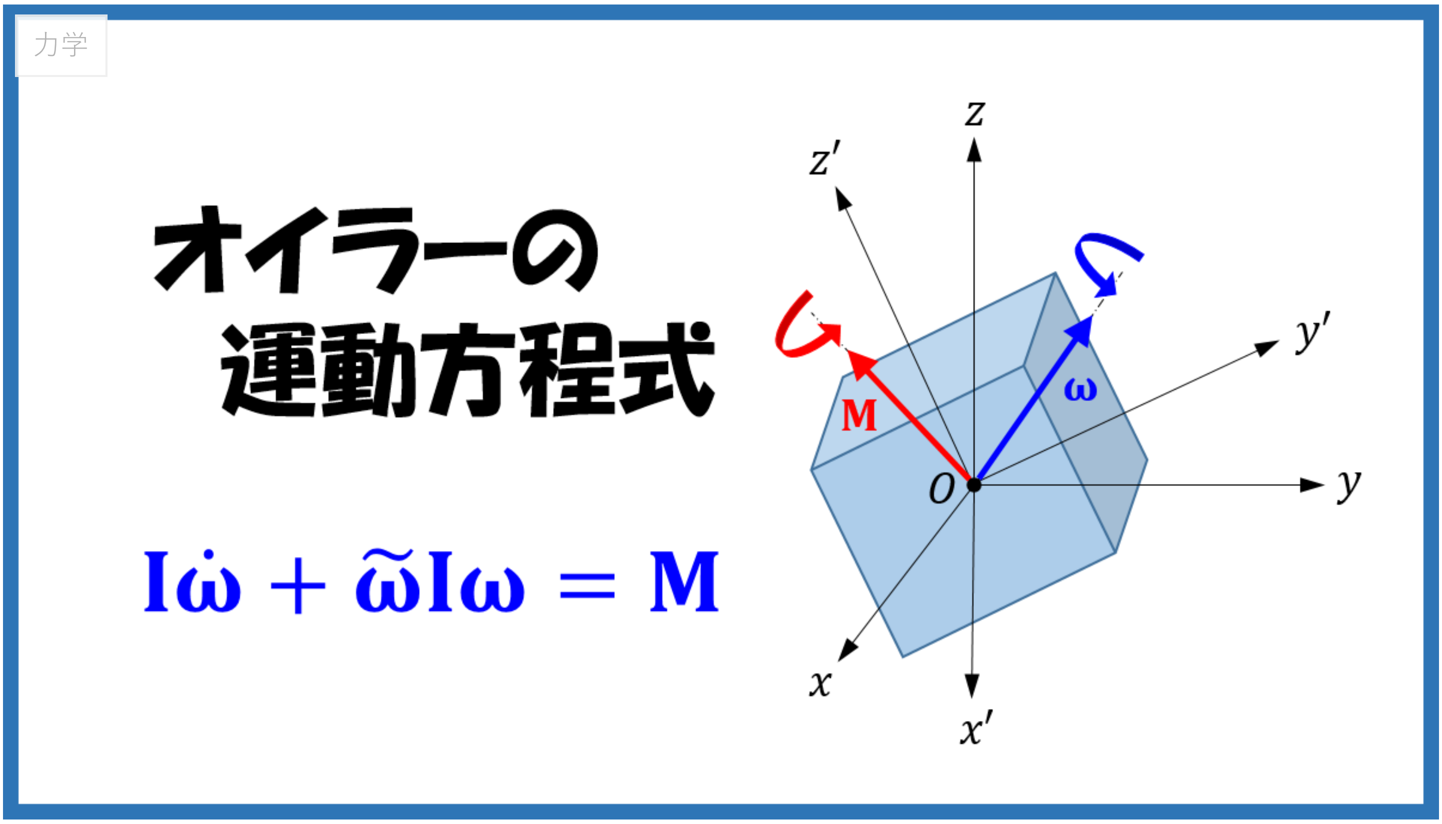
# 剛体の回転運動を支配するオイラーの運動方程式【力学の道具箱】



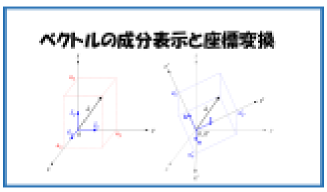

2022.02.05 2021.07.30

**オイラーの運動方程式**は、剛体の角速度ベクトルの時間変化を記述する常微分方程式で、剛体の回転運動を支配しています。並進運動を司る**ニュートンの運動方程式**と組み合わせて、剛体の運動を解析する際によく用いられます。この記事では、一般的な質点系の回転運動方程式からオイラーの運動方程式を、行列形式の簡潔な式を用いて導出する方法を解説します。導出の過程では、剛体の慣性行列やその座標変換などの概念も説明します。

## 予備知識

この記事では、以下の関連記事で解説した概念や結果を利用しています。必要に応じて参照してください。

関連記事




**ベクトルの成分表示と座標変換【力学の道具箱】**

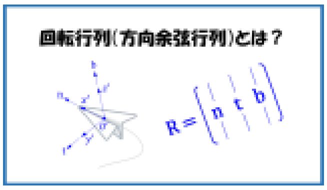
力や速度など、大きさだけでなく向きも問題となる量はベクトルと呼ばれます。ベクトルは図としては矢印で表示できますが、計算などでベクトルを数値的に扱いたい場合には、ベクトルの成分表示を利用します。

