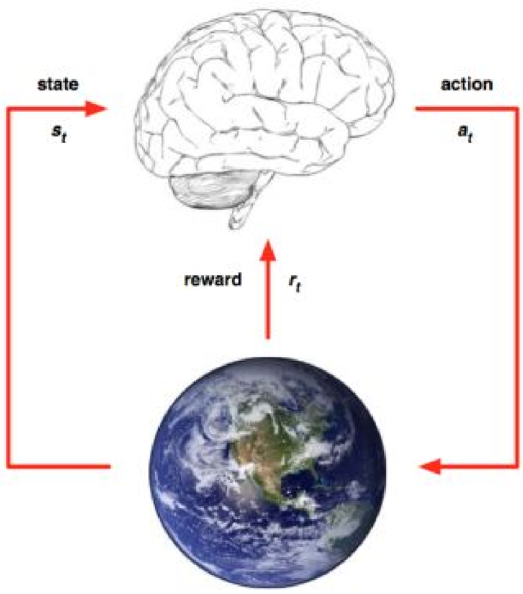
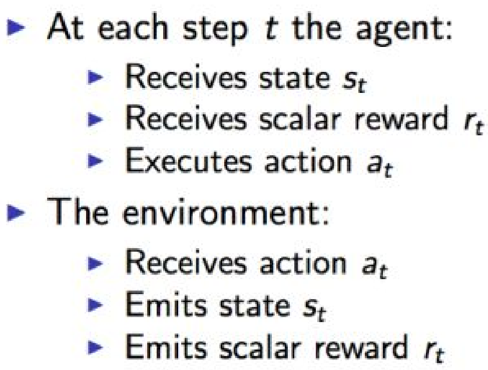
RL-02 马尔科夫决策过程&动态规划

Arthur 2020 / 21 / 05

RL基本概念





根据上图, 任务的目标就是: 获取尽可能多的 $Reward$. 每个时间片, 智能体根据当前的状态, 来确定下一步的动作, 即需要一个 $state$ 找出一个 $action$, 使得 $reward$ 最大. 这里的从 $state$ 到 $action$ 的过程就称之为一个策略 $Policy$, 一般用 π 表示.

RL的任务就是找一个最优的策略 $Policy$ 从而使 $Reward$ 最多.

在运行RL的算法之前, 首先需要得到一系列的 $state, action, reword$, 这个过程通常是智能体随机得到的, 是一系列的样本, 如下:

$(s_1, a_1, r_1, s_2, a_2, r_2, ..., s_t, a_t, r_t)$

RL的算法就是根据这些样本来改进 $Policy$, 从而使得样本中的 $Reward$ 更好, 这种算法具有让 $Reward$ 越来越好的特性, 因此被称为强化学习(Reinforcement Learning).

马尔科夫链 (Markov Chain)

- 马尔科夫特性： 只依赖当前状态来预测下一个状态，而与之前的状态无关。
- 马尔科夫表： 用表的形式来表示状态转移到下一个状态的转移概率。

当前状态	下一个状态	转移概率
多云	下雨	0.6
下雨	下雨	0.2
晴天	多云	0.1
下雨	晴天	0.1

马尔科夫决策过程 (Markov Decision Process)

- 马尔科夫决策过程实际上是对环境的建模, 它与马尔科夫链的区别是加入了 $action$ 和 $rewards$ 的概念:
- 一个基本的MDP可以用一个五元组来表示 (S, A, P, R, γ):
  - 智能体所处的一组状态（S）
  - 智能体从一组状态转移到另一组状态所执行的一组行为（A）
  - 转移概率（P_{ss}^a）, 执行某一个行为 a , 从一个状态 s 转移到另一个状态 $s^{'}$ 的概率
  - 奖励概率（$R_{ss''}^a$）, 执行某一行为 a , 从一个状态 s 转移到另一个状态 $s^{'}$ 所获得奖励的概率
  - 折扣因子 (γ) , 控制及时奖励和未来奖励的重要性, fanwei [0,1]
- 注: MDP的核心问题, 就是找一个策略 π , 来决定在状态 s 下选择哪个动作; 这样, MDP就变成了一个马尔科夫链.

