慣性テンソルの変換について

4/14 の比較惑星学基礎論の講義で慣性主軸が A, B, C で表される剛体の，任意軸のまわりの慣性モーメントを求めるというところで分かりにくい場所がありましたので，補足しておきます．

慣性テンソル I_{ij} というのは，角運動量ベクトルと角速度ベクトルとの間の線形変換を表す 3 行 3 列の対称テンソルで，

$$L_i = I_{ij}\omega_j \tag{1}$$

の関係で表されます．連続体力学で現れる，トラクションと単位面ベクトル，応力テンソルの関係

$$T_i = \tau_{ij}n_j \tag{2}$$

の関係と数学的にはパラレルです．慣性テンソル I_{ij} は実対称なので，適当な直交変換をする（うまい直交直線座標系を選ぶ）ことで，

$$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \tag{3}$$

のように対角化することができ，このとき選んだ座標軸 (x, y, z) を指して慣性主軸と呼んでいます．このとき，x 軸に対応する慣性モーメントが A，y 軸に対応する慣性モーメントが B，z 軸に対応する慣性モーメントが C という，座標軸と慣性モーメントとの対応関係が成り立っています．

さて，このような慣性主軸がいま分かっているとき，この慣性主軸上で p_i と表されるようなベクトルを軸とした慣性モーメントを求めるには次のようにします．ベクトル p_i を極座標を用いて (r, θ, λ) と表すと，これは慣性主軸の直交直線座標系では，$(r\sin\theta\cos\lambda, r\sin\theta\sin\lambda, r\cos\theta)$ と表されます．従って，この方向の単位ベクトルは $(\sin\theta\cos\lambda, \sin\theta\sin\lambda, \cos\theta)$ です．この軸を p 軸と呼びます．それで，いまの慣性主軸の z 軸を回転させて，p 軸に一致させるような変換を考えます．これにはベクトル $x_i = (x, y, z)$ に回転行列をかけます．z 軸が p 軸に一致するようなものには x 軸と y 軸の選び方に不定性が残りますが，どのように x, y 軸を選んだとしても z 軸は変更を受けないので z 軸が p 軸に一致するもののうち，一つを求めれば良いことになります．そのような変換の一つとして，次の方法があります．

まず，xy 平面を反時計回りに λ だけ回転します．新たな x, y 軸を x', y' 軸とします．このとき z 軸は変更を受けません．つぎに，$x'z$ 軸を時計回りに θ だけ回転します．回転先の軸を x'', y', z'' 軸とします．このようにすると，z'' 軸は p 軸に一致することが分かります (図 1)．これを行列で表すと，はじめの回転は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

