Mathematik

5AHIT

Matura Ausarbeitung

Theorie + Bifi Beispiele

Sarah Breit, Fabio Fuchs, Manuel Kisser, Jan Langela, Kacper Urbaniec,
Sebastian Wahl, Moritz Welsch, Barbara Wiedermann, Martin Wustinger

25. April 2020

Bewertung:		Version:	1.1
Betreuer:	Michael Günthör	Begonnen:	25.02.2020
		Beendet:	25.02.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Trigonometrie

1.1 Theorie

In der Trigonometrie geht es darum Winkelgrößen in Dreiecken untersucht. Die Trigonometrie ist ein wichtiger Bereich in der Mathematik und der Physik.

1.1.1 Rechtwinklige Dreiecke

In einem rechtwinkligen Dreieck wird die an dem Winkel α anligende Kathete als Ankathete und die an dem Winkel α gegenüberliegende liegende Seite als Gegenkathete bezeichnet. Die Seite die dem rechten Winkel gegenüber liegt wird Hypotenuse genannt.[7]

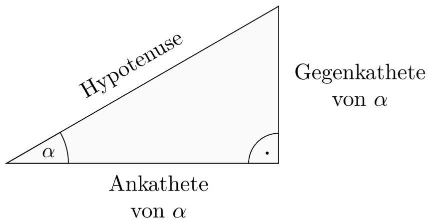


Abbildung 1: Rechtwinkliges Dreieck [7]

Die Längenverhältnisse der Dreieckseiten lassen sich in Abhängigkeit vom Winkel α ausdrücken.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Die Sinus- und Cosinuswerte sind als Längenverhältnis einer Kathete zur Hypotenuse stets kleiner als eins.

1.1.2 Einheitskreis

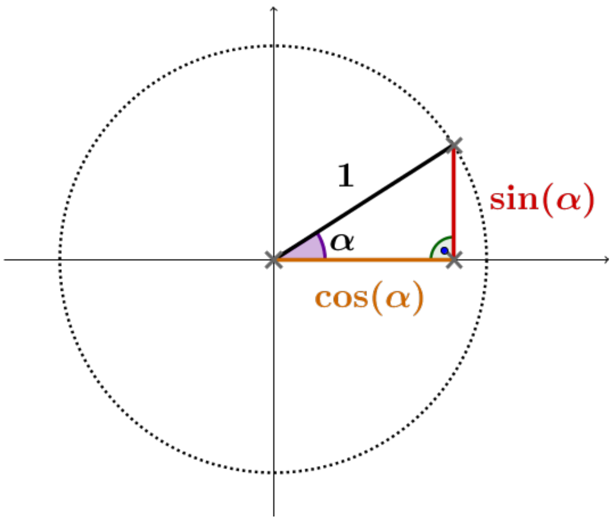


Abbildung 2: Einheitskreis [7]

Winkel	0°	90°	180°	270°	380°
sin(x)	0	1	0	-1	0
cos(x)	1	0	-1	0	1

1.1.3 Sinus-Satz

Jedes spitzwinklige Dreieck lässt sich durch Einzeichnen einer Höhenlinie in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Bezeichnet man den Schnittpunkt der Höhe h_c mit der Strecke c als **D**, so gilt für das Teildreieck **ADC**:

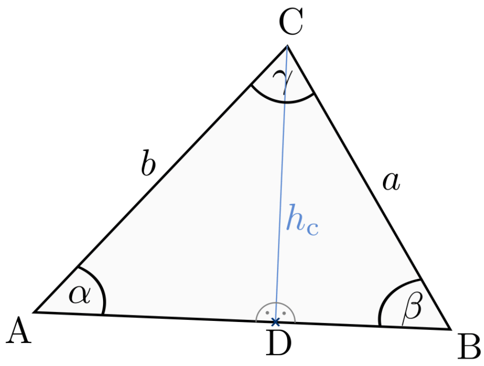


Abbildung 3: Sinussatz [7]

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} => h_c = b * \sin(\alpha)$$

Für das Teildreieck **DBC** gilt entsprechend:

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} => h_c = b * \sin(\beta)$$

Der Sinus-Satz gilt auch in stumpfwinkligen Dreiecken. Man kann ihn nutzen, um beispielsweise fehlende Stücke eines Dreiecks zu berechnen, wenn zwei Seitenlängen und ein gegenüber liegender Winkel oder eine Seitenlänge und zwei Winkel gegeben sind.[7]

1.1.4 Cosinus-Satz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(\alpha)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 * c * a * \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos(\gamma)$$

Man kann den Cosinus-Satz zur Konstruktion von Dreiecken nutzen, wenn entweder alle drei Seitenlängen oder zwei Seitenlängen und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes ergibt immer: $\alpha + \beta + \gamma =$ **180**$^\circ$

1.2 Bifi-Bsp + Maxima Code

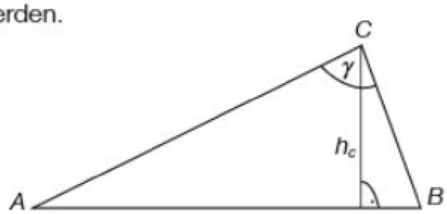
1.2.1 Rechtwinkliges Dreieck Sin/Cos/Tan

1.2.2 Sin-/Cos-Satz

Dachfenster (2) (B_017)

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



b) Ein anderes Dachfenster wird doppelt verglast. Durch die Doppelverglasung entsteht ein Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist. Den Mantel des Prismas bildet eine Dichtung mit der Höhe *h*.

– Stellen Sie eine Funktion *O* für die Oberfläche des Prismas in Abhängigkeit von der Seitenlänge *x* der Grundfläche und des konstanten Volumens *V* auf.

Abbildung 4: Angabe

Maxima

```
(%i52) γ:81·%pi/180,numer;
(γ)    1.413716694115407
(%i48) c:1.60; a: 0.70;
(c)    1.6
(a)    0.7
(%i53) α: asin(a·sin(γ)/c)·180/%pi,numer;
(α)    25.601772586361
(%i46) β:180−α−γ;
(β)    114.9963427849784
(%i54) A:(a·c·sin(β))/2;
(A)    0.5301075165040694
```

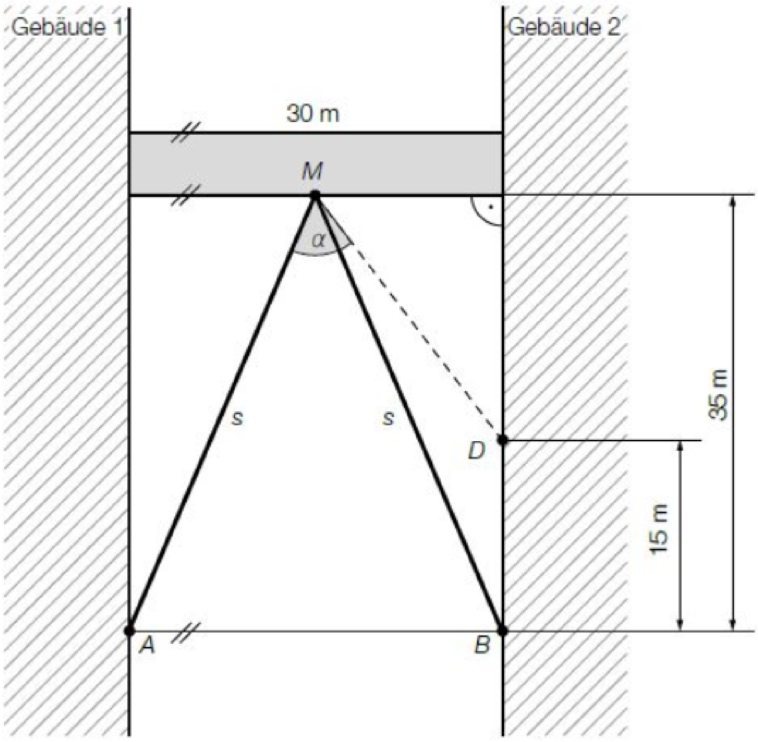
Abbildung 5: Lösung

Bruecken zwischen Gebaeuden (B-466)

Bruecken zwischen Gebaeuden (2) * (B_466)

Gebäude können durch Brücken verbunden werden.

a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt M auf zwei Stützen der Länge s gelagert (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Länge s einer Stütze.

Die Stütze MB soll durch eine neue Stütze MD ersetzt werden.

2) Berechnen Sie den Winkel α.

Abbildung 6: Angabe

Maxima

```
(%i23)  s: sqrt(15²+35²),numer;
(s)     38.07886552931954

Ansatz: cos Satz für die Seite AD
AD² = s²+MD²-2·s·MD·cos(α)

(%i25)  AD: sqrt(15²+30²),numer;
(AD)    33.54101966249684

(%i26)  MD: sqrt(20²+15²),numer;
(MD)    25.0

(%i31)  acos(−((AD²−s²−MD²)/(2·s·MD))) · 180/%pi,numer;
(%o31)  60.0684881594922
```

Abbildung 7: Lösung

2 Funktionen

Definition Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge genau einen Element der Wertemenge zuordnet. Definitionsmenge → Wertemenge

Eigenschaften einer Funktion

Symmetrie verhalten Wenn $f(-x) = f(x)$ gilt, dann heißt $f(x)$ achsensymmetrisch. Falls $-f(x) = f(-x)$ gilt, dann heißt $f(x)$ punktsymmetrisch.

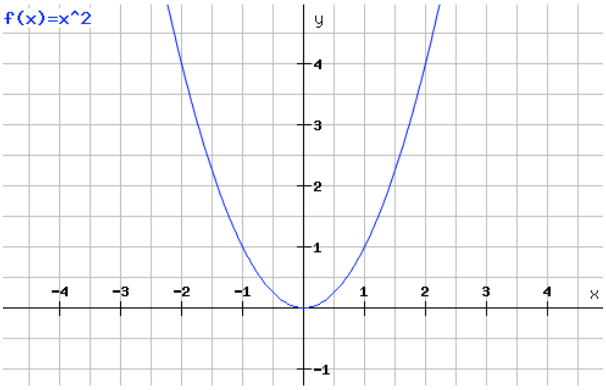


Abbildung 8: Achsensymmetrisch Funktion: $f(x) = x^2$

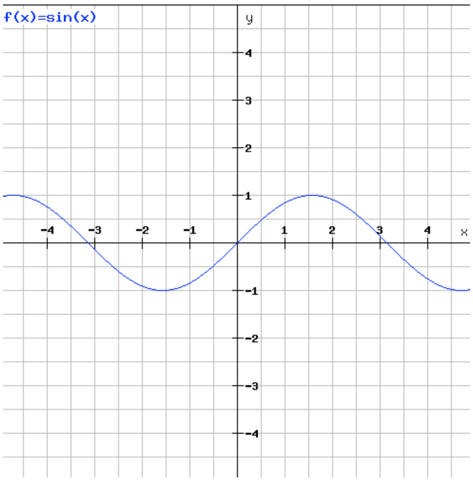


Abbildung 9: Punktsymmetrisch Funktion: $f(x) = sin(x)$

Monotonie Seien x_1 und x_2 beliebige Werte aus der Definitionsmenge und $x_1 < x_2$ dann gilt:

- $f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$ streng monoton fallend
- $f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow$ monoton fallend
- $f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow$ monoton wachsend
- $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ streng monoton wachsend
- $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow$ konstant

Periodizität Eine Funktion heißt periodisch mit der Periode p, wenn jedem $x \in D$ auch $f(x) \in D$ durch $f(x \pm p) = f(x)$ erstellbar ist.

Beispielsweise die Sinusfuktion:

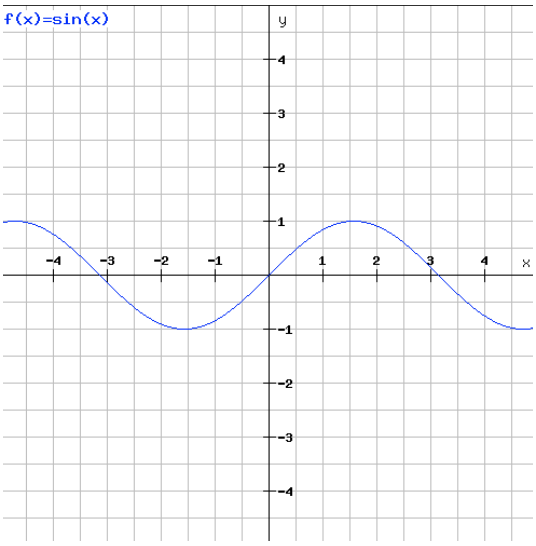


Abbildung 10: Sinusfunktion: $f(x) = sin(x)$

Extremstellen (Extreme) Ein lokales Extremum ist jene Stelle der Funktion an dem die Steigung der Funktion gleich Null und sich das Monotonieverhalten verändert - heißt wenn sich generell die Steigung ändert, beispielsweise wenn eine Funktion steigt und dann ab einem gewissen Punkt wieder fällt.

Es gibt drei unterschiedliche Arten von Extremen:

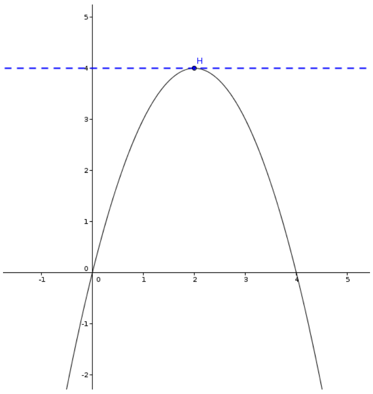


Abbildung 11: Hochpunkt

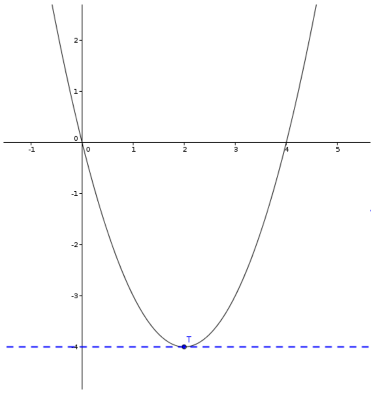


Abbildung 12: Tiefpunkt

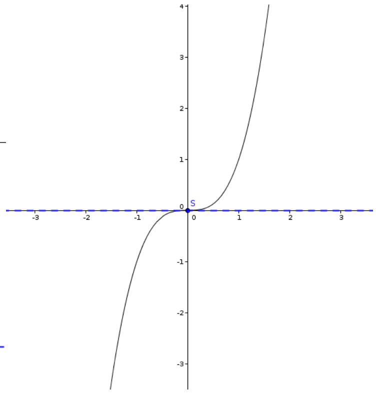


Abbildung 13: Scheitelpunkt

Hochpunkte sind dadurch charakterisiert, dass der Funktionsabschnitt vor der Extremstelle streng monoton wächst und nach der Extremstelle streng monoton fällt.

Tiefpunkte bilden das Gegenstück zu den Hochpunkten, d.h. dass der Funktionsabschnitt vor der Extremstelle streng monoton fällt und nach der Extremstelle streng monoton wächst.

Sattelpunkte stellen einen Sonderfall dar. In diesem Fall ist die Monotonie vor und nach dem Extrempunkt identisch, dennoch erreicht die Kurve kurz einen Punkt, an dem die Steigung der Kurve gleich Null ist - in Abbildung 13 zu erkennen.

Wichtig zu zu bemerken, dass es **maximal** $n-1$ **Extremen** gibt, wobei n für den Grad der Funktion steht.

Ein **Monotonieverhalten** wird tabellarisch in Intervallen angegeben. Wenn wir uns zum Beispiel die Funktion aus der Abbildung 14 anschauen können wir darauf eine Tabelle erstellen.

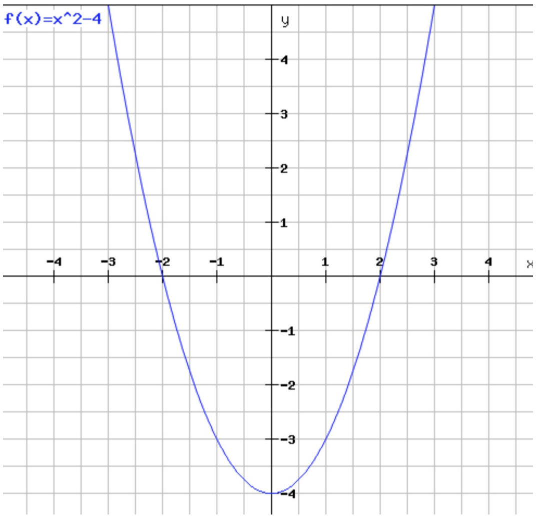


Abbildung 14: Beispiel: $f(x) = x^2 - 4$

X-Werte:	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
Monotonie/Extremum:	Fallend	Minimum/Tiefpunkt	Steigend

Tabelle 1: Monotonieverhalten für $f(x) = x^2 - 4$

Krümmung Die Krümmung kann auch in einer tabellarischen Form angegeben werden. Hierbei ist eine Rechtskrümmung ein „-“ und eine Linkskrümmung ein „+“.

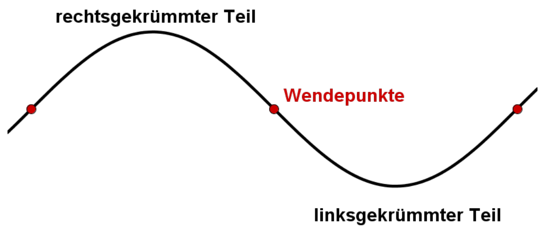


Abbildung 15: Beispiel: $f(x) = sin(x)$

Wendestellen Eine Wendestelle ist jene Stelle der Funktion an der die Krümmung Null ist - die erste Ableitung gleich Null ist: $f(x)' = 0$, die zweite Ableitung ungleich Null ist: $f(x)'' \neq 0$ - und sich das Krümmungsverhalten verändert. Im Beispiel in der Abbildung 15 kann man dies gut nachvollziehen.

2.1 Lineare Funktionen

2.1.1 Theorie

Definition Jede Funktion, deren Funktionsgleichung $f(x) = k * x + d$ mit festem k (verändert sich nicht) $\in \mathbb{R}$ lautet, heißt lineare Funktionen. Der Graph einer linearen Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ eine Gerade.

Parameterbeschreibung

x Ist der x-Wert der Funktion der in $f(x)$ eingesetzt wird um einen Wert für y zu bekommen.

k Ist die Steigung der Funktion. Da der Graph bei einer linearen Funktion eine Gerade ist kann man sich die Steigung hier folgendermaßen berechnen: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Das ganze kann als sogenanntes Steigungsdreieck eingezeichnet werden wie in Abbildung 16 getan wurde.

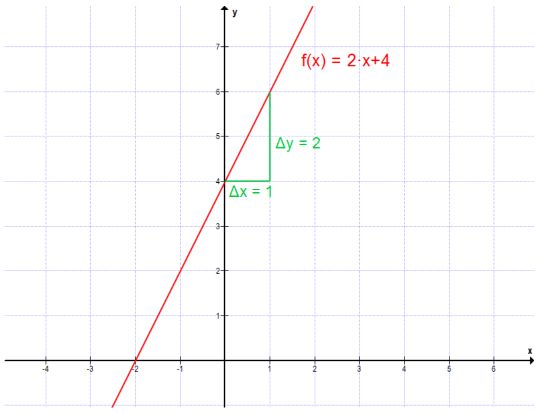


Abbildung 16: Steigungsdreieck

d Ist die Zahl die den y Wert bei $x = 0$ angibt. Somit ist d für die Verschiebung des Graphen in Richtung der y-Achse („hoch / runter“ verantwortlich.

Nullstelle Die Nullstelle einer linearen Funktion ist die Stelle, an der der Graph der Funktion die x-Achse schneidet. Diese kann sehr leicht berechnet werden, dazu muss man nur die Funktion „Nullsetzen“.

$f(x) = 0 \rightarrow 0 = k * x + d$

2.2 Quadratische Funktionen

2.2.1 Theorie

Definition Unter einer quadratischen Funktion versteht man eine Polynomfunktion zweiten Grades. $f(x) = a * x^2 + b * x + c$ mit $a \neq 0$

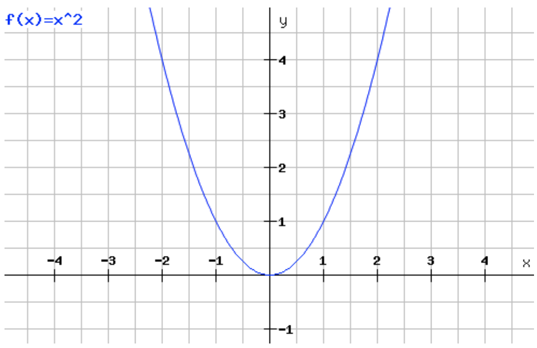


Abbildung 17: Einfachste quadratische Funktion: $f(x) = x^2$

Parameterbeschreibung

a Hat eine Auswirkung auf die Öffnungsrichtung und Streckung oder Stauchung der Funktion.

- $a > 0$: Parabel nach oben geöffnet
- $a < 0$: Parabel nach unten geöffnet
- $|a| < 1$: Parabel Richtung y-Achse gestaucht (im Vergleich zur Normalparabel: $f(x) = x^2$)
- $|a| > 1$: Parabel Richtung y-Achse gestreckt (im Vergleich zur Normalparabel: $f(x) = x^2$)

b Hat Auswirkungen auf die Verschiebung der Funktion. Der Parameter b verschiebt die komplette Parabel sowohl in x- als auch in y-Richtung und gibt die Steigung der Parabel am Scheitelpunkt an.

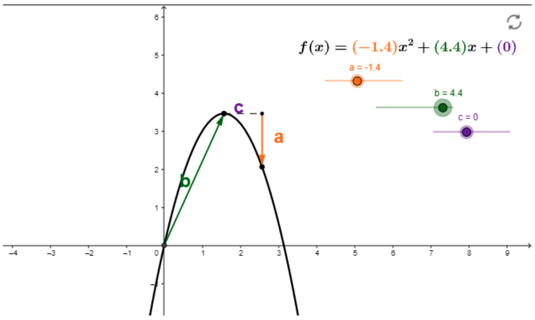


Abbildung 18: Beispiel der Verschiebung mittels des Parameters b

c Ist die Verschiebung auf der x-Achse. Wichtig zu erwähnen ist ebenso, dass der Parameter c nicht identisch mit der y-Koordinate des Scheitelpunkts ist - da schon von b beeinflusst, falls vorhanden.

Nullstellen Da quadratische Funktionen Polynome zweiten Grades sind haben sie aus diesem Grund höchstens zwei reelle Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen wird durch die Diskriminante $D = b^2 4 * a * c$ der Funktion angegeben.

Als allererstes, eine Diskriminante ist der Term, der bei der Großen Lösungsformel ($x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a} \rightarrow x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 * a}$) und wird dazu verwendet um herauszufinden ob, und wie viele Nullstellen es gibt. Hier gibt es folgende drei Szenarien:

- $D < 0$:
  Wenn D kleiner Null ist, gibt es keine reelle Nullstelle, denn unter der Wurzel in der Lösungsformel würde eine negative Zahl stehen.

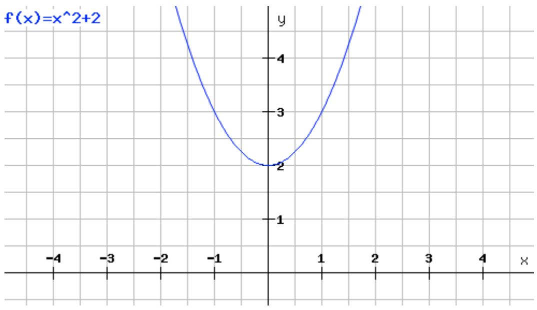


Abbildung 19: Quadratische Funktion mit $D < 0$

- $D = 0$:
  Wenn D Null ist, gibt es eine doppelte Nullstelle, da unter der Wurzel in der Lösungsformel Null steht und somit nur ein Ergebnis für $x_{1;2}$ heraus kommt.

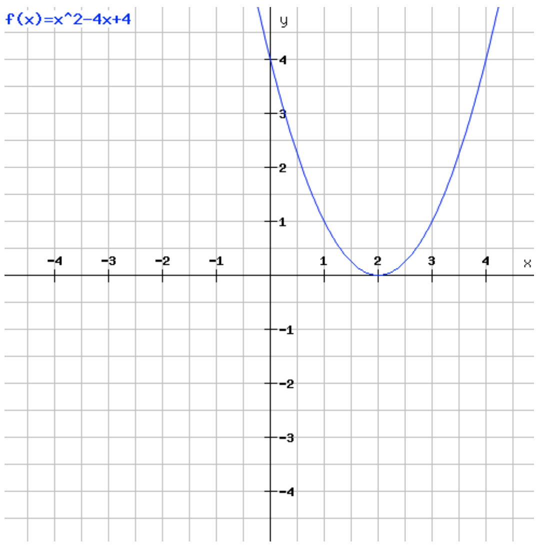


Abbildung 20: Quadratische Funktion mit $D = 0$

- $D > 0$:
  Wenn D größer Null ist, gibt es zwei einfache Nullstellen.

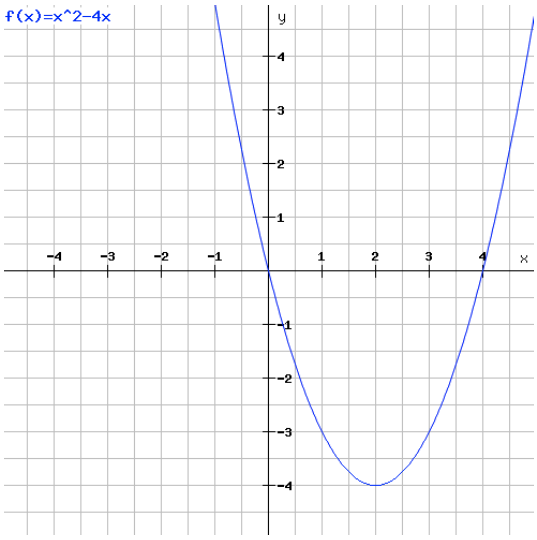


Abbildung 21: Quadratische Funktion mit $D > 0$

2.3 Exponentialfunktionen

2.3.1 Theorie

Definition Eine Funktion mit dem Term $f(x) = b * a^x$ heißt Exponentialfunktion. Dabei gilt für $a > 0, a \neq 1$ und $b \neq 0$. Sie beschreiben zeitliche exponentielle Wachstumsvorgänge und sind deshalb von erheblicher Bedeutung.

Man unterscheidet hier zwischen zwei Arten von Exponentialfunktionen.

- $1 > a > 0$:
  Je kleiner a, desto steiler verläuft der Graph. Folgend ein Beispiel:

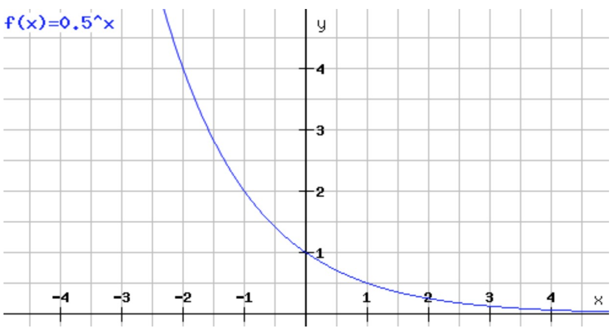


Abbildung 22: Exponentialfunktion mit $1 > a > 0$

- $a > 1$:
  Je größer a, desto steiler verläuft der Graph. Folgend ein Beispiel:

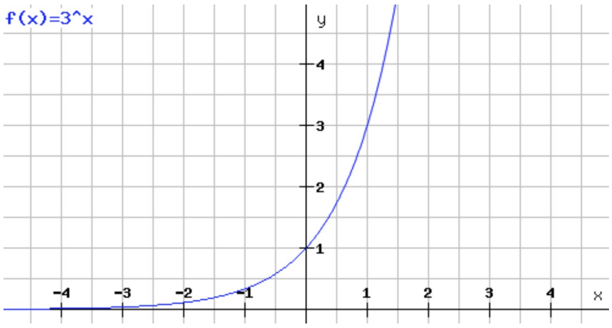


Abbildung 23: Exponentialfunktion mit $a > 1$

Parameterbeschreibung

a Bereits ein Stück weiter oben Beschreiben. Der Parameter hat Auswirkungen darauf ob die Funktion steigend oder fallend ist.

b Der Parameter b verschiebt die gesamte Funktion in Richtung der x-Achse. Wenn b größer wird, wird die Funktion nach rechts geschoben, anderenfalls nach links.

Nullstelle Eine Exponentialfunktionen hat keine wirkliche Nullstelle, da sie sich nur „annähert". Dabei ist die x-Achse als Asymptote für die gilt:

- $a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ und $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$
  Die Funktion geht wenn x gegen $-\infty$ geht Richtung 0 und wenn x gegen ∞ geht, denn geht die Funktion auch gegen ∞
- $1 > a > 0$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$
  Die Funktion geht wenn x gegen $-\infty$ geht Richtung ∞ und wenn x gegen ∞ geht, denn geht die Funktion gegen 0

Wachstumsfunktion Da Exponentialfunktionen oft für zeitlich exponentielle Wachstumsvorgänge verwendet werden - wie zum Beispiel zur Berechnung der Verbreitung eines Virus - haben auch diese eine gewisse Abwandlung zu dem Anfangsterm $f(x) = b * a^x$. Hier wird folgende Form verwendet: $N(t) = N_0 * a^t$.

