999999999984 by 10/1 = 10.0
rat: replaced −0.1 by −1/10 = −0.1
rat: replaced 10.0 by 10/1 = 10.0
rat: replaced −0.1 by −1/10 = −0.1
rat: replaced −0.1 by −1/10 = −0.1

(%o22) $[A=90]$

Antwort: Wir brauchen zusätzlich 90m^2 um den Schallpegel um 10dB zu vermindern.

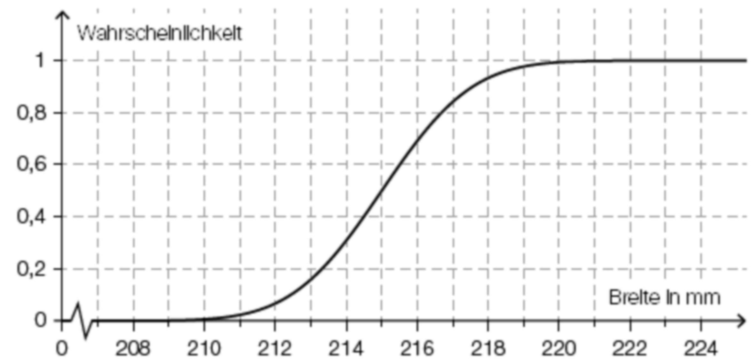
7.5 e)

Abbildung 60:

e) Die Breite bestimmter Dachziegel ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 215$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 2$ mm.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Dachziegel eine Breite von mindestens 212 mm und höchstens 217 mm hat. *[1 Punkt]*

2) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der nachstehenden grafischen Darstellung der zugehörigen Verteilungsfunktion. *[1 Punkt]*



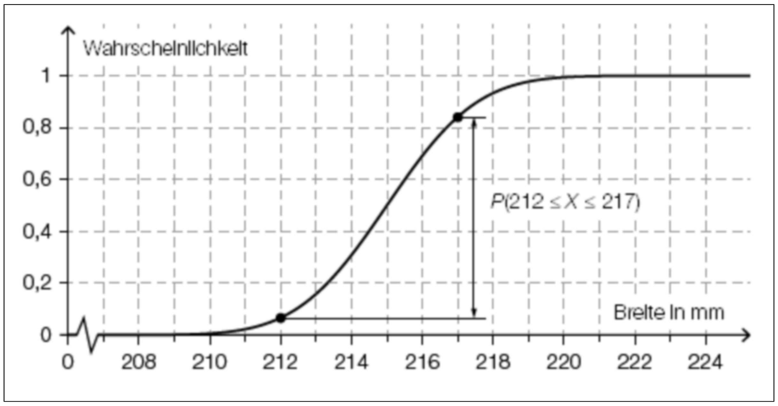
1) P(212 <= X <= 217)

```
→ load("distrib");
(%o2) C:\maxima−5.42.1\share\maxima\5.42.1\share\distrib\distrib.mac

→ cdf_normal(212, 215, 2), numer;
(%o5) 0.06680720126885809

→ cdf_normal(217,215,2), numer;
(%o6) 0.8413447460685429

→ 0.8413447460685429−0.06680720126885809;
(%o28) 0.7745375447996848
```

Antwort: P(212 <= X <= 217) = 0.775 = 77.5%

2) Einzeichnen:

Abbildung 61:



8 Champagner

8.1 a)

Abbildung 62:

Champagner wird im französischen Weinbaugebiet *Champagne* nach streng festgelegten Regeln erzeugt.

a) Eine Flasche Champagner wird zur Zeit $t = 0$ in einen Kühlschrank mit einer Temperatur von $\vartheta_U = 4$ °C gelegt. Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Champagners 16 °C und nach 2 Stunden beträgt sie 10 °C.
Die Temperatur des Champagners in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion ϑ beschrieben:

t ... Zeit in h
$\vartheta(t)$ ... Temperatur des Champagners zur Zeit t in °C

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Champagners ist dabei direkt proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_U$.

1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Temperaturfunktion ϑ des Champagners auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess. *[2 Punkte]*

Ist in der Formelsammlung vorhanden:

Abbildung 63:

17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$y' = f(x) \cdot g(y)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$ mit $y = y(x)$

1) Antwort: dθ/dt = k*(θ-4)
2) Lösen:

```
→ dgl1: 'diff(deta,t) = k·(deta−4);
```

(dgl1) $$\frac{d}{d\,t}\,deta=(deta-4)\,k$$

```
→ ode2(dgl1,deta,t);
```

(%o35) $$deta=(4\,\%e^{-k\,t}+\%c)\,\%e^{k\,t}$$

```
→ trigsimp(%);
```

(%o36) $$deta=\%c\,\%e^{k\,t}+4$$

Antwort: θ(t) = C*exp(k*t)+4
θ(0) = 16

```
→ gl: %c·%e^(k·t)+4;
```

(gl) $$\%c\,\%e^{k\,t}+4$$

```
→ solve(subst([t=0], gl) = 16, %c);
```

(%o41) $$[\%c=12]$$

=> C = 12
θ(2) = 10

```
→ solve(subst([t=2, %c = 12], gl) = 10, k);
```

(%o46) $$[k=\log\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),k=-\frac{\log(2)}{2}]$$

```
→ −log(2)/2, numer;
```