奖励

- 智能体追求从环境中获得的总奖励(累计奖励)最大化,而不仅仅是及时奖励.

  $R_t = r_{t+1} + r_{t+2} + \cdots + r_T$
- 加入折扣因子之后的奖励和回报:

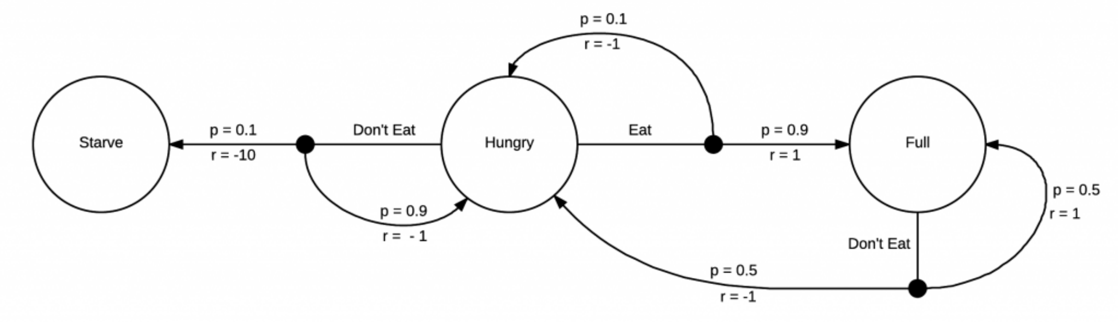
  $R_t = r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+2} + \gamma^3 r_{t+} + \cdots + \gamma^{T-(t+1)} r_T = \Sigma_{k=0}^{T} \lambda^k r_{t+1+k}$
- 若折扣因子为0, 则指挥考虑即时奖励; 若为1, 则会更考虑未来奖励;

策略函数

- 策略函数: 策略代表了为达成目标而选择执行的行为, 是从状态到行为的映射, 表示每个状态执行什么行为, 记为 π:

  $\pi(s) : S \rightarrow A$
- 对于一个给定的状态, 所有可能动作的概率函数求和/积分为1:

  $\Sigma_a \pi(s, a) = 1$
- 最终目标是找到一个最优策略,在每个状态都指定正确的行为,从而使奖励最大化;

  如上图,当处于”Hungry”状态是, 有两种行为“Eat”或”Don’t Eat”. 朴素的观察, 发现最优策略是”Eat”, 因此此时的最优策略 $\pi^{\star}$ 可以记作:

  $\pi^{\star}(Hungry) = Eat$

状态值函数

- 简称为值函数, 确定一个智能体在策略 π 下处于某一特定状态的最佳程度, 记为 $V(s)$ 表示执行策略后状态的值，它等价于智能体从状态 s 开始, 经历多个时间步到达终结状态, 所累积获得的奖励期望;

- 在策略 π 下, 从状态 s 开始获得的期望回报:

  $V^{\pi}(s) = E_{\pi}[R_t|s_t = s] = E_{\pi}[\Sigma_{k=0}\gamma^k r_{t+1+k}|s_t = s] = E_{\pi}[R_t + \gamma V^{\pi}(s_{t+1})|s_t = s]$

  注: 以上公式最后部分, 就是Bellman方程基本形态，体现的是当前状态的价值和下一步的价值的迭代关系;

- 值表: 用表的形式表示不同状态的值(期望回报):

状态	值(期望回报)
状态1	0.3
状态2	0.9

由上表可以得知, 状态2的值较大, 因此状态2优于状态1 , 这意味着当某个状态可以向状态1或2转移时, 转移到状态2将获得较大的回报.

状态-行为值函数

- 也称之为Q函数, 用于表示智能体执行策略 π , 在某一个状态执行某一个特定行为 a 的最佳程度, 本质就是回报值. 记为 $Q(s)$;
- 根据策略 π , 在状态 s 采取行为 a 后，直到终结状态，期间多个时间步, 所累积获得的期望回报如下:

  $Q^{\pi}(s,a) = E_{\pi}[R_t|s_t = s, a_t = a] = E_{\pi}[\Sigma_{k=0}\gamma^k r_{r_t+1+k}|s_t = s, a_t = a]$

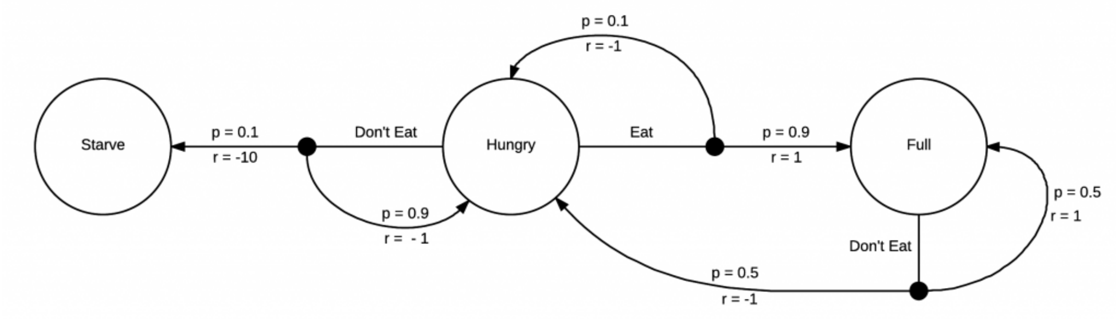
- Q表: 用表的形式表示状态下不同行为的值(期望回报)

状态	行为	值(期望回报)
状态1	**行为1**	**0.03**
状态1	行为2	0.02
状态2	行为1	0.5
状态2	**行为2**	**0.9**

由上表可以得知, 状态1时执行行为1, 状态2时执行行为2具有较大的值(回报), 这意味着当智能体处于状态1或2时, 选择这些行为将获得较大的回报.

状态值函数（值函数）vs 状态一行为值函数（Q函数）

- 值函数：确定的是: 遵循某个策略 π , 状态 s 的最佳程度. 此时不涉及行为, 由策略 π 决定采取什么行为;
- Q函数：确定的是: 遵循某個策略 π , 在状态 s 下采取行为的最佳程度. 即评估不同的行为 a 的期望回报;



如上图,当处于"Hungry"状态是, 有两种行为"Eat"或"Don't Eat". 分别计算这两个行为的单步回报:

$R_{Eat} = 0.9 * 1 + 0.1 * (-1) = 0.9$

$R_{Don'tEat} = 0.9 * (-1) + 0.1 * (-10) = -1.9$

因此:

$\pi^{\star}(Hungry) = Eat$

$V^{\star}(Hungry) = 0.9$

小结:

- 由以上可以看出, MDP问题中, 决定一个智能体的期望回报的, 主要是由上面所说的策略 π 和值函数 $V(s)$ 以及Q函数 $Q(s)$ 决定的, 所以, 求解MDP时, 就是寻求最优策略和值函数/Q函数, 最优值函数记为 $V^{\star}(s)$:

  $V^{\star}(s) = \max_{\pi} V^{\pi}(s)$

  由于Q函数是针对一个状态的多个可能行为的回报的表示, 因此Q函数的最优值, 也是值函数的最优值:

  $V \star (s) = \max_{\pi} Q^{\star}(s, a)$

Bellman方程

- 定义符号 P , 根据前面的价值函数, 遍历所有的行为 a, 针对每个行为 a, 遍历所有可能的下一状态 s' ,计算价值函数, 然后求和, 可以得到价值函数 $V^{\pi}(s)$ 的递推公式如下:

  $V^{\pi}(s) = \sum_{a} \pi(s, a) \sum_{s'} \mathrm{P}_{ss'}^{a} [R_{ss'}^{a} + \gamma V^{\pi}(s')]$

  其中:

  - a 代表在状态 s 下, 可以选择的行为;
  - $\mathrm{P}_{ss'}^{a}$ 代表的是在状态 s 下, 选择行为 a 进入到状态 s' 的概率;
  - $R_{ss'}^{a}$ 代表的是在状态 s 下, 选择行为 a 后所得到的回报;
  - γ 代表的是折扣因子;
- 同理的, Q函数进行类比, 针对已知的行为 a, 遍历所有可能的下一状态 s' , 计算Q函数值, 然后求和, 可以得到Q函数 $Q^{\pi}(s, a)$ 的递推公式如下:

  $Q^{\pi}(s, a) = \sum_{s'} \mathrm{P}_{ss'}^{a} [R_{ss'}^{a} + \gamma \sum_{a'} Q^{\pi}(s', a')]$

  其中:

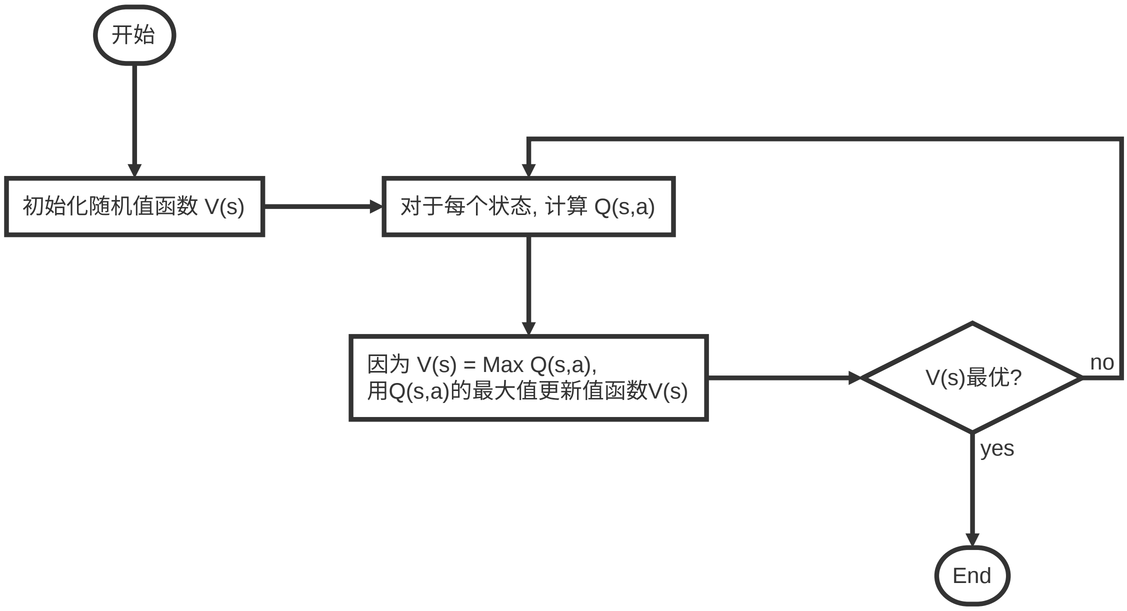
  - $\mathrm{P}_{ss'}^{a}$ 代表的是在状态 s 下, 选择行为 a 进入到状态 s' 的概率;
  - $R_{ss'}^{a}$ 代表的是在状态 s 下, 选择行为 a 后所得到的回报;
  - γ 代表的是折扣因子;
  - a' 代表在状态 s' 下, 可以选择的所有的行为;
- 以上两个公式合并(后者代入前者), 可以得到基于Q函数的价值函数的的最优化解 $V^{\star}(s)$ 为如下问题, 称之为Bellman最优方程:

  $V^{\pi}(s) = \max_{a} \sum_{s'} \mathrm{P}_{ss'}^{a} [R_{ss'}^{a} + \gamma \sum_{a'} Q^{\pi}(s', a')]$

动态规划

- **动态规划(DP)** : 在动态规划中, 并不是直接求解复杂问题, 而是将问题分解成简单的子问题, 然后对每个子问题计算并保存该解. 如果出现相同的子问题, 则不再重新计算, 而是使用已求得的解.
- 两种算法:
  - 值迭代
  - 策略迭代

1. 值迭代



例子:

- 一开始, 所有的状态 s 的值都是, 即 $V(s_A) = V(s_B) = \cdots = 0$
- 假设知道初始状态 s_A 到其他状态的转移概率和奖励(很多时候转移概率也未知, 且奖励也未知)
- 由已知信息, 可以计算出 $Q(s_A, a_1), Q(s_A, a_2), \ldots, Q(s_A, a_k)$, 即每个行为 a_k 的Q值
- 找到其中最大的, 假设为 $Q(s_A, a_m)$, 用 $Q(s_A, a_m)$ 作为状态 s_A 的值, 即 $V(s_A) = Q(s_A, a_m)$