

机器人学中的状态估计 第一课作业

边城量子 2020.4.19

1. 证明高斯分布积分为1

- 即如下分布函数积分为1:

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

回答:

思路:

- 先将多维高斯通过对称正定矩阵的性质, 分解为多个一维高斯概率密度函数;
- 证明并应用一维高斯概率密度函数积分为1的结论, 从而证明上式1中的多维高斯密度函数;

已知信息和性质:

- 已知其中的 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为协方差矩阵, 它是对称正定矩阵, 因此其逆矩阵必然存在, 并且可以进行特征值分解。由此:
 - 可令 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}$,
 - 由于对称正定矩阵的特征值大于0, 所以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵, 即 $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2)$, 其中 σ_i 是矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 特征值的开方值。则 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1^2} \dots \frac{1}{\sigma_n^2})$ (1)
 - 其中 \mathbf{U} 是正交阵, 可知:
 - $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{I}$ (2)
 - $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\mathbf{U}^T)^{-1} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}$ (3)
 - 而且, 可也知其行列式值 $|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| = |\boldsymbol{\Lambda}| = \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|}$; (4)

基于以上信息和性质, 开始积分推导, 为简化计算, 先不考虑指数前面的常数系数, 针对指数部分积分如下:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} dx_1 \dots dx_n \quad (5)$$

令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$ 上式变为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}} dy_1 \dots dy_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}} dy_1 \dots dy_n$$

把 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}$ 代入, 并应用上面的已知信息和性质, 可得:

$$\begin{aligned}
\int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T (\mathbf{U}^T \Lambda \mathbf{U})^{-1} \mathbf{y}} dy_1 \dots dy_n &= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{U}^T \Lambda^{-1} \mathbf{U} \mathbf{y}} dy_1 \dots dy_n \\
&= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{U} \mathbf{y})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{U} \mathbf{y})} dy_1 \dots dy_n \\
&= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \Lambda^{-1} \mathbf{z}} |\mathbf{U}| dz_1 \dots dz_n \\
&= \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} [(\frac{z_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{z_2}{\sigma_2})^2 + \dots + (\frac{z_n}{\sigma_n})^2]} |\mathbf{U}| dz_1 dz_2 \dots dz_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\frac{z_1}{\sigma_1})^2} dz_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\frac{z_n}{\sigma_n})^2} dz_n \quad (6)
\end{aligned}$$

上式最后几步推导，是令 $\mathbf{z} = \mathbf{U} \mathbf{y}$ 并代入后，然后把 Λ 是对角阵的性质 (1) 代入，由于 z_i 分量相互独立，因此可以分别积分再相乘。由此，就把公式 (5) 的积分推导，转变为了公式 (6) 中对 z_i 的积分并相乘的形式。

然后，需要用到一个结论： $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ ，即一维高斯分布的积分为1。这个结论稍后会进行证明，

此处先使用此结论，将 z 看作是此结论中的 $x - \mu$ ，可以得到此结论的等价式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma^2}} dz = \sqrt{2\pi}\sigma$$

代入到公式 (6)，则可以得到：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\frac{z_1}{\sigma_1})^2} dz_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (\frac{z_n}{\sigma_n})^2} dz_n &= \sqrt{2\pi}\sigma_1 \sqrt{2\pi}\sigma_2 \dots \sqrt{2\pi}\sigma_n \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \quad (7)
\end{aligned}$$

以上计算的都是高斯分布的指数部分的积分，所以公式 (7) 乘以系数部分，系数部分为 $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}}$ ，相乘以后可以看出，两者乘积为1，得证。

补充证明：一维高斯分布的积分为1。

以下证明上述过程中用到的一个结论：一维高斯分布的积分为1。

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-z^2} \sqrt{2\sigma} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\
&= 1
\end{aligned}$$

其中倒数第三步，详细过程如下：

$$\begin{aligned}
\int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right) \Big|_0^{\infty} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta \\
&= \pi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2
\end{aligned}$$

