CSE3013 (컴퓨터공학 설계 및 실험 I)
PRJ-2 미로 프로젝트 1주차 결과 보고서

서강대학교 컴퓨터공학과 박수현 (20181634)

서강대학교 컴퓨터공학과

1 목적

마로 게임을 위한 알고리즘과 자료구조를 이해한다.

2 문제

2.1 완전 미로 생성 알고리즘

실제로 사용한 미로 생성 알고리즘은 예비 보고서에서 작성한 프림 알고리즘과는 다른 알고리즘을 사용하였다. 바로 백트래킹이다. 높이 h, 너비 w의 미로에서 백트래킹은 다음과 같이 작동한다.

BACKTRACK(x, y, h, w)
Calculate unvisited adjacent cells to (x, y)
Set visited state of (x, y) to TRUE
while there exists unvisited adjacent cells to (x, y)
    $(nx, ny) =$ random unvisited adjacent cell to (x, y)
    Make path from (x, y) to (nx, ny)
    BACKTRACK(nx, ny, h, w)
    Recalculate unvisited adjacent cells to (x, y)

랜덤하게 결정한 (x, y)에서 백트래킹을 시작하면 된다.

자료구조는 가로 길을 나타내는 $h \times (w-1)$ 크기의 불 배열과 세로 길을 나타내는 $(h-1) \times w$ 크기의 불 배열로 표현하였다. 실제로는 각각 `horizontal_route`와 `vertical_route`라는 이름으로 구현되었는데, 미로에서 (x, y)에서 $(x, y-1)$로 갈 수 있다면 `vertical_route[y - 1][x]`가 `1`이고, 아닐 경우 `0`인 자료구조이다. 이 자료구조의 공간 복잡도는 $\mathcal{O}(h \times w)$이다.

인접한 셀의 개수를 계산하는 알고리즘은 4방향만 체크하면 되므로 $\mathcal{O}(1)$으로 충분하다. 백트래킹은 각 셀마다 인접한 미방문 셀을 방문하는데, 결국 모든 셀을 방문하게 되므로 시간 복잡도도 $\mathcal{O}(h \times w)$이다.

2.2 불완전 미로 생성 알고리즘

불완전 미로의 생성은 생성된 완전 미로에서 추가로 몇 갸의 벽을 없애 주는 것으로 가능하다. 모든 칸들을 랜덤하게 돌면서 옆 셀과 벽으로 막혀 있는 셀이 있다면 길을 만들어 주는 식으로 n번 반복한다. 자료구조는 그대로 사용하였다.

DELETE-WALLS($delete$, h, w)

$delete = \min\left(delete, \frac{\min(h,w)}{2}\right)$
while $delete > 0$
    $(x, y) =$ random cell in maze field
    $(nx, ny) =$ random adjacent cell to (x, y)
    if there is no direct path between (x, y) and (nx, ny)
        Make new direct path
        $delete = delete - 1$

정점이 hw개 존재하는 그래프의 최소 신장 트리에는 노드가 $hw-1$개 존재한다. 또한 미로의 모든 벽을 삭제하면 간선은 $h \times (w-1) + (h-1) \times w$개 존재한다. 따라서 완전 미로 상태에서 셀과 셀 사이의 벽은

$$\begin{aligned}&[h \times (w-1) + (h-1) \times w] - [hw-1] \\ =& hw - h - w + 1\end{aligned}$$

개이다. 따라서 총 $h \times (w-1) + (h-1) \times w$개의 원래 존재하던 벽 중 $hw-h-w+1$개를 고르는 확률로 벽을 지우는 데 성공할 수 있다.

n개의 벽 중 k개의 벽이 남아 있을 때, 지우기에 성공하는 확률은 $\frac{k}{n}$이다. 따라서 이 때 처음으로 존재하는 벽을 지우기까지의 시도 횟수를 X라 하면 $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{k}{n}\right)$이므로 이 때 $\mathrm{E}(X) = \frac{n}{k}$이다.

이 알고리즘에서 벽을 r개 지우도록 한다면 벽 r개를 지우는 데 필요한 시도 횟수의 기댓값은 n번째 조화수 $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$라고 할 때

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{r-1} \frac{h \times (w-1) + (h-1) \times w}{hw-1-k} \\ =& \sum_{k=0}^{r-1} \frac{2hw-h-w}{hw-1-k} \\ =& (2hw-h-w)\left(H_{h \times w-1} - H_{h \times w-r-1}\right)\end{aligned}$$

이다.

한편 상수 $\gamma \approx 0.577$에 대해 $\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$임이 알려져 있으므로, $hw = A \to \infty$일 때

$$
\begin{aligned}
&\lim_{A\to\infty}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{h\times(w-1)+(h-1)\times w}{hw-1-k} \\
=&\lim_{A\to\infty}\left[(2A-h-w)\left(H_{A-1}-H_{A-r-1}\right)\right] \\
=&\lim_{A\to\infty}\left[(2A-h-w)\left(\ln(A-1)-\ln(A-r-1)\right)\right] \\
=&\lim_{A\to\infty}\left[(2A-h-w)\ln\frac{A-1}{A-r-1}\right] \\
=&\lim_{A\to\infty}\ln\left(\frac{A-1}{A-r-1}\right)^{2A-h-w} \\
=&\lim_{A\to\infty}\ln\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{2A-h-w} \\
=&\lim_{A\to\infty}\ln\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{2r\times\frac{A-r-1}{r}+2r+1-h-w} \\
=&\lim_{A\to\infty}\ln\left[\left[\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{\frac{A-r-1}{r}}\right]^{2r}\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{2r+1-h-w}\right] \\
=&\lim_{A\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{\frac{A-r-1}{r}}\right]^{2r}+\lim_{A\to\infty}\ln\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{2r+1-h-w} \\
=&\ln\lim_{A\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right)^{\frac{A-r-1}{r}}\right]^{2r}+(2r+1-h-w)\ln\lim_{A\to\infty}\left(1+\frac{r}{A-r-1}\right) \\
=&\ln e^{2r}+(2r+1-h-w)\ln 1 \\
=&2r
\end{aligned}
$$

이고, 따라서 hw의 미로에서 벽을 r개 지운다면 평균적으로 $2r$번의 연산이 필요하다. 결론적으로 평균적인 경우 완전 미로에서 벽들을 더 지워 불완전 미로를 만드는 데 드는 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(r)$으로 계산 가능하다. 불완전 미로를 처음부터 새로 만드는 경우를 생각한다면 완전 미로를 먼저 만들어야 하므로 전체 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(h\times w+r)$이다.

자료구조는 동일한 것을 사용하였으므로 공간 복잡도도 마찬가지로 $\mathcal{O}(h\times w)$이다.