N_0 Ist der Start- bzw. Anfangswert und entspricht dem Parameter b aus der Ursprungsform.

a Ist der Wachstumsfaktor, der oftmals auch in natürlicher Form mittels der Eulerschen Zahl e angegeben wird. Der Term müsste dann Folgenderweiße umgeschriben werden.

- $f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x * \ln a}$

t Ist die Zeitkonstante

2.4 Bifi-Bsp

2.4.1 Alkoholspiegel

Themengebiet: Lineare Funktion

Alkoholspiegel

Aufgabennummer: A_093

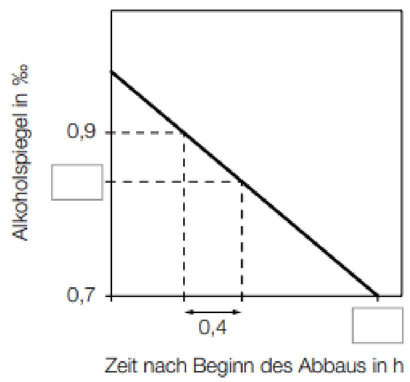
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Alkoholspiegel ist ein Maß für die Menge von Alkohol im Blut. Er wird üblicherweise in Promille (‰) angegeben.
Oberhalb eines Alkoholspiegels von 0,1 ‰ erfolgt der Abbau von Alkohol im Körper annähernd linear mit einer Abbaurate von 0,15 ‰ pro Stunde.

a) Wolfgang trinkt auf einer Party Alkohol. Am Ende der Party hat er einen Alkoholspiegel von 1,5 ‰.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die den Alkoholabbau in Wolfgangs Körper (bis zu einem Alkoholspiegel von 0,1 ‰) in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Alkoholabbau in Wolfgangs Körper ausschnittsweise dargestellt.



– Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Abbildung 24: Angabe: Alkoholspiegel a)

Lösung: Um das Beispiel zu lösen muss man einfach eine lineare Funktion ($f(x) = k * x + d$) sowie die notwendigen Gleichungen aufstellen um somit die Unbekannten Punkte zu finden. Wenn man also für $k = -0.15$ und für $d = 1.5$ einsetzt hat man die fertige Funktion. Es muss nur noch beachtet werden, dass die Funktion nur bis 0.1 Promille gültig ist. Dafür muss man die folgende Gleichung lösen:

$f(x) = 0.1 \to 0.1 = -0.15 * x + 1.5 \to x = 9.3333333.$

Somit hätte man die Lösung: $f(x) = -0.15 * x + 1.5$ $(0 \leq x \leq 9.3)$

Und um die anderen Werte zu berechnen müssen nur ähnliche Gleichungen aufgestellt werden.

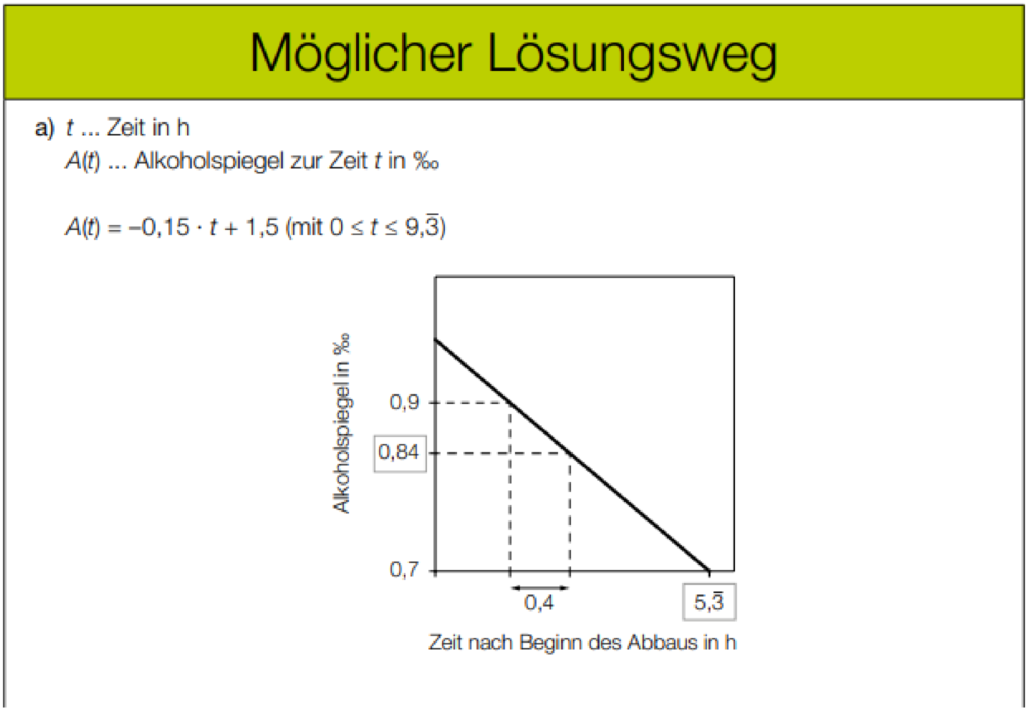


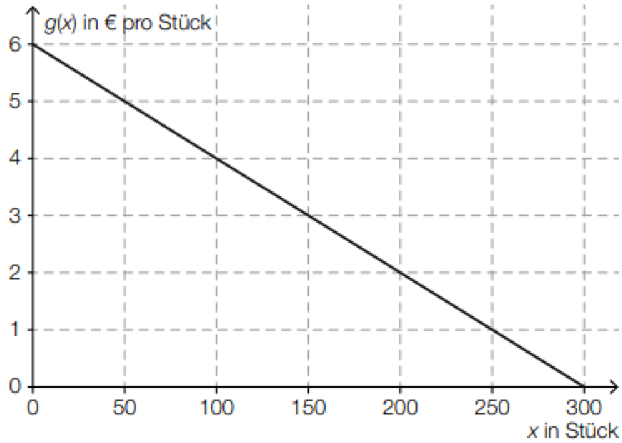
Abbildung 25: Lösung: Alkoholspiegel a)

2.4.2 Alles fuer die Torte

Themengebiet: Lineare Funktion

c) Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der nachgefragten Menge (= Anzahl der Tortenstücke, die die Konsumentinnen und Konsumenten kaufen würden) wird durch die sogenannte *Preisfunktion der Nachfrage* festgelegt.

Der Graph der Preisfunktion der Nachfrage g für Nusstortenstücke ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie die Steigung der Funktion g.
– Lesen Sie denjenigen Preis ab, bei dem gemäß diesem Modell niemand mehr bereit ist, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Abbildung 26: Angabe: Alles fuer die Torte c)

Lösung Um die Steigung zu berechnen muss man sich nur ein Steigungsdreieck einzeichnen. Dazu geht man auf der x-Achse 50 nach rechts und auf der y-Achse 1 nach unten.

Also hätten wir für die Steigung: $k = \frac{-1}{50}$

Auch die zweite Aufgabe ist nicht allzu schwer. Man muss einfach den Punkt auf der y-Achse anschauen, bei dem der x-Wert Null ist. 6 wäre das hier in diesem Beispiel, heißt ab einem Preis von 6€ will keiner mehr Nusstorenstücke kaufen.

c) Die Steigung beträgt $-\frac{1}{50}$.

Bei einem Preis von € 6 pro Stück ist gemäß dem Modell niemand mehr bereit, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Abbildung 27: Lösung: Alles fuer die Torte c)

2.4.3 Angry Birds (2)

Themengebiet: Quadratische Funktion / Wurzelfunktion

Angry Birds (2)*

Aufgabennummer: A_242

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

Abbildung 28: Angabe: Angry Birds (2) a)

Lösung Hier muss man sich die Nullstellen der quadratischen Funktion berechnen.

$$f(x) = 0 \rightarrow 0 = -0.1 * x^2 + 0.9 * x + 1 \rightarrow x_1 = 10; x_2 = -1$$

Da $x_2 < 0$ ist ist x_1 das Ergebnis. Red ist 10 LE geflogen.

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -1$)
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

Abbildung 29: Lösung: Angry Birds (2) a)

2.4.4 Allergie

Themengebiet: Exponentialfunktion

b) Einem Kind wurde ein Antiallergikum verschrieben. 48 Stunden nach der Einnahme dieses Antiallergikums sind noch 0,1 % des Wirkstoffs der verabreichten Dosis vorhanden.

- Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion auf, die die Abnahme der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden nach der Einnahme beschreibt. Es wird von einer Anfangsmenge N_0 ausgegangen.
- Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums.

Abbildung 30: Angabe: Allergie b)

Lösung Man beginnt hierbei mit dem aufstellen der Formel: $N(t) = N_0 * a^t$

Wir wissen aus dem Beispiel, dass bei $t = 48$ also $N(48) = 0.1 * N_0$ ist. Somit kann man eine Gleichung aufstellen:

$0.1 * N_0 = N_0 * a^{48} \rightarrow 0.1 = a^{48} \rightarrow a = 0.8650$

Somit haben wir den ersten Teil dieser Ausgabe gelöst, die Exponentialfunktion aufgestellt: $N(t) = N_0 * 0.8650^t$

Als nächstes müssen wir die Halbwertszeit berechnen ($N(t) = 0.5 * N_0$).

Hier wieder die Formel: $0.5 * N_0 = N_0 * 0.8650^t \rightarrow t = 4.816 \rightarrow$ Die Halbwertszeit beträgt ca. 4,82 Stunden

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
t ... Zeit in Stunden nach der Einnahme
$N(t)$ ... Menge des Wirkstoffs zur Zeit t

$0{,}001 = a^{48} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[48]{0{,}001} = 0{,}8659\ldots$
$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8659\ldots^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}1439\ldots \cdot t}$

$0{,}5 = 0{,}8659\ldots^t \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}816\ldots$
Die Halbwertszeit beträgt rund 4,82 Stunden.

Abbildung 31: Lösung: Allergie b)

2.4.5 Cobalt-60

Themengebiet: Exponentialfunktion

Cobalt-60

Aufgabennummer: B_076

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Cobalt-60 ist ein radioaktives Isotop des Elements Cobalt und wird unter anderem bei der Durchstrahlungsprüfung zur Materialuntersuchung verwendet.

a) Beim Durchdringen von Aluminium wird die Strahlungsintensität von Cobalt-60 pro 5,3 cm Dicke der Aluminiumschicht jeweils um die Hälfte abgeschwächt. Die Funktion I beschreibt die Strahlungsintensität von Cobalt-60 in Abhängigkeit von der Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht.

x … Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht in cm
$I(x)$ … Strahlungsintensität beim Austritt aus der Aluminiumschicht mit der Dicke x in % der Ausgangsintensität

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.
– Ermitteln Sie, wie viele 2 cm dicke Aluminiumplatten man benötigt, wenn man die Intensität der Strahlung auf höchstens 5 % der Ausgangsintensität reduzieren will.

Abbildung 32: Angabe: Cobalt-60 a)

Lösung Als erstes müssen wir hier die Funktionsgleichung aufstellen. Wieder mit dem Schema: $I(x) = I_0 * a^x$

Wir wissen: Halbwertszeit von $x = 5.3$ somit können wir eine Gleichung aufstellen.

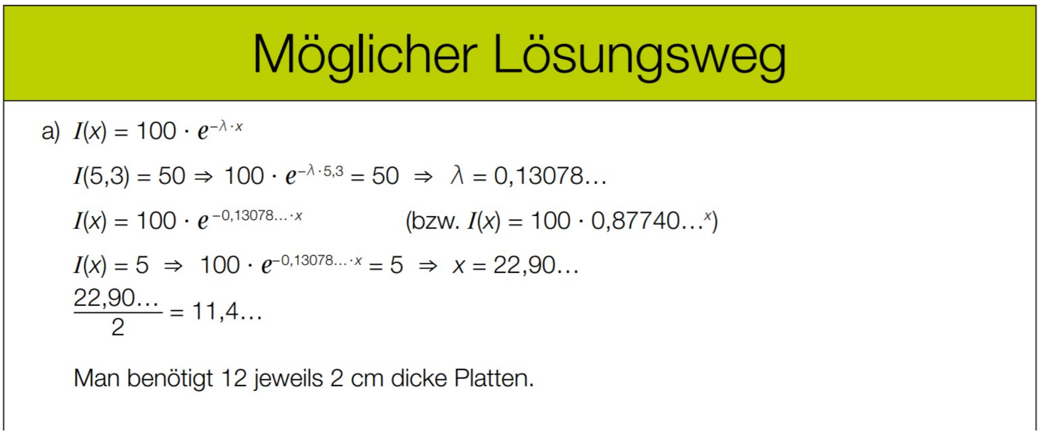
$I(5.3) = I_0 * 0.5 \rightarrow 0.5 * I_0 = I_0 * a^{5.3}$

Einfach umformen und man kommt auf das Ergebnis: $a = 0.8774$

Als nächstes müssen wir berechnen, wie viele 2cm dicke Platten man benötigt um die Strahlung auf 5% zu reduzieren.

$I(x) = 0.05 * N_0 \rightarrow 0.05 * N_0 = N_0 * 0.8774^x \rightarrow x = 22.9$

$\frac{22.9}{2} = 11.45 \rightarrow$ ca. 12 Platten



Möglicher Lösungsweg

a) $I(x) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

$I(5,3) = 50 \Rightarrow 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 5,3} = 50 \Rightarrow \lambda = 0,13078\ldots$

$I(x) = 100 \cdot e^{-0,13078\ldots \cdot x}$ (bzw. $I(x) = 100 \cdot 0,87740\ldots^x$)

$I(x) = 5 \Rightarrow 100 \cdot e^{-0,13078\ldots \cdot x} = 5 \Rightarrow x = 22,90\ldots$

$\frac{22,90\ldots}{2} = 11,4\ldots$

Man benötigt 12 jeweils 2 cm dicke Platten.

Abbildung 33: Lösung: Cobalt-60 a)

2.4.6 Zimt

Themengebiet: Exponentialfunktion, Normalverteilung, Trigonometrie im rechtwinkeligen Dreieck: SIN/COS/TAN, Binomialverteilung

Zimt

Aufgabennummer: A_164

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

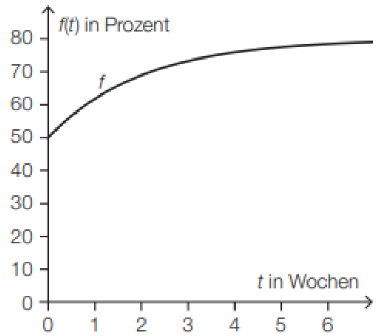
Zimt ist eines der ältesten bekannten Gewürze und wird aus der getrockneten Rinde von Zimtbäumen gewonnen.

a) Zimt gibt Feuchtigkeit ab. Werden die Zimtstangen in geschlossenen Containern transportiert, so steigt der Feuchtigkeitsgehalt im Behälter, was zu einer Beeinträchtigung der Qualität führen kann. Die in einem bestimmten Container gemessene relative Luftfeuchtigkeit kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 30 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + b$

t ... Zeit nach Verschluss des Containers in Wochen
$f(t)$ ... relative Luftfeuchtigkeit zur Zeit t in Prozent
b ... Parameter (in Prozent)

– Ermitteln Sie unter Verwendung des nachstehend abgebildeten Graphen der Funktion f den Parameter b.



– Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters b im gegebenen Sachzusammenhang.

Abbildung 34: Angabe: Zimt a)

Lösung Wir haben folgende Funktion gegeben: $f(t) = 30 * (1 - e^{\frac{t}{2}}) + b$ und b muss gefunden werden.

Da wir anhand der Skizze erkennen können dass bei $f(0) = 50$ können wir eine Gleichung aufstellen und diese nach b lösen

$f(0) = 50 \rightarrow 50 = 30 * (1 - e^{\frac{0}{2}}) + b \rightarrow b = 50$

b) Zimt wird in speziellen Mühlen zur gewünschten Korngröße vermahlen. Die Durchmesser der Körner nach dem Mahlvorgang sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 175 µm und der Standardabweichung σ = 35 µm.

– Ermitteln Sie, wie viel Prozent aller Körner einen Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm haben.

Durch einen Verarbeitungsfehler hat sich der Erwartungswert der Durchmesser (bei gleichbleibender Standardabweichung) auf den Wert μ_1 = 180 µm verschoben.

– Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Gauß'schen Glockenkurve, ob der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm dadurch kleiner wird, größer wird oder gleich bleibt.

Abbildung 35: Angabe: Zimt b)

Lösung Hierbei wissen wir die Standardabweichung sowie den Erwartungswert: $\mu = 175; \sigma = 35$.

Somit können wir uns die Wahrscheinlichkeit dass die Körner einen Durchmesser biszu 250 ausrechnen und das gleiche wiederholen mit einem Durchmesser biszu 100. Das Ergebnis der zweiten Rechnung muss man dann nur noch von dem Ersten abziehen und man hat die Wahrscheinlichkeit dass die Körner einen Durchmesser von 100 bis 250 haben.

$P(100 < X < 250) = P(X < 250) - P(X < 200) \to P(100 < X < 250) = 0.9678 \to 96,78\%$

Als nächstes müssen wir uns die Funktoin anschauen:

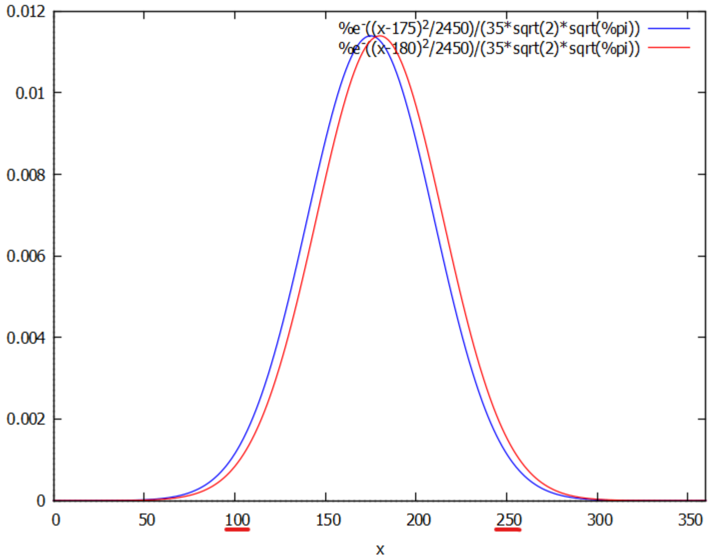
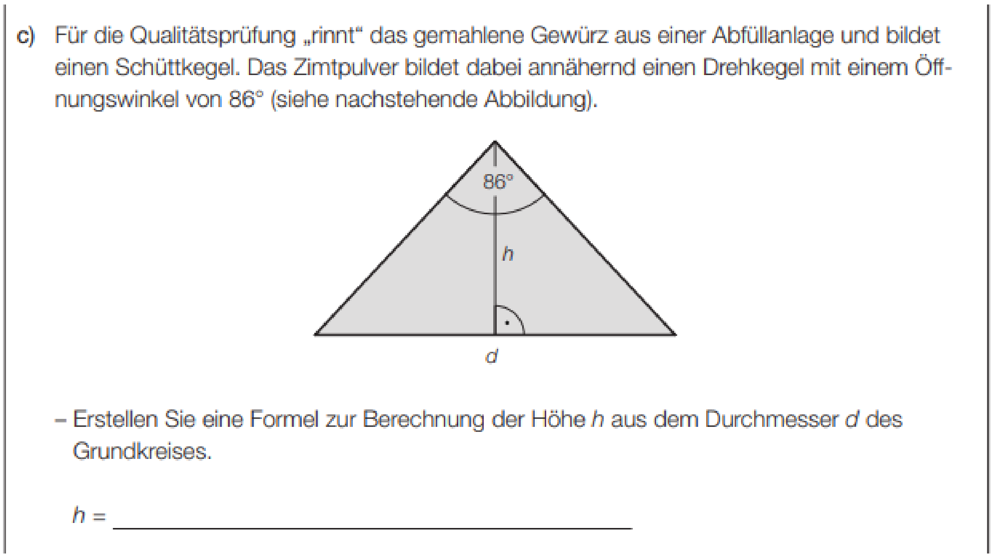


Abbildung 36: Skizze zu Zimt b)

Anhand dieser Skizze kann man sehen, dass sich die Kurve nach rechts verschiebt d μ größer wird. Dadurch und aus dem Grund dass das Intervall nicht mehr symmetrisch um μ herum ist befinden sich weniger Werte zwischen 100 und 250 und die Prozentzahl sinkt.



c) Für die Qualitätsprüfung „rinnt" das gemahlene Gewürz aus einer Abfüllanlage und bildet einen Schüttkegel. Das Zimtpulver bildet dabei annähernd einen Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von 86° (siehe nachstehende Abbildung).

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h aus dem Durchmesser d des Grundkreises.

h = ______________________________

Abbildung 37: Angabe: Zimt c)

Lösung Hier muss man die Höhe des Kegels berechnen. Wenn man das Dreieck halbiert, bekommt man ein rechtwinkliges Dreieck und kann besser damit Arbeiten. Der Winkel halbier wäre: 43.

Da für ein rechtwinkliges Dreieck $tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$ gilt kann man dies anwenden.

$h = \frac{\frac{d}{2}}{tan(43)}$

d) Das Zimtpulver wird in einer Anlage automatisch in Säckchen verpackt. Aus Erfahrung weiß man, dass 2 % der Säckchen nicht korrekt verschlossen sind. Eine Zufallsstichprobe von 50 Säckchen wird kontrolliert.

– Beschreiben Sie ein Ereignis *E* im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet wird:

$$P(E) = 0{,}98^{50} + 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Abbildung 38: Angabe: Zimt d)

Lösung Das kann man leicht erkennen. Da für die Berechnung bei der Binomialverteilung:

$$\binom{Gesamtzahl}{Fehler} * Wahrscheinlichkeit^{Fehler} * Gegenwahrscheinlichkeit^{Richtige}$$

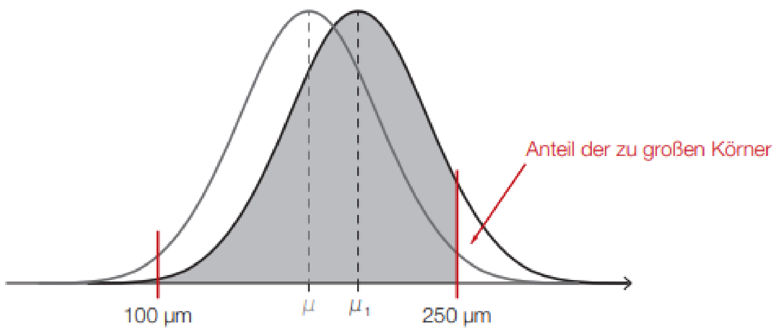
gilt um sich die Wahrscheinlichkeit für genau einen Fall zu berechnen. Bei der Angabe wurde dies für 0, 1 und 2 nicht korrekt Verschlossen gemacht, somit wurde die Wahrscheinlichkeit dass keins, eins oder zwei Säckchen nicht korrekt verschlossen worden sind berechnet.

Möglicher Lösungsweg

a) An der Stelle $t = 0$ kann man ablesen: $b = 50$
Der Wert des Parameters b entspricht der relativen Luftfeuchtigkeit beim Verschließen des Containers in Prozent.

b) X … Durchmesser in μm
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(100 < X < 250) = 0{,}967\ldots \approx 97\ \%$

Der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 μm und 250 μm sinkt.
Begründung: Die Glockenkurve ist nun so verschoben, dass der zulässige Bereich nicht mehr symmetrisch um den Erwartungswert liegt. Dadurch steigt der Anteil der zu großen Körner stärker, als der Anteil der zu kleinen Körner sinkt.



c) $h = \dfrac{d}{2 \cdot \tan(43°)}$

d) E … in der Stichprobe befinden sich 0, 1 oder 2 Säckchen, die nicht korrekt verschlossen sind

Abbildung 39: Lösung: Zimt a), b), c), d)

3 DiffIntRech

3.1 Differentialrechnung

Die Ableitung ist eine Funktion. Sie wird mit einem kleinen Strich gekenzeichnet: f' ist die Ableitung von f . Manche sagen dazu auch Änderungsrate.Die Ableitung f' nimmt an jeder Stelle x den Wert der Steigung von f an der Stelle x an. Eine Funktion heißt differenzierbar wenn der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n$ existiert. Dieser Grenzwert heißt erste Ableitung.

$$f`(x) \to \frac{dy}{dx}$$

3.1.1 Ableitungsregeln und Sonderfälle

In Maxima kann man durch den Befehl diff ableiten. In diesen Beispiel ist h(x) die abzuleitende Funktion und x die Variable nach der man ableitet.

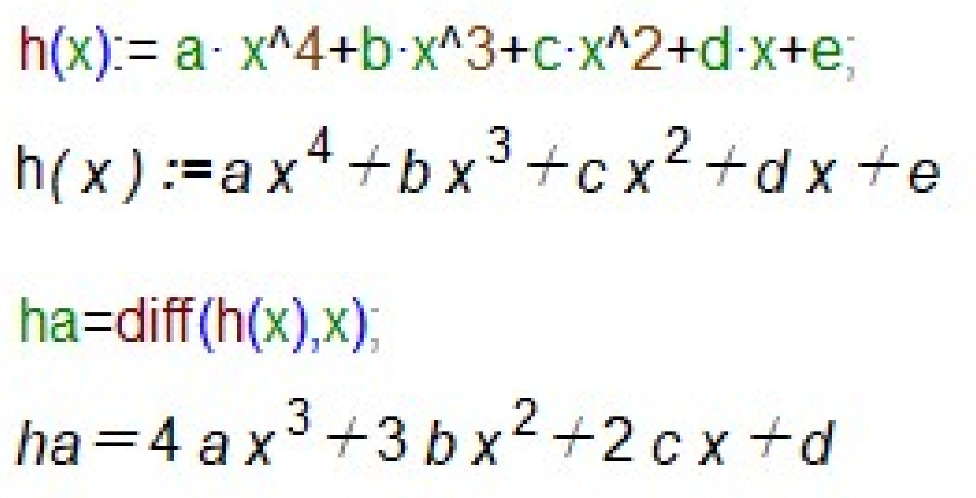


Abbildung 40: 01815 Ableiten

Hier sieht man das man im Grunde einfach die mit der Hochzahl von x Multipliziert und die Hochzahl-1 rechnet.

FUNKTION: F(X)	ABLEITUNG: F'(X)	REGEL
x	1	**1. Hochzahl vorziehen** **2. Hochzahl minus 1**
x^2	$2x$	
x^3	$3x^2$	
trölf	0	Konstanten fallen weg
$5x^3$	$5 * 3x^2$	Faktoren bleiben stehen
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	Brüche & Wurzeln
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	Sonderfälle
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$5x^2 + \sin(x)$	$10x + \cos(x)$	**Summenregel**
$(2x+5)^3$	$3\,(2x+5)^2 * 2$	**Kettenregel** „mal die innere Ableitung"
$\sin(7x)$	$\cos(7x) * 7$	
e^{4x}	$e^{4x} * 4$	
$\ln(5x+3)$	$\frac{5}{5x+3}$	
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	**Summenregel**
$h(\,g(x)\,)$	$h'(\,g(x)\,) * g'(x)$	**Kettenregel**
$g(x) * h(x)$	$g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$	**Produktregel**
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x) * g'(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$	**Quotientenregel**

Abbildung 41: Ableitungsregeln und Sonderfälle [13]

3.1.2 Grafisch differenzieren

Um eine Ableitungsfunktion graphisch einzeichnen zu können muss man einige Dinge wissen. Da die erste Ableitung die Steigung ist und die 2. Ableitung die Krümmung ergibt sich folgendes.

Nullstellen	f(x) =0
Extremstellen	f‘(x)= 0, f“(xE)<0 $\rightarrow H, f“(xE) = 0- > S, f“(xE) > 0 \rightarrow T$
Wendestellen	f“(x)=0

Um sich das leichter zu merken kann man sich das mit dem Wort NEW merken. Wobei N für Nullstelle E für Extremstelle und W für Wendestelle.

f	N	E	W		
f`		N	E	W	
f``			N	E	W

Ist eine Funktion fallend muss die erste Ableitung steigend sein und umgekehrt.Daher mann beginnt immer von der entgegengesetzten Richtung die Funktion zu zeichnen.