で表され，ふたつめの回転は，

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{5}$$

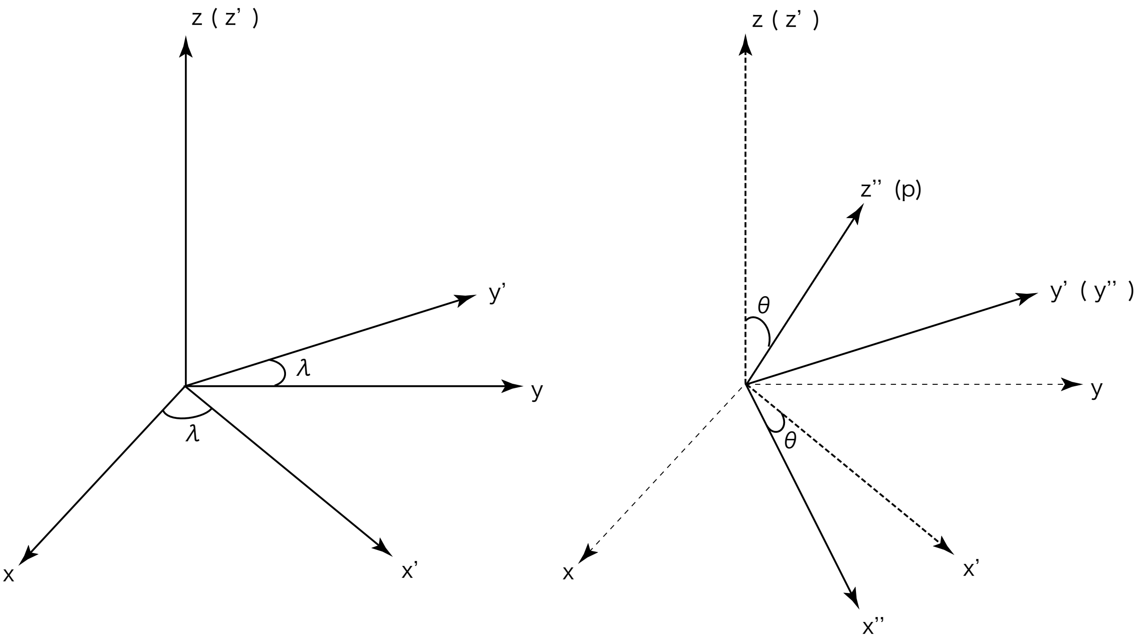

図 1　座標の回転

で表されます．(4) を (5) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\lambda & \cos\theta\sin\lambda & -\sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \sin\theta\cos\lambda & \sin\theta\sin\lambda & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

右辺の行列は，行列式が 1 の直交行列なので，これも回転行列になっています．この回転行列を R_{ij} と表すことにします．(6) 左辺を x'_i と書くことにすると，

$$x'_i = R_{ij}x_j \tag{7}$$

となります．このような座標変換を行うとき，全てのベクトルが R_{ij} によって変更を受けるので，一般に，この座標変換によってベクトル A_i は，

$$A'_i = R_{ij}A_j \tag{8}$$

と変換されます．したがって，これを (1) に適用すると，

$$L'_i = R_{ij}L_j = R_{ij}(I_{jk}\omega_k) = R_{ij}I_{jk}(R^{-1}_{kl}R_{lm})\omega_m = R_{ij}I_{jk}R^{-1}_{kl}\omega'_l \tag{9}$$

したがって，

$$I'_{ij} \equiv R_{ik}I_{kl}R^{-1}_{lj} \tag{10}$$

と定義すれば，

$$L'_{ij} = I'_{ij}\omega'_j \tag{11}$$

が成り立ち，法則の形が不変に保たれます．すなわち，慣性テンソル I_{ij} は，(10) の変換をします．ゆえに，(10) に (3) と (6) の行列を代入すると，

$$(I'_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\lambda & \cos\theta\sin\lambda & -\sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \sin\theta\cos\lambda & \sin\theta\sin\lambda & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\lambda & -\sin\theta & \sin\theta\cos\lambda \\ \cos\theta\sin\lambda & \cos\lambda & \sin\theta\sin\lambda \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{12}$$

I'_{33} が z'' 軸，すなわち p 軸に対する慣性モーメントを表すので，これを求めると，

$$I'_{33} = (\sin\theta\cos\lambda)^2 A + (\sin\theta\sin\lambda)^2 B + (\cos\theta)^2 C \tag{13}$$

となります．4/14 の講義では，

$$\begin{cases} \sin\theta\cos\lambda = l \\ \sin\theta\sin\lambda = m \\ \cos\theta = n \end{cases} \tag{14}$$

と定義していたので，これを用いると，

$$I'_{33} = l^2 A + m^2 B + n^2 C \tag{15}$$

となり，授業で詰まったところで出てきた式が導かれます．

慣性テンソル

剛体の運動のうち，重心運動を分離して，座標原点を剛体の重心に取ると，剛体の回転運動だけが残ります．剛体回転には角運動量が存在しており，この角運動量を L_i とします．角運動量の定義から，

$$L_i = \int_V \epsilon_{ijk} r_j p_k(\boldsymbol{r})\, d^3r \tag{16}$$

ここで，$p_i(\boldsymbol{r}) = \dot{r}_i \rho(\boldsymbol{r})$ です．剛体の回転運動の場合，原点からの距離が不変なので，