www.sky-engin.jp 2019.07.19

関連記事

**回転行列（方向余弦行列）とは？定義・性質・３つの物理的な意味・公式のまとめ**

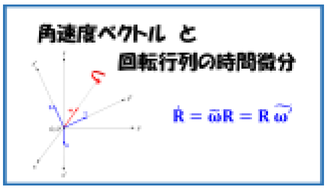
回転行列（方向余弦行列）は、３次元または２次元空間における“回転”または“回転




姿勢"を表す便利な行列で、力学やコンピュータグラフィックスでよく使われています。この記事では、回転行列の定義と性質、３つの物理的な意味、そしていくつか…

www.sky-engin.jp 2019.02.17

関連記事



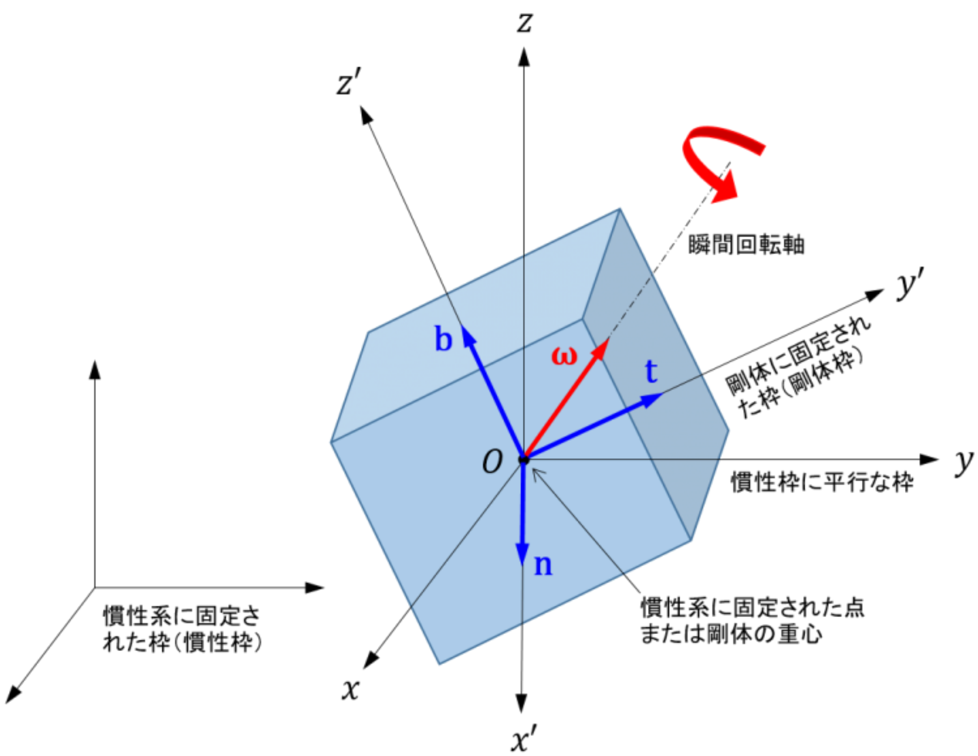

**角速度ベクトルと回転行列の時間微分～ポアソンの微分方程式【力学の道具箱】**

３次元の回転運動を自在に計算できるようになるためには、「ベクトルの成分表示と座標変換」、「回転行列」、そして「角速度ベクトルと回転行列の時間微分」を習得すると良いです。この記事では３つ目の「角速度ベクトルと回転行列の時間微…

www.sky-engin.jp 2021.06.10

## 回転する剛体と参照枠の定義

下図のように、慣性系に固定された枠（**慣性枠**）に対して回転運動する剛体を考えます。剛体中の慣性系に固定された点または剛体の重心を $O$ とし、慣性枠に平行な枠 $O-xyz$ と、剛体に固定された枠（**剛体枠**）$O-x'y'z'$ を考えます。




この記事では、すべてのベクトルを成分表示の代数ベクトルで表し、ある幾何ベクトル $\vec{a}$ の慣性枠（または慣性枠に平行な枠 $O-xyz$）による成分表示を $\mathbf{a}$、剛体枠 $O-x'y'z'$ による成分表示を $\mathbf{a}'$ と書きます。

慣性枠に対する剛体枠の**回転行列**を $\mathbf{R} \equiv [\,\mathbf{n} \quad \mathbf{t} \quad \mathbf{b}\,]$、剛体の**角速度ベクトル**を $\boldsymbol{\omega}$ とします。（$\mathbf{n}$、$\mathbf{t}$、$\mathbf{b}$ はそれぞれ $x'$、$y'$、$z'$ 軸方向の単位ベクトルです。）

# 質点系の回転運動方程式

剛体は**質点系**の特殊な場合ですから、質点系の運動方程式が適用できます。点 $O$ 周りの**角運動量**を $\mathbf{H}$、**力のモーメント**を $\mathbf{M}$ とすると、質点系の**回転運動方程式**は

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{M} \tag{1}$$

で与えられます。ドット記号は時間微分を表します（$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{a}$）。

角運動量 $\mathbf{H}$ は各質点の点 $O$ 周りの角運動量の総和として定義されます。

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &\equiv \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \\ &= \sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、$m_i$ は質点 $i$ の質量、$\boldsymbol{\rho}_i$ は質点 $i$ の点 $O$ に対する位置ベクトルです。また、$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i$ は $\boldsymbol{\rho}_i$ の**チルダ行列**を表します。