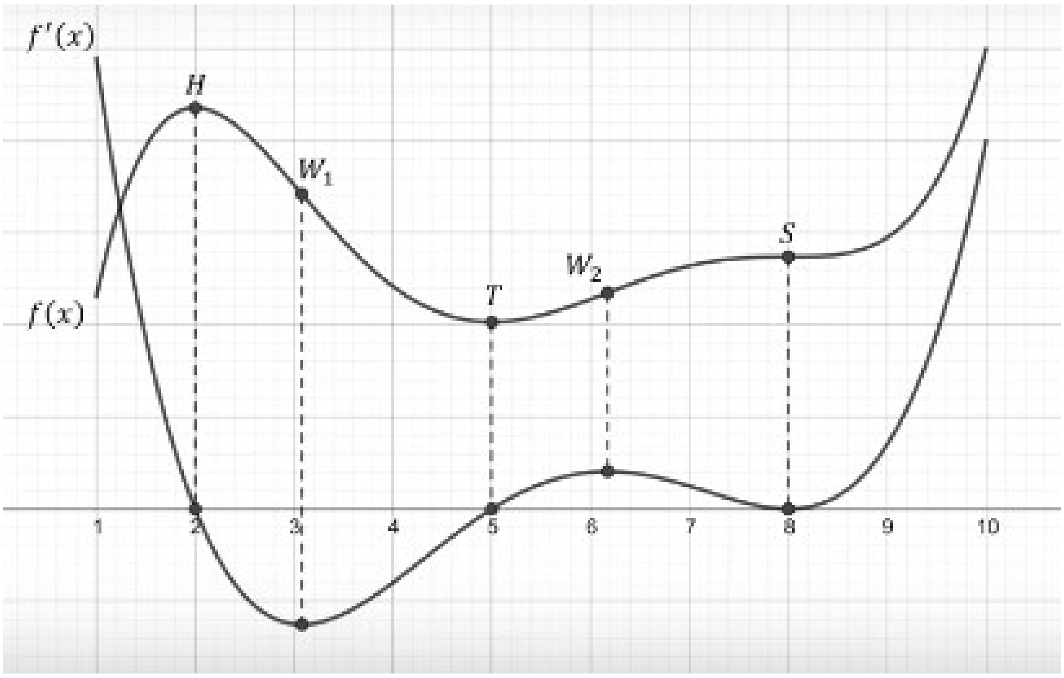


Abbildung 42: Grafisch ableiten [9]

Beispiel: Man beginnt also von der Entgegengesetzten Richtung und kann die drei Punkte einzeichnen siehe new Eselsbrücke.

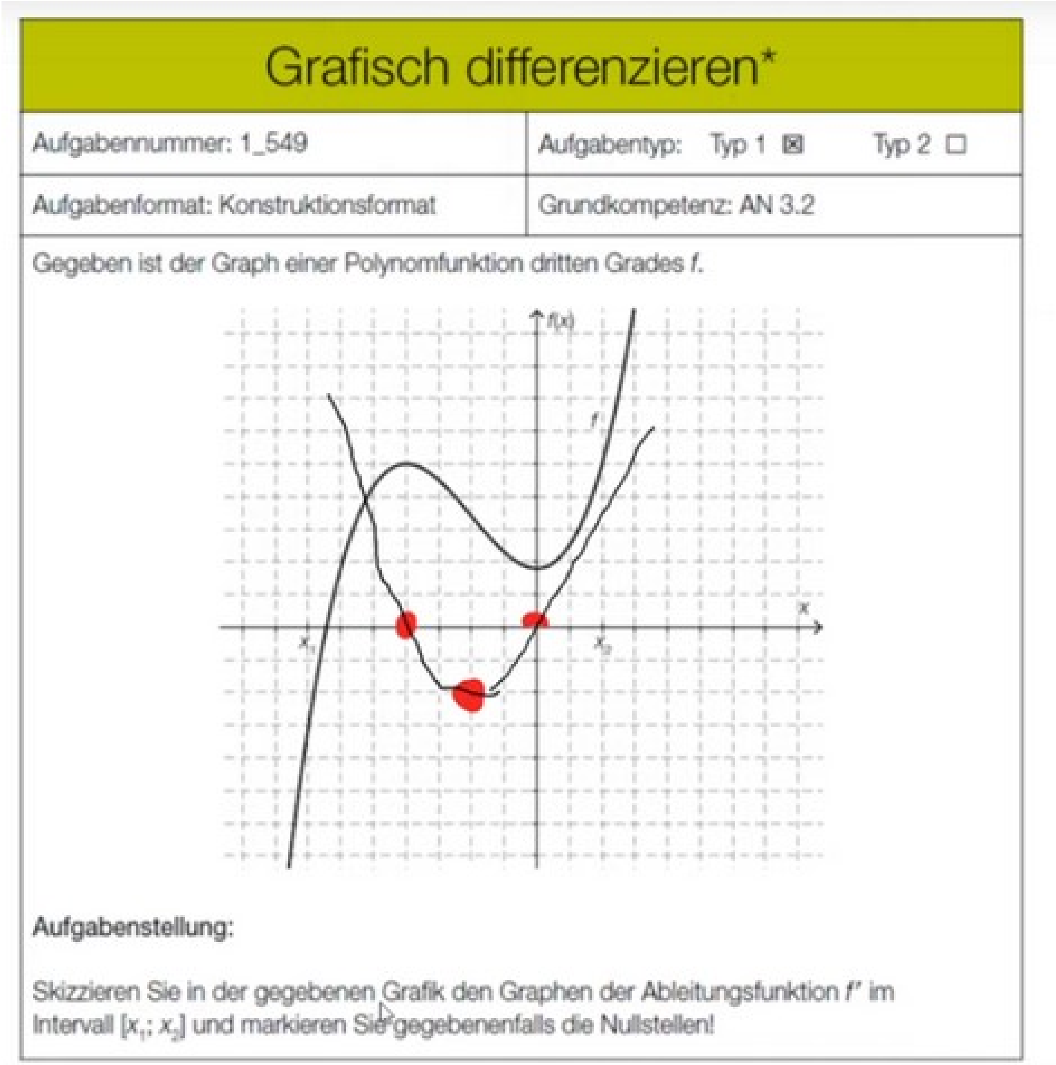


Abbildung 43: Grafisch ableiten

3.1.3 Partielles Ableiten

Wenn eine Funktion mehrere Variabeln hat man aber nur nach einer ableitet dann redet man vom partiellen Ableiten.
Beispiel:

$$f(x, y) = 2 * x + 3 * y + 5$$

Diese Funktion kann man nun nach X oder Y ableiten. Die jeweils andere Variable nach der man nicht abgeleitet verhält sich dabei wie eine Kosntante. (Die Ableitung eiener Konstanten = 0) In Maxima gibt man einfach die Variable nach der mam ableiten möchte an.

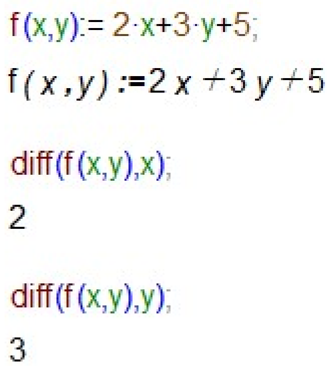


Abbildung 44: Beispiel partielles Ableiten

3.1.4 Kurvendiskusion

Bei der Kurvendiskussion wird mit Hilfe der Differentialrechnung bei einer gegebenen Funktion y=f(x)
auf die Eigenschaften der Funktion und besondere Eigenschaften/charakteristische Punkte der Funktion geschlossen.

Vorgangsweise:

1. Funktion (y=f(x)), 1. Ableitung (y=f'(x)), 2. Ableitung (y=f"(x)) aufstellen
2. Bestimmung der Definitionsmenge
3. Bestimmung der Nullstellen f(x)=0
4. Bestimmung der Extremwerte (lokale Minima und Maxima)
   f'(x)=0 => xE1, xE2
   Man sucht die Orte bei denen die Tangente Paralell zur horizontalen Achse (x) ist.
   Das sind jedenfalls die höchsten oder niedersten Punkte.
   Entscheidung ob E ein Minimum oder Maximum ist über die 2. Ableitung:
   f"(xE) < 0 => xE ist Maximum
   f"(xE) > 0 => xE ist Minimum
5. Bestimmung der Wendepunkte
   f"(x)=0 => xW1, xW2
   Einsetzen durch:
   W1(xW1, f(xW1))
6. Bestimmung der Wendetangenten durch y=k*x+d
   Für jeden Wendepunkt (W): tW1: (x|y) = (xW1|f(xW1))
   k = f: (xW1)
   d durch einsetzen

7. Zusätzlich ist bei Gebrochen Rationalen Funktionen die Stetigkeit, bzw. stetige Ergänzung und die Asymptote zu untersuchen

3.1.5 Umgekehte Kurvendiskussion

Bei einer Kurvendiskussion war, Kenntniss der Funktion vorausgesetzt, die besonderen Punkte der Funktion zu finden. Bei der umgekehrten Kurvendiskussion wird aus der Angabe besonderer Punkte oder Eigenschaften einer Funktion auf ihre Gleichung geschlossen.

1. Grundfunktion der jeweiligen Polynomfunktion mit ihren Ableitungen aufstellen
2. Aus den Angaben im Text Anhaltspunkte finden
3. Aus den Anhaltspunkten mit Gleichsetzung, Cram'sche Regel und Einsetzung Werte für die Variablen finden
4. Die Werte in die Grundfunktion einsetzen und daraus die Funktion bilden
5. Lösung

3.1.6 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgabe sind Extremwerte zu einer Funktion zu berechnen. Es wird entweder das Maximum oder das Minimum einer Funktion gesucht. Diese Extremwerte lassen sich ueber die Haupt- und Nebenbediengungen ermitteln.

1. Aufstellen der Hauptbedingung HB
2. Aufstellen der Nebenbedingung NB
3. Einsetzten der NB in die H2B lösen und differenzieren um auf die Extremwerte zu schliesen $f'(x) = 0$
4. Feststellen ob die Extremwerte ein Minimum oder Maximum sind.
5. Ermitteln der anderen Variablen durch einsetzen in die NB
6. Extremwerte und eine Antowort finden

3.1.7 Wichtige

3.2 Integralrechnung

Die Integrations ist die Umkerhrung zur Ableitung. Aus $f'(x)$ kann man wieder auf $f(x)$ schliesen, jedoch verliert man beim Differenzieren die Summanden, diese werden dann als Koeffiezent wird angeschrieben. Die Koeffiezenten C koennen nachtraeglich nur ueber die NB bestimmt werden.

3.2.1 Bestimmte Integrale

Ein bestimmtes Integral erkennt man daran ob Grenzen angegeben sind.Ausrechnen der Flaeche des Integrals ist moeglich. **Beispiel:** Funktion: $f(x) = 2 * \sqrt{x}$ Berechne die Fläche wenn die Grenze a 2 ist und die Grenze b 3. In Maxima kann man dazu den Befehl integrate verwenden:

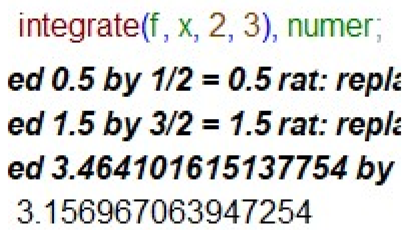


Abbildung 45: Integrate Befehl benutzen

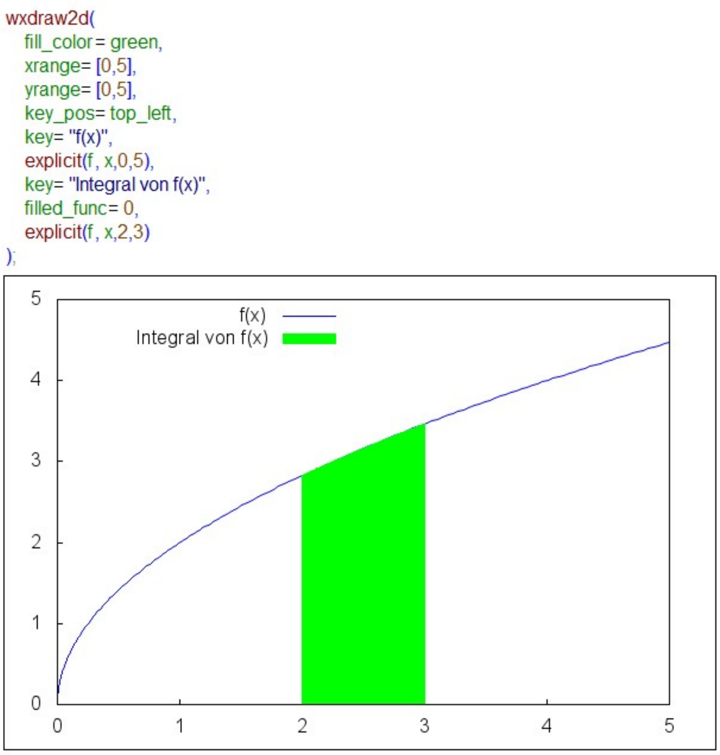


Abbildung 46: Berechnete Fläche plotten

3.2.2 Unbestimmte Integrale

Ein Integral das ohne Grenzen angegeben ist. Somit laesst sich die Flaeche des Integrals nicht berechnen.

3.2.3 Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen

Wenn man die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen muss man beachten welche Funktion von Oberhalb begrent und welche von unterhalb.In diesen Beispiel ändert sich das einmal daher man muss die Berechnung auf zwei Integrale aufteilen.

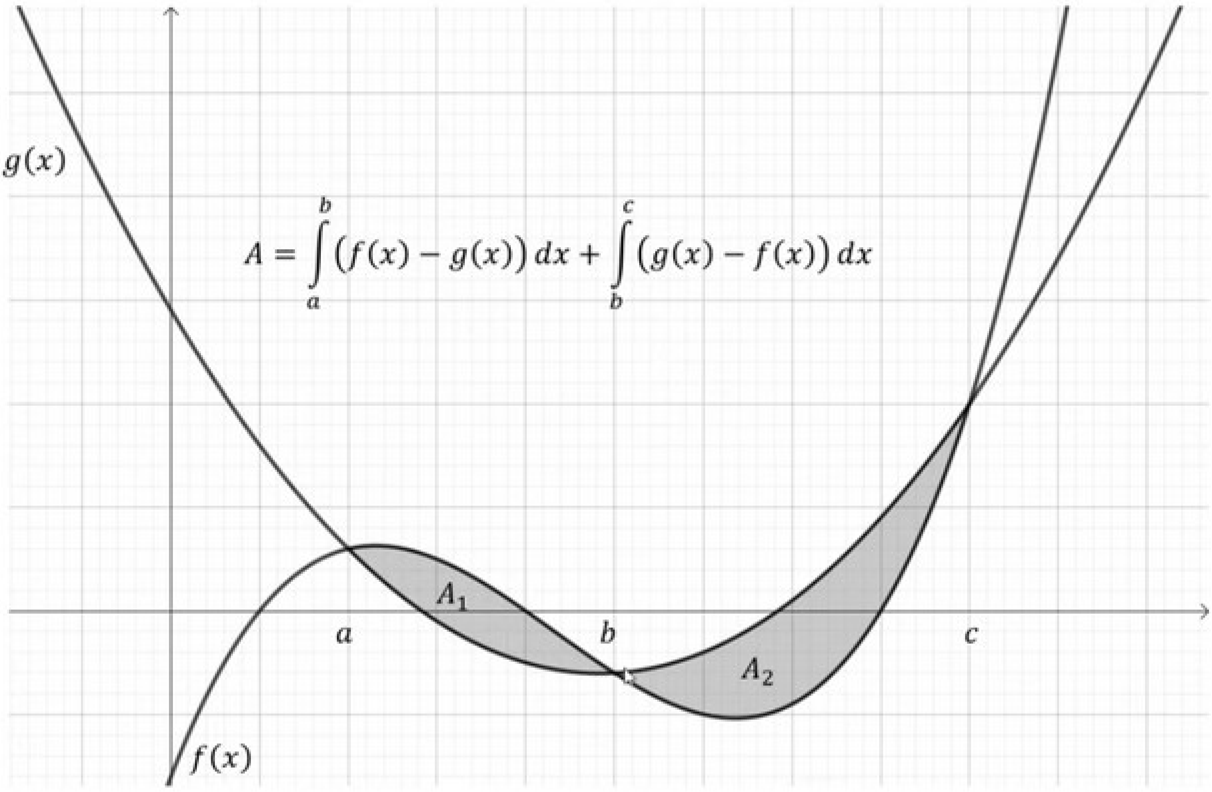


Abbildung 47: Fläche zwischen zwei Funktionen [9]

3.2.4 Inegration durch Substituion

Bei der Integration durch Substitution wird durch die Substitution eines Teiles des Integranden die ganze Integration vereinfacht. Bei der Substitution lassen sich manche Integrale durch Substitution (Ersetzung) eines Termes vereinfachen, so dass sie sich danach durch Anwendung der Faktorregel oder Summenregel auf ein Grundintegral zurückfuehren laesst.

1. Finden von der Integrationsvariable u.
2. Ein Teil des Integrals, wird durch u substituiert.
3. u wird Abgeleitet du/dx = u'

4. Die Gleichung wird auf dx umgeformt dx = du/u'
5. Der ausgewählte Teil des Integrals wird durch u ersetzt, dx wird durch du/u! ersetzt. x muss "wegfallen".
6. Integrieren mit u Die Integration erfolgt nun ganz normal, u wird als normale Variable behandelt.
7. Substitution aufheben Nachdem fertig integriert wurde, wird die Integrationsvariable wieder eingesetzt.

Beispiel:

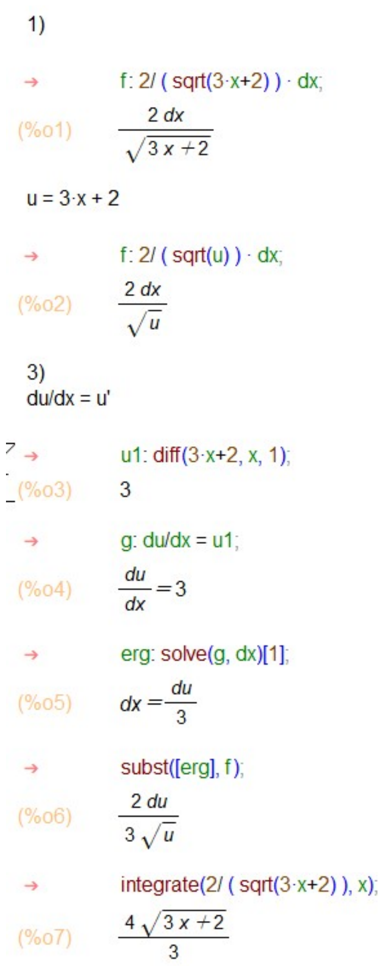


Abbildung 48: Inegration durch Substitution

3.2.5 Partielle Integration

Bei der partiellen Integration oder Produktintegration wird das Integral in zwei Faktoren zerlegt: (u*v)' = u'*v + u*v' - nun wird die ganze Gleichung integriert - Da sich eine Integration und eine Differenzierung aufhebt, sieht die Gleichung wie folgt aus => u*v - integral von u' * v dx

1. Bestimmen der Variable u und v'
2. u' und v werden berechnet
3. in die Fromel einsetzen
4. Integrieren und vereinfachen

Beispiel:

```
-->     f: x^2 · %e^(−x);
(%o1)   x^2 %e^-x

1)
  Bestimmen von u und v'
  u= x^2
  u'= 2·x
2)
  v'= %e^(-x)
  v= -%e^-x

3)

-->     u: x^2;
        u1: diff(u, x, 1);
        v1: %e^(−x);
        v: integrate(v1, x);
(%o2)   x^2
(%o3)   2 x
(%o4)   %e^-x
(%o5)   -%e^-x

Einsetzen in die Formel

-->     u·v − integrate( u1 · v, x ), ratsimp;
(%o6)   -(x^2+2 x+2) %e^-x

Mit der Maxima-Funktion

-->     integrate(f, x);
(%o7)   (-x^2-2 x-2) %e^-x
```

Abbildung 49: Partielle Integration

3.3 Beispiele

3.3.1 Kuvendisuksion

Beispiel anhand der Folgenden Funktionsgleichung.
y= (1/5) · (x^3 -2·x^2 -15·x)

1) Ableitungen bilden

```
→ f: (1/5) · (x^3 −2·x^2 −15·x);
```

(%o1) $\frac{x^3-2x^2-15x}{5}$

```
→ f1: diff(f,x,1);
  f2: diff(f,x,2);
```

(%o2) $\frac{3x^2-4x-15}{5}$

(%o3) $\frac{6x-4}{5}$

2) Dieser Punkt entfaellt weil im Nenner des Bruches kein x vorkommt

3) Nullstellen N

```
→ null: solve(0=f);
```

(%o4) $[x=-3, x=5, x=0]$

4) Extremwerte bestimmen

```
→ s: solve(f1=0);
```

(%o5) $[x=-\frac{5}{3}, x=3]$

Ueberpruefen ob die Extremwerte ein Minimum oder Maximum sind:
Folgender Abschnitt ueberprueft ob die Extremwerte lokales Minimum oder lokales Maximum sind.
f'(x0) = 0 && f''(x0) > 0 => x0 ist ein lokales Minimum
f'(x0) = 0 && f''(x0) < 0 => x0 ist ein lokales Maximum

```
→ min: []$ ... + 20 hidden lines
```

5) Wendepunkte und Wendetangente bestimmen

x-Wert des Wendepunktes

```
→ wpunktx: rhs( solve(f2=0)[1] );
```

(%o13) $\frac{2}{3}$

y-Wert des Wendepunktes

```
→ wpunkty: subst([x= wpunktx], f);
```

(%o14) $-\frac{286}{135}$

Der Wendepunkt lautet somit:

```
→ wpunkt: [wpunktx, wpunkty];
```

(%o15) $[\frac{2}{3}, -\frac{286}{135}]$

Aufstellen der Geradengleichung fuer die Wendetangente

```
→ k: subst(rhs( wpunktx ), x, f1 );
```

(%o16) -3

```
→ derg: rhs( solve ( wpunkty = k · wpunktx + d) [1] );
```

(%o17) $-\frac{16}{135}$

```
→ g: k·x+derg;
```

(%o18) $-3x-\frac{16}{135}$

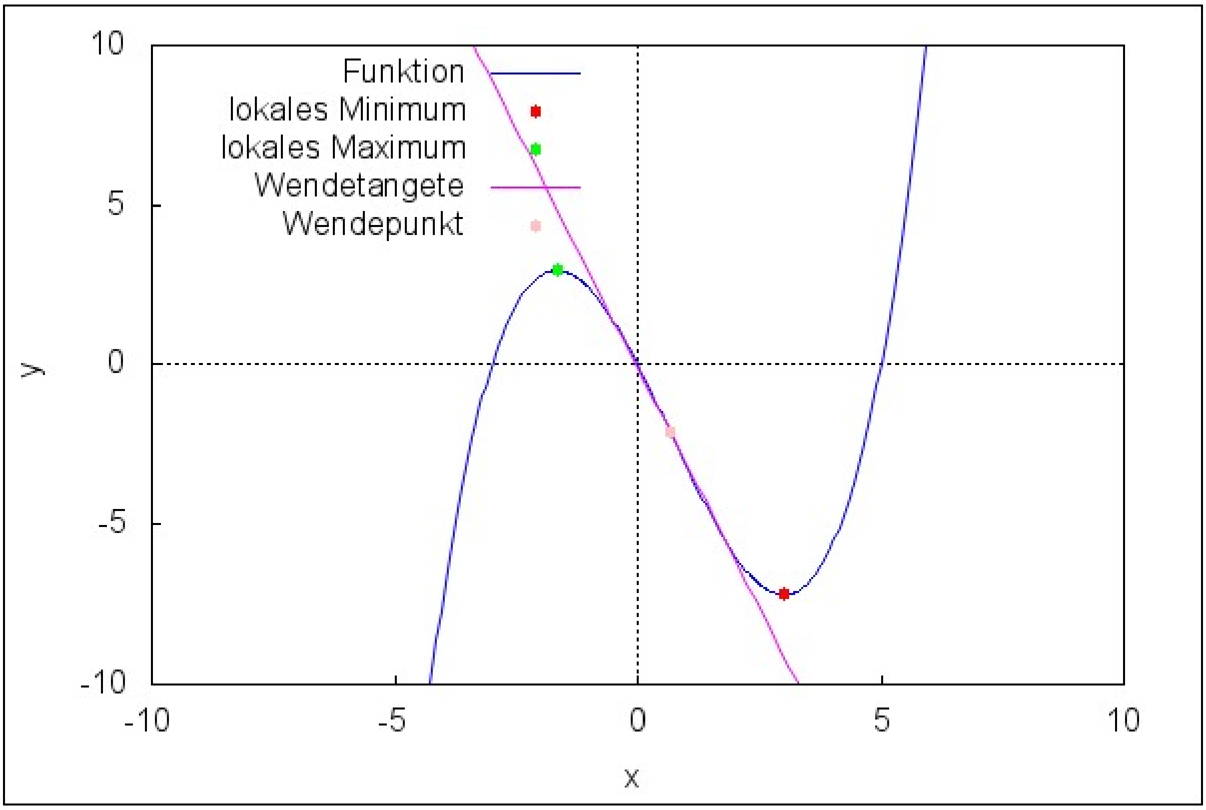


Abbildung 50: Eingezeichnette Punkte von Kurvendiskussion

3.3.2 Umgekehrte Kurvendiskusiion

Gegeben: Funktion 3. Grades, Tiefpunkt T(1|1), Wendepunkt W(2|3)
T ist Element von f(x)
T: f'(1)=0
T ist ein Maximum
W ist Element von f(x)
W: f''(2)=0

```
--> ukF:   a·x^3+b·x^2+c·x+d;
(%o1)  a x^3 + b x^2 + c x + d

--> ukF_abl1: ratsimp(diff(ukF, x, 1));
(%o2)  3 a x^2 + 2 b x + c

--> ukF_abl2: ratsimp(diff(ukF, x, 2));
(%o3)  6 a x + 2 b

--> ukF_abl3: ratsimp(diff(ukF, x, 3));
(%o4)  6 a
```

Aufstellen der Gleichung

```
--> ukF_g1: subst(x=1, ukF)=1;
(%o5)  d + c + b + a = 1
```

T(1|1)

```
--> ukF_g2: subst(x=1, ukF_abl1)=0;
(%o6)  c + 2 b + 3 a = 0
```

f'(1)=0 (Extremwert)

```
--> ukF_g3: subst(x=2, ukF)=3;
(%o7)  d + 2 c + 4 b + 8 a = 3
```

W(2|3)

```
--> ukF_g4: subst(x=2,ukF_abl2)=0;
(%o8)  2 b + 12 a = 0
```

f''(2)=0 (Wendepunkt)

```
--> minimum:[[1,1]];
(%o9)  [[1,1]]

--> wendepunkt:[[2,3]];
(%o10)  [[2,3]]
```

Koeffizienten

```
--> koef:   solve([ukF_g1,ukF_g2,ukF_g3,ukF_g4],[a,b,c,d]);
(%o11)  [[a=-1,b=6,c=-9,d=5]]
```

Gleichung mit den eingesetzten Werten

```
--> ukF_lsg:   subst(koef,ukF);
(%o12)  -x^3 + 6 x^2 - 9 x + 5
```

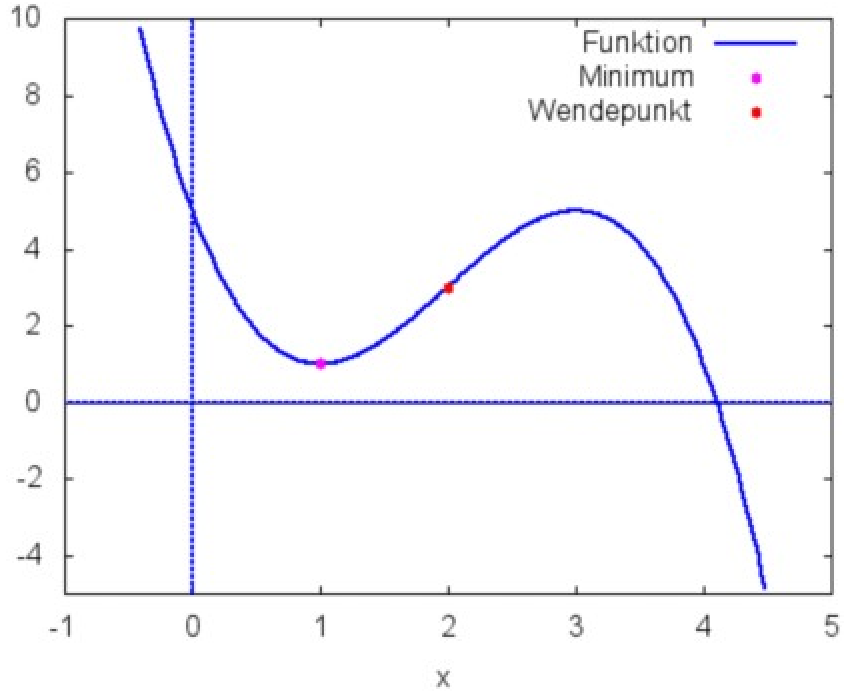


Abbildung 51: Plotten der berechneten Funktion

3.4 Extremwertaufgabe

Bsp: Gesucht ist der groesste Flaecheninhalt eines Rechteckes mit einem Umfang von 12LE?
LE ... Laengeneinheiten

1) HB aufstellen
$a \cdot b = A(a,b)$

2) NB aufstellen
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 12$
$a + b = 6$
$a = 6 - b$

3) Einsetzen der NB in die HB
$A(b) = (6 - b) \cdot b$

4) Differenzieren und auf Extremwerte schliesen.

```
→ hb: (6 − b) · b;
(%o1) (6−b) b

→ hb1: diff(hb, b, 1);
(%o2) 6−2 b

→ hb2: diff(hb, b, 2);
(%o3) −2

→ nb: 2·a + 2·b = 12;
(%o4) 2 b+2 a=12

→ solve( hb1=0 );
(%o5) [b=3]
```

Extremwert: b=3

5) Ueberpruefen ob der Extremwert ein Min- oder Maximum ist.
f''(x) < 0 => max
f''(x) > 0 => min

```
→ hb2;
(%o6) −2
```

Extremwert ist ein Maximum

6) Einsetzen der HB in NB

```
→ solve( subst(3,b,nb) );
(%o7) [a=3]
```

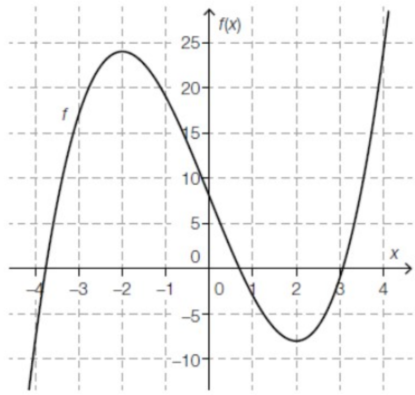
7) Antwort:
Der groesste Flaecheninhalt eines Rechteckes mit dem Umfang von 12LE betraegt, $a \cdot b = 3 \cdot 3 = 9$LE

3.4.1 Bifi Beispiel 1$_6$77

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 1_677	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(0) = 0$	☐
$f''(1) > 0$	☐
$f'(-3) < 0$	☐
$f'(2) = 0$	☐
$f''(-2) > 0$	☐

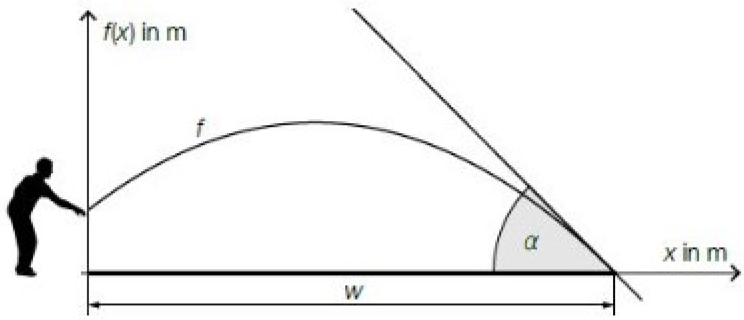
- Aussage 1würde bedeuten, dass bei der Stammfkt eine Extremstelle bei 0 vorliegen müsste klar nicht der Fall daher falsch.
- Zweite Aussge behauptet, dass die Krümmung an der Stelle eins positive ist. Das ist richtig. (Man kann ein lachendes Smilie einzeichnen.)
- Dritte Aussage behauptet, dass die Steigung an der Stelle -3 negativ ist. Dies ist nicht der fall ist deutlich steigend.
- Vierte Aussage behauptet, dass die Steigung an der Stelle 2 null ist. Dies ist der Fall da hier ein Tiefpunkt ist. Aussage daher war.