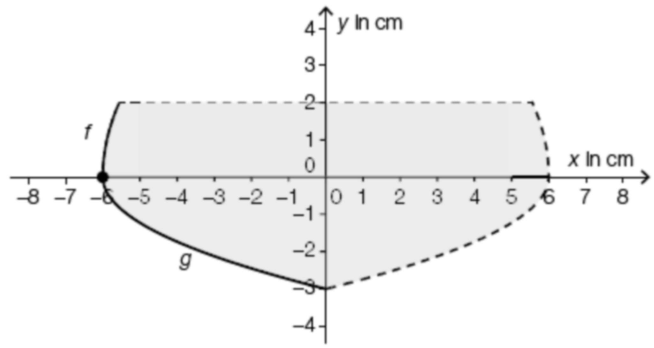
(%o49) $$-0.3465735902799726$$

=> θ(t) = 12*exp(-0.37*t)+4

8.2 b)

Abbildung 64:

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für f gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für g gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab. *[1 Punkt]*

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases. *[1 Punkt]*

1) Antwort: Bei der Funktion f ist das a die Verschiebung nach links, deswegen muss a=6 sein
2) Ist in der Formelsammlung vorhanden:

Abbildung 65:

Volumen von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ um eine Koordinatenachse

Rotation um die x-Achse ($a \le x \le b$)	Rotation um die y-Achse ($c \le y \le d$)
$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx$	$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy$

Beide Funktionen auf x umformen und zum ^2 nehmen im Integral und das ganze
*%pi rechnen:

```
kill(all);
```
(%o0) *done*

```
f: y=3·sqrt(x+6);
```
(f) $y=3\,\sqrt{x+6}$

```
g: y=-(sqrt(1.5·x+9));
```
(g) $y=-\sqrt{1.5\,x+9}$

```
--> f_x: solve(f,x);
```

*Is y positive, negative or zero?*positive;

(f_x) $[x=\frac{y^2-54}{9}]$

```
--> g_x: solve(g^2,x);
```

rat: replaced −1.5 by −3/2 = −1.5

(g_x) $[x=\frac{2\,y^2-18}{3}]$

```
--> %pi·integrate(rhs(f_x[1])^2,y,0,2)+%pi·integrate(rhs(g_x[1])^2,y,−3,0), numer;
```

rat: replaced −36.0 by −36/1 = −36.0
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced 5550.4 by 27752/5 = 5550.4
rat: rep
laced −24.0 by
−24/1 = −24.0
rat:
replaced 0.8 by
4
/5 = 0.8
rat: r
eplaced −518.4 b
y −2592/5 = −518.4

(%o32) 396.2285252972015

Das Füllvolumen beträgt rund 396ml (cm^3 = ml).

Abbildung 66:

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe. *[1 Punkt]*

Funktion g rotieren lassen um die y-Achse

Abbildung 67:

$$\pi \cdot \int_{-3}^{h} \left(\frac{y^2-9}{1{,}5}\right)^2 dy = 150$$

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

```
→ gl1: ((y^2−9)/1.5)^2;
```

(gl1) $0.4444444444444444\,(y^2-9)^2$

```
→ gl: %pi·integrate(gl1, y, −3, h);
```

(gl) $0.4444444444444444\,\pi\left(\frac{h^5-30\,h^3+405\,h}{5}+\frac{648}{5}\right)$

```
→ solve(gl=150,h), numer;
```

rat: replaced 1.396263401595464 by 17809746/12755291 = 1.396263401595463
rat: replaced 129.6 by 648/5 = 129.6
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced 1.396263401595463 by 17809746/12755291 = 1.396263401595463
rat: replaced 129.6 by 648/5 = 129.6
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced 9.407860628189512E−8 by 6/63776455 = 9.407860628189509E−8

(%o15) $[0=2968291\,h^5-89048730\,h^3+1202157855\,h+329041193]$

Antwort: Die Füllhöhe beträgt rund 2.72cm.

8.3 c)

Abbildung 68:

c) Ein Händler verkauft die Sorten *Tradition*, *Rosé* und *Réserve* an 3 verschiedene Kunden in folgenden Mengen:

- Sorte *Tradition*:
  120 Flaschen an Kunde *A*, 12 Flaschen an Kunde *B*, 600 Flaschen an Kunde *C*
- Sorte *Rosé*:
  84 Flaschen an Kunde *A*, 60 Flaschen an Kunde *B*, 420 Flaschen an Kunde *C*
- Sorte *Réserve*:
  36 Flaschen an Kunde *A*, 72 Flaschen an Kunde *B*, 144 Flaschen an Kunde *C*

Kunde *A* bezahlt insgesamt € 9.864, Kunde *B* € 7.344 und Kunde *C* € 47.196.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem in Matrizenform auf, mit dem man für jede Sorte den Preis pro Flasche berechnen kann. *[1 Punkt]*

Antwort:

Abbildung 69:

$$\begin{pmatrix} 120 & 84 & 36 \\ 12 & 60 & 72 \\ 600 & 420 & 144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9864 \\ 7344 \\ 47196 \end{pmatrix}$$