$$(r_i)^2 = \text{const.} \tag{17}$$

すなわち

$$r_i \dot{r}_i = 0 \tag{18}$$

つまり，位置ベクトルと速度ベクトルはつねに直交していることが分かります．このとき，r_i にも $\dot{r}_i$ にも直交する第三のベクトル ω_i を考えることができ，ω_i は

$$\dot{r}_i = \epsilon_{ijk} \omega_j r_k \tag{19}$$

を満たすとします．この ω_i を角速度ベクトルと呼びます．これを用いると，(16) は，

$$\begin{aligned} L_i &= \int_V \epsilon_{ijk} r_j p_k(\boldsymbol{r})\, d^3r = \int_V \epsilon_{ijk} r_j \dot{r}_k \rho(\boldsymbol{r})\, d^3r \\ &= \int_V \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} r_j r_m \omega_l \rho\, d^3r = \int_V (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) r_j r_m \omega_l \rho\, d^3r \\ &= \int_V (r_j^2 \omega_i - r_i r_j \omega_j)\rho\, d^3r = \int_V (r_k^2 \delta_{ij}\omega_j - r_i r_j \omega_j)\rho\, d^3r \\ &= \left[\int_V (r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\rho\, d^3r\right] \omega_j = I_{ij}\omega_j \end{aligned} \tag{20}$$

となり，角運動量ベクトルと角速度ベクトルの線形関係が導かれます．ここで，

$$I_{ij} \equiv \int_V (r_k^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\rho\, d^3r \tag{21}$$

と定義される I_{ij} を慣性テンソルと呼びます．行列表示すれば，

$$(I_{ij}) = \int_V \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (z^2+x^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix} \rho(\boldsymbol{r})\, d^3r \tag{22}$$

となります．このとき，慣性テンソルの対角成分 I_{ii} を慣性モーメント，非対角成分 I_{ij} $(i \neq j)$ を慣性乗積と呼びます．

慣性モーメントについて少しコメントをしておきます．例えば，x 軸に関する慣性モーメント I_{xx} を例にとると，

$$I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\rho\, d^3r \tag{23}$$

ですが，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{s} = (0, y, z)$ として，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ のなす角を ψ とすると，

$$I_{xx} = \int_V s^2 \rho\, d^3r = \int_V (|\boldsymbol{r}|\sin\psi)^2 \rho\, d^3r \tag{24}$$

となります．この式の形は，I_{yy} について，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{s} = (x, 0, z)$，$|\boldsymbol{s}| = |\boldsymbol{r}|\sin\psi$ と再定義してやれば，同じ形になります．I_{zz} についても同様です．このことから逆に，慣性モーメントを次のように一般化して定義することもできます．つまり，ある勝手に選んだ軸 OP に関する慣性モーメント I_{OP} とは，考えているベクトル $\boldsymbol{r}$ と軸 P のなす角を ψ とするとき，

$$I_{\mathrm{OP}} = \int_V (|\boldsymbol{r}|\sin\psi)^2 \rho\, d^3r \tag{25}$$

のことを指します．逆に言えば，慣性モーメントというのは考えている剛体について，どの方向を軸とするかを指定してはじめて意味を持つものと言えます．

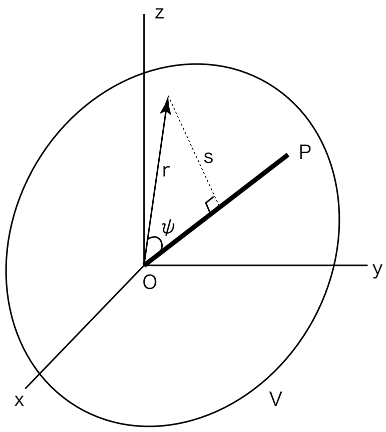

図 2　OP を軸とする

（文責・生出）間違っているところがあれば，指摘してくれるとありがたいです．