3.4.2 Bifi Beispel Boule B_444 Steigungswinkel berechnen

3)

Boule* (B_444)

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Berechnen Sie die Wurfweite *w*.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

Tangens von einen Winkel beschreibt immer die Steigung. Der Steigunswinkel ist daher arctan. Da die Steigung die erste Ableitung ist kann man in den arctang die erste Ableitung einsetzen. Daher gilt:

$$tan(\alpha) = k = f‘(x)$$

$$\alpha = arctan(k) = arcatan(f‘x)$$

Zuerst muss man sich ausrechnen wo wir den Winkel berechnen wollen. Also da wo die Funktion die X Achse schneidet.

(%i3) f(x):=-0.0959·x^2 +0.767·x+1.1;

(%o3) $f(x) := (-0.0959)\,x^2 + 0.767\,x + 1.1$

(%i9) realroots(f(x)),numer;

(%o9) $[x = -1.241456896066666, x = 9.23937138915062]$

Steigung an der Stelle ausrechnen

(%i13) diff(f(x),x);

(%o13) $0.767 - 0.1918\,x$

(%i14) a(x):=0.767-0.1918·x;

(%o14) $a(x) := 0.767 - 0.1918\,x$

(%i15) a(9.23937138915062);

(%o15) -1.005111432439089

Danach muss die eben berechnette Steigung in den arctan eingesetzt werden (Siehe erklärung oben wieso)

(%i24) atan(-1.005111432439089);

(%o24) -0.7879473590602671

In Grad umrechnen

(%i25) -0.7879473590602671·180/%pi,numer;

(%o25) -45.14605815263258

Der Aufprallwinkel beträgt also -45.13°. (Negativ da Fallend und Winkel nach unten zeigt) Daher der Winkel liegt nicht im Intervall.

3.4.3 Bifi Beispiel A_230 Baumkronenpfad

Baumkronenpfad * (A_230)

c) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter." Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.

In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.

Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit
$h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

h(x):= a· x^4+b·x^3+c·x^2+d·x+e;

$h(x) := a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$

ha=diff(h(x),x);

$ha = 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x + d$

g2:ha(90)=0;

$ha(90) = 0$

g3:h(40)=8;

$e + 40\,d + 1600\,c + 64000\,b + 2560000\,a = 8$

g4:h(0)=0;

$e = 0$

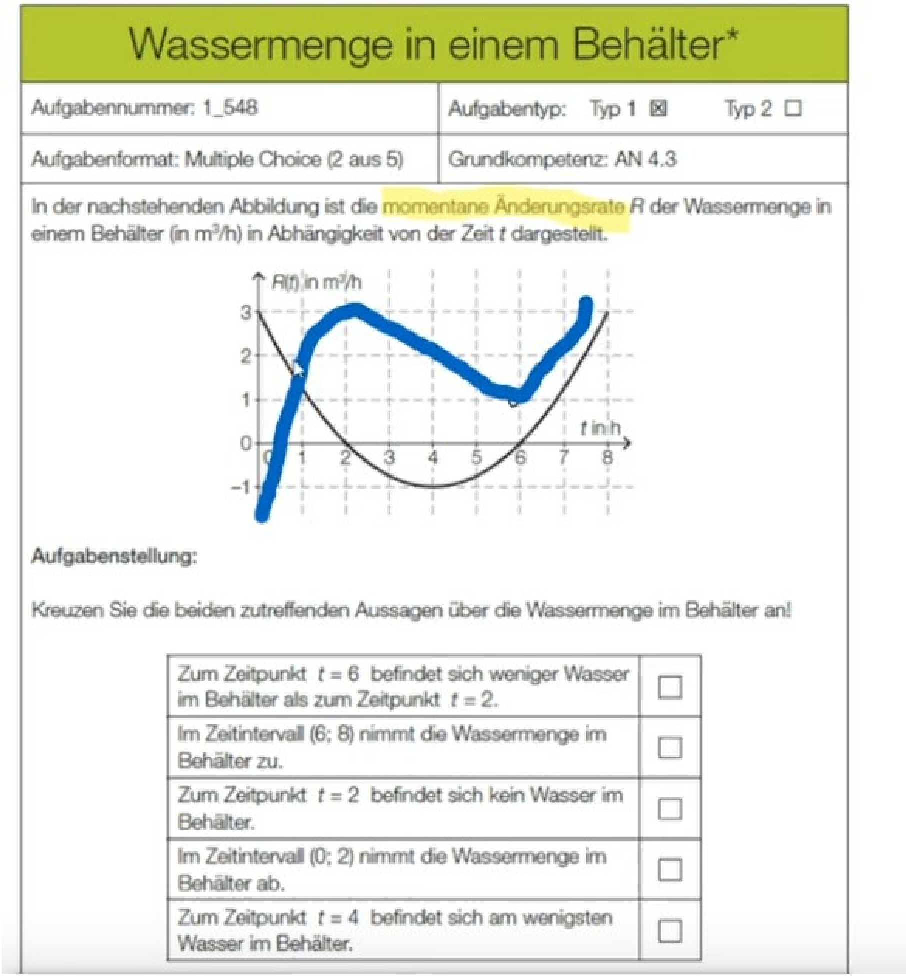
g5:h(160)=0;

$e + 160\,d + 25600\,c + 4096000\,b + 655360000\,a = 0$

g1:h(90)=10;

$e + 90\,d + 8100\,c + 729000\,b + 65610000\,a = 10$

3.4.4 Bifi Beispiel Wassermenge im Behälter



Wassermenge in einem Behälter*

Aufgabennummer: 1_548	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate R der Wassermenge in einem Behälter (in m³/h) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen über die Wassermenge im Behälter an!

Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt $t = 2$.	☐
Im Zeitintervall (6; 8) nimmt die Wassermenge im Behälter zu.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 2$ befindet sich kein Wasser im Behälter.	☐
Im Zeitintervall (0; 2) nimmt die Wassermenge im Behälter ab.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 4$ befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.	☐

In der Angabe ist die momentane Änderung R(t) gezeichnet. Wir benötigen aber die Stammfunktion davon da die Aussagen unten zu dieser beantwortet werden müssen. Man beginnt wieder von der entgegengesetzten Richtung und zeichnet die Stammfkt die man dank der NEW Eselsbrücke ungefähr zeichnen kann. Danach kann man die Aussagen relativ einfach beantworten.

1. Man sieht bei 2 ist ein Hochpunkt und 6 ein Tiefpunkt daher ist die Aussage wahr
2. Auch klar abzulesen da 6 ein Tiefpunkt ist gehts danach weiter rauf

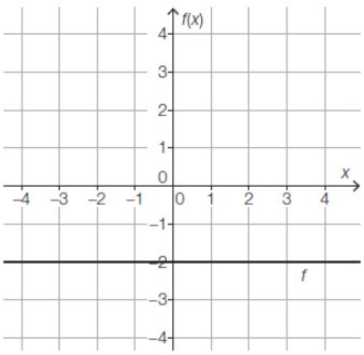
Alle weiteren Aussagen kann man eigentlich schon nicht mehr beachten da 2/5 anzukreuzen sind.

3.4.5 Stammfunktion einer konstanten Funktion

Stammfunktion einer konstanten Funktion*

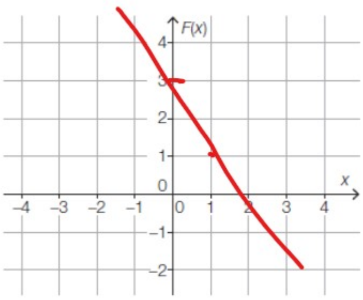
Aufgabennummer: 1_431	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer konstanten Funktion *f* dargestellt.



Aufgabenstellung:

Der Graph einer Stammfunktion *F* von *f* verläuft durch den Punkt *P* = (1|1).
Zeichnen Sie den Graphen der Stammfunktion *F* im nachstehenden Koordinatensystem ein!



Aus der Angabe kann man herauslesen das die Funktion f(x) = -2 ist. Die Stammfkt dazu ist also F(x)= -2*x+C. Die Frage ist aber was ist C. Da kommt der Punkt 1/1 ins spiel. Also setzte ich für x und y 1 ein daher:

$$1 = -2 * 1 * +C \to C = 3$$

Daher die Fkt die man einzeichnen muss ist F(x)= -2*x+3

3.4.6 Bifi Beispiel Skatepark c)

Hier ist wichtig in der Angabe zu sehen, das die Fkt nur von -3 bis 3 definiert ist. Daher die Muss ich die zwei Rechtekigen roso Flächen extra berechnen. Die Fläche für die Rosa Rechteke beträgt vier.

Skatepark (1) * (A_194)

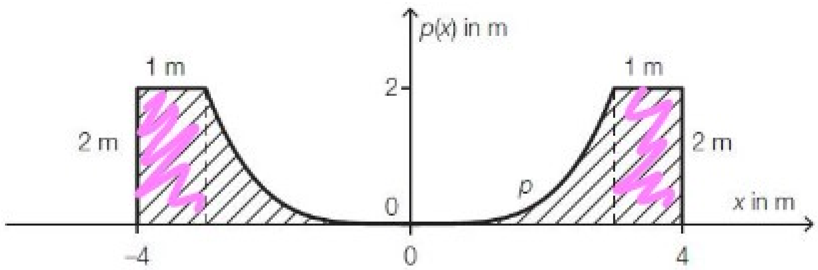
c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \leq x \leq 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)

$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

```
p(x):= 2/81·x^4·x^2;
```

$$p(x) := \frac{2}{81} x^4 x^2$$

```
integrate(p(x),x);
```

$$\frac{2x^7}{567}$$

```
P(x):=(2·x^7)/567;
```

$$P(x) := \frac{2x^7}{567}$$

```
P(3)−P(−3),numer;
```

15.42857142857143

```
A: 15.42857142857143+4;
```

19.42857142857143

3.4.7 Bifi Beispiel Skatepark d)

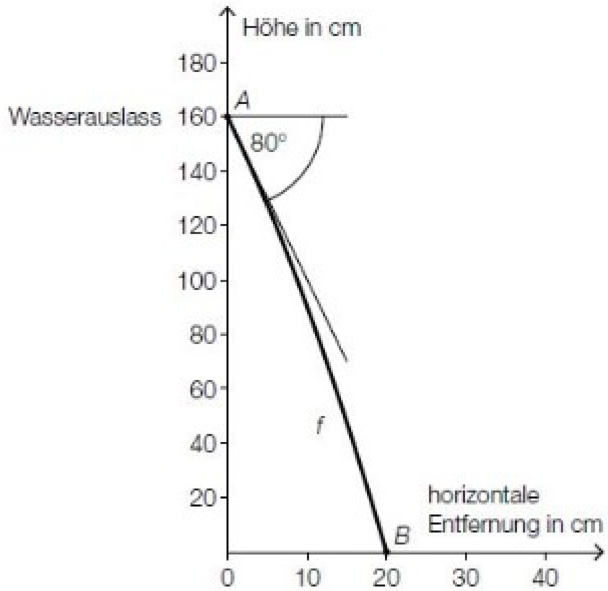
Skatepark (2) * (A_246)

d) Im Skatepark steht Trinkwasser zur Verfügung. An einer Wand ist ein Wasserauslass montiert, aus dem unter einem Tiefenwinkel von 80° ein Wasserstrahl austritt. Der Verlauf des Wasserstrahls kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f dargestellt werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontale Entfernung von der Wand in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

Der Graph der Funktion f ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c der Funktion f ermittelt werden können. Verwenden Sie dabei die Punkte A und B sowie den angegebenen Winkel.

→ f(x):= a· x^2 +b·x+c;

(%o25) $f(x):=a\,x^2+b\,x+c$

→ g1:f(0)=160;

(g1) $c=160$

→ g2:f(20)=0;

(g2) $c+20\,b+400\,a=0$

→ diff(f(x),x);

(%o32) $2\,a\,x+b$

→ fa(x):=2·a·x+b;

(%o33) $fa(x):=2\,a\,x+b$

Steigung an der stelle null berechnen (Steigung = 1.Ableitung) Da der Winkel nach unten geht mus der Winkel -80 statt 80 sein.

→ gl3:fa(0)=tan(−80)·(180/%pi);

(gl3) $b=-\frac{180\tan(80)}{\pi}$

4 Wahrscheinlichkeit

4.1 Theorie

Mit Wahrscheinlichkeit(Wkt) sind die möglichen „Ausfälle“ bei einem Zufallsexperiment gemeint. Ausfällen sind also die möglichen Ergebnisse und Lösungen des Experimentes. Die Wkt wird dabei immer als P(Probability) bezeichnet und in Prozent(0-100) oder als Bruch(1=100%) angeschrieben. Sehr gute Beispiele für Wkt sind der Wurf einer Münze oder das würfeln mit Spielwürfeln.Angenommen man wirft eine abgerundete Münze mit einer Kopf und einer Zahl Seite in die Luft, dann kann sie nur mit der Kopf oder Zahl Seite oben wieder aufkommen. Alle möglichen Ausfälle (Ω) werden nun folgendermaßen angeschrieben:

$$\Omega = \{K, Z\}$$

Dieses Ergebnis ist also jeweils gleich wahrscheinlich und man spricht daher von einer 50% Wkt oder auch einer Wkt von $1/2$. Wenn wir das eben gelernte nun auf einen geworfenen Spielwürfel übertragen haben wir folgende Ausfälle.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Da alle 6 Seiten gleich wahrscheinlich geworfen werden können hat jede der Seiten eine Wkt von $1/6$ oder auch $16.\overline{6}\%$

4.1.1 Urnen Beispiel

Angenommen man hat eine Urne mit 3 Roten, 4 weiße, 1 gelbe, 5 schwarze und 2 blaue Kugeln. Wenn man nun eine zufällige Kugel herausnimmt gibt es folgende möglichen Ausfälle.

$$\Omega = \{Rot, Weiß, Gelb, Schwarz, Blau\}$$

Diese Ausfälle sind aber nur gültig wenn die herausgenommene Kugel wieder zurückgelegt und oder nur einmal gezogen wird. Wenn zwimal gezogen wird Vervielfältigen sich die Ausfälle exponentiell und die Wkt wird von der Reihenfolge abhängig.

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} Rot \\ Rot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Rot \\ Weiß \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Rot \\ Gelb \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

Bei einfachem ziehen können wir nun folgende Daten erheben:

1 mal ziehen	**Rot**	**Weiß**	**Gelb**	**Schwarz**	**Blau**
Absolute Häufigkeit	3	4	1	5	2
Relative Häufigkeit	$3/15$	$4/15$	$1/15$	$5/15$	$2/15$
Prozentuelle Häufigkeit	20%	$\sim 27\%$	$\sim 6,7\%$	$\sim 33\%$	$\sim 13.3\%$

Tabelle 2: Erkentnisse beim Urnen Beispiel beim 1-maligen ziehen einer Kugel

Die relative Häufigkeit ist hier die Wkt die wir meistens berechnen wollen.

Satz von LaPlace

$$P(E) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{absoluteHäufigkeitdesGesuchten}{AnzahlderAusfälle}$$

Diesen Grundsatz haben wir oberen Beispiel bereits verwendet um die Relative Wkt zu bestimmen.

Baumdiagramme Wenn man die Wkt grafisch darstellen will, kann man dies z.B. durch ein Baumdiagramm machen. Angenommen man will die Wkt darstellen dass man 3-Mal hintereinander eine 6 würfelt. Das Ergebnis wäre hierfür $\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{6}^3$.

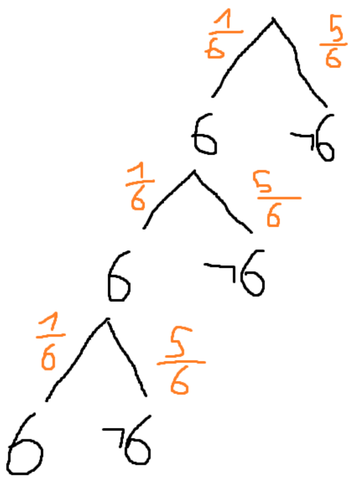


Abbildung 52: Ein Baumdiagramm das das 3-malige hintereinander würfeln einer 6 visualisiert

Man muss nur abwägen wie lange ein Baumdiagramm noch logisch, übersichtlich und nachvollziehbar ist.

Gegenwahrscheinlichkeit Im Baumdiagramm ist am anderen Zweig eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{6}$ angeschrieben. Diese Wkt ist die sogenannte Gegegenwahrscheinlichkeit und wir folgendermaßen ermittelt in dem man die bereits ermittelte Wkt von 1 abzieht $1 - P(A)$. Wichtig ist hierbei zu erkennen wann die Gegenwahrscheinlichkeit in Beispielen nützlich ist. Wenn z.B. die Wkt gefragt ist, dass bei 3-mal würfeln mind. eine gerade Zahl dabei ist. Hier kann man einfach die Wahrscheinlichkeit, dass nie eine gerade Zahl kommt vom gesamten abziehen und erspart sich dadurch Arbeit. $1 - P(keinegeradeZahl)$

4.2 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)}$$

Reihenfolge wichtig Der Binomialkoeffizient kommt bei Permutationen zum Einsatz, insbesondere beim ziehen ohne zurücklegen. Die erste Ziehung hat ohne zurücklegen n Möglichkeiten während die zweite Ziehung nur noch n-1 Möglichkeiten hat => $\frac{n!}{(n-m)!}$. Angenommen man hat 365 Kugeln und es werden ohne zurücklegen m Ziehungen durchgeführt, so ist die Berechnung die folgende:

$$\frac{365!}{(365-m)!}$$

Reihenfolge unwichtig Nehmen wir die Lottoziehung als Beispiel. Es gibt 45 Ausfälle ohne zurücklegen mit 6 Ziehungen. Hier findet der Binomialkoeffizient Verwendung und zwar folgendermaßen:

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{(45-6)! * 6!} = \frac{45!}{39! * 6!} \implies \frac{45 * 44 * 43 * 42 * 41 * 40}{6!}$$

Angenommen es soll die Wkt berechnet werden, dass 2 Personen in einer Gruppe aus m Personen am gleichen Tag (Jahr irrelevant) Geburtstag haben. Das wäre eine Ziehung mit zurücklegen und hätte nun folgende Berechnung des Binomialkoeffizienten bei einer Gruppe von 30 Personen:

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{365+m-1}{m} = \binom{394}{30}$$

4.3 Totale Wahrscheinlichkeit

$$E_1 ... E_n ... Ereignisse \tag{1}$$
$$P(E_k) > 0, 1 \leq k \leq n \tag{2}$$
$$\Omega = U_{k=1}^{n} E_k \tag{3}$$

Die Ereignisse bilden die Zerlegung von Ω

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|E_k)P(E_k)$$

Folgendes Beispiel: Zwei Spieler Ananas und Banane würfeln rundenweise, abwechselnd. Der, der eine höhere Augenzahl wirft erhält einen Punkt (bei Gleichstand wird erneut gewürfelt).

$$\implies P(SpielerbekommtPunkt) = \frac{1}{2}$$

Derjenige der zuerst 5 Punkte hat, hat gewonnen. Bei einem Spielstand von 4:3 für die Ananas wird das Spiel abgebrochen. Welchen Gewinnanteile bekommt jeder?

- $\rightarrow$ Ananas bekommt Punkt $\implies$ Ananas gewinnt
- $\rightarrow$ Banane bekommt Punkt $\implies$ 4:4
  - $\rightarrow$ Ananas bekommt Punkt $\implies$ Ananas gewinnt

  - $\rightarrow$ Banane bekommt Punkt $\implies$ Banane gewinnt

Hier können wir die Annahme erstellen, dass die Ananas eine 2/3 Chance hat zu gewinnen. Die Totale Wkt ist nun folgendermaßen ermittelbar. E_1: A hat eine höhere zahl gewürfelt und damit gewonnen.

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

E_2: B hat eine höhere Zahl gewürfelt und es steht 4:4

$$P(E_2) = \frac{1}{2}$$

F_1: A hat eine höhere zahl gewürfelt und damit gewonnen.

$$P(F_1|E_2) = \frac{1}{2}$$

F_2: B hat eine höhere zahl gewürfelt und damit gewonnen.

$$P(F_2|E_2) = \frac{1}{2}$$

Die Wkten sind nun folgende:

$$P(Bgewinnt) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(Agewinnt) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Tatsächlich hat die Ananas Anspruch auf $\frac{3}{4}$ des Gewinns anstatt den ursprünglich angenommenen $\frac{2}{3}$.

4.3.1 Bedingt Wahrscheinlichkeit

Oft interessiert man sich für das Eintreten eines Ereignisses unter einer Bedingung (Vorraussetzung). $P(B|A)$ Diese Bedingte Wahrschenlichkeit kam bereits in dem obrigen Beispiel vor, da das Spiel nur weitergehen konnte, wenn die Banane die nächse Runde gewinnt $\implies$ Vorraussetzung.

4.3.2 Zufallsvariablen/Verteilungen

Definition Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt diskrete Zufallsvariable, wenn sie

1. nur endlich/abzählbar unendliche viele Werte einnimmt (man kann sie durchnummerieren)
2. für jeden Wert x eine Wkt $P(X = x)$ erklärt ist, dass X den Wert x annimt z.B. $P(X = 6$

Ein Beispiel dafür wäre

$$\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$
$$P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

4.3.3 Hypergeometrische Verteilung

Definition Eine Zufallsvariable heißt hypergeometrisch verteilt, wenn

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Ein Beispiel dafür wäre erneut die Lottoziehung. 6 zahlen werden gezogen (n) bei einer Gesamtanzahl von 45 Zahlen (N) und 6 „defekte" (M) welche die Tipps sind. m ist die Anzahl der richtig getippten Zahlen die wir ermitteln wollen.

$$P(X = m) = \frac{\binom{6}{m}\binom{45-6}{6-m}}{\binom{45}{6}}$$

Ausgerechnet hat der Jackpot (m=6) folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} = \frac{1 * 1}{8145060}$$

Die Wahrscheinlichkeit im Lotto zu gewinnen ist defacto 0.

Definition Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die Abbildung $F^X : \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$ $F^X(x) = P(X \leq x)$ heißt Verteilungsfunktion. Die DIchtefunktion ist folgendermaßen definiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

$$\implies P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Ein Beispiel wäre ein Zug der im Stundentakt am Bahnhof einfährt. Die Wkt dass man zufällig am Bahnhof ist als er eintrifft ist folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1/60 & : x \in [0, 60) \\ 0 & : x < 0 \;\&\; x \geq 60 \end{cases}$$

$$?(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

4.3.4 Binomialverteiilung

Definition

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k}$$

EIn Beispiel heir wäre das ermitteln von Defekten Produkten aus einer Produktion. Eine Schraube ist zu 5% defekt. es werden 100 Schrauben getestet und die Wkt, dass 7 defekte Schrauben gefunden werden soll berechnet werden.

$$P(X = 7) = \binom{100}{7} * 0.05^7(1 - 0.05)^{100-7}$$

4.4 Bifi-Bsp + Maxima Code

Blutgruppen*

Aufgabennummer: A_243

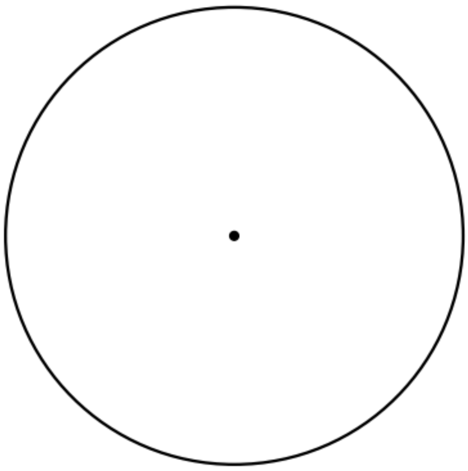
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %

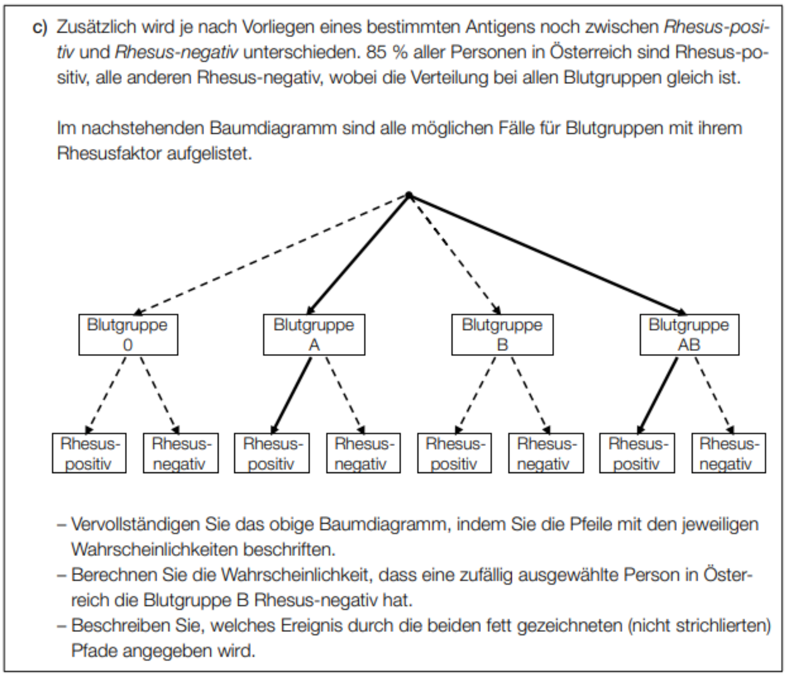
a) Die Verteilung der Blutgruppen in Österreich soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

- Berechnen Sie die Winkel der jeweiligen Sektoren.
- Zeichnen Sie die Sektoren in den nachstehenden Kreis ein.



b) – Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Zufallsstichprobe von 25 Personen in Österreich mindestens 9 Personen die Blutgruppe 0 haben.