# 剛体の角運動量

質点 $i$ の位置ベクトル $\boldsymbol{\rho}_i$ の 剛体枠による成分表示を $\boldsymbol{\rho}'_i$ とすると、

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}\boldsymbol{\rho}'_i \tag{3}$$

の関係があります。剛体の場合、$\boldsymbol{\rho}'_i$ は一定です。式(3)を時間微分して、回転行列の時間微分の公式

$$\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R} \tag{4}$$

を適用すれば、

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\rho}}_i &= \dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\rho}'_i \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R}\boldsymbol{\rho}'_i \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho}_i \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i \\ &= -\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\omega} \\ &= -\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{5}$$

を得ます。

式(5)を式(2)へ代入すると、

$$\mathbf{H} = \left[-\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i\right]\boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

となり、ここで、

$$\mathbf{I} \equiv -\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \tag{7}$$

と置けば、式(6)より、剛体の角運動量を

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \tag{8}$$

と表すことができます。行列 $\mathbf{I}$ は剛体の**慣性行列**と呼ばれるものです。

# 剛体の慣性行列

## 離散的に質量が分布している場合

質点 $i$ の位置ベクトルの成分を $\boldsymbol{\rho}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ とすれば、慣性行列は次のように表せます。

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &\equiv -\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \\ &= -\sum_i m_i \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_i m_i \begin{bmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