可以得出： $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 下面基于这个结果，来推导一维高斯积分为1这个结论：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{y}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-z^2} \sqrt{2}\sigma dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.1 假设 u, v 是两个相同维度的列向量，请证明下面这个等式：

$$u^T v = \text{tr}(vu^T)$$

回答：

2.1 习题:

设 u, v 是 n 维列向量,

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$$

$$u^T v = (u_1, u_2, \dots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$v u^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & \dots & v_1 u_n \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & \dots & v_2 u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n u_1 & v_n u_2 & \dots & v_n u_n \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(v u^T) = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$\text{故 } u^T v = \text{tr}(v u^T)$$

证毕.

2.4 对于高斯分布的随机变量, $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, 请证明下面这个等式:

$$\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

回答

2.4 习题

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) (x-\mu+\mu) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) (x-\mu) dx \\ &\quad \text{奇函数, 积分为0} + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx \\ &= \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) dx}_{\text{积分为1}} \end{aligned}$$

$$= \mu.$$

针对高维情况, 同等处理. 利用 Σ^{-1} 的对称正定性, $\Sigma^{-1} = U^T \Lambda^{-1} U$, 再利用 Λ^{-1} 对角阵特点, 把高维积分化为多重一维积分, 再应用上述结论即可.

整个过程在作业第一道题已经应用.

此处不再重复.

2.5 对于高斯分布的随机变量, $x \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, 请证明下面这个等式:

$$\Sigma = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)(x - \mu)^T p(x) dx$$

回答

方法二:

$$\int (x-u)(x-u)^T \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma^{-1} (x-u)\right) dx$$

$$\text{令 } H = \sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|}^{1/2}, \text{ 令 } y = x - u$$

$$= \int y y^T \cdot \frac{1}{H} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} y^T \Sigma^{-1} y\right) dy$$

$$\text{令 } \Sigma^{-1} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} u_k u_k^T, \text{ 令 } y = \sum_{i=1}^N z_i u_i$$

$$= \int \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i u_i z_j u_j^T \frac{1}{H} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} z_j u_j^T \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k} u_k u_k^T z_i u_i\right) dz$$

$$= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int z_i u_i z_j u_j^T \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{z_i z_j}{\lambda_k} u_j^T u_k u_k^T u_i\right) dz$$

由于 Σ^{-1} 为对角阵, 仅当 $i=j=k$ 时不为 0

$$= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int z_i u_i z_j u_j^T \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2}{\lambda_k}\right) dz$$

当 $i \neq j$ 时, 由奇偶性知上式为 0

$$\text{且 } \int z^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\lambda}\right) dz = (2\pi\lambda)^{-1/2} \cdot \lambda$$

$$= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^N u_i u_i^T \lambda_i \underbrace{\frac{1}{H} \sum_{k=1}^N (2\pi\lambda_k)^{1/2}}_{\text{消去}}$$

把 H 代入 H , 消去 H 部

$$= \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i u_i^T = \Sigma. \quad (\text{由定义})$$

证毕.

另一个方向来自同学间的讨论, 分部积分的方法:

2.5 习题

方法一:

$$\mathbb{E}[(x-u)(x-u)^T] \quad \text{记 } \sqrt{(2\pi)^N} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)(x-u)^T \cdot \frac{1}{H} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)\Sigma^{-1}(x-u)^T\right) dx$$

利用性质 $(uv)' = u'v + uv'$

$$\text{从而 } \int d(uv) = \int u'v + \int uv'$$

$$= \frac{1}{H} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)\Sigma^{-1}(x-u)^T\right) dx$$

$$+ \frac{1}{H} \int_{-\infty}^{\infty} d\left((x-u) \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)\Sigma^{-1}(x-u)^T\right)\right)$$

奇函数, 积分为0.

把 H 代入

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)\Sigma^{-1}(x-u)^T\right) dx$$

$$= \Sigma.$$

#证毕.