Abbildung 53: Aufgabenstellung: Blutgruppen



c) Zusätzlich wird je nach Vorliegen eines bestimmten Antigens noch zwischen *Rhesus-positiv* und *Rhesus-negativ* unterschieden. 85 % aller Personen in Österreich sind Rhesus-positiv, alle anderen Rhesus-negativ, wobei die Verteilung bei allen Blutgruppen gleich ist.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind alle möglichen Fälle für Blutgruppen mit ihrem Rhesusfaktor aufgelistet.

- Vervollständigen Sie das obige Baumdiagramm, indem Sie die Pfeile mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriften.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich die Blutgruppe B Rhesus-negativ hat.
- Beschreiben Sie, welches Ereignis durch die beiden fett gezeichneten (nicht strichlierten) Pfade angegeben wird.

Abbildung 54: Aufgabenstellung: Blutgruppen

4.4.1 a)

Die Berechnung der Sektoren war sehr simpel. Ich habe einfach den Prozentsatz der Blutgruppe mal 3.6 gerechnet um den Winkel des Sektors im Kreis zu ermitteln. Anschließend habe ich dies eingezeichnet und beschriftet.

```
(%i2)   kill(all);
        load(distrib)$
        load(draw)$
(%o0)   done
```

1 a)

```
(%i15)  B0: 37 · 360/100,numer;
        Ba: 41 · 360/100,numer;
        Bb: 15 · 360/100,numer;
        Bab: 7 · 360/100,numer;
(B0)    133.2
(Ba)    147.6
(Bb)    54
(Bab)   25.2
```

Abbildung 55: Aufgabenstellung: Blutgruppen

Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %

a) Die Verteilung der Blutgruppen in Österreich soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

– Berechnen Sie die Winkel der jeweiligen Sektoren.
– Zeichnen Sie die Sektoren in den nachstehenden Kreis ein.

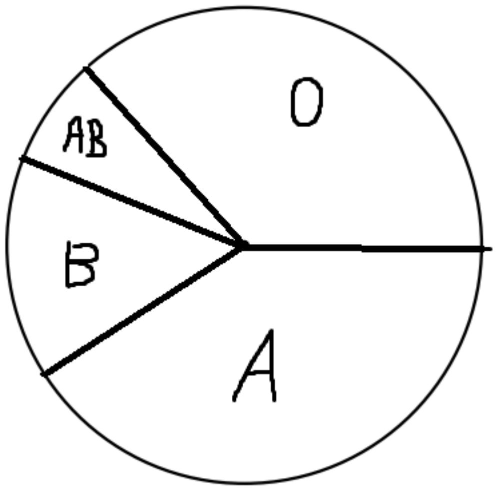


Abbildung 56: Aufgabenstellung: Blutgruppen

4.4.2 b)

um zu ermitteln wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens 9 von 25 Menschen Blutgruppe 0 haben hab ich die Gegenwahrscheinlichkeit mittels dem Binomialkoeffizienten berechnet. Dies folgende Berechnung ermittelt die Wahrscheinlichkeit dass 0-8 Leute Blutgruppe 0 haben und zieht diese von der Gesamtheit ab $\Longrightarrow$ mindestens 9 Menschen sind positiv.

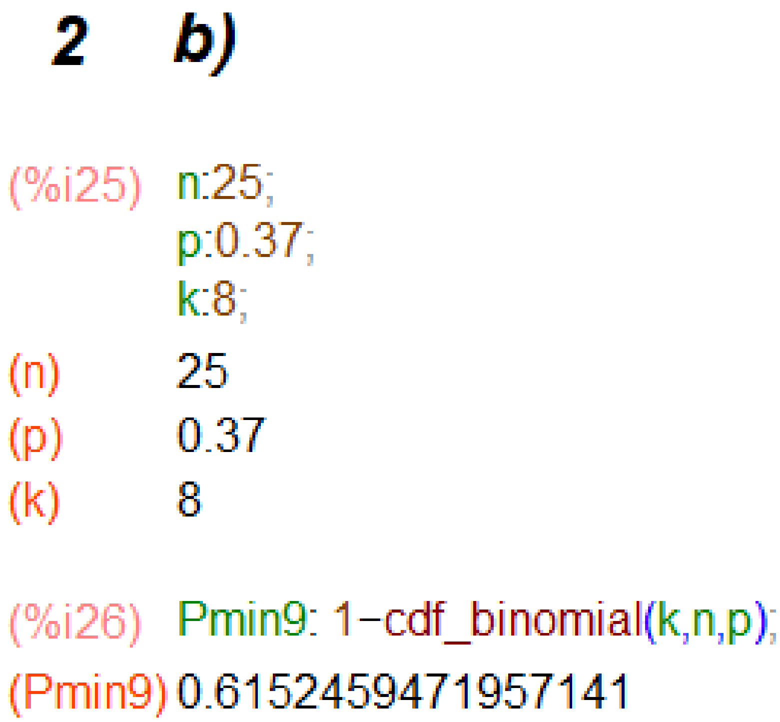


Abbildung 57: Aufgabenstellung: Blutgruppen

4.4.3 c)

Das bamdiagramm wurdeim unteren Bild um die Wahrscheinlichkeiten der Blutgruppen und jeweils ob Rhesus positiv oder negativ eintritt ergänzt.

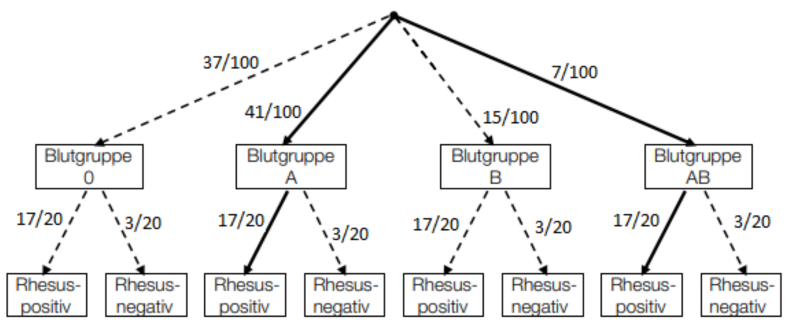


Abbildung 58: Aufgabenstellung: Blutgruppen

Die Wkt, dass eine zufällige Person Die Blutgruppe B negativ hat ist durch das Multiplizieren entlang des Baumdiagramms ermittelbar.

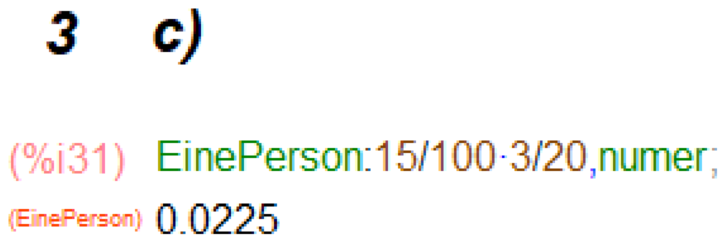


Abbildung 59: Aufgabenstellung: Blutgruppen

Die beiden Fetten Linien beschreiben die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person die Blutgruppe A positiv oder AB positiv hat.

5 Statistik

5.1 Theorie

Statistik *„ist die Lehre von Methoden zum Umgang mit quantitativen Informationen“*[11]. In der Mathematik dient die Statistik zum beweisen, allgemein gültiger Aussagen, mit den Methoden der reinen Mathematik. Sie bedient sich dabei aus Erkenntnissen der mathematischen Grundlagendisziplinen Analysis und linearer Algebra. [4]

5.1.1 Absolute Häufigkeit

Wie oft Kommt ein Wert in einer Wertemenge vor?

Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	1	2

Tabelle 3: Absolute Häufigkeit

$$Absolute\ Haeufigkeit\ von\ 1 = 3$$

$$Absolute\ Haeufigkeit\ von\ 2 = 1$$

[8]

5.1.2 Relative Häufigkeit

Wie oft kommt ein Wert in relation zur anzahl der Werte in einer Wertemenge vor? Abs. häufigkeit/ Anzahl aller häufigkeiten.

Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	1	2

Tabelle 4: Relative Häufigkeit

$$Relative\ Haeufigkeit\ von\ 1 = \frac{3}{4}$$
$$Relative\ Haeufigkeit\ von\ 2 = \frac{1}{4}$$

[8]

5.1.3 Arithmetisches Mittel

Ist der sozusagen durchschnittliche wert einer Wertmenge. Man ermittelt das arithmetische mittel indem man die Werte der wertemenge addiert und die summe durch ihre anzahl dividiert.
Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	1	2

Tabelle 5: Arithmetisches Mittel

$$Arithmetisches\ Mittel\ = \frac{5}{4}$$

[8]

5.1.4 Modalwert

Der Modalwert ist der Wert der in einer Wertemenge am häufigsten vorkommt
Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	3	2

Tabelle 6: Modalwert

$$Modalwert = 1$$

5.1.5 Varianz/ Standardabweichung

Die Varianz wird auch durchschnittlicher Quadratischer Abstand genannt. Sie wird häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, aber auch in der Statistik verwendet. Zur berechnung der Varianz teilt man die Summe der Quadrate der Differenzen von den Werten und dem Arithmetischem Mittel durch die Anzahl der Werte. Die Standardabweichung beschreibt den durchsnittlichen abstand eines Wertes zum arithmetischen mittels. Die Standardabweichung ergibt sich aus der Quadratwurzel der Varianz.

$$Varianz = \frac{(a_1 - \text{arith.Mittel})^2 \cdot (a_2 - \text{arith.Mittel})^2 ... (a_n - \text{arith.Mittel})^2}{n}$$

$$Standartabweichung = \sqrt{Varianz}$$

Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	3	4

Tabelle 7: Varianz/ Standardabweichung

[8]

5.1.6 Median

Der Median ist der Wert in der mitte der (geordneten) Wertemenge. Dieser wird bei einer geraden Anzahl an Datensätzen anders ermittelt als bei einer ungeraden Anzahl
Ungerade:
Bei einer ungeraden Anzahl an Werten ist der Median der Wert in der mitte, also der Wert der gleich viele Werte vor und hinter sich hat.

$$Stelle\ des\ Medians = \frac{Gesamtanzahl + 1}{2}$$

Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E
n	1	2	3
Note	1	1	5

Tabelle 8: Relative Häufigkeit

$$Median = 1$$

Gerade:
Bei einer geraden Anzahl an Werten ergibt sich der Median aus dem Mittelwert der mittleren zwei Werte.

$$Median = \frac{Wert\ an\ der\ Stelle : \frac{\text{Gesamtanzahl}}{2} + Wert\ an\ der\ Stelle : (\frac{\text{Gesamtanzahl}}{2} + 1)}{2}$$

Bsp: Zeugnis

Fach	AM	D	E	SEW
n	1	2	3	4
Note	1	1	2	3

Tabelle 9: Relative Häufigkeit

$$Median = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

[8]

5.1.7 Boxplot

Ein Boxplot ist ein Diagramm zu graphischen Darstellung, der Verteiung einer Wertemenge. Ein Box-Plot soll schnell einen Eindruck darüber vermitteln, in welchem Bereich die Daten liegen und wie sie sich über diesen Bereich verteilen. Deshalb werden alle Werte der sogenannten Fünf-Punkte-Zusammenfassung, also der Median, die zwei Quartile und die beiden Extremwerte, dargestellt.
Begriffe:

Begriff	**Beschreibung**	**Position im Boxplot**
Minimum	Kleinster Datenwert des Datensatzes	Ende eines Whiskers oder entferntester Ausreißer
Unteres Quartil	Die kleinsten 25 % der Datenwerte sind kleiner als dieser oder gleich diesem Kennwert	Beginn der Box
Median	Die kleinsten 50 % der Datenwerte sind kleiner als dieser oder gleich diesem Kennwert	Strich innerhalb der Box
Oberes Quartil	Die kleinsten 75 % der Datenwerte sind kleiner als dieser oder gleich diesem Kennwert	Ende der Box
Maximum	Größter Datenwert des Datensatzes	Ende eines Whiskers oder entferntester Ausreißer
Spannweite	Gesamter Wertebereich des Datensatzes	Länge des gesamten Box-Plots (inklusive Ausreißer)

Tabelle 10: Boxplots Begriffsbeschreibung[4]

Fach	AM	D	E	SEW	GGP	REL	INSY	ITP	MEDT
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Note	1	2	3	3	4	4	4	5	5

Tabelle 11: Boxplot Wertetabelle

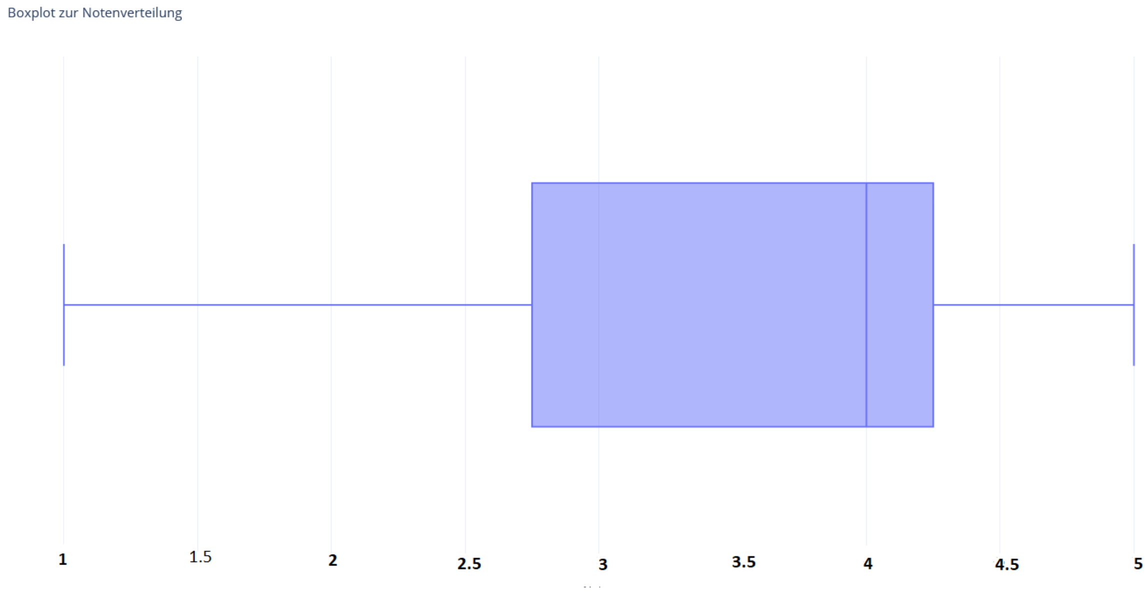


Abbildung 60: Boxplot

	Minimum	Unteres Quartil	Median	Oberes Quartil	Maximum	Spannweite
Wert	1	2.75	4	4.25	5	4

Tabelle 12: Boxplot zuordung

5.2 Bifi-Bsp + Maxima Cod

Aufgabennummer: 2_017	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.1, WS 1.1, AN 1.3, FA 1.9

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Laut Immissionsschutzgesetz – Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.

Abbildung 1 zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge von Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlichen Fahrgeschwindigkeiten (in km/h) für einen durchschnittlichen PKW. Die freigesetzte NO_x-Menge wird in Gramm pro gefahrenem Kilometer angegeben. Die Abhängigkeit von Fahrgeschwindigkeit und NO_x-Ausstoß wurde durch eine Funktion A modelliert, deren Graph ebenfalls in Abbildung 1 dargestellt ist.

Abbildung 2 zeigt den Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (= Emission) von Stickoxiden und Feinstaub (PM 10) im Unterinntal in Tirol.

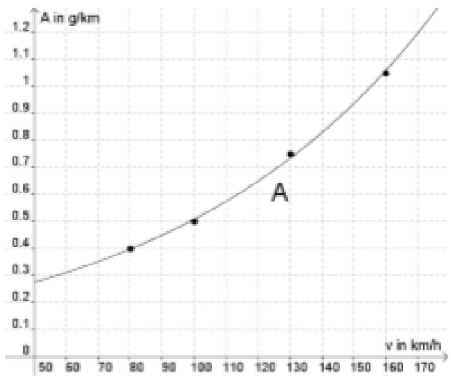


Abbildung 1

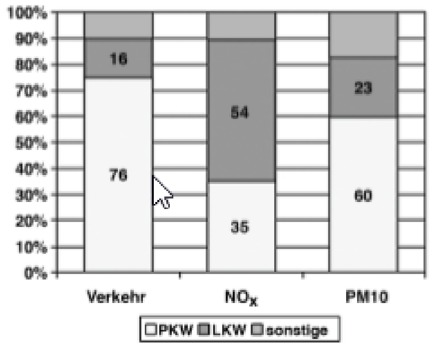


Abbildung 2

Quelle: http://www.tirol.gv.at/themen/verkehr/verkehrsplanung/verkehrsprojekte/tempo100

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie anhand der Messwerte in Abbildung 1, um wie viele Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der sonst erlaubten 130 km/h nur mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf!
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion A in Abbildung 1.

Abbildung 61: Emissionen1

b) Verursachen im Tiroler Unterinntal die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- bzw. Feinstaub-Emissionen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Geschwindigkeitsmessungen auf der Autobahn A12 im Tiroler Unterinntal haben gezeigt, dass die Geschwindigkeitslimits von mehr als 90 % der Verkehrsteilnehmer/innen eingehalten werden und weniger als 1 % der Verkehrsteilnehmer/innen die Geschwindigkeitslimits um mehr als 10 % überschreiten. Die Geschwindigkeitsüberschreitungen können daher für die folgende Fragestellung vernachlässigt werden.
Begründen Sie, welche der beiden Maßnahmen (A oder B) wirkungsvoller ist, wenn entlang der A12 die Stickoxid-Emissionen weiter reduziert werden sollten! Durch Maßnahme A eventuell anfallende zusätzliche Emissionen durch die Bahn werden vernachlässigt.

A eine Verlagerung der Hälfte des Gütertransports durch LKW auf die Schiene (d. h. Transport der LKW mit der Bahn)

B ein Tempolimit von 80 km/h für PKW und LKW

Entnehmen Sie die für die Begründung benötigten Werte den Abbildungen 1 und 2 und führen Sie diese an!

Abbildung 62: Emissionen2

c) Ermitteln Sie rechnerisch anhand von Abbildung 1 das Ergebnis des Ausdrucks $\frac{A(160) - A(100)}{60}$ auf vier Dezimalstellen genau!
Interpretieren Sie das Ergebnis dieses Ausdrucks im Hinblick auf die NO_x-Emissionen!

d) Zur Modellierung der in Abbildung 1 dargestellten Abhängigkeit des NO_x-Ausstoßes A von der Fahrgeschwindigkeit v kommen unterschiedliche Funktionstypen in Frage.

Welche Funktionstypen können zur Modellierung der Funktion A verwendet worden sein? Kreuzen Sie die beiden geeigneten Funktionsgleichungen an!

$A(v) = a \cdot v + b$ mit $a > 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b$ mit $a < 0, b > 0$	☐
$A(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $a > 0, c > 0, b \in \mathbb{R}$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b > 1$	☐
$A(v) = a \cdot b^v$ mit $a > 0, b < 1$	☐

Begründen Sie, warum die drei restlichen Funktionsgleichungen für die Modellierung von A in Abbildung 1 nicht geeignet sind!

Abbildung 63: Emissionen3

Emissionen 2 017

1

130km/h entsprechen 0.75g/km
100km/h entsprechen 0.5g/km

(%i11) ((0.5−0.75)·100)/0.75;
(%o11) −33.33333333333334

Der Stickoxid ausstoß nimmt bei einer Geschwindigkeits reduktion von 130km/h auf 100km/h um 33% ab
Außerdem ist der Ausstoß der Stickoxide nicht direkt Proportional zur Geschwindigkeits des Pkw, da der Graph sonst linear wäre

2

mehr als 90% halten das Geschwindigkeitslimit ein. Weniger als 1% überschreiten sie um über 10%
130km/h entsprechen 0.6g/km
80km/h entsprechen 0.4g/km

Da für LKWs bereieits eine 80km/h begenzung gilt und LKWs über 50% der NOx Emissionen ausmachen, würde das auslagern von 50% der LKWs in einer reduktion von ca 26%der NOx Werte zu folge haben.

3

(%i13) (1.05−0.5)/60;
(%o13) 0.009166666666666667

Diese Rechnung beschreibt die mittlere Steigung der Emmisionen in g/km pro km/h von 100 bis 160 km/h,
sie beträgt 0.0091g/km

Abbildung 64: Emissionen Maxima 1

1 Der Stickoxid ausstoß nimmt bei einer Geschwindigkeits reduktion von 130km/h auf 100km/h um 33% ab Außerdem ist der Ausstoß der Stickoxide nicht direkt Proportional zur Geschwindigkeits des Pkw, da der Graph sonst linear wäre
2 mehr als 90% halten das Geschwindigkeitslimit ein. Weniger als 1% überschreiten sie um über 10% 130km/h entsprechen 0.6g/km 80km/h entsprechen 0.4g/km
Da für LKWs bereieits eine 80km/h begenzung gilt und LKWs über 50% der NOx Emissionen ausmachen, würde das auslagern von 50% der LKWs in einer reduktion von ca 26% der NOx Werte zu folge haben.
3 Diese Rechnung beschreibt die mittlere Steigung der Emmisionen in g/km pro km/h von 100 bis 160 km/h, sie beträgt 0.0091g/km

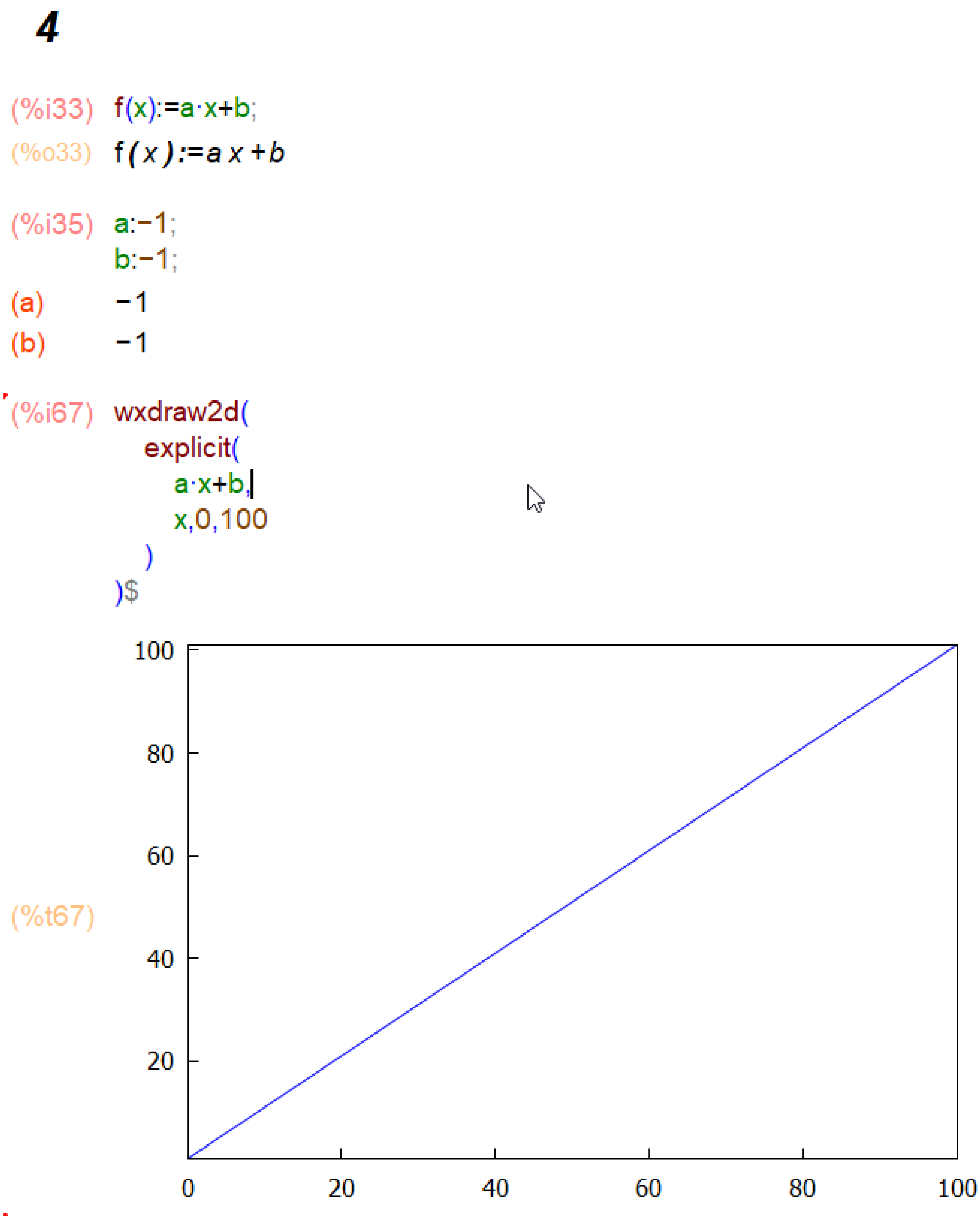


Abbildung 65: Emissionen Maxima 2

```
a:-1$
b:1$
wxdraw2d(
   explicit(
      a·x^2+b,
      x,0,100
   )
)$
```

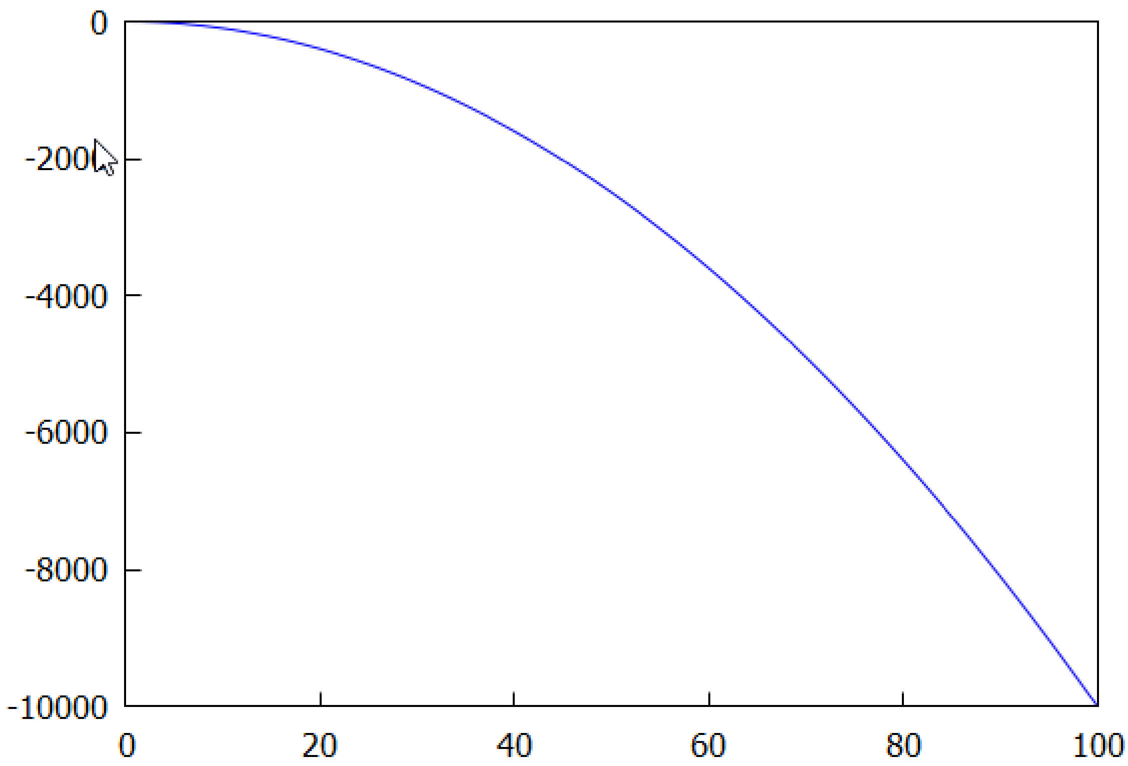


Abbildung 66: Emissionen Maxima 3

```
a:1$
b:1$
c:1$
wxdraw2d(
   explicit(
      a·x^2+b·x+c,
      x,0,100
   )
)$
```