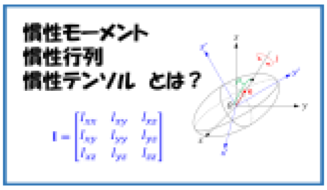
式(9)から、慣性行列 $\mathbf{I}$ は対称行列であることが分かります。

## 連続的に質量が分布している場合

連続的に質量が分布している剛体の場合、剛体の質量密度を $\rho$ とすると、式(7)において、質点 $m_i$ を質量 $\rho dV$ の微小体積要素 $dV$ に置き換え、和を剛体の体積全体についてとれば、慣性行列は次の体積積分になります。

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -\int_V \rho \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \, dV \\ &= -\int_V \rho \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} dV \\ &= \int_V \rho \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dV \end{aligned} \tag{10}$$

関連記事




**剛体の慣性モーメント・慣性行列（慣性テンソル）とは？定義・物理的意味・公式・定理のまとめ**

剛体の回転運動を計算する際には、慣性モーメントや慣性行列（慣性テンソル）と呼ばれる量が必要となります。この記事では、慣性モーメントと慣性行列（慣性テンソル）について詳しく解説し、それらの定義と物理的な意味、また関連する重要…

www.sky-engin.jp 2021.11.17

# 慣性行列の座標変換

慣性行列は座標系に依存します。式(7)の慣性行列 $\mathbf{I}$ は、慣性枠に平行な枠 $O-xyz$ を基準としたものです。一方、剛体枠 $O-x'y'z'$ を基準とした慣性行列は次式で定義されます。

$$\mathbf{I}' \equiv -\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i \tag{11}$$

では、$\mathbf{I}$ と $\mathbf{I}'$ の関係はどうなっているのでしょうか。

[「ベクトルの成分表示と座標変換」の記事](https://www.sky-engin.jp/)で示したように、式(3)の関係を持つ $\boldsymbol{\rho}_i$ と $\boldsymbol{\rho}'_i$ のチルダ行列 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i$ と $\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i$ の間には次の関係があります。

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i\mathbf{R}^T \tag{12}$$

式(7)に(12)を代入して、回転行列 $\mathbf{R}$ が直交行列である（$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ である）ことを考慮すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= -\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \\ &= -\sum_i m_i (\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i\mathbf{R}^T)(\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i\mathbf{R}^T) \\ &= \mathbf{R}\left[-\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}'_i\right]\mathbf{R}^T \end{aligned}$$

となりますから、これに式(11)を代入して

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}\mathbf{I}'\mathbf{R}^T \tag{13}$$

を得ます。これは慣性行列の座標変換の式です。また、式(13)の両辺に左から $\mathbf{R}^T$、右から $\mathbf{R}$ を乗ずれば、逆変換の式

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}^T\mathbf{I}\mathbf{R} \tag{14}$$

が得られます。

# 慣性行列の時間微分

枠 $O-xyz$ に対して剛体は回転運動しているので、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{\rho}_i$ は時間によって変化します。従って、式(3)で定義される枠 $O-xyz$ による慣性行列 $\mathbf{I}$ は時間によって変化します。

一方、剛体枠 $O-x'y'z'$ による質点の位置ベクトルの成分表示 $\boldsymbol{\rho}'_i$ は一定ですから、式(11)で定義される剛体枠による慣性行列 $\mathbf{I}'$ は一定で時間によって変化しません。

オイラーの方程式を導くための最後の準備として、慣性行列 $\mathbf{I}$ の時間微分を求めましょう。

式(13)を時間微分して、式(4)の回転行列の時間微分の公式を用いれば、次の結果が得られます。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{I}'\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\mathbf{I}'\dot{\mathbf{R}}^T \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R}\mathbf{I}'\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\mathbf{I}'\mathbf{R}^T\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I} + \mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I} - \mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned} \tag{15}$$

ここで、最後の等号はチルダ行列が歪対称行列であることを用いました。（$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}$）

## オイラーの運動方程式（枠 $O-xyz$ による表現）

では、いよいよオイラーの運動方程式を導きます。

式(8)を時間微分し、式(15)を用いれば、角運動量の時間微分は、

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}} &= \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I} - \mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\omega}})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned} \tag{16}$$

となります。ここで最後の等号は、自身の外積が零ベクトルであることを用いています。

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

式(16)を式(1)へ代入すれば、以下の回転運動方程式が得られます。

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \tag{17}$$

式(17)は、枠 $O-xyz$ による**オイラーの運動方程式**の表現です。

## オイラーの運動方程式（剛体枠による表現）

式(17)は、慣性行列 $\mathbf{I}$ が時間によって変化するので使いにくい場合もあります。そこで、式(17)を座標変換して、剛体枠による表現を求めてみましょう。

### 一般の場合

角速度ベクトルとそのチルダ行列の座標変換は、それぞれ以下の式(18)と(19)で与えられます。

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}' \tag{18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}'}\mathbf{R}^T \tag{19}$$

式(18)を時間微分すれば

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \dot{\mathbf{R}}\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}' \\ &= \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}'}\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}' \\ &= \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}' \end{aligned} \tag{20}$$

を得ます。式(17)に式(18)(19)(20)を代入すると

$$\mathbf{I}(\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}') + (\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}'}\mathbf{R}^T)\mathbf{I}(\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}') = \mathbf{M}$$

また、左から $\mathbf{R}^T$ を掛けると

$$(\mathbf{R}^T\mathbf{I}\mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\omega}}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}'}(\mathbf{R}^T\mathbf{I}\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{R}^T\mathbf{M}$$

さらに、式(13)と $\mathbf{R}^T\mathbf{M} = \mathbf{M}'$ を代入すれば

$$\mathbf{I}'\dot{\boldsymbol{\omega}}' + \tilde{\boldsymbol{\omega}'}\mathbf{I}'\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{M}' \tag{21}$$

を得ます。式(21)は剛体枠 $O - x'y'z'$ による**オイラーの方程式**の表現です。式(17)と式(21)は形は全く同じですが、式(21)の慣性行列 $\mathbf{I}'$ は一定です。

## 剛体枠を慣性主軸に一致させた場合

剛体枠 $O - x'y'z'$ の選び方によっては、剛体枠による慣性行列 $\mathbf{I}'$ が対角行列になります。慣性行列 $\mathbf{I}'$ が対角行列になるとき、$x'$軸、$y'$軸、および$z'$ 軸は**慣性主軸**と呼ばれる軸と一致しています。このとき、

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \begin{bmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}' = \begin{bmatrix} M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{bmatrix}$$

と置けば、式(21)は

$$\begin{aligned} I'_{xx}\dot{\omega}'_x + (I'_{zz} - I'_{yy})\omega'_y\omega'_z &= M'_x \\ I'_{yy}\dot{\omega}'_y + (I'_{xx} - I'_{zz})\omega'_z\omega'_x &= M'_y \\ I'_{zz}\dot{\omega}'_z + (I'_{yy} - I'_{xx})\omega'_x\omega'_y &= M'_z \end{aligned}$$

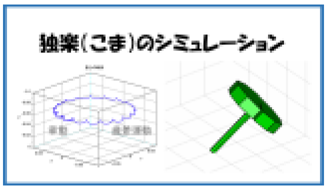
と書けます。

# まとめ

この記事では、一般的な質点系の回転運動方程式からオイラーの運動方程式を、行列形式の簡潔な式表現を用いて導出する方法を解説しました。また、剛体の慣性行列やその座標変換などの概念も合わせて説明しました。

オイラーの運動方程式を用いれば、剛体の回転運動をシミュレーションすることができます。下の関連記事では、オイラーの運動方程式を用いた独楽（こま）のシミュレーションの例題を扱っていますので、よろしければご覧ください。

関連記事




**独楽（こま）のシミュレーション～剛体の回転運動シミュレーションのやり方**

オイラーの運動方程式を用いて剛体の回転運動をシミュレーションする方法を、独楽（こま）のシミュレーションを例として解説します。 Scilab用シミュレーションプログラムの実例も示します。

www.sky-engin.jp 2022.01.24

最後まで読んでいただきありがとうございました。この記事がご参考になれば幸いです。