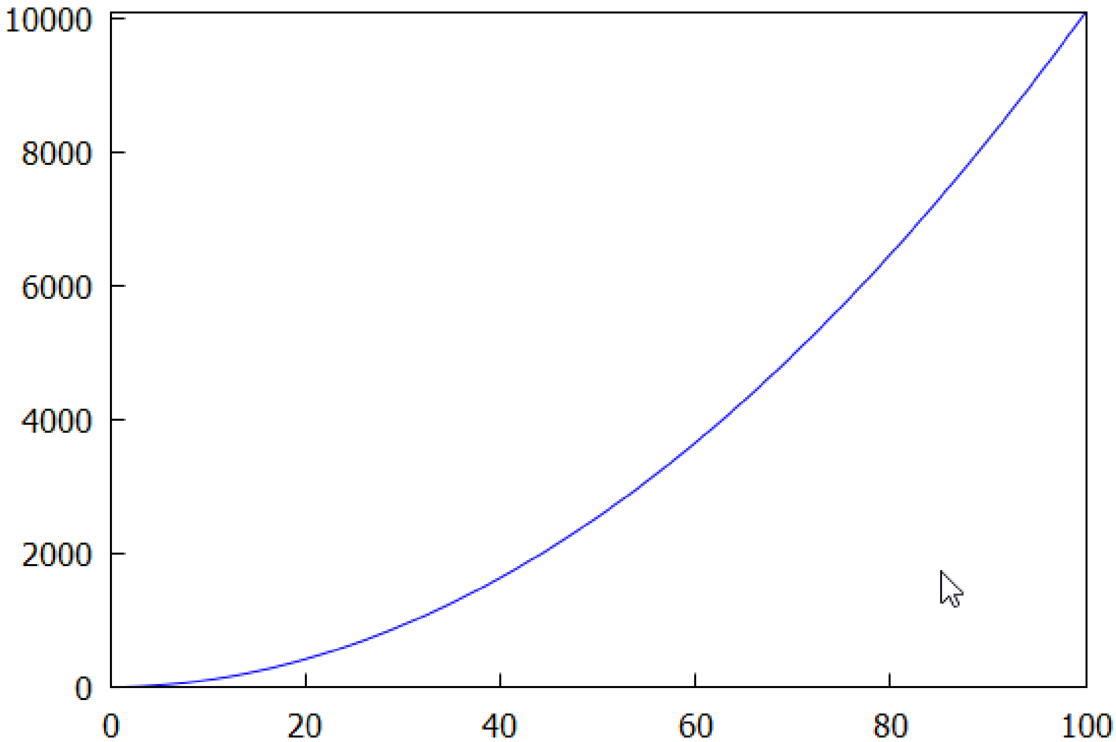


Abbildung 67: Emissionen Maxima 4

```
a:1$
b:1.5$
wxdraw2d(
    explicit(
        a·b^x,
        x,0,100
    )
)$
```

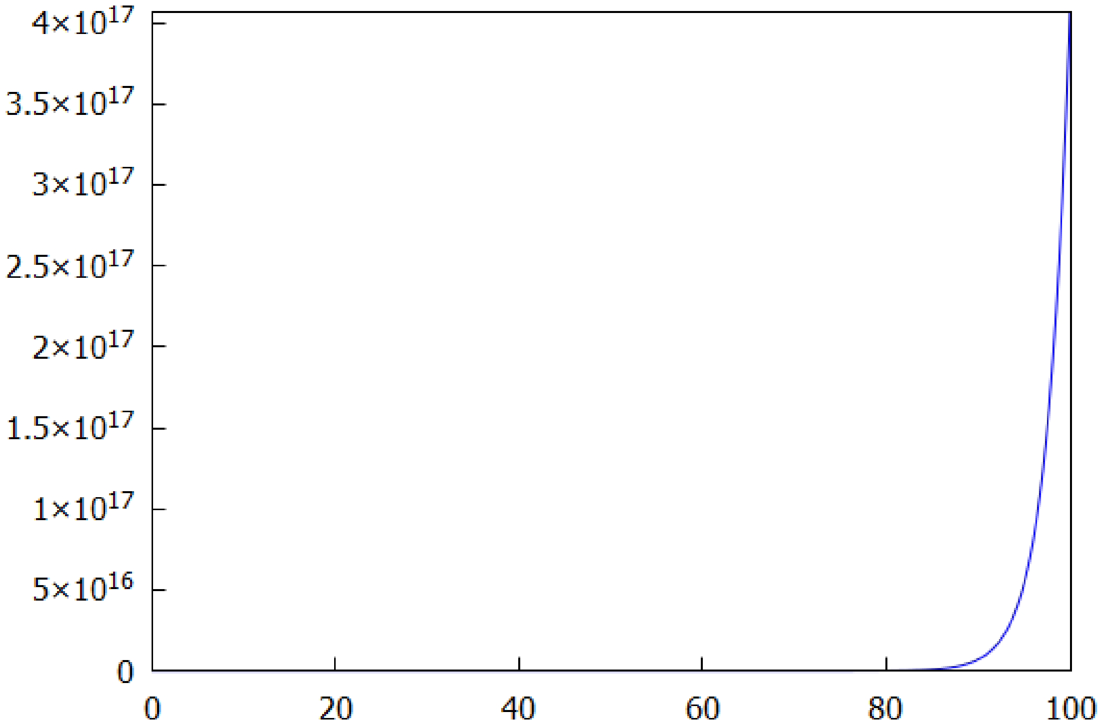


Abbildung 68: Emissionen Maxima 5

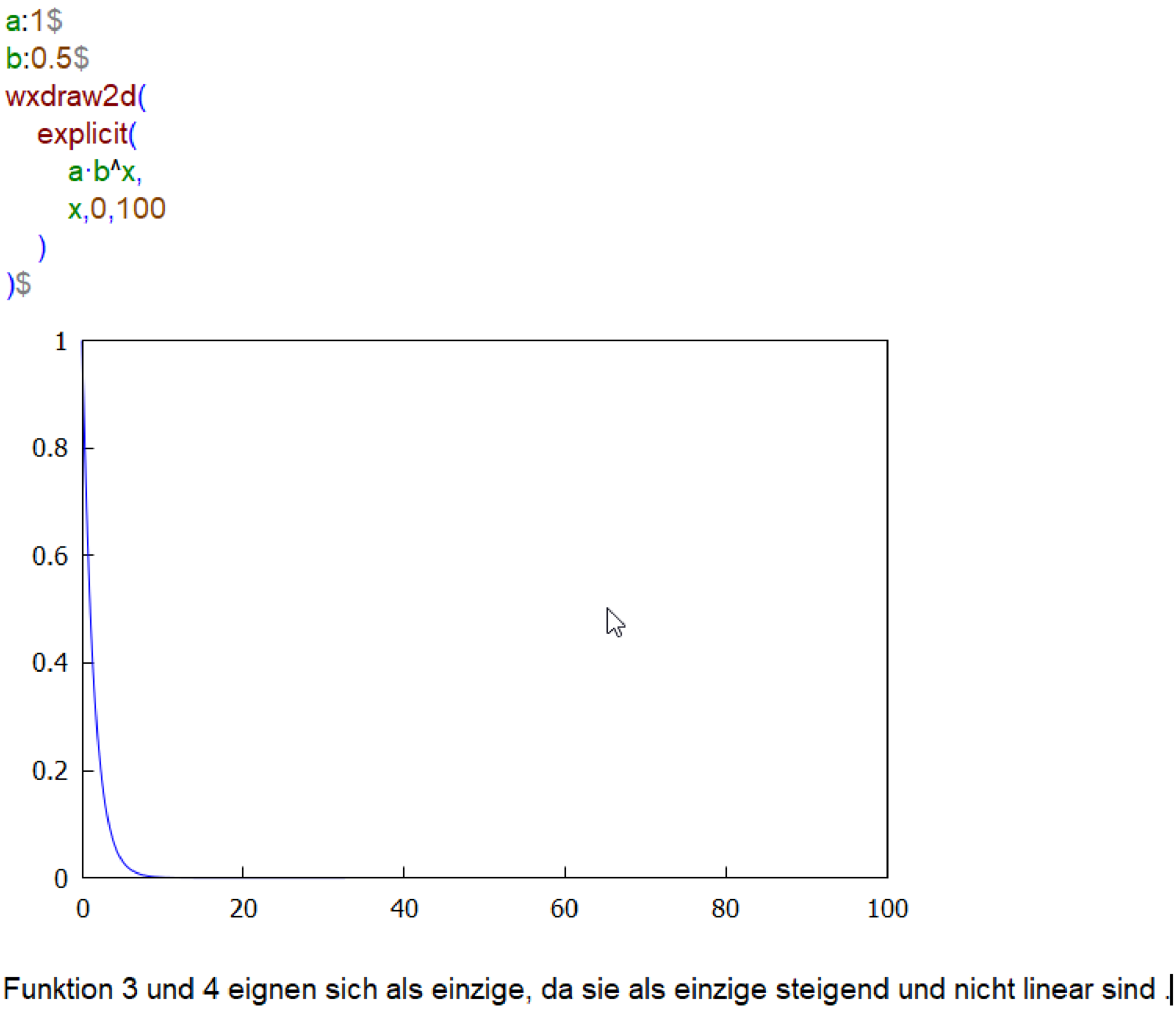


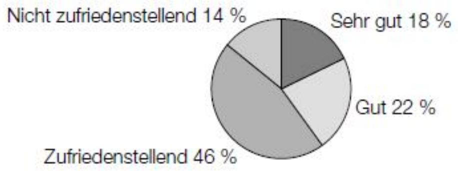
Abbildung 69: Emissionen Maxima 6

Funktion 3 und 4 eignen sich als einzige, da sie als einzige steigend und nicht linear sind .

Museum (B_255)

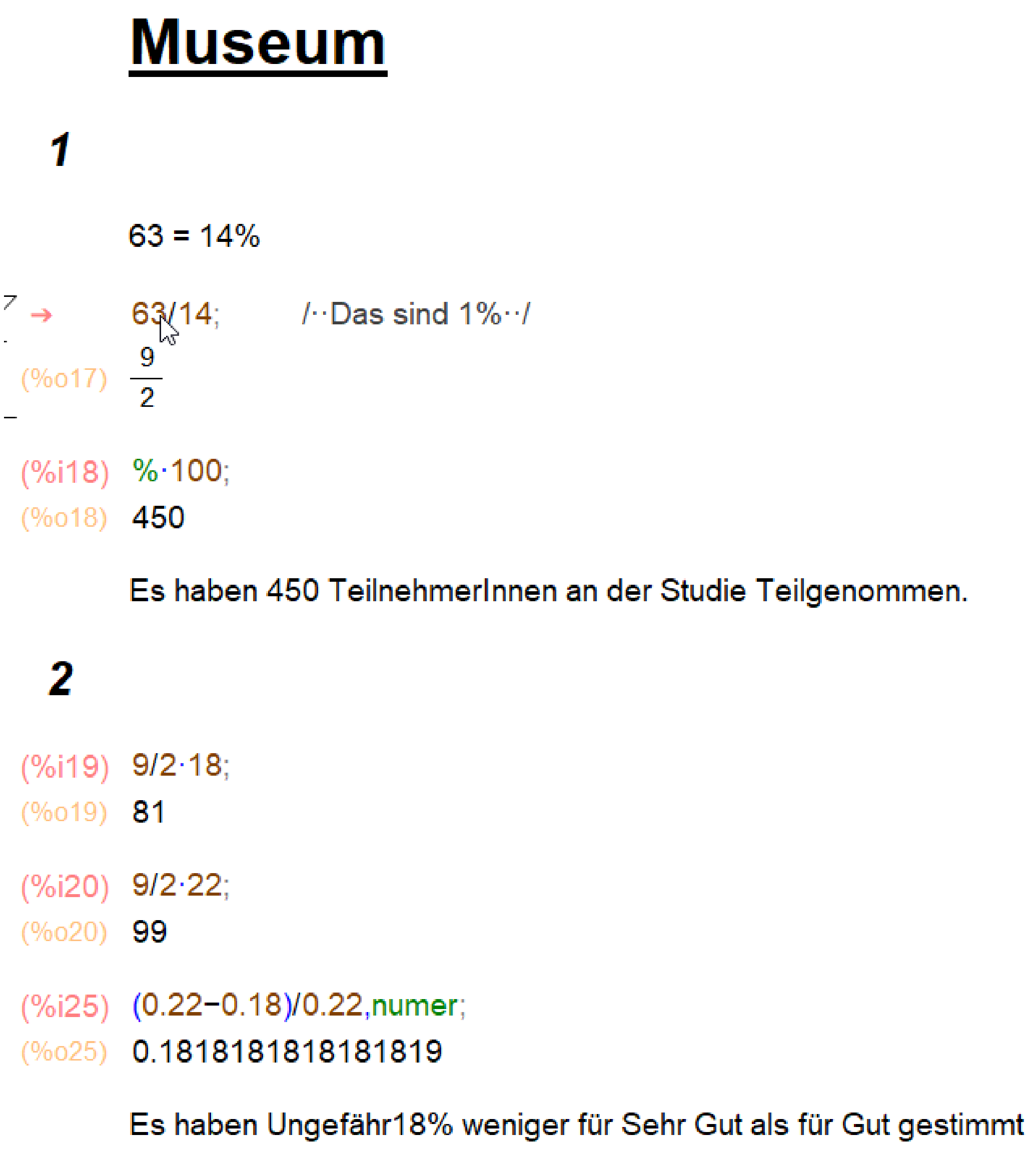
Ein Museum in einer Stadt führt verschiedene Recherchen durch.

b) Um die Meinung der Besucher/innen über die Attraktivität der Ausstellungsstücke festzustellen, wird eine Umfrage mit einem Fragebogen durchgeführt.
Die Besucher/innen können die Attraktivität der Ausstellungsstücke mit den Kategorien „Sehr gut", „Gut", „Zufriedenstellend" und „Nicht zufriedenstellend" bewerten. Das folgende Kreisdiagramm gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse wieder.



– Berechnen Sie, wie viele Personen an der Umfrage teilgenommen haben, wenn 63 Personen die Kategorie „Nicht Zufriedenstellend" angekreuzt haben.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl derjenigen, die mit „Sehr gut" stimmten, kleiner ist als die Anzahl derjenigen, die mit „Gut" abgestimmt haben.

Abbildung 70: Museum



Museum

1

63 = 14%

```
→      63/14;   /* Das sind 1% */
(%o17) 9/2

(%i18) %*100;
(%o18) 450
```

Es haben 450 TeilnehmerInnen an der Studie Teilgenommen.

2

```
(%i19) 9/2*18;
(%o19) 81

(%i20) 9/2*22;
(%o20) 99

(%i25) (0.22-0.18)/0.22,numer;
(%o25) 0.1818181818181819
```

Es haben Ungefähr18% weniger für Sehr Gut als für Gut gestimmt

Abbildung 71: Museum Maxima

Buntes Spielzeug * (A_260)

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

– Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.
– Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Abbildung 72: Bunt

Buntes Spielzeug

25*5,5; 7*10; 13*14,5

25+7+13;
45

Ungerade Gesamtmenge

(45+1)/2;
23

Der Median befindet sich an der Stelle 23 also beträgt er 5,5cm

(4.5·20+5.6·10+6·20+6.5·15+25.3·5)/70;/··rot··/
7.0

70·7/70;
7

Wie man sieht gleichen sich beide arithmetische Mittel

Abbildung 73: Bunt Maxima

6 Lineare Gleichungssysteme

6.1 Theorie

Ein Gleichungssystem besteht immer aus mehreren Gleichungen. Dabei gibt es unbekannte Variablen welche ermittelt werden müssen. Ein lineares Gleichungssystem besteht dabei nur aus linearen Gleichungen, alle anderen Gleichungssysteme werden nichtlinear genannt. Ein Beispiel für ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$2 * x * y + 3 * x^2 = 1$$

$$sin(x) * ln(y) = e^x$$

Für solche Gleichungssysteme gibt es oftmals keine eindeutige Lösung, sie müssen mit Näherungsverfahren gelöst werden. Zur Matura kommen nur lineare Gleichungssysteme. Man kann Gleichungssysteme auch mittels Matrizen lösen, siehe 7.1.2.

6.1.1 Einsetzungsverfahren

Nehmen wir folgendes Gleichungssystem an:

$$7 * x + 3 * y = 5$$

$$31 * x - 17 * y = 19$$

Beim Einsetzungsverfahren formt man so um, dass bei einer der beiden Gleichungen eine unbekannte Variable, etwa x auf einer Seite steht:

$$x = 5/7 - 3 * y/7$$

Bei der anderen Gleichung kann man nun das x durch $5/7 - 3 * y/7$ ersetzen:

$$31 * (5/7 - 3 * y/7) - 17 * y = 19$$

Diese Gleichung kann man nun auf y umformen und kommt auf das Ergebnis:

$$y = 11/106$$

Dies muss man nun in eine der beiden Gleichungen einsetzten um x zu erhalten:

$$7 * x + 3 * 11/106 = 5$$

$$x = 71/106$$

6.1.2 Eliminationsverfahren

Dieses Verfahren wird auch Gauß-Eliminationsverfahren genannt. Man eliminiert eine Variable durche addition oder subtraktion. Dies erreicht man indem eine Variable in beiden Gleichungen den selben Multiplikator hat. Man nehme das Gleichungssystem:

$$6*x+12*y=5$$

$$3*x+3*y=19$$

Diese formt man um indem man die zweite Gleichung mit 2 multipliziert. Danach kann man die zweite Gleichung von der ersten Subtrahieren und erhalten eine Gleichung mit nur einer Variable (siehe dritte Gleichung). Diese kann man durch umformen lösen, und sich in weiterer folge x durch einsetzen ausrechnen.

$$6*x+12*y=5$$

$$6*x+6*y=38$$

$$0+6*y=-33$$

$$y=-33/6$$

$$3*x+3*(-33/6)=19$$

$$y=71/6$$

6.1.3 Gleichsetzungsverfahren

Ähnlich wie beim Einsetzungsverfahren stellt man eine der beiden Variablen, etwa x frei. Dieses macht man hier allerdings bei beiden Gleichungen:

$$7*x+3*y=5$$

$$x=5/7-3*y/7$$

$$31*x-17*y=19$$

$$x=19/31+17*y/31$$

Da in diesem Gleichungssystem $x=x$ gilt muss kann man dies nun Gleichsetzen:

$$19/31+17*y/31=5/7-3*y/7$$

Dies kann man nun durch Umformen lösen:

$$y=11/106$$

Wie bei allen Verfahren kann man x durch einsetzen bestimmen:

$$7*x+3*11/106=5$$

$$x=71/106$$

6.1.4 Maxima

Gleichungen bzw Gleichungssysteme kann man in Maxima mit dem Befehl *solve()* lösen:

```
(% i1)  gl1: 7*x + 3*y =5$
        gl2: 31*x - 17*y = 19$
        solve([gl1,gl2],[x,y]);
```

$$[[x = 71/106, y = 11/106]] \qquad (\%o1)$$

6.2 Bifi-Bsps

6.2.1 Glaspyramiede

Glaspyramide des Louvre

Aufgabennummer: A_040

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Glaspyramide des Louvre ist eine quadratische Pyramide mit einer Basislänge von 35,42 Metern (m) und einer Höhe von 21,65 m.

a) – Berechnen Sie den Mantel *M* der Pyramide. Geben Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen gerundet in Quadratmetern (m²) an.

b) – Argumentieren Sie anhand der Formel, wie sich das Volumen verändert, wenn die Basislänge der Pyramide verdoppelt wird.

c) Eine Seitenfläche besteht aus 18 Dreiecken und 153 Rauten und nimmt eine Glasfläche von 486 m² ein. Die Glasfläche einer Raute ist doppelt so groß wie jene eines Dreiecks.

– Berechnen Sie die Glasfläche eines dreieckigen Glassegments.

Abbildung 74: Aufgabenstellung: Glaspyramiede

Beispiel c) kann man mittels einem Gleichungssystem gelöst werden: Dreicke werden durch die Variable d repräsentiert, Rauten durch die Variable r. Es ist bekannt, dass 18 Dreicke und 153 Rauten $486m^2$ einnehmen:

$$18d + 153r = 586$$

Außerdem wissen wird, dass eine Raute doppelt so groß ist wie ein Dreieck:

$$2r = d$$

Händische Lösung Man kann natürlich jedes Verfahren verwenden, da d schon frei steht verwende ich das Einsetzungsverfahren:

$$18 * (2 * r) + 153 * r = 586$$

$$36 * r + 153 * r = 586$$

$$189 * r = 586$$

$$r = 586/189$$

$$2 * (586/189) = d$$

$$d = 1172/189$$

Lösung mittels Maxima

(% i1)

```
gl1: 18*d+153*r = 586$
gl2: 2*r = d$
solve([gl1,gl2],[r,d]);
```

$$[[r = 586/189, d = 1172/189]] \quad (\%o1)$$

7 Vektoren und Matrizen

7.1 Theorie

7.1.1 Vektoren

Ein Vektor ist ein Zahlentupel:

(% i1) v:matrix([a],[b],[c]);

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{v}$$

Addition/Subtraktion Zwei Vektoren mit der selben Größe werde addiert bzw. subtrahiert, indem die Operationen an den Elementen mit der selben Position durchführt wird.

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v2:matrix([x],[y])$
v:v1+v2;

$$\begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix} \tag{v}$$

Skalarmultiplikation Jedes Element des Vektors wird mit dem gegebenen Skalar multipliziert.

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v:l*v2;

$$\begin{pmatrix} l*a \\ l*b \end{pmatrix} \tag{v}$$

Skalarprodukt Das Skalarprodukt ist die Summe aller Produkte die entstehen, indem man einfach die Elemente mit der selben Position multipliziert. Wichtig in Maxima wir das Skalarprodukt mit dem „.“-Operator berechnet, da der „*“-Operator lediglich die Elemente an der selben Position multipliziert.

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v2:matrix([x],[y])$
v1.v2;

$$a*x+b*y \tag{\%o1}$$

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v2:matrix([x],[y])$
v:v1*v2;

$$\begin{pmatrix} a*x \\ b*y \end{pmatrix} \quad (v)$$

Betrag eines Vektors Der Betrag oder auch Länge eines Vektors ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Elemente.

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v:sqrt(a$^2 + b^2$);

$$\sqrt{a^2+b^2} \quad (\%o1)$$

Einheitsvektor Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit einer Länge von 1. Um den Einheitsvektor eines beliebigen Vektors zu bestimmen muss man lediglich durch den Betrag, die Länge, dividieren.

(% i1) v1:matrix([a],[b])$
v:1/sqrt(a$^2 + b^2) * v1$;

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (v)$$

(% i1) load(ëigen")$
v1:matrix([a],[b])$
v:uvect(v1);

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \quad (v)$$

Orthogonalitätskriterium Das Orthogonalitätskriterium bestimmt ob zwei Vektoren normal auf einander liegen.

$$\vec{a} * \vec{b} = 0 <=> \vec{a} \perp \vec{b}$$

(% i1) v1:matrix([1],[2])$
v2:matrix([2],[-1])$
v1.v2;

$$0 \quad (\%o1)$$

Parallelitätstkriterium Das Parallelitätstkriterium bestimmt ob zwei Vektoren parallel zueinander liegen.

$$\vec{a} = \lambda * \vec{b} <=> \vec{a} \| \vec{b}$$

(% i1)
```
v1:matrix([1],[2])$
v2:matrix([2],[4])$
g:1=2*l$
h:2=4*l$
solve(g=h);
```

$$[l = \frac{1}{2}] \tag{\%o1}$$

Graphisch im $\mathbb{R}^2$ Ein Vektor kann, falls keine spezielle Ortsangabe gegeben ist, irgendwo im Raum liegen. Das obere Element wird entlang der x-Achse und das untere Element entlang der y-Achse gezählt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

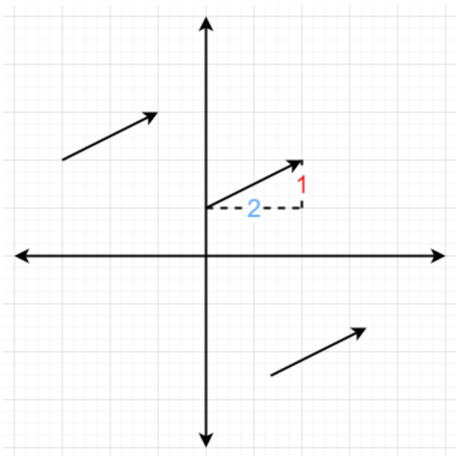


Abbildung 75: Vektoren graphisch darstellen

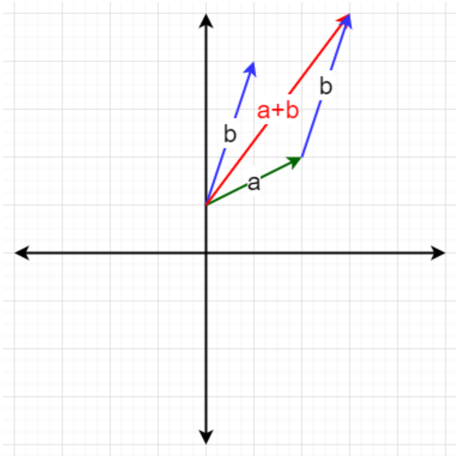


Abbildung 76: Graphische Addition von Vektoren

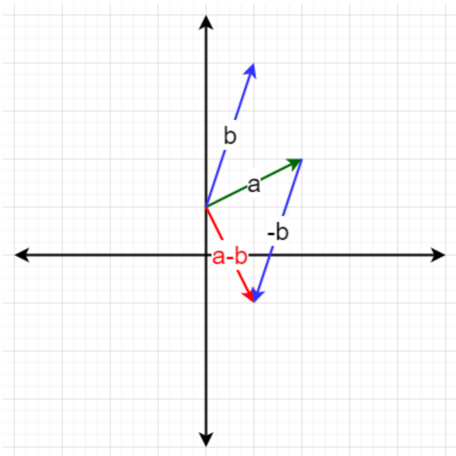


Abbildung 77: Graphische Subtraktion von Vektoren

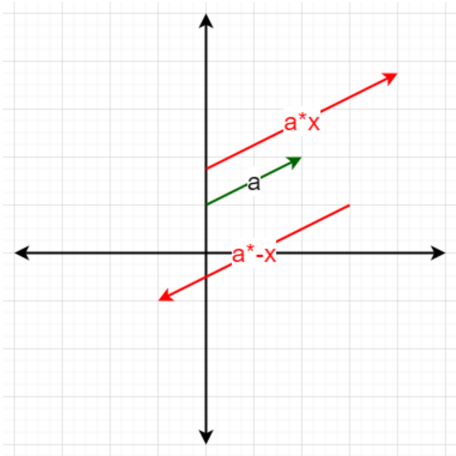


Abbildung 78: Graphische Skalarmultiplikation von Vektoren

Parameterdarstellung Die Parameterdarstellung besteht aus einem Punkt und einem Vektor und beschreibt eine Gerade. Durch das einsetzen von verschiedenen Lambdas, dem Parameter, lässt sich jeder Punkt in der Gerade bestimmen.

$$g : X = P + \lambda\vec{r}$$

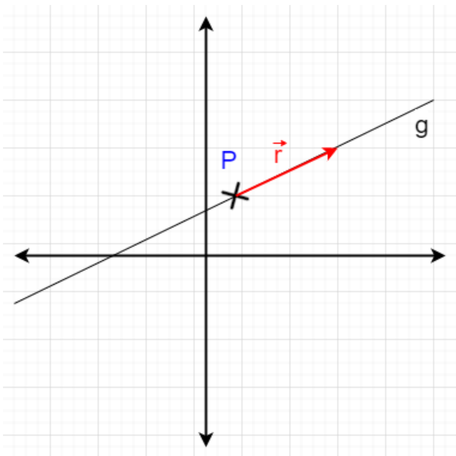


Abbildung 79: Skizze zur Parameterdarstellung

Normalvektorform Die Normalvektorform besteht auch aus einem Ausgangspunkt, allerdings ist in diesem Fall nur ein Normalvektor gegeben. Sie beschreibt nur im $\mathbb{R}^2$ eine Gerade und im $\mathbb{R}^3$ z.B. eine Ebene.

$$g : \vec{n} * X = \vec{n} * P$$

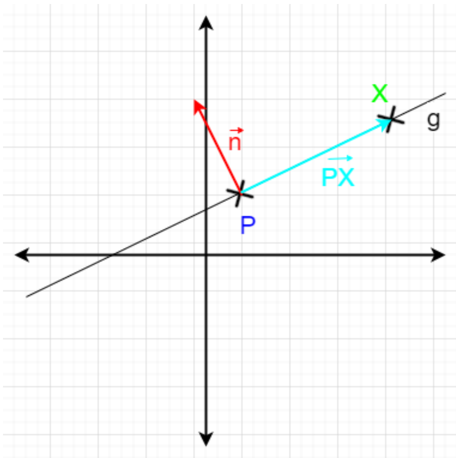


Abbildung 80: Skizze zur Normalvektorform

Sie geht von der Annahme aus, dass wenn ein beliebiger Punkt auf der Gerade liegt, muss der Vektor vom Ausgangspunkt zum Punkt normal zum Normalvektor liegen.

$$\vec{n} \perp \vec{PX} => \vec{n} * \vec{PX} = 0$$

$$\vec{n} * (X - P) = 0$$

$$\vec{n} * X - \vec{n} * P = 0$$

$$\vec{n} * X = \vec{n} * P$$

Normalvektor bestimmen Im $\mathbb{R}^2$ kann von einem beliebigen Vektor der Normalvektor bestimmt werden, indem man die Elemente tauscht und eines von beiden negiert.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

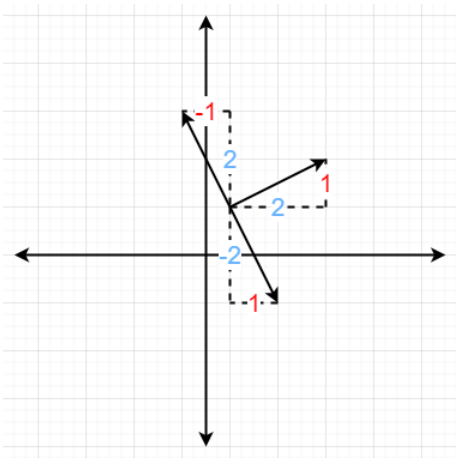


Abbildung 81: Normalvektoren bestimmen in $\mathbb{R}^2$

Im $\mathbb{R}^3$ werden zwei Vektoren benötigt, sie bilden quasi eine Fläche deren 2 Normalvektoren dann bestimmt werden. Ein einzelner Vektor hat im $\mathbb{R}^3$ unendlich viele Normalvektoren.

Kreuzprodukt Das Kreuzprodukt kann über zwei Methoden bestimmt werden. Ohne Maxima schreibt man die Vektoren doppelt untereinander an und zieht dann Kreuze.

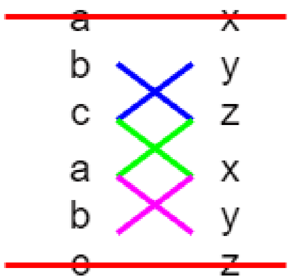


Abbildung 82: Kreuzprodukt ohne Maxima berechnen

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

In Maxima gibt es einen Befehl für das Bestimmen des Kreuzproduktes, allerdings funktioniert dieser nur wenn die Vektoren als Listen und nicht als Matrizen, wie bis jetzt in diesem Dokument, angegeben sind.

(% i1)
```
load("vect")$
v1:[a, b, c]$
v2:[x, y, z]$
v1 v2$
express(%);
```

$$[bz - cy, cx - az, ay - bx] \tag{\%o1}$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$ Im $\mathbb{R}^3$ werden Ebenen über die Normalvektorform angegeben.

Schnitt zweier Geraden Der Schnittpunkt zwischen zwei Geraden kann durch die selben Methoden gelöst werden wie ein Gleichungssystem.

$$g : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$h : -x_1 + 3x_2 = -5$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 3 - \lambda$$

$$x_2 = 4 - 3\lambda$$

einsetzen:

$$h : -3 + \lambda + 12 - 9\lambda = -5$$

$$\lambda = \frac{7}{4}$$

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} * \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{37}{4} \end{pmatrix}$$

7.1.2 Matizen

Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema in dem jeder Position ein Wert zugewiesen ist.

(% i1) `M:matrix([a, b, c],[d, e, f]);`

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \tag{M}$$

Um die Gröe einer Matrix anzugeben wird folgende schreibweise verwendet:

$$Zeilenzahl x Spaltenzahl$$

Folgender Maxima Code veranschaulicht das gezielte Zugreifen auf Matrix Elemente. Außerhalb von Maxima würde folgendes Element als m_{22} angeschrieben werden, da es sich um keine Matrix mehr handelt, wird ein kleiner Buchstabe verwendet.

(% i1)
```
M:matrix([a, b, c],[d, e, f])$
m22: M[2, 2];
```

$$e \tag{m22}$$

Arten von Matrizen

Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix/Identität

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Transponieren Beim Transponieren werden Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen umgewandelt.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$M^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Addition/Subtraktion Zwei Matrizen mit der selben Größe werde addiert bzw. subtrahiert, indem die Operationen an den Elementen mit der selben Position durchführt wird.

(%i1)
```
M1:matrix([a, b],[c, d])$
M2:matrix([w, x],[y, z])$
M:v1+v2;
```

$$\begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix} \quad \text{(M)}$$

Skalarmultiplikation Jedes Element der Matrix wird mit dem gegebenen Skalar multipliziert.

(%i1)
```
M1:matrix([a, b],[c, d])$
M:l*v2;
```

$$\begin{pmatrix} l*a & l*b \\ l*c & l*d \end{pmatrix} \quad \text{(M)}$$

Multiplikation von Matrizen Bei der Matrixmultiplikation muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten übereinstimmen. Daher ist diese Operation auch nicht kommutativ, die beiden Faktoren dürfen nicht vertauscht werden. In Maxima ist die Berechnung gleich wie beim Skalarprodukt.

$$(z_1 x s_1) * (z_2 x s_2) = (z_1 x s_2)$$

$$s_1 = z_2$$

(% i1)
```
M1:matrix([a, b, c],[d, e, f])$
M2:matrix([u, v], [w, x],[y, z])$
M: M1.M2;
```

$$\begin{pmatrix} au + bw + cy & av + bx + cz \\ du + ew + fy & dv + ex + fz \end{pmatrix} \tag{M}$$

Determinante bestimmen Die Determinante lässt sich nur von quadratischen Matrizen bestimmen, selbe Zeilenanzahl wie Spaltenanzahl.

(% i1)
```
M1:matrix([a, b, c],[d, e, f], [g, h, i])$
determinant(M1);
```

$$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \tag{\%o1}$$

Falls die Determinante 0 ist, lässt sich die Matrix nicht invertieren.

Inverse bestimmen Sobald die Determinante einer Matrix nicht 0 ergibt lässt sich die Inverse bestimmen. Die Multiplikation von einer Matrix mit ihrer Inversen ergibt die Einheitsmatrix.

(% i1)
```
M1:matrix([1, 2],[2, 1])$
invert(M1);
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{\%o1}$$

Gleichungssysteme mit Matrizen lösen Ein Gleichungssystem kann wie folgt interpretiert werden.

A Koeffizientenmatrix, die Faktoren mit denen die gesuchten Werte multipliziert werden

$\vec{x}$ Komponentenvektor, die gesuchten Werte

$\vec{b}$ Lösungsvektor, die Lösungen der einzelnen Gleichungen

$$A * \vec{x} = \vec{b}$$

Das Gleichungssystem kann durch die Multiplikation der Koeffizientenmatrix gelöst werden.

$$A^{-1} * A * \vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$$

Folgendes Beispiel soll die Vorgehensweise veranschaulichen:

$$I : 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$II: 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2$$

$$III: -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x3 = 0$$

Die verschiedenen Bestandteile bestimmen:

$$A: \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse der Koeffizientenmatrix bestimmen:

$$A^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrixmultiplikation durchführen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Folgender Maxima Abschnitt beschreibt wie das Beispiel in Maxima zu lösen wäre:

(% i1)
```
A:matrix([3, 2, -1],[2, -2, 4], [-1, 1/2, -1])$
b:matrix([1],[-2],[0])$
Ai:invert(A)$
x:Ai.b;
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{x}$$

7.2 Bifi-Beispiele

7.2.1 Bifi AG 3.1

Betriebsgewinn

Aufgabennummer: 1_206	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Betrieb produziert und verkauft die Produkte $P_1, \dots, P_5$. In der vorangegangenen Woche wurden x_i Stück des Produkts P_i produziert und auch verkauft. Das Produkt P_i wird zu einem Stückpreis v_i verkauft, k_i sind die Herstellungskosten pro Stück P_i.
Die Vektoren X, V und K sind folgendermaßen festgelegt:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe der gegebenen Vektoren einen Term an, der für diesen Betrieb den Gewinn G der letzten Woche beschreibt!

$G =$ ______________________

Abbildung 83: Aufgabenstellung: Betriebsgewinn

Zuerst muss der Gewinn von einem verkauften Stück berechnet werden $(V - K)$ und dann kann der komplette Gewinn ermittelt werden.

$$G = X * (V - K)$$

Energiesparlampen

Aufgabennummer: 1_207	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Händler handelt mit 7 verschiedenen Typen von Energiesparlampen. In der Buchhaltung verwendet er folgende 7-dimensionale Vektoren (die Werte in den Vektoren beziehen sich auf einen bestimmten Tag):

- Lagerhaltungsvektor L_1 für Lager 1 zu Beginn des Tages
- Lagerhaltungsvektor L_2 für Lager 2 zu Beginn des Tages
- Vektor P der Verkaufspreise
- Vektor B, der die Anzahl der an diesem Tag ausgelieferten Lampen angibt

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Ausdruck $(L_1 + L_2 - B) \cdot P$ in diesem Zusammenhang!

Abbildung 84: Aufgabenstellung: Energiesparlampen

Der Ausdruck gibt den geldlichen Wert aller Energiesparlampen aus dem Lager1 und Lager2 am ende des Tages an.

Gehälter*

Aufgabennummer: 1_419	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Die Gehälter der 8 Mitarbeiter/innen eines Kleinunternehmens sind im Vektor $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_8 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, was der Ausdruck (das Skalarprodukt) $G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesem Kontext bedeutet!

Abbildung 85: Aufgabenstellung: Gehälter

Die Summe aller Gehälter die das Kleinunternehmen zu bezahlen hat.

Perlensterne

Aufgabennummer: 1_208	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen Adventmarkt sollen Perlensterne hergestellt werden. Den Materialbedarf für die verschiedenen Modelle kann man der nachstehenden Tabelle entnehmen.

Den Spalten der Tabelle entsprechen Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

- Materialbedarfsvektor S_1 für den Stern 1
- Materialbedarfsvektor S_2 für den Stern 2
- Kostenvektor K pro Packung zu 10 Stück
- Lagerbestand L

	Material Stern 1	Material Stern 2	Kosten pro Packung Perlen	Lagerbestand der Perlen-Packungen
Wachsperlen 6 mm	1	0	€ 0,20	8
Wachsperlen 3 mm	72	84	€ 0,04	100
Glasperlen 6 mm	0	6	€ 0,90	12
Glasperlen oval	8	0	€ 1,50	9

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $10 \cdot L - (5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2)$ in diesem Zusammenhang an!

Abbildung 86: Aufgabenstellung: Perlensterne

Der erste Teil des Ausdrucks, $10 * L$, gibt die Anzahl der einzelnen Perlen im Lager an, da jede Packung 10 Perlen beinhaltet. Der zweite Teil gibt den Perlenverbrauch von fünf Sternen vom Typen 1 und 8 Sternen vom Typen 2 an. Der komplette Ausdruck zeigt wie viele Perlen, nicht Packungen, insgesamt noch im LAger liegen sobald 5 Sterne vom Typen 1 und 8 Sterne vom Typen 2 gefertigt wurden.

Verkaufszahlen*

Aufgabennummer: 1_641	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Sportfachgeschäft bietet n verschiedene Sportartikel an. Die n Sportartikel sind in einer Datenbank nach ihrer Artikelnummer geordnet, sodass die Liste mit den entsprechenden Stückzahlen als Vektor (mit n Komponenten) aufgefasst werden kann.

Die Vektoren B, C und P (mit $B, C, P \in \mathbb{R}^n$) haben die folgende Bedeutung:

Vektor B: Die Komponente $b_i \in \mathbb{N}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Lagerbestand des i-ten Artikels am Montagmorgen einer bestimmten Woche an.

Vektor C: Die Komponente $c_i \in \mathbb{N}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Lagerbestand des i-ten Artikels am Samstagabend dieser Woche an.

Vektor P: Die Komponente $p_i \in \mathbb{R}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Stückpreis (in Euro) des i-ten Artikels in dieser Woche an.

Das Fachgeschäft ist in der betrachteten Woche von Montag bis Samstag geöffnet und im Laufe dieser Woche werden weder Sportartikel nachgeliefert noch Stückpreise verändert.

Aufgabenstellung:

Am Ende der Woche werden Daten für die betrachtete Woche (Montag bis Samstag) ausgewertet, wobei die erforderlichen Berechnungen mithilfe von Termen angeschrieben werden können.

Ordnen Sie den vier gesuchten Größen jeweils den für die Berechnung zutreffenden Term (aus A bis F) zu!

durchschnittliche Verkaufszahlen (pro Sportartikel) pro Tag in der betrachteten Woche	
Gesamteinnahmen durch den Verkauf von Sportartikeln in der betrachteten Woche	
Verkaufszahlen (pro Sportartikel) in der betrachteten Woche	
Verkaufswert des Lagerbestands an Sportartikeln am Ende der betrachteten Woche	

A	$6 \cdot (B - C)$
B	$B - C$
C	$\frac{1}{6} \cdot (B - C)$
D	$P \cdot C$
E	$P \cdot (B - C)$
F	$6 \cdot P \cdot (B - C)$

Abbildung 87: Aufgabenstellung: Verkaufszahlen

C durchschnittliche Verkaufszahlen (pro Sportartikel) pro Tag in der betrachteten Woche.

E Gesamteinahmen durch den Verkauf von Sportartikeln in der betrachteten Woche.

B Verkaufszahlen (pro Sportartikel) in der betrachteten Woche.

D Verkaufswert des Lagerbestands an Sportartikeln am Ende der betrachteten Woche

Würstelstand*

Aufgabennummer: 1_569	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Würstelstandbesitzer führt Aufzeichnungen über die Anzahl der täglich verkauften Würstel. Die Aufzeichnung eines bestimmten Tages ist nachstehend angegeben:

	Anzahl der verkauften Portionen	Verkaufspreis pro Portion (in Euro)	Einkaufspreis pro Portion (in Euro)
Frankfurter	24	2,70	0,90
Debreziner	14	3,00	1,20
Burenwurst	11	2,80	1,00
Käsekrainer	19	3,20	1,40
Bratwurst	18	3,20	1,20

Die mit Zahlenwerten ausgefüllten Spalten der Tabelle können als Vektoren angeschrieben werden. Dabei gibt der Vektor A die Anzahl der verkauften Portionen, der Vektor B die Verkaufspreise pro Portion (in Euro) und der Vektor C die Einkaufspreise pro Portion (in Euro) an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Ausdruck mithilfe der Vektoren A, B und C an, der den an diesem Tag erzielten Gesamtgewinn des Würstelstandbesitzers bezogen auf den Verkauf der Würstel beschreibt!

Gesamtgewinn = ________________________

Abbildung 88: Aufgabenstellung: Würstelstand

Zuerst muss der Gewinn von einem verkauften Stück berechnet werden $(B-C)$ und dann kann der komplette Gewinn ermittelt werden.

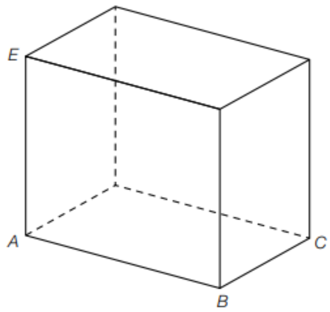
$$Gesamtgewinn = A * (B - C)$$

7.2.2 Bifi AG 3.2

Eckpunkte eines Quaders*

Aufgabennummer: 1_689	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte A, B, C und E sind beschriftet.



Aufgabenstellung:

Für weitere Eckpunkte R, S und T des Quaders gilt:

$R = E + \overrightarrow{AB}$

$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$

$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte R, S und T!

Abbildung 89: Aufgabenstellung: Eckpunkte eines Quaders

Dieses Beispiel wird durch das Aneinanderreihen von Vektoren ermöglicht.

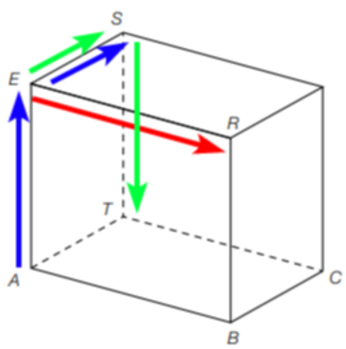


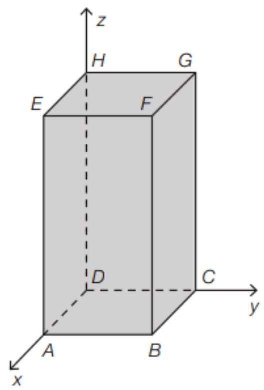
Abbildung 90: Lösung: Eckpunkte eines Quaders

Quader mit quadratischer Grundfläche*

Aufgabennummer: 1_562	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der *xy*-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 5 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 10 Längeneinheiten. Der Eckpunkt *D* liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt *C* liegt auf der positiven *y*-Achse.

Der Eckpunkt *E* hat somit die Koordinaten $E = (5|0|10)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\overrightarrow{HB}$ an!

Abbildung 91: Aufgabenstellung: Quader mit quadratischer Fläche

In diesem Beispiel müssen einfach nur die Werte des gedachten Vektors von H nach B abgelesen werden.

$$\vec{HB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Teilungspunkt*

Aufgabennummer: 1_539	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

Die gegebene Strecke *AB*: A ———— B wird innen durch den Punkt *T* im Verhältnis 3:2 geteilt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel für die Berechnung des Punkts *T* auf!

T = ________________________________

Abbildung 92: Aufgabenstellung: Teilungspunkt

Der Vektor $\vec{AB}$ beschreibt den kompletten Weg von A nach B. Da allerdings nur $\frac{3}{5}$ des Weges gefragt sind muss damit multipliziert werden.

$$T = \vec{AB} * \frac{3}{5} + A$$

7.2.3 Bifi AG 3.5

Beziehung zwischen Vektoren*

Aufgabennummer: 1_666	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \cdot m \\ n \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen aufeinander normal stehen. Geben Sie für diesen Fall *n* in Abhängigkeit von *m* an!

n = __________

Abbildung 93: Aufgabenstellung: Beziehung zwischen Vektoren

Normalvektoren werden bestimmt indem die Elemente vertauscht und eines von beiden negiert wird.
Möglicher Nomalvektor mit $m = 1$:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Da das Vielfache eines Vektors gebildet wird indem beide Elemente gleich erweitert werden gilt folgende Abhängigkeit:

$$n = -26 * m$$

Normalvektor*

Aufgabennummer: 1_441	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2|1)$ und $B = (3|-1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ an, der auf den Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal steht!

Abbildung 94: Aufgabenstellung: Normalvektor

Zu Beginn den Vektor $\vec{AB}$ bestimmen:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalvektor bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Rechter Winkel*

Aufgabennummer: 1_618	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben ist eine Strecke AB im $\mathbb{R}^2$ mit $A = (3|4)$ und $B = (-2|1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, der mit der Strecke AB einen rechten Winkel einschließt!

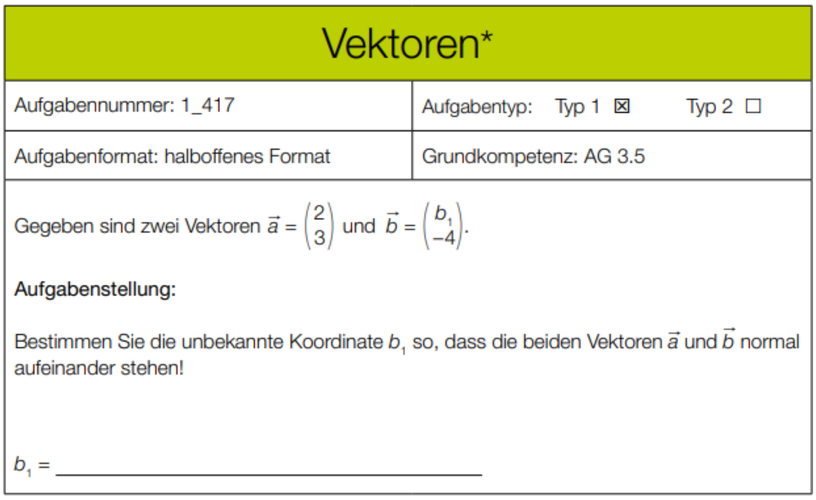
Abbildung 95: Aufgabenstellung: Rechter Winkel

Zu Beginn den Vektor $\vec{AB}$ bestimmen:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektor mit rechtem Winkel auf die Strecke bestimmen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Vektoren*

Aufgabennummer: 1_417	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die unbekannte Koordinate b_1 so, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen!

b_1 = ______________________________

Abbildung 96: Aufgabenstellung: Vektoren

Da -4 das doppelte von 2, negiert ist und schon mit dem Element b_1 getauscht wurde, ist die Normalvektor Bestimmung schon abgeschlossen und das fehlende Element kann durch das verdoppeln des ersten unteren Elements bestimmt werden.

$$b_1 = 3 * 2 = 6$$

8 Regression

8.1 Theorie

8.1.1 Definition

Wertepaare, also Punkte, die man oft durch Messergebnisse erhält, können meist nicht ohne Weiteres einer Funktion zugeordnet werden. Es stellt sich aber meist die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen diesen Daten besteht. Die Ermittlung einer mathematischen Funktion, deren Graph möglichst nahe an allen Punkten liegt, wird als **Regression** bezeichnet.

Die Funktion, die man durch die Regression erhält, wird meist als **Regressionskurve** bzw. **Ausgleichskurve** bezeichnet. Diese Kurve geht im Allgemeinen nicht durch die Datenpunkte.

Wie „stark“ die beiden Größen des Wertepaares zusammenhängen, wird mit mithilfe der **Korrelation** beschrieben.

8.1.2 Methode der kleinsten Quadrate

Definition

Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein Standardverfahren zur Ausgleichungsrechnung, also zur Bestimmung oder Schätzung von unbekannten Parametern. Sie wird verwendet, um eine Ausgleichsgerade zu ermitteln, die einen möglichst geringen vertikalen Abstand zu allen Punkten besitzt.

Der vertikale Abstand zwischen der erhaltenen Ausgleichskurve und einem der Punkte, mit der die Funktion erstellt wurde, bezeichnet man als Residuum.

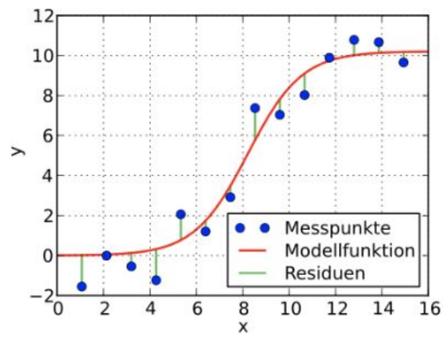


Abbildung 97: Ausgleichskurve durch Methode der kleinsten Quadrate

Anwendung - Linear

Die Ermittlung einer linearen Ausgleichsgerade durch die Methode der kleinsten Quadrate hat grob folgenden Ablauf:

Für jeden Punkt P_k wird die die Differenz zwischen den gemessenen Wert y_k und dem Schätzwert (der noch unbekannten linearen Funktion) $\widetilde{y_k}$ gebildet: $(\widetilde{y_k} - y_k)$

Daraus kann eine Extremwertaufgabe erstellt werden, wo die Hauptbedingung ist, dass die Summe der quadratischen Abstände minimal sein soll. Quadratische Abstände werden deshalb verwendet, damit das Vorzeichen immer positiv bleibt.

$$\text{HB:} \quad \sum_{k=1}^{n} (\widetilde{y_k} - y_k)^2 \rightarrow \text{minimal}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} ((a_k \cdot x + b) - y_k)^2 \quad \text{da} \quad \widetilde{y_k} = a \cdot x_k + b$$

Da die Funktion von den Variablen a und b abhängig ist, muss partiell abgeleitet werden:

$$f_a(a,b) = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_k + b - y_k) \cdot x_k$$
$$f_b(a,b) = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (a \cdot x_k + b - y_k)$$

Aus den Ableitung erstellt man die notwendige Bedingung, also setzt die Funktionen gleich null. Daraus erhält man ein Gleichungssystem:

$$f_a(a,b) = 0 \wedge f_b(a,b) = 0$$

$$I = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$
$$II = a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^{n} \cdot y_k$$

Die zweite Gleichung kann man jetzt auf b umformen:

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k - a \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \overline{y} - a \cdot \overline{x} \quad \text{wobei } \overline{x}, \overline{y} \text{ arithmetische Mittel sind}$$

Um final auf a zu kommen, setzt man b in die erste Gleichung ein:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k}{n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) \cdot (y_k - \overline{y})}{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}$$

Beispiel 1
Gegeben sind drei Messpunke A(1|1), B(3|2) und C(6|5). Ermittle die Gleichung einer linearen Ausgleichsgerade für diese Messwerte und stelle die Messpunkte und die Gerade grafisch dar.

Zuerst rechnet man sich die arithmetischen Mittel $\overline{x}$ und $\overline{y}$ aus:

$$\overline{x} = \frac{1+3+6}{3} = \frac{10}{3} \qquad \overline{y} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

Jetzt kann a mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden:

$$a = \frac{(1-\frac{10}{3})\cdot(1-\frac{8}{3}) + (3-\frac{10}{3})\cdot(2-\frac{8}{3}) + (6-\frac{10}{3})\cdot(5-\frac{8}{3})}{(1-\frac{10}{3})^2 + (3-\frac{10}{3})^2 + (6-\frac{10}{3})^2)} = \frac{31}{38}$$

Mit Hilfe von $b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$ kann b ermittelt werden:

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = \frac{8}{3} - \frac{31}{38} \cdot \frac{10}{3} = -\frac{1}{19}$$

Und somit ergibt sich folgende Ausgleichsgerade:

$$\widetilde{y} = \frac{31}{38}x - \frac{1}{19}$$

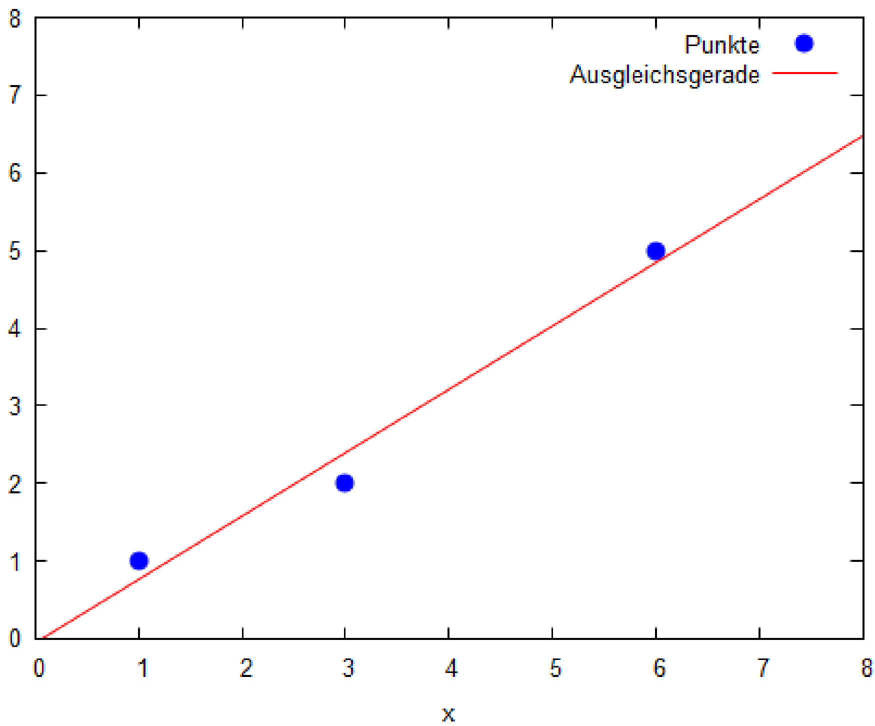


Abbildung 98: Ausgleichsgerade

Einschub - Technologieeinsatz
Üblicherweise werden heutzutage Regressionskurven mithilfe von Technologieeinsatz berechnet. Ein Beispiel wäre das Computeralgebrasystem Maxima. Mit diesem kann eine Regressionskurve basierend auf der Methode der kleinsten Quadrate mit folgenden Befehl erstellt werden:

```
lsquares_estimates (D, x, e, a)
```

D steht für eine Matrix, die die Punkte enthält, auf der die Regressionskurve basieren soll
x gibt die Namen für die Kolumnen der Matrix an
e steht für die (nicht unbedingt lineare) Funktionsgleichung der Regressionskurve
a sind die Paramter, die bestimmt werden sollen

Mit diesem Wissen kann das vorherige Beispiel mit zwei Befehlen gelöst werden:

```
i1  p: matrix([1,1], [3,2], [6,5]);
o1  matrix(
        [1,    1],
        [3,    2],
        [6,    5]
    )
i2  lsquares_estimates(p, [x, y], y=k*x+d, [k, d]);
o2  [[k=31/38,d=-1/19]]
```

Beispiel 2
Bei einer RC-Serienschaltung wurde der Strom in Abhängigkeit von der Zeit gemessen. Bestimme die exponentielle Regressionskurve und stelle sie graphisch dar. Die Ergebnisse der Messung sind in der Tabelle dargestellt.

Zeit in s	0	2	5	10	12	20
Stromstärke in mA	4	2,6	1,5	0,5	0,3	0.1

Die Regressionskurve für eine Exponentialfunktion erstellt man mithilfe einer linealen Regression. Man kann nämlich die Funktion $\widetilde{y} = b \cdot e^{(\lambda \cdot x)}$ auf beiden Seiten Logarithmieren und erhält $ln(\overline{y}) = ln(b) + \lambda \cdot x$, eine lineare Funktion.

Dadurch kann man sich jetzt die arithmetischen Mittel $\overline{x}$ und $\overline{y}$ ausrechnen, wobei man bei den y-Weten nicht den Logarithmus vergessen darf:

$$\overline{x} = \frac{0+2+5+10+12+20}{6} = \frac{49}{6}$$

$$\overline{y} = \frac{ln(4) + ln(2,6) + ln(1,5) + ln(0,5) + ln(0,3) + ln(0,1)}{6} = -0.242..$$

Jetzt kann λ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden:

$$\lambda = \frac{(0-\frac{49}{6})\cdot(ln(4)+0,242)+(2-\frac{49}{6})\cdot(ln(2,6)+0,242)+(5-\frac{49}{6})}{(0-\frac{49}{6})^2+(2-\frac{49}{6})^2+(5-\frac{49}{6})^2+(10-\frac{49}{6})^2+(12-\frac{49}{6})^2+(20-\frac{49}{6})^2}$$

$$\frac{\cdot(ln(1,5)+0,242)+(10-\frac{49}{6})\cdot(ln(0,5)+0,242)+(12-\frac{49}{6})\cdot(ln(0,3)+0,242)}{(0-\frac{49}{6})^2+(2-\frac{49}{6})^2+(5-\frac{49}{6})^2+(10-\frac{49}{6})^2+(12-\frac{49}{6})^2+(20-\frac{49}{6})^2}$$

$$\frac{+(20-\frac{49}{6})\cdot(ln(0,1)+0,242)}{(0-\frac{49}{6})^2+(2-\frac{49}{6})^2+(5-\frac{49}{6})^2+(10-\frac{49}{6})^2+(12-\frac{49}{6})^2+(20-\frac{49}{6})^2}$$

$$= -0.1892399018345621$$

Mit Hilfe der allgemeinen Gleichung $b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$ kann $ln(b)$ ermittelt werden:

$$ln(b) = \overline{y} - \lambda \cdot \overline{x} = -0.242 - (-0.189) \cdot \frac{49}{6} = 1.303386837711517$$

Jetzt muss man $ln(b)$ mit $e^{ln(b)}$ wieder auf b bringen und alles in die Exponentialfunktion einsetzen:

$$b = e^{ln(b)} = 3.681745048371302$$

$$\widetilde{y} = 3.681745048371302 \cdot e^{(-0.1892399018345621 \cdot x)}$$

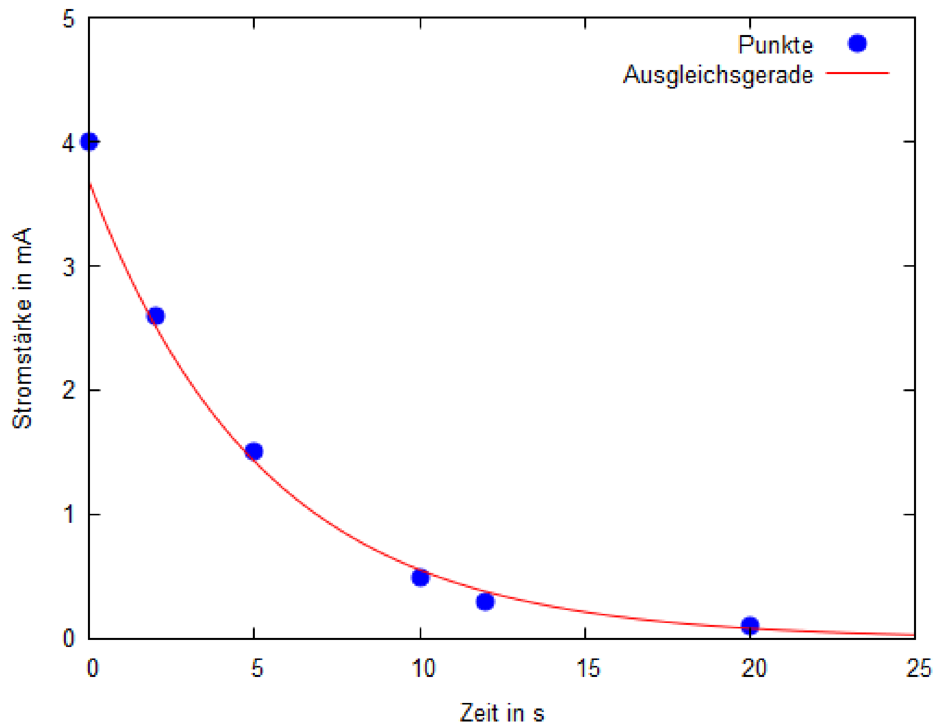


Abbildung 99: Exponentielle Ausgleichsgerade, die den Stromverlauf beschreibt

8.1.3 Korrelation

Definition

Wie schon im Punkt 1. erwähnt, beschreibt die Korrelation den Zusammenhang zwischen zwei oder mehreren Größen. Die Korrelation hat als Aufgabe Antworten auf folgende Fragen zu finden:

1. Wie stark ist der Zusammenhang?
   Die Maßzahlen der Korrelation liegen meist im Bereich von Null bis Eins, wobei Null für keinen Zusammenhang und Eins für starken Zusammenhang stehen.

2. Falls möglich, welche Richtung hat der Zusammenhang?
   Positive Korrelation: Wenn ich mehr gebe, kriege ich mehr
   Negative Korrelation: Wenn ich mehr gebe, kriege ich weniger

Pearson'scher Korrelationskoeffizient

Falls man mit einer linearen Regression arbeitet, kann man den vom britischen Mathematiker Karl Pearson entwickelten Pearson'schen Korrelationskoeffizienten verwenden, dessen Wert r ein Schätzwert für die Stärke und Richtung eines linearen Zusammenhanges zwischen zwei Messgrößen darstellt.

$$\mathrm{r} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) \cdot (y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2}}$$

x_k, y_k ...Koordinaten von k Messpunkten
$\overline{x}, \overline{y}$ ...arithmetische Mittel

Durch r kann man den linearen Zusammenhang beschreiben:

- | r | = 1 ...Alle Punkte liegen auf der Ausgleichsgerade, was den maximalen Zusammenhang darstellt
- r = 0 ...Alle Punkte sind verstreut und es kann deshalb kein linearer Zusammenhang ermittelt werden
- 0 < | r | < 1 ...Je näher | r | bei 1 liegt, desto besser ist der Zusammenhang

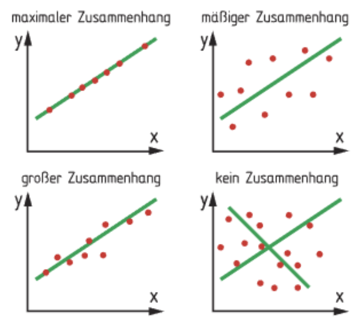


Abbildung 100: Graphische Darstellung von Zusammenhängen

Die Richtung der Gerade wird durch das Vorzeichen von r bestimmt, wenn r > 0 gilt, ist die Gerade steigend, bei r < 0 fallend.

Beispiel 3
Es soll geklärt werden, ob es einen linearen Zusammenhang zwischen der Körpergröße von Männern und deren Schuhgröße gibt. Dazu wurden 10 Männer befragt und Ihre Werte wurden tabellarisch aufgeschrieben.

Körpergröße in cm	180	175	182	188	181	177	193	184	188	181
Schugröße	42	41	44	45	43	41	47	43	45	42

Um einen linearen Zusammenhang zu klären, muss der Korrelationskoeffizient r ermittelt werden.

Zuerst rechnet man sich die arithmetischen Mittel aus:

$$\overline{x} = \frac{180+175+182+188+181+177+193+184+188+181}{10} = 182,9$$

$$\overline{y} = \frac{42+41+44+45+43+41+47+43+45+42}{10} = 43,3$$

Die nachfolgenden Schritte zur Berechnung der einzelnen Summen, habe ich mithilfe von Technolgieeinsatz in der Form von Maxima abgearbeitet:

Wertepaare definieren

```
i1  listx: [180, 175, 182, 188, 181, 177, 193, 184,188, 181];
o1  [180,175,182,188,181,177,193,184,188,181]
i2  listy: [42, 41, 44, 45, 43, 41, 47, 43, 45, 42];
o2  [42,41,44,45,43,41,47,43,45,42]
```

Arithmetische Mittel berechnen

```
i3  xv: (180 + 175+ 182 + 188+181+ 177+ 193 +184+188+181)/10, numer;
o3  182.9
i4  yv: (42+ 41+ 44+ 45+ 43+ 41+ 47+ 43+ 45+42)/10, numer;
o4  43.3
```

Summe $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2$

```
i5  (listx[1]-xv)^2+
    (listx[2]-xv)^2+
    (listx[3]-xv)^2+
    (listx[4]-xv)^2+
    (listx[5]-xv)^2+
    (listx[6]-xv)^2+
    (listx[7]-xv)^2+
    (listx[8]-xv)^2+
    (listx[9]-xv)^2+
    (listx[10]-xv)^2, numer;
o5  268.9
```

Summe $\sum_{k=1}^{n}(y_k - \overline{y})^2$

```
i6  (listy[1]-yv)^2+
    (listy[2]-yv)^2+
    (listy[3]-yv)^2+
    (listy[4]-yv)^2+
    (listy[5]-yv)^2+
    (listy[6]-yv)^2+
    (listy[7]-yv)^2+
    (listy[8]-yv)^2+
    (listy[9]-yv)^2+
    (listy[10]-yv)^2,numer;
o6  34.1
```

Summe $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}) \cdot (y_k - \overline{y})$

```
i7  (listx[1]-xv)*(listy[1]-yv)+
    (listx[2]-xv)*(listy[2]-yv)+
    (listx[3]-xv)*(listy[3]-yv)+
    (listx[4]-xv)*(listy[4]-yv)+
    (listx[5]-xv)*(listy[5]-yv)+
    (listx[6]-xv)*(listy[6]-yv)+
    (listx[7]-xv)*(listy[7]-yv)+
    (listx[8]-xv)*(listy[8]-yv)+
    (listx[9]-xv)*(listy[9]-yv)+
    (listx[10]-xv)*(listy[10]-yv), numer;
o7 92.29999999999998
```

Somit kann alles in die Formel für den Pearson'schen Korrelationskoeffizient eingefügt werden:

$$\mathrm{r} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}) \cdot (y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}(y_k - \overline{y})^2}} = \frac{92.29}{\sqrt{268.9 \cdot 34.1}} = 0.963...$$

Aus diesem Wert für r kann man heraus interpretieren, dass es einen sehr guten positiven linearen Zusammenhang zwischen Körper- und Schuhgröße bei Männer gibt. Ob dieser Wert repräsentativ ist, ist fraglich, da nur zehn Personen befragt wurden.

8.2 Bifi-Beispiele

8.2.1 E-Reader

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

Abbildung 101: Aufgabenstellung: E-Reader

Die Regressionsgerade für das Beispiel kann mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate in Maxima gelöst werden. Die Punkte für die Gerade können aus der Angabe entnommen werden. Dabei zu beachten ist, dass nur die Punkte im Intervall [3; 7 genommen werden sollen.

```
(%i5) p: matrix([3, 674], [4, 981], [5, 1310], [6, 1700], [7, 2055])$;
      lsquares_estimates(p, [x, y], y=k*x+d, [k, d]), numer;
```

$$[[k = 348.1, d = -396.5]] \quad (\%o5)$$

Somit erhält man eine Gerade $V(t) = 348,1 \cdot t - 396,5$, wo t für die Zeit in Wochen steht und $V(t)$ für die Anzahl der verkauften E-Reader bis zum Zeitpunkt t.

Dabei steht die Steigung von 348 für die verkaufen E-Reader pro Woche.

8.2.2 Fahrräder

Fahrräder*

Aufgabennummer: B_460

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Verkaufszahlen für E-Bikes in Österreich sind in den letzten Jahren gestiegen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Verkaufszahlen (gerundet auf 1 000) für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2008	2010	2012	2013
Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes	8 000	20 000	41 000	43 000

Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2008.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Abbildung 102: Aufgabenstellung: Fahrräder

Die Aufgabe kann grundsätzlich wie die vorherige gelöst werden. Was man aber unbedingt beachten muss, sind die Jahreszahlen in der Angabe. Diese sind teilweise nicht kontinuierlich, teilweise fehlt ein Jahr zwischen den Spalten. Dies muss bei der Matrizen-Bildung berücksichtigt werden.

(%i16)
```
p: matrix([0, 8000], [2, 20000], [4, 41000], [5, 43000])$
lsquares_estimates(p, [x, y], y=k*x+d, [k, d]), numer;
```

$$[[k = 7525.42372881356, d = 7305.084745762711]] \qquad (\%o16)$$

Somit erhält man eine Ausgleichsgerade $A(t) = 7525 \cdot t + 7305$, wo t für die Zeit in Jahren nach 2008 steht und $A(t)$ die Anzahl der verkauften E-Bikes pro Jahr zur Zeit t angibt.

8.2.3 Fairtrade

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

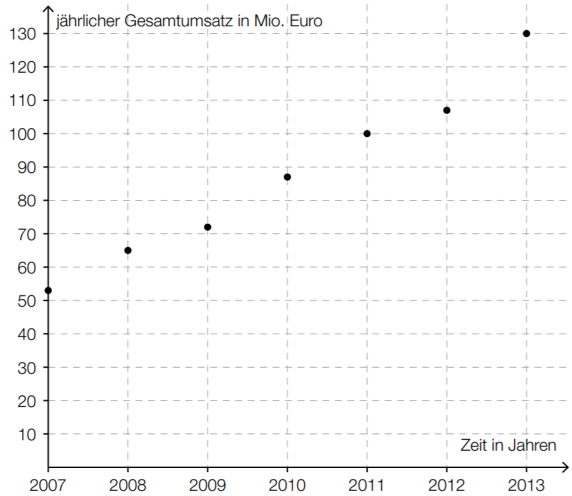
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

Abbildung 103: Aufgabenstellung: Fairtrade

In Zusammenhang mit Maxima haben wir schon die Methode *lsquares_estimates* kennengelernt. Mit dieser kann man eine Regressionskurve basierend auf einer Matrix und Funktionsgleichung bilden.

(% i4)
```
p: matrix([0, 53], [1, 65], [2, 72], [3, 87], [4, 100], [5, 107], [6, 130])$
lsquares_estimates(p, [x, y], y=k*x+d, [k, d]), numer;
```

$$[[k = 12.25, d = 50.96428571428572]] \tag{\% o4}$$

Maxima besitzt aber eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von Regressionskurven und sogar Korrelationen durch das Paket *stats*. Die Funktion *simple_linear_regression* erlaubt es einem einfach die Regressionsgerade und Korrelation für einen linearen Zusammenhang zu berechnen. Dies vereinfacht vor allem die Berechnung des Pearson'schen Korrelationskoeffizienten.

(% i6)
```
load(stats)$
simple_linear_regression(p);
```

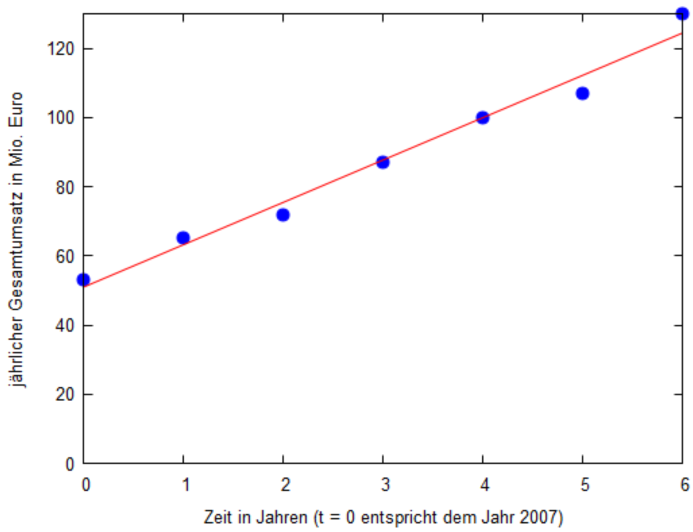
$$\begin{gathered}
SIMPLELINEARREGRESSION \\
model = 12.25x + 50.96428571428571 \\
correlation = 0.9908826255518403 \\
v_{estimation} = 15.53571428571428 \\
b_conf_int = [10.33522375237617, 14.16477624762383] \\
hypotheses = H0 : b = 0, H1 : b \neq 0 \\
statistic = 16.44559124094868 \\
distribution = [student_t, 5] \\
p_{value} = 1.517063586820022\,10^{-5}
\end{gathered} \tag{\% o6}$$

Aus dem Ergebnis $0,991$ für den Korrelationskoeffizienten kann man schließen, dass ein starker linear Zusammenhang herrscht.

Die Funktion liefert auch die Regressionsgerade $f(t) = 12.25 \cdot t + 50.964$ zurück. Mit dieser kann der Graph vervollständigt werden:

(% i9)
```
wxplot2d([[discrete, args(p)], f(t)], [t,0,6], [y,0,130],
[style, points, lines], [color, blue, red],
[legend,false],
[xlabel, " Zeit in Jahren (t = 0 entspricht dem Jahr 2007)"],
[ylabel, "jährlicher Gesamtumsatz in Mio. Euro"])$
```

(% o9)



Weiters kann mit der Funktion der zu erwartende jährliche Gesamtumsatz (in Mio. Euro) im Jahr 2020 (t=13) berechnet werden:

(% i10) f(13);

$$210.2142857142857 \tag{\% o10}$$

9 Differentialgleichung

9.1 Theorie

9.1.1 Definition

Eine Differentialgleichung (ODE) ist eine Gleichung, die Ableitungen enthält. Dabei gibt es zwei Darstellungen, wie diese Auftreten können.

Implizite Darstellung	**Explizite Darstellung**
$y' = 2x$	$s'' = -g$
$x + y \cdot y' = 0$	

Tabelle 13: Beispiele für implizite/explizite Darstellung

9.2 Lösung

Bei Differentialgleichungen muss man beachten, dass es eine allgemeine und eine spezielle Lösung gibt. Letztere wird auch Partikuläre Lösung genannt.

Bei einer normalen Gleichung wie $2x + 4 = x$ wäre das Ergebnis $x = -2$. Die Lösung einer Differentialgleichung ist jedoch kein einfacher Wert sonder eine Funktion.

9.2.1 Trennung der Variablen

Ein Ansatz zur Lösung einer ODE besteht darin, die abgeleitete Variable (y') auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufzuspalten.

Beispiel 1
Angabe:

$$x + y \cdot y' = 0$$
$$y(0) = 2$$
$$y' = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Wenn wir dies jetzt in die Gleichung einsetzen erhalten wir

$$x + y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Nun führen wir die Trennung der Variablen durch. Dabei wird durch Umformen jede Variable auf eine eigene Seite getrennt.

$$y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -x$$
$$y \cdot \partial y = -x \cdot \partial x$$

Nun können beide Seite integriert werden.

$$\int y \cdot \partial y = \int -x \cdot \partial x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 = -x^2 + C$$

Die Allgemeine Lösung ist somit

$$y = \sqrt{x^2 + C}$$

Da wir einen Anfangswert ($y(0) = 2$) gegeben haben können wir durch einsetzen C bestimmen.

$$2 = \sqrt{0 + C} \Rightarrow C = \pm 4$$

Beispiel 2
Angabe:

$$y' + \cos(x) \cdot y = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$$

Ableitung ersetzen und umformen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\cos(x) \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y} \partial y = \int -\cos(x) \partial x$$

$$\log|y| = -\sin(x) + C$$

Der Logarithmus kann nun entfernt werden

$$y = e^{-\sin(x) + C}$$

Exponent aufspalten und vereinfachen

$$y = e^{-\sin(x)} \cdot e^C$$

$$y_a = e^{-\sin(x)} \cdot C$$

In diese Allgemeine Lösung kann nun der Anfangswert eingesetzt werden.

$$2\pi = e^{-\sin\frac{\pi}{2}} \cdot C$$

$$2\pi = e^{-1} \cdot C$$

$$C = 2\pi \cdot e$$

Die Partikuläre Lösung ist somit:

$$y_p = e^{-\sin(x)} \cdot \pi \cdot 2 \cdot e$$

9.3 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

9.3.1 Definition

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat folgende Gestalt:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Wobei man $g(x)$ als Störfunktion bezeichnet.

9.3.2 Begriffserklärung

- Ordnung: Höchste auftretende Ableitung
- Grad: Höchste auftretende Potenz
- homogene ODE: Störfunktion ist Nullfunktion (also = 0)
- inhomogene ODE: Störfunktion ist nicht Nullfunktion

9.3.3 Homogene Differentialgleichungen

Können durch "Trennung der Variablen"gelöst werden. Sie müssen jedoch die oben definierte Form besitzen.

Beispiel 3
Angabe:

$$x^2 \cdot y' + y = 0$$

Dies ist noch nicht in der oben definierten Form und muss daher umgeformt werden.

$$y' + \frac{1}{x^2} \cdot y = 0$$

Nun kann mittels "Trennung der Variablen"gelöst werden

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y} \partial y = \int -\frac{1}{x^2} \partial x$$

$$\log|y| = \frac{1}{x} + C$$

$$y_a = e^{x^{-1}} \cdot C$$

9.4 Lösung inhomogener Differentialgleichungen

Kann nicht mehr durch "Trennung der Variablen"gelöst werden. Eine Möglichkeit inhomogene Differentialgleichungen zu lösen ist die Variation der Konstanten.

9.4.1 Variation der Konstanten

Beispiel 4
Angabe:

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

Hierbei ist $\cos(x)$ eine Störfunktion. Nun muss erstmals die homogene Lösung gefunden werden, dafür betrachtet man folgende Gleichung

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\log|y| = -\log|x| + C$$

Logarithmus kann nun wieder aufgelöst werden

$$y = \frac{C}{e^{\log|x|}}$$

$$y_h = \frac{C}{x}$$

Nun kann mit der Variation der Konstante begonnen werden. Dabei wird die Integrationskonstante C durch eine Funktion $C(x)$ ersetzt:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Nun müssen wir die Ableitung bilden (Quotientenregel):

$$y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

Die beiden Ausdrücke die wir nun für y und y' erhalten haben müssen nun in die Differentialgleichung eingesetzt werden.

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{\frac{C(x)}{x}}{x} = \cos(x)$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \cos(x)$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} = \cos(x)$$
$$\frac{C'(x)}{x} = \cos(x)$$

Daraus lässt sich nun die Konstantefunktion bestimmen

$$C'(x) = x \cdot \cos(x)$$

Um die Funktion $C(x)$ bestimmen zu können muss nun integriert werden.

$$\int C'(x) = \int x \cdot \cos(x)$$

Bei diesem Beispiel muss die rechte Seite partiell Integriert werden:

$$\int x \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) dx$$

$$\int x \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot x + \cos(x)$$

Nun kann $C(x)$ bestimmt werden

$$C(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann nun durch Einsetzen bestimmt werden.

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

$$y = \frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C}{x}$$

Beispiel 5
Angabe:

$$y' - 4y = x \cdot e^{5x}$$

Finden der homogenen Lösung:

$$y' - 4y = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4y$$
$$\int \frac{1}{y} \partial y = \int 4 \partial x$$
$$\log|y| = 4x + C$$
$$y_h = e^{4x} \cdot C$$

Variation der Konstanten

$$y = e^{4x} \cdot C(x)$$

$$y' = 4e^{4x} \cdot C(x) + e^{4x} \cdot C'(x)$$

Einsetzen in Gleichung

$$\cancel{4e^{4x} \cdot C(x)} + e^{4x} \cdot C'(x) - \cancel{4e^{4x} \cdot C(x)} = x \cdot e^{5x}$$

$$e^{4x} \cdot C'(x) = x \cdot e^{5x}$$

$$C'(x) = x \cdot e^{x}$$

$$C(x) = x \cdot e^{x} - e^{x} + C$$

Einsetzen in die homogene Lösung

$$y = e^{4x} \cdot (x \cdot e^{x} - e^{x} + C)$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung

$$y_a = e^{4x} \cdot (x \cdot e^{x} - e^{x} + C) + e^{4x} \cdot C$$

9.5 Bifi-Beispiel

Ammoniten

Aufgabennummer: B_371

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ammoniten sind eine ausgestorbene Gruppe von im Meer lebenden Kopffüßern.

Gehäuse eines Ammoniten

Bildquelle: Anja Osenberg / https://pixabay.com/de/ammonit-versteinerung-fossil-321695/ [05.04.2018].

c) Der Nautilus ist ein heute noch vorkommender Nachfahre des Ammoniten. Er lebt in 300 m Wassertiefe.
Die Aufnahme der Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe kann durch eine Funktion I beschrieben werden.

x … Wassertiefe in Metern (m)
$I(x)$ … Lichtintensität in der Tiefe x in Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche

Die lokale Änderungsrate der Funktion I ist proportional zu I.

- Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf.
- Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

An einer bestimmten Stelle im Meer ist die Lichtintensität in 1 m Wassertiefe um 7 % geringer als an der Oberfläche.

- Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf, die die Abhängigkeit der Lichtintensität von der Wassertiefe an dieser Stelle des Meeres beschreibt.
- Berechnen Sie, wie viel Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche in 300 m Tiefe nach diesem Modell noch vorhanden sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Abbildung 104: Aufgabenstellung Ammoniten

9.5.1 Aufstellen der Gleichung

Die lokale Änderungsrate der Funktion I ist proportional zu I. Das bedeutet das die Ableitung $\frac{\partial I}{\partial x}$ abhängig von I ist. Da die Intensität um einen unbekannten Faktor abnimmt wird muss dieser ebenfalls berücksichtigt werden. Die Änderrungsrate kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -k \cdot I$$

Nun suchen wir eine Funktion die diese Bedingung erfüllt. Dies kann mittels Trennung der Variablen geschehen.

$$\frac{1}{I}\partial I = -k \cdot \partial x$$
$$\int \frac{1}{I}\partial I = -\int k \cdot \partial x$$
$$\log|I| = -k \cdot x + C$$
$$I = e^{-k \cdot x} \cdot C$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $I = e^{-k \cdot x} \cdot C$

9.5.2 Spezielle Lösung

Anfangswerte: I(1) = 93 C kann als 100 angenommen werden, da die Intensität bei 100% startet.

$$I = e^{-k \cdot x} \cdot C$$

$$93 = e^{-k \cdot 1} \cdot 100$$
$$\frac{93}{100} = e^{-k}$$
$$\log(\frac{93}{100}) = -k$$
$$k = -\log(\frac{93}{100})$$

Nun kann in die Funktion eingesetzt werden.

$$I(x) = 100 \cdot e^{-\log(\frac{93}{100}) \cdot x}$$

Die Funktion zur Bestimmung der Lichtintensität lautet folgendermaßen $I(x) = 100 \cdot e^{-\log(\frac{93}{100}) \cdot x}$.

$$I(300) = 100 \cdot e^{-\log(\frac{93}{100}) \cdot 300}$$
$$I(300) = 3,506 \cdot 10^{-8}$$

Die Lichtintensität auf 300m tiefe beträgt noch $3,506 \cdot 10^{-8}\%$ der Intensität an der Oberfläche.

Literaturverzeichnis

[1] Unbekannter Autor. *Boxplot*. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Box-Plot.

[2] Unbekannter Autor. *Korrelation und lineare Regression*. 02.11.2018. Lernhelfer. URL: https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/korrelation-und-lineare-regression.

[3] Unbekannter Autor. *Regression*. 02.11.2018. ZUM-Wiki. URL: https://wiki.zum.de/wiki/Mathematik-digital/Exponentialfunktion_und_Durchf%C3%BChren_einer_Regression/Regressionen.

[4] Unbekannter Autor. *Statistik*. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Statistik.

[5] Wikipedia Autoren. *Korrelation*. 02.11.2018. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Korrelation.

[6] Wikipedia Autoren. *Regressionsanalyse*. 02.11.2018. Wikipedia. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Regressionsanalyse.

[7] Bernhard Grotz. *Trigonometrie*. 10.02.2020. URL: https://www.grund-wissen.de/mathematik/elementare-geometrie/planimetrie/trigonometrie.html.

[8] Daniel Jung. *Mathe Videos by Daniel Jung*. URL: https://www.youtube.com/channel/UCPtUzxTfdaxAmr4ie9bXZVA.

[9] *Mathago Corona Kurs*. URL: https://www.mathago.at/corona/.

[10] MathHolt. *Exponential Regression Example*. 02.11.2018. YouTube. URL: https://www.youtube.com/watch?v=U_cO6Mhk964.

[11] Horst Rinne. *Taschenbuch der Statistik. 4., vollständig überarb. und erw.* vollständig überarb. und erw. Frankfurt: Europa-Lehrmittel, 2008. ISBN: 978-3-8171-1827-4.

[12] Steinmair Camilo Drs Pollack-Drs Wymlatil Sidlo Puhm. *Mathematik mit technischen Anwendungen*. Bd. 4. 2015, S. 251 –259.

[13] thesimpleclub. *Ableitungsregeln*.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis