Министерство образования Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В ШЕСТИ ТОМАХ

Том 2

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

УЧЕБНИК

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2015

ISBN 978-5-94211-711-5 (Том 2)
ISBN 978-5-94211-709-2

УДК 517.1 + 517.2 (075.8)
ББК 22.161+22.171+22.172
В 723

В 723 **ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. В шести томах. Том 2. Начала математического анализа. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения.** Учебник / *А.П.Господариков*, *И.А.Волынская*, *О.Е.Карпухина*, *О.А.Скепко*, *Т.С.Обручева.* Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». СПб, 2015.

ISBN 978-5-94211-711-5 (Том 2)
ISBN 978-5-94211-709-2

УДК 517.1 + 517.2 (075.8)
ББК 22.161+22.171+22.172

Авторы:
А.П.Господариков, И.А.Волынская, О.Е.Карпухина, О.А.Скепко, Т.С.Обручева

Учебник дает возможность получить основы теоретических знаний по следующим разделам курса высшей математики: «Начала математического анализа» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения».

Пособие предназначено для аудиторных и самостоятельных занятий студентов дневной и заочной форм обучения специальностей вузов горного профиля.

Научный редактор проф. *А.П.Господариков*

Рецензенты: кафедра управления медико-биологическими системами, д-р физ.-мат. наук, проф. *С.И.Перегудин* (Санкт-Петербургский государственный университет).

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4. ФУНКЦИЯ, ЕЕ ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

4.1. МНОЖЕСТВА. ОБОЗНАЧЕНИЯ. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

Понятие множества является одним из основных понятий в математике и принадлежит к первичным. Слова: ***совокупность, семейство, набор*** и т.п. – являются синонимами слова множество. Примерами множеств могут служить совокупность всех натуральных чисел, системы двух уравнений с двумя неизвестными, группа студентов, успешно сдавших экзамен по математике. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества обычно обозначают прописными буквами, элементы – строчными. Если x – элемент множества X, то этот факт записывается в виде $x \in X$. Если элемент x не является элементом множества X, то пишут $x \overline{\in} X$.

Пусть X и Y – два множества. Если они состоят из одних и тех же элементов, то говорят, что множества совпадают, и пишут $X = Y$. Если в X нет ни одного элемента, не принадлежащего множеству Y, то говорят, что X – подмножество множества Y, и записывают этот факт в виде $X \subset Y$ или $X \supset Y$ (Y содержит X).

Пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента) обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество можно рассматривать как подмножество любого множества.

Для обозначения множества применяются фигурные скобки. Например, $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ обозначает множество натуральных чисел.

Для множеств можно ввести арифметические операции сложения и умножения.

Определение 1. Суммой (или объединением) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, которые принадлежат A или B или A и B одновременно.

Определение 2. Произведением (или пересечением) двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих A и B.

Пусть $P(x)$ – какое-то свойство числа x. Тогда запись $\{x : P(x)\}$ означает множество всех таких чисел, которые обладают свойством $P(x)$. Например, множество $\{x : |x-a| < \delta\}$ есть совокупность x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$.

Запись $x = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ или $x = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ означает, что x – наибольшее или наименьшее из всех чисел $x_1, x_2, ..., x_n$.

В формулировках определений, теорем и т.д. часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи целесообразно использовать экономную логическую символику. Вместо слов существует или найдется можно использовать символ $\exists$. Вместо слов любой, всякий, каждый – символ $\forall$. Например, запись $\exists x \in X$, означает, что существует число x из множества X, а запись $\forall x \in X$ следует читать: для любого числа x из множества X. Вместо слова следует можно использовать символ $\Rightarrow$, а вместо слова равносильно – символ $\Leftrightarrow$.

Для лучшего понимания и чтения утверждений, записанных с помощью логических символов, все, что относится только к каждому из них, заключают в круглые скобки. Например, запись $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)\times$ $\times(\forall\, x \neq x_0, |\, x - x_0\,| < \delta): |\, f(x) - A\,| < \varepsilon$ читается так: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, неравных x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

4.2. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА

Определение. Абсолютной величиной (модулем) вещественного числа x называется неотрицательное вещественное число $|\,x\,|$, определяемое следующим образом:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ -x & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Из определения модуля вещественного числа следует, что $x \leq |\,x\,|$ и $|x| = \sqrt{x^2}$ (арифметический корень).

Отметим некоторые свойства абсолютных величин:

1. $|\,x\,| < A \;\Leftrightarrow\; -A < x < +A$ ($A > 0$).

Доказательство. $|\,x\,| < A \;\Leftrightarrow\; x^2 < A^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -A < x \\ x < A \end{cases} \;\Leftrightarrow\; -A < x < A$.

Аналогично доказывается: $|\,x\,| \leq A \;\Leftrightarrow\; -A \leq x \leq +A$ ($A > 0$).

2. $|A + B| \leq |A| + |B|$.

Доказательство. Сложим почленно очевидные неравенства

$-|A| \leq A \leq |A|$, $-|\,B\,| \leq B \leq |\,B\,|$. Тогда $-(|\,A\,| + |\,B\,|) \leq A + B \leq (|\,A\,| + |\,B\,|)$.

Отсюда в силу свойства 1, найдем $|\,A + B\,| \leq |\,A\,| + |\,B\,|$.

Теорема верна для любого конечного числа слагаемых, т.е.

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_N| \le |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_N| \text{ или } \left|\sum_{K=1}^{N} A_K\right| \le \sum_{K=1}^{N} |A_K|.$$

***Следствие* 1.** $|A - B| \ge |A| - |B|$.

***Доказательство*.** $|A| = |(A - B) + B| \le |A - B| + |B|$ или $|A - B| \ge |A| - |B|$.

***Следствие* 2.** $|A + B| \ge |A| - |B|$.

Доказательство. В неравенстве $|A - B| \ge |A| - |B|$, заменив B на $-B$, получим $|A + B| \ge |A| - |B|$.

3. $|A\,B\,C| = |A|\,|B|\,|C|$.

4. $\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|}$.

Доказательство свойств 3 и 4 непосредственно вытекает из определения абсолютной величины.

4.3. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ И ОБЛАСТИ ЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При изучении явлений, встречающихся в природе, приходится иметь дело с величинами постоянными и переменными.

Определение 1. Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение (вообще или в данном процессе; в последнем случае постоянная величина называется параметром этого процесса).

Определение 2. Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Во многих случаях ради общности формулировок удобно бывает рассматривать постоянную величину как переменную, принимающую одно и то же значение.

Определение 3. Переменная величина y называется ***функцией переменной*** x, если каждому значению $x \in X$ (X – некоторая область изменения ***переменной*** x) ставится в соответствие (по некоторому правилу или закону) одно определенное значение переменной $y \in Y$ ($Y -$ некоторая область изменения ***функции*** y). Указанный факт записывается в виде $y = f(x)$.

В этой главе рассматриваются вещественные функции вещественных переменных.

В условиях определения переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом***, а переменная $y -$ ***функцией*** или ***зависимой переменной***.

Если область определения функции не задается, то будем ее находить в соответствии со следующим определением.

Определение 4. Множество значений ***аргумента***, для которых ***функция имеет смысл*** (говорят, функция определена), т.е. принимает конечные и вещественные значения, называется ***областью определения*** или ***существования функции*** (естественная область определения).

Наиболее часто область определения функции представляет собой открытый интервал (a,b), т.е. совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ или отрезок (замкнутый интервал) $[a,b,]$, т.е. совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$.

В некоторых случаях областью определения функции является полуинтервал $[a,b)$ или $(a,b]$. Рассматриваются также бесконечные интервалы вида $(-\infty,a)$, $(b,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ или полуинтервалы $(-\infty,a]$, $[b,+\infty)$.

Пример 4.1. Найти область определения функции $y = \sqrt{9x - x^3}$.

Решение. Данная функция определена, если $9x - x^3 \ge 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) \le 0$. Для решения полученного неравенства $x(x-3)(x-3) \le 0$ рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{y} = x(x+3)(x-3)$. Эта функция имеет три корня $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$. Схематично график функции $\tilde{y}$ представлен на рис.4.1.

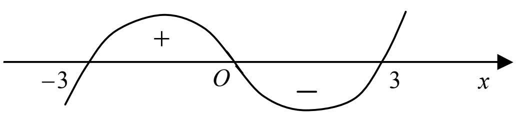

Рис.4.1

Из рис.4.1 видно, что $\tilde{y} \le 0$ при $x \le -3$ и на отрезке $[0;3]$. Следовательно, функция $y = \sqrt{9x - x^3}$ определена на множестве $x \in (-\infty,-3] \cup [0;3]$.

Пример 4.2. Найти область определения функции $y = \arcsin(\lg(x/10))$.

Решение. Для того чтобы логарифм имел смысл, необходимо выполнение неравенства $x/10 > 0$ или $x > 0$. Обратная тригонометрическая функция $y = \arcsin(\lg(x/10))$ определена, если ее аргумент $\lg(x/10)$ удовлетворяет неравенству $-1 \le \lg(x/10) \le 1$ или $\lg(1/10) \le \lg(x/10) \le \lg 10$. Из свойств логарифмов следует, что данное неравенство равносильно неравенству вида $1/10 \le x/10 \le 10$ или $1 \le x \le 100$ $1 \le x \le 100$. Следовательно, областью определения функции $y = \arcsin(\lg(x/10))$ является отрезок $[1;10]$.

4.4. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

1. **Аналитический способ.** Закон соответствия между X и Y определяется формулой, которая показывает, какие действия и в какой последовательности нужно выполнить, чтобы по данному $x \in X$ найти $y \in Y$. Например,

$$y = x^2 + x + 2, \quad y = \sqrt{\frac{\sin 3x}{x^2 + 1}}, \quad y = \operatorname{arctg} 5x + \cos 3x.$$

Такое задание функций называется явным.

Если функция задана уравнением, неразрешенным относительно y, то в этом случае функция задана неявно. Например,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \sin(x + y) + \ln x - \ln y = 2.$$

2. **Табличный способ.** Закон соответствия между областями X и Y задается в форме таблицы вида

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и др.

3. **Графический способ.** Закон соответствия между областями X и Y задается графиком функции $y = f(x)$ в некоторой системе координат (рис.4.2).

Определение. Графиком функции называется множество точек плоскости xOy, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции, т.е. $\Gamma_f = \{ x, y = f(x) \}$.

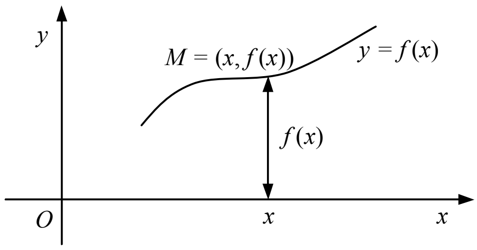

Рис.4.2

Рассмотрим функцию $y = kx + b$.

Ее графиком является прямая линия, отсекающая от оси ординат отрезок, равный b (с учетом знака b), тангенс угла наклона которой равен k, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = k$.

Если $k = 0$, то прямая с уравнением $y = b$ параллельна оси абсцисс. Если $b = 0$, то прямая линия с уравнением $y = kx$ проходит через начало координат.

4.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Простейшими элементарными функциями называются следующие функции:

1) постоянная функция $f(x) = c$, где c – const;

2) степенная функция $f(x) = x^\alpha$, где α – любое вещественное число;

3) показательная функция $f(x) = a^x$ $(a > 0;\, a \neq 1)$;

4) логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ $(a > 0;\, a \neq 1)$;

5) тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением, т.е. образованием сложной функции – функции от функции) этих функций, составляют класс элементарных функций.

Примеры элементарных функций:

$$f(x)=\sin 5x+\lg|\,x\,|+3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}};\ f(x)=\sqrt{x^2+2^{\cos x}};$$

$$f(x)=|\,x\,|\quad (|\,x\,|=\sqrt{x^2}).$$

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1. Функция вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $n\in N,\ a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n,\ldots\ (a_0\neq 0)$ – коэффициенты (любые числа), называется целой рациональной функцией или алгебраическим многочленом степени n. Многочлен первой степени называется линейной функцией, многочлен второй степени – квадратической функцией.

2. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций,

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_n}$$

называется дробно-рациональной функцией.

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс рациональных функций.

3. Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций (наложений) и четырех арифметических действий над степенными функциями как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется иррациональной функцией. Например,

$$f(x)=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2};\ f(x)=\sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{2x^2-8x+1}}+\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^5$$

4. Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется трансцендентной функцией. Например,

$$f(x)=\operatorname{tg}x+a^x;\quad f(x)=\ln x+\cos x.$$

4.6. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$ называется ***числовой последовательностью*** или просто ***последовательностью***.

Числа $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ будем называть ***элементами*** (членами) последовательности, символ x_n – ***общим элементом*** или общим членом последовательности, а n – его ***номером***. Сокращенно последовательность будем обозначать символом $\{ x_n \}$.

Если рассматривать x_n как переменную величину, то ее значения совпадают с членами последовательности $\{ x_n \}$.

Замечание. Числовая последовательность считается заданной, если указано правило, позволяющее по номеру n определить любой ее член. Пусть задана числовая последовательность

$$\{ x_n \} = \left\{ 3 + \frac{1}{4^n} \right\}.$$

Тогда $x_1 = 3 + \frac{1}{4}, ..., x_5 = 3 + \frac{1}{4^5}, ..., x_{10} = 3 + \frac{1}{4^{10}}, \cdots$

4.7. БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Определение. Числовая последовательность $\{ x_n \}$ называется бесконечно малой, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ имеет место неравенство

$$| x_n | < \varepsilon .$$

Символическая запись определения бесконечно малой числовой последовательности

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) : | x_n | < \varepsilon .$$

Пример 4.3. Доказать, что последовательность $\{ x_n \} = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Решение. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Из неравенства $| x_n | = \left| \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon$ имеем $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon}$**.** Отсюда $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = \dfrac{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\lg 2}$.

1. Выберем $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $n > N_1 = E\left(\frac{\lg 10}{\lg 2} \right) = E(3{,}32) = 3$. Заметим, что $E(x)$ – наибольшая целая часть числа x, его не превосходящая. Таким образом, при значениях $n > N_1 = 3$ все члены последовательности, начиная с четвертого, меньше 0,1.

2. Возьмем $\varepsilon = 0{,}01$. Тогда $n > N_2 = E\left(\dfrac{100}{\lg 2}\right) = E(6{,}64) = 6$. Таким образом, при значениях $n > N_2 = 6$ все члены последовательности, начиная с седьмого меньше 0,01 и т.д.

Следовательно, последовательность $\{\, x_n \,\} = \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Пример 4.4. Доказать, что последовательность $\{\, y_n \,\} = \left\{\dfrac{1}{n^3}\right\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Решение. Возьмем $\forall\ \varepsilon > 0$. Из неравенства $|\, y_n \,| = \left|\dfrac{1}{n^3}\right| < \varepsilon$ имеем $y_n = \dfrac{1}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow n^3 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $n > \dfrac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$.

1. Выберем $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $n > N_1 = E\left(\sqrt[3]{10}\right) = E(2{,}15) = 2$. Таким образом, при $n > N_1 = 2$ все члены последовательности, начиная с третьего, меньше 0,1.

2. Возьмем $\varepsilon = 0{,}01$. Тогда $n > N_2 = E\left(\sqrt[3]{100}\right) = E(4{,}64) = 4$. Таким образом, при значениях $n > N_2 = 4$ все члены последовательности, начиная с пятого, меньше 0,01 и т.д.

Следовательно, последовательность $|\, y_n \,| = \left|\dfrac{1}{n^3}\right| < \varepsilon$ есть последовательность бесконечно малая.

Замечание. Примеры 4.3 и 4.4 показывают также, что номер N зависит от выбора числа ε, а именно, чем меньше ε, тем больше N.

4.8. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Теорема 1. Сумма и разность бесконечно малых последовательностей $\{\, \alpha_n \,\}$ и $\{\, \beta_n \,\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и вычислим $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $\{\, \alpha_n \,\}$ и $\{\, \beta_n \,\}$ – бесконечно малые последовательности, то по определению имеем

$$|\, \alpha_n \,| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_1 \text{ и } |\, \beta_n \,| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > N_2.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. При значениях $n > N$ оба неравенства $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ и $|\beta_n| < \varepsilon/2$ выполняются одновременно. Сложив их почленно, получим

$$|\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > N).$$

Так как $|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$, то $|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$ при $n > N$. Следовательно, сумма или разность бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

Доказанная теорема обобщается на любое конечное число бесконечно малых последовательностей.

Теорема 2. Произведение бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и вычислим $\sqrt{\varepsilon}$. Так как $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то по определению имеем

$$|\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon} \text{ при } n > N_1 \text{ и } |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \text{ при } n > N_2.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. При $n > N$ оба неравенства $|\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}$ и $|\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$ выполняются одновременно. Перемножая их почленно, получим

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \ (n > N).$$

Следовательно, произведение $\{\alpha_n \ \beta_n\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Доказанная теорема обобщается на случай любого конечного числа бесконечно малых последовательностей.

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если все ее члены по абсолютной величине не превосходят некоторой положительной константы, т.е. $|x_n| \le M$ для всех значений n, где $M = \text{const}$, $M > 0$. Например, для $\forall\ n$

$$\{x_n\} = \{(-1)^n\} \Rightarrow |x_n| = 1; \{x_n\} = \left\{\frac{2 + (-1)^n}{3}\right\} \Rightarrow |x_n| \le 1.$$

Теорема 3. Произведение ограниченной последовательности $\{x_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{\alpha_n\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство. Числовая последовательность $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, и потому $|x_n| \le M \ \forall\ n$ ($M = \text{const}$, $M > 0$). Возьмем произвольное ε и вычислим ε/M. Так как последовательность бесконечно малая, то по определению имеем $|\alpha_n| < \varepsilon/M$ при всех $n > N$. Перемножая неравенства $|x_n| \le M$ и $|\alpha_n| < \varepsilon/M$, получим

$$|x_n| \cdot |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \quad (n > N).$$

Следовательно, $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Таким образом, произведение $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – последовательность бесконечно малая.

Следствие. Произведение постоянной величины на бесконечно малую последовательность есть последовательность бесконечно малая.

4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. Постоянное число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Замечание **1.** Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся последовательностью. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, то это записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание 2. Из определения предела следует, что общий член последовательности, имеющей своим пределом число a, можно представить в виде $x_n - a = \alpha_n$ или $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – общий член некоторой бесконечно малой последовательности.

Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если общий член последовательности можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Замечание **3.** Из определения предела следует, что бесконечно малая числовая последовательность имеет предел, равный нулю.

Замечание **4.** Используя определение бесконечно малой последовательности, можно дать второе, развернутое определение предела.

Определение 2. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

С помощью логических символов это определение можно записать в виде

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N)(\forall\, n > N): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Пример 4.5. Рассмотреть числовую последовательность $\{ x_n \} = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ и доказать, что $x_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Решение. Для доказательства рассмотрим неравенство

$$|x_n - 1| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \; n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тогда при значениях $n > N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ выполняется, и, следовательно, $x_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Если выбрать число $\varepsilon = 0{,}1$, то $N_1 = 10$; если выбрать $\varepsilon = 0{,}01$, то $N_2 = 1000$.

***Замечание* 5.** Если точкам числовой оси поставить в соответствие значения членов последовательности $\{ x_n \}$, то становится ясным геометрический смысл предела. Пусть $\{ x_n \} \to a.$ Тогда для $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N): | x_n - a | < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Двойное неравенство показывает, что все члены последовательности $\{ x_n \}$ при $n > N$ попадают в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, симметричный относительно точки $x = a$.

Определение 3. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется ε окрестностью точки $x = a$.

Таким образом, сколь бы малую окрестность точки a ни взять, все члены последовательности $\{ x_n \}$, начиная с некоторого номера ($n > N$), попадут в ε-окрестность этой точки, т.е. значения x_n сгущаются к точке a.

4.10. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

Теорема 1. Числовая последовательность $\{ x_n \}$ может иметь только один предел.

Доказательство (от противного). Пусть $x_n \to a$ и $x_n \to b$, причем $a \neq b$. По определению предела $x_n = a + \alpha_n$, $x_n = b + \beta_n$, где $\{ \alpha_n \}$ и $\{ \beta_n \}$– бесконечно малые последовательности. Найдем разность

$$x_n - x_n = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n); 0 = (a - b) + (\alpha_n - \beta_n) \text{ или } b - a = \alpha_n - \beta_n .$$

По предположению $a \neq b$, поэтому $a - b = k \neq 0$. Тогда

$$\alpha_n - \beta_n = k \neq 0 .$$

Это равенство является противоречивым, так как показывает, что общий член бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n - \beta_n\}$ равен постоянной величине, отличной от нуля. Предположение $a \neq b$ неверно и, следовательно, $a = b$.

***Замечание* 1**. В равенствах можно переходить к пределу, т.е. если $x_n = y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 2. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a ($x_n \to a$), последовательность $\{y_n\}$ имеет своим пределом число b ($y_n \to b$) и при этом $x_n < y_n$, то имеет место неравенство $a \le b$.

Доказательство (от противного). Пусть $a > b$ и, следовательно, $a - b = k > 0$. По определению предела имеем

$$x_n = a + \alpha_n ,\ y_n = b + \beta_n ,$$

где α_n и β_n – общие члены бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$.

Согласно неравенству $x_n < y_n$ имеем $a + \alpha_n < b + \beta_n$ или $a - b < \beta_n - \alpha_n$. По предположению $a - b = k > 0$ и потому $\beta_n - \alpha_n > k > 0$. Полученное неравенство противоречиво: оно показывает, что общий член бесконечно малой последовательности $\{\beta_n - \alpha_n\}$ больше постоянного положительного числа. Предположение $a > b$ неверно, и остается допустить, что $a \le b$.

Аналогично доказывается теорема для случая $x_n \le y_n$.

***Замечание* 2**. При переходе к пределу в неравенствах иногда может получаться равенство.

Рассмотрим, например, две последовательности:

$$\{x_n\} = \left\{1 - \frac{2}{n}\right\}; \quad \{y_n\} = \left\{1 + \frac{3}{n}\right\}.$$

Из их задания видно, что $x_n < y_n$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Теорема 3. Если числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a и $a > p$, то все члены последовательности, начиная с некоторого, будут также больше p.

Доказательство. Выберем положительное число ε, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < a - p$. Отсюда $a - \varepsilon > p$. По данному ε найдется такой номер N, что при $n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Используя левую часть двойного неравенства с учетом $a - \varepsilon > p$, получим $x_n > p$ при $n > N$.

Аналогично доказывается теорема для случая $a < q$.

Следствие. Если $x_n \to a$ и $a > 0$ (или $a < 0$), то все члены последовательности, начиная с некоторого, будут больше нуля (меньше нуля).

Теорема 4. Если три числовые последовательности $\{ x_n \}$, $\{ y_n \}$ и $\{ z_n \}$ удовлетворяют неравенствам $x_n \le z_n \le y_n$ для любого n, последовательности $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$ имеют общий предел a, то и предел последовательности $\{ z_n \}$ также равен числу a.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to a$ и $y_n \to a$, то в соответствии с определением предела можно записать:

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon \text{ при } n > N_1 \text{ или } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N_1;$$

$$\left| y_n - a \right| < \varepsilon \text{ при } n > N_2 \text{ или } a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N_2.$$

Пусть $N = \max\{ N_1, N_2 \}$. Тогда при $n > N$ выполняются оба двойных неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Используя левую часть первого из них и правую часть второго с учетом $x_n \le z_n \le y_n$, получим $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ $(n > N)$ или $\left| z_n - a \right| < \varepsilon$ при $(n > N)$ Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

Теорема 5. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что $\left| x_n - a \right| < \varepsilon$ при значениях $n > N$. Известно, что $\left| x_n \right| - \left| a \right| \le \left| x_n - a \right|$ и, следовательно, $\left| x_n \right| - \left| a \right| < \varepsilon$ при $n > N$ или $\left| x_n \right| < \left| a \right| + \varepsilon$ при $n > N$.

Пусть $M = \max\left\{ \left| x_1 \right|, \left| x_2 \right|, ..., \left| x_N \right|, \left| a \right| + \varepsilon \right\}$. Тогда $\left| x_n \right| \le M$ при всех значениях $n > N$. Отсюда следует, что $\{ x_n \}$ – ограниченная последовательность.

Определение. Числовая последовательность $\{ x_n \}$ называется монотонно возрастающей, если каждый ее последующий член не меньше предыдущего, т.е. $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$ (обозначение $\{ x_n \}\uparrow$).

Аналогично определяется монотонно убывающая последовательность: $\{ x_n \}\downarrow$, если каждый ее последующий член не больше предыдущего, т.е. $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge ...$

Теорема 6 (без доказательства). Если числовая последовательность монотонно возрастает (или убывает) и ограничена, то она сходится, т.е. имеет конечный предел.

***Замечание* 3.** Если отметить на числовой оси значения членов возрастающей последовательности $\{ x_n \}$, то становится ясным геометрический смысл теоремы: точка x_n с увеличением n будет двигаться слева направо, оставаясь все время левее точки M. В этих условиях точка x_n будет стремиться к некоторой предельной точке a, причем $a < M$.

Теорема 7. Предел суммы двух числовых последовательностей равен сумме их пределов.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$ при $n \to \infty$. По определению предела

$$x_n = a + \alpha_n, \; y_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n – общие члены бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$.

Складывая эти равенства, получим

$$x_n + y_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$$

или

$$(x_n + y_n) - (a - b) = \alpha_n + \beta_n \; .$$

Последовательность $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – бесконечно малая. Таким образом, последовательность $\{(x_n + y_n) - (a - b)\}$ – также бесконечно малая, и потому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема обобщается на любое конечное число бесконечное малых последовательностей.

Аналогично доказывается теорема о пределе разности двух последовательностей.

Теорема 8. Предел произведения двух числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ равен произведению их пределов.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to a$. По определению предела имеем

$$x_n = a + \alpha_n, \; y_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n – общие члены бесконечно малых последовательностей.

Перемножая эти равенства, получим

$$x_n \cdot y_n = a\,b + (\alpha_n\, b + a\,\beta_n + \alpha_n\,\beta_n)$$

или

$$(x_n \cdot y_n) - a\,b = \alpha_n\, b + a\,\beta_n + \alpha_n\,\beta_n \; .$$

Последовательность $\{\alpha_n\, b + a\,\beta_n + \alpha_n\,\beta_n\}$ есть последовательность бесконечно малая (по теоремам 1-3 раздела 4.8).

Следовательно, последовательность $\{(x_n \cdot y_n) - a\,b\}$ также бесконечно малая. Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \ .$$

Теорема обобщается на любое конечное число бесконечно малых последовательностей.

***Следствие* 1.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $A = \text{const}$. В силу теоремы 8 имеем

$$\lim_{n\to\infty} A\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} A = A \lim_{n\to\infty} x_n .$$

***Следствие* 2.** Предел целой положительной степени равен степени ее предела.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и k – целое положительное число. В силу теоремы 8 имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^k = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} x_n \ldots \lim_{n\to\infty} x_n}_{k \text{ раз}} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k .$$

Лемма. Если последовательность $\{y_n\}$ имеет предел, отличный от нуля, и не принимает нулевых значений, то обратная последовательность $\{1/y_n\}$ является ограниченной.

Доказательство. Пусть $y_n \to b$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$. Выберем произвольно сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < |b|$. По данному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер *N*, что при $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$.

Заметим, что $|y_n| = |b + (y_n - b)| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \varepsilon$ при $n > N$ и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} \quad \text{при всех } n > N .$$

Пусть

$$M = \max\left\{\left|\frac{1}{y_1}\right|, \left|\frac{1}{y_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_N}\right|, \frac{1}{|b| - \varepsilon}\right\} .$$

Тогда окончательно получим $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq M$ при всех n. Отсюда $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограниченная числовая последовательность.

Теорема 9. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов при условии, что предел знаменателя отличен от нуля и последовательность, стоящая в знаменателе, не принимает нулевых значений.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to a$ при $n \to \infty$, причем $b \neq 0$, $y_n \neq 0$ По определению предела $x_n = a + \alpha_n$; $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – общие члены бесконечно малых последовательностей.

Найдем разность

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b}\frac{1}{y_n}(\alpha_n b - \beta_n a).$$

Заметим, что $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ – ограниченная последовательность по лемме; $\frac{1}{b} = \text{const} \neq 0$. Тогда $\left\{\frac{1}{b}\frac{1}{y_n}(\alpha_n b - \beta_n a)\right\}$ – бесконечно малая последовательность (по теоремам 1-3 раздела 4.8), а потому $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ – также бесконечно малая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

4.11. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого положительного числа $E > 0$ найдется такой номер $N = N(E)$, что при всех значениях $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n| > E.$$

Символически это записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ или } x_n \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

С помощью логических символов определение бесконечно большой последовательности можно записать в виде

$$(\forall E > 0)(\exists N)(\forall n > N): |x_n| > E.$$

Замечание. Если бесконечно большая последовательность сохраняет постоянный знак, то в с соответствии со знаком говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом $+\infty$ или $-\infty$.

Установим связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

Теорема. Если числовая последовательность $\{x_n\}$, где $x_n \neq 0$, является бесконечно большой, то ее обратная последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть последовательность бесконечно малая.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и вычислим $E = 1/\varepsilon$. По определению бесконечно большой последовательности найдется такой номер N, что при всех значениях $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > E = 1/\varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к обратным величинам, получим

$$\frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \text{ при всех значениях } n > N .$$

Следовательно, $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

Обратная теорема (без доказательства). Если числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n \neq 0$, является бесконечно малой, то ее обратная последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ есть последовательность бесконечно большая.

Отметим некоторые свойства бесконечно больших последовательностей.

1. Сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака, что и слагаемые последовательности.
2. Произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
3. Произведение постоянной величины, отличной от нуля, на бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$ есть последовательность бесконечно большая.

Эти свойства доказываются аналогично соответствующим свойствам бесконечно малых последовательностей. Докажем, например, свойство 2.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно большие последовательности. Выберем сколь угодно большое положительное число E и вычислим $\sqrt{E}$. По определению бесконечно большой последовательности для числа $\sqrt{E} > 0$ найдется такой номер N_1, что при всех значениях $n > N_1$ выполняется неравенство $|x_n| > \sqrt{E}$, а при всех значениях $n > N_2$ выполняется неравенство $|y_n| > \sqrt{E}$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда оба неравенства $|x_n| > \sqrt{E}$ и $|y_n| > \sqrt{E}$ выполняются одновременно при всех значениях $n > N$.

Рассмотрим

$$| x_n \; y_n | = | x_n | \, | y_n | > \sqrt{E}\,\sqrt{E} = E \text{ при всех } n > N \, .$$

Следовательно, $\{ x_n \, y_n \}$ – бесконечно большая последовательность.

4.12. ЧИСЛО e

Имеет место формула, называемая биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}b^n \, .$$

Легко проверить справедливость формулы при $n = 1, 2, 3, 4$. Действительно,

$$(a+b)^1 = a + 1a^{1-1}b = a + b \, ;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + \frac{2(2-1)}{1\cdot 2}b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \, ;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \, ;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \, .$$

Рассмотрим числовую последовательность $\{ x_n \} = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right\}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что $x_1 = 2;$ $x_2 = 2{,}25;$ $x_3 = 2{,}44\ldots$

Теорема. Числовая последовательность $\{ x_n \} = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right\}$ при неограниченном возрастании n имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона представим общий член последовательности $\{ x_n \}$ в виде

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\frac{1}{n^n}$$

или

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (4.1)$$

Если рассмотреть член x_{n+1}, т.е. увеличить n на единицу, то добавится положительное слагаемое с номером $(n+2)$ и каждый множитель вида $\left(1 - \frac{c}{n}\right)$ заменится большим $\left(1 - \frac{c}{n+1}\right)$. Отсюда следует, что $x_{n+1} > x_n \quad \forall\, n$.

Итак, $\{x_n\}$– возрастающая последовательность. Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку вида $\left(1 - \frac{c}{n}\right) < 1$ в равенстве (4.1) единицей. Получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \ . \quad (4.2)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2};$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3};$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

неравенство (4.2) перепишем в виде

$$x_n < 2 + \underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}. \quad (4.3)$$

Подчеркнутые слагаемые неравенства (4.3) образуют геометрическую прогрессию, сумма которой не превосходит единицы. Действительно.

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}; \quad S_n = \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Неравенство (4.3) усилится, если заменить подчеркнутую сумму единицей. Итак, $x_n < 3$.

Так как последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастающая и ограниченная, то по теореме 6 раздела 4.10 она имеет предел. Из доказательства теоремы следует, что этот предел заключен между 2 и 3.

Определение. Предел числовой последовательности $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ при неограниченном возрастании n называется числом e.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\,. \qquad (4.4)$$

Число e иррациональное. Можно показать, что e = 2,718281828459…

4.13. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, за исключением, быть может, самой точки $x = x_0$.

Возьмем в области определения функции последовательность точек, отличных от точки $x = x_0$,

$$x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots, x_n\, \ldots, \qquad (4.5)$$

сходящуюся к x_0. Значения функции в точках этой последовательности также образуют последовательность

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n) \ldots\,, \qquad (4.6)$$

и можно ставить вопрос о ее сходимости, т.е. о существовании ее предела.

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности (4.5) значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность (4.6) значений функции сходится к числу A.

Символически это записывается в виде $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\neq x_0)}} f(x) = A$.

***Замечание* 1.** Функция $f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел, что следует из единственности предела последовательности $\{f(x_n)\}$.

Пример 4.6. Найти предел функции $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ при $x \to 1$, т.е. $x_0 = 1$.

Решение. Для $\forall\, x \neq 1$ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, а так как по определению предела при $x \to 1$ не принимается во внимание значение функции в точке $x_0 = 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = \lim_{x\to 1}(x_n+1) = 2\,.$$

Определение 2. Число A_1 (A_2) называется левосторонним (правосторонним) пределом функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности (4.5) значений аргумента, элементы которой x_n меньше (больше) x_0, соответствующая последовательность (4.6) значений функции сходится к числу A_1 (или A_2).

Символическая запись

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

Левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0$ обозначаются соответственно $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

***Замечание* 2.** Для существования предела функции в точке x_0 необходимо и достаточно существование и равенство односторонних пределов, т.е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \ .$$

Определение 3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (4.5) значений аргумента x, соответствующая последовательность (4.6) значений функции сходится к числу A**.**

Символическая запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Определение 4. Число A_1 (A_2) называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности (4.5) значений аргумента x, элементы которой x_n положительны (отрицательны), соответствующая последовательность (4.6) значений функции сходится к числу A_1 (A_2).

Символическая запись $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A_1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A_2$.

4.14. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Определение предела функции на «языке последовательностей» дает возможность перенести доказанные ранее теоремы о пределах числовых последовательностей на функции. Покажем это на примере следующих теорем.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке $x = x_0$ пределы A и B соответственно. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ при $B \neq 0$ имеют в точке $x = x_0$ пределы, равные соответственно (A + B), $(A\cdot B)$ и A/B.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n \neq 0$) – произвольная последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$, сходящихся к числу x_0. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют пределы A и B. В силу теорем 7-9 раздела 4.10 последовательности $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/g(x_n)\}$(при $B\neq 0$) имеют пределы, равные соответственно $(A+B),(A\cdot B)$ и A/B.

По определению предела функции можно записать

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=A+B=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))=A\cdot B=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad (\text{при } B\neq 0).$$

Теорема 2. Пусть: 1) функции $f(x), g(x)$ и $r(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 предел, равный A, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$; 3) выполняются неравенства $f(x)\le r(x)\le g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} r(x)=A$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n\neq 0$) – произвольная последовательность значений аргумента функций $f(x)$ и $g(x)$, сходящаяся к x_0. Соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ значений этих функций имеют предел, равный A, т.е. $\{f(x_n)\}\to A$ и $\{g(x_n)\}\to A$ при $n\to\infty$.

Используя условие 3 теоремы, можно записать $f(x_n)\le r(x_n)\le g(x_n)$. Отсюда по теореме 5 раздела 4.10 следует, что $\{r(x_n)\}\to A$ при $n\to\infty$.

Согласно определению предела имеем $\lim\limits_{x\to x_0} r(x)=A$.

Замечание. Теоремы 1 и 2 верны также при $x\to\infty$, $x\to-\infty$ или $x\to+\infty$

4.15. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{\alpha(x_n)\}$ значений функции является бесконечно малой.

В соответствии с замечанием 3 раздела 4.9 можно записать

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)=0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$) имела своим пределом число A, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Рассмотрим разность $f(x) - A = \alpha(x)$. Перейдем к пределу при $x \to x_0$. Имеем

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - A \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0 \quad .$$

Достаточность. Пусть $f(x) - A = \alpha(x)$ и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Имеем $f(x) = A + \alpha(x)$. Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[A + \alpha(x) \right] = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A \quad .$$

Бесконечно малые функции обладают такими же свойствами, что и бесконечно малые числовые последовательности.

Теорема 2. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Утверждение теоремы непосредственно следует из определения предела функции и теорем 1-3 раздела 4.8.

Все сказанное о бесконечно малых функциях при $x \to x_0$ справедливо для бесконечно малых функций при $x \to \infty$, $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или просто бесконечно большой) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{ x_n \}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{ f(x_n) \}$ значений функции является бесконечно большой.

Символическая запись $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$.

Замечание. Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует такая же связь, что и между соответствующими числовыми последовательностями.

4.16. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Теоремы об арифметических операциях над числовыми последовательностями или функциями в предположении, что они стремятся к конечным пределам, устанавливают, чему равны пределы суммы, разности, произведения и частного. В последнем случае предполагается, что пределы последовательности или функции, стоящих в знаменателе, отличны от нуля. Также предполагается, что в процессе изменения ни последовательность, ни функция нулевых значений не принимают.

В теоремах не рассматривались случаи, когда пределы (один или оба) бесконечны или – если речь идет о частном – когда предел знаменателя равен нулю или бесконечности.

Остановимся на некоторых из этих случаев.

1. Рассмотрим сначала частное двух функций, которые одновременно стремятся к нулю при $x \to 0$:

а) $f(x)=2x$; $g(x)=5x$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$;

б) $f(x)=2x^2$; $g(x)=5x$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{5x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

в) $f(x)=2x$; $g(x)=5x^3$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x^3}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$;

г) $f(x)=(-1)^{n+1}x$; $g(x)=x$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-1)^{n+1}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{n+1}$ (предел не существует).

Таким образом, знание пределов самих функций не позволяет судить о поведении их отношения. Необходимо знать закон изменения функций и непосредственно исследовать их отношение.

Для того, чтобы охарактеризовать эту особенность, говорят, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ представляет неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

2. Рассмотрим частное двух функций, которые при $x \to 0$ одновременно стремятся к бесконечности:

а) $f(x)=\dfrac{2}{x}$; $g(x)=\dfrac{5}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$;

б) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$; $g(x)=\dfrac{5}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{5x^2}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

в) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$; $g(x)=\dfrac{5}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x^3}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$;

г) $f(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{n+1}$ (предел не существует).

В этом случае говорят, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ представляет неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

3. Рассмотрим произведение двух функций, одна из которых при $x\to 0$ стремится к нулю, в то время как вторая функция стремится к бесконечности:

а) $f(x)=2x$; $g(x)=\dfrac{1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$;

б) $f(x)=2x^3$; $g(x)=\dfrac{1}{5x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{5x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$;

в) $f(x)=2x$; $g(x)=\dfrac{1}{5x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x^3}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$;

г) $f(x)=x; g(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(-1)^{n+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{n+1}$ (предел не существует).

В этих случаях говорят, что произведение $f(x)\cdot g(x)$ при $f(x)\to 0$ и $g(x)\to\infty$ представляет неопределенность вида $\{0\cdot\infty\}$.

Замечание **1.** Кроме неопределенностей вида, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и $\{0\cdot\infty\}$ существуют еще неопределенности вида $\{\infty-\infty\}$, $\{1^{\infty}\}$, $\{\infty^{0}\}$, $\{0^{0}\}$.

Замечание **2.** Во всех случаях приходится, учитывая закон изменения последовательностей или функций, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование получило название раскрытия неопределенности. Далеко не всегда оно так просто, как в приведенных схематических примерах.

Замечание **3.** Если последовательность или функция, стоящие в знаменателе, имеют своим пределом нуль или бесконечность, в то время, как предел последовательности или функции, стоящих в числителе, есть константа, то предел частного устанавливается на основании теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими. Константа должна быть отличной от нуля, если в знаменателе стоит последовательность или функция, имеющие своим пределом нуль.

При нахождении предела суммы двух бесконечно больших одного знака следует воспользоваться соответствующим свойством бесконечно больших.

4.17. ПЕРВЫЙ КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Теорема. Предел отношения $\sin x/x$ при стремлении x к нулю по любому закону ($x\neq 0$) равен единице, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

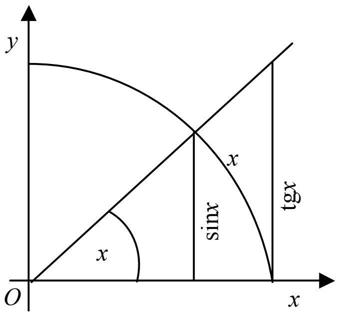

Рис.4.3

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся вспомогательными неравенствами:

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x \quad \left(0 < x < \pi/2\right), \qquad (4.7)$$

где угол x измеряется в радианах.

Неравенство становится очевидным, если рассмотреть четверть тригонометрического круга радиуса равного единице (рис.4.3).

Разделим неравенства (4.7) почленно на $\sin x$ и перейдем к обратным величинам.

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Тогда

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x. \qquad (4.8)$$

Заметим, что

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x. \qquad (4.9)$$

Неравенства (4.8) с учетом (4.9) перепишем в виде

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Переходя к пределу при $x \to 0$ и используя теорему 2 раздела 4.14, получим

$$\lim_{x\to 0}(1 - \frac{\sin x}{x}) = 0 \text{ при } x > 0 \text{ или } \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ при } x > 0.$$

Пусть $x < 0$. Обозначим $-x = y$ и рассмотрим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Используя первый классический предел, найдем следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{artg} x}{x}=\begin{Bmatrix}\operatorname{artg} x=y\\ x=\operatorname{tg} y\end{Bmatrix}^{*}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}=1.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{Bmatrix}\arcsin x=y\\ x=\sin y\end{Bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1.$

4.18. ВТОРОЙ КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Теорема. Функция $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$ имеет своим пределом число e, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$

Доказательство. Ранее было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$

Пусть $x\to 0$, принимая как нецелые, так и отрицательные значения.

1. Рассмотрим случай, когда $x\to+\infty$. Каждое значение переменной x заключено между двумя положительными целыми числами: $n\le x<n+1$. Переходя к обратным величинам, получим

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}\ .$$

При этом будут выполняться неравенства

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}\ ;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\ .$$

Заметим, что если $x\to\infty$, то и $n\to\infty$.

Найдем пределы переменных, между которыми заключена функция $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}.$$

---

[*] Здесь и далее в фигурных скобках даны необходимые пояснения.

По теореме 2 раздела 4.14 имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

2. Рассмотрим случай $x\to-\infty$. Введем новую переменную $t=-(x+1)$ или $x=-(t+1)$. При $t\to+\infty$ $x\to-\infty$. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

Объединяя оба случая, окончательно получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

Замечание. Если в равенстве $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ положить $\frac{1}{x}=\alpha$, то при $x\to\infty$ имеем $\alpha\to 0$ ($\alpha\neq 0$) и, следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\mathrm{e}\,.$$

Пример 4.7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+5}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{2+\frac{5}{x}}=1.$$

Следовательно, предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$ представляет неопределенность вида $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для того, чтобы применить второй классический предел, необходимо в основании выделить единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{2x-1}{2x+5}-1\right)\right]^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-6}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-6}}\right]^{\frac{-6}{2x+5}\cdot 3x}=\mathrm{e}^{-9}=\frac{1}{\mathrm{e}^{9}},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6\cdot 3x}{2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-18x}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-18}{2+\frac{5}{x}}=-9.$$

Пример 4.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{3}{2x^2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left\{1^\infty\right\}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{3}{2x^2}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{2}{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 3}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}},$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\cdot 3}{2x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}.$$

Определение. Логарифмы, основанием которых является число e, называются ***натуральными*** и обозначаются символом $\ln x$: $\ln x=\log_{\mathrm{e}} x$.

Логарифмируя по основанию 10 тождество $x=\mathrm{e}^{\ln x}$ получим

$$\lg x=\ln x\cdot M\,, \tag{4.10}$$

где $M=\lg\mathrm{e}=\dfrac{1}{\ln 10}=0{,}434294...$

Равенство (4.10) можно переписать в виде: $\ln x=\lg x\cdot M_1$, где M_1 – модуль перехода от десятичных логарифмов к натуральным логарифмам, $M_1=\dfrac{1}{M}=2{,}302585...$

4.19. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln\mathrm{e}=1.$$

Замечание. Возможность перестановки знака функции и знака предела будет обоснована в дальнейшем.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

Доказательство. Заметим, что при $x\to 0$ $a^x\to 1$. Следовательно, разность a^x-1 есть бесконечно малая функция при $x\to 0$, т.е. $a^x-1=\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Отсюда

$$a^x=1+\alpha(x)\ . \tag{4.11}$$

Логарифмируя полученное равенство, получим

$$x\ln a=\ln(1+\alpha(x)) \text{ или } x=\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\ln a}. \tag{4.12}$$

С учетом (4.11) и (4.12) искомый предел запишем в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)\cdot\ln a}{\ln(1+\alpha(x))}=\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\ln(1+\alpha(x))}=\ln a.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m,$ где $m=\text{const}.$

Доказательство. Аналогично п.2 имеем

$$(1+x)^m-1=\alpha(x), \tag{4.13}$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$.

Отсюда $(1+x)^m=1+\alpha(x)$ и, логарифмируя обе части равенства, получим

$$m\ln(1+x)=\ln(1+\alpha(x)) \text{ или } \frac{m\ln(1+x)}{\ln(1+\alpha(x))}=1. \tag{4.14}$$

С учетом (4.13) и (4.14) искомый предел можно записать в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \alpha(x)\to 0}}\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{m\ln(1+x)}{\ln(1+\alpha(x))}=\lim_{\substack{x\to 0\\ \alpha(x)\to 0}}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{\alpha(x)}{\ln(1+\alpha(x))}m=m.$$

При доказательстве второго и третьего вспомогательных пределов использован первый вспомогательный предел.

Используя вспомогательные пределы, найдем следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[15]{2x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{2}{2}=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{\sqrt[15]{2x+1}-1}{2x}=2;$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}=\ln\mathrm{e}\cdot 1\cdot 2=2$.

4.20. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ (или при $x \to \infty$, $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) являются бесконечно малыми функциями. Для сравнения быстроты стремления к нулю бесконечно малых (относительно друг друга) рассмотрим предел их отношения.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K.$$

Если $K = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$. Если $K = \text{const}$ и $K \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка. Если $K = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Этот факт коротко записывают в виде $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Замечание. Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения. Так, например, если предел отношения двух бесконечно больших функций равен нулю, то бесконечно большая функция, стоящая в числителе, более низкого порядка по сравнению с бесконечно большой, стоящей в знаменателе.

На основании ранее установленных пределов можно выписать следующую таблицу эквивалентных бесконечно малых функций:

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a;$
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x);$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x);$
$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x);$	$(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim \alpha(x)m$ ($m = \text{const}$).

Рассмотрим некоторые теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях.

Теорема 1. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$ и существует предел отношения эквивалентных бесконечно малых функций $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то существует предел отношения исходных бесконечно малых функций при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} .$$

Доказательство. Составим тождество

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} .$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\ .$$

Итак,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 4.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left\{\begin{matrix}\sin x\sim x\\ \sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\text{или}\qquad\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1\ \Rightarrow\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

Пример 4.10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1-3x}-1}{\arcsin 2x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1-3x}-1}{\arcsin 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{1-3x}-1\sim\frac{1}{5}(-3x)\\ \arcsin 2x\sim 2x\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}(-3x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-3}{10}\right)=-\frac{3}{10}.$$

Теорема 2. Если $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$**,** то их разность при $x\to x_0$ есть бесконечно малая функция высшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Доказательство. Составим дробь $\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}$. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1-\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0.$$

Обратная теорема (доказывается аналогично). Если разность двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них, то рассматриваемые бесконечно малые функции эквивалентны.

Замечание. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ бесконечно малые функции, причем $\alpha(x)\sim\beta(x)$ **.** Рассмотрим очевидное тождество $\alpha(x)=\beta(x)+(\alpha(x)-\beta(x))$. Разность $\alpha(x)-\beta(x)$ есть бесконечно малая функция высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$ по теореме 2. Поэтому с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеем

$$\alpha(x) \approx \beta(x). \qquad (4.15).$$

Относительная погрешность равенства (4.15) $\left|\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}\right|$ в силу теоремы 2 стремится к нулю.

4.21. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = x_0$, так что в точке x_0 функция имеет определенное значение $f(x_0)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$ (при $x = x_0$), если предел функции и ее значение в точке $x = x_0$ равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \; . \qquad (4.16)$$

Замечание* 1**. На «языке последовательностей» непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ можно сформулировать так: ***функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке $x = x_0$ (при $x = x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x \neq x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(x_0)$.

***Замечание* 2.** На графике функции $f(x)$ равенство (4.16) означает, что при стремлении x к x_0, ордината $f(x)$ стремится к ординате $f(x_0)$. Следовательно, условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ означает, что ее график «непрерывен» при всех x, достаточно близких к данной точке.

***Замечание* 3.** Основные элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены, что видно из их графиков в области определения и свойств.

***Замечание* 4**. Заметим, что $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ и потому условие непрерывности (4.16) можно записать в виде: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, т.е. для непрерывной функции знак функции и знак предела можно переставлять.

Например,

$$\lim_{x \to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \mathrm{e} = 1,$$

так как функция $\ln x$ непрерывна.

Приведем еще одно определение непрерывности функции в точке x_0. Заметим, что условия $x \to x_0$ и $(x - x_0) \to 0$ равносильны, и, следовательно, равенство (4.16) можно переписать в виде

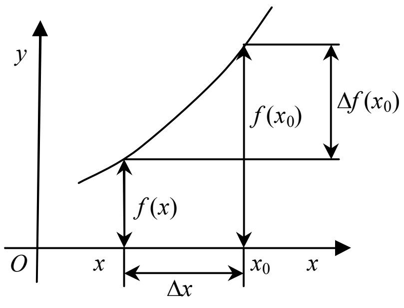

Рис.4.4

$$\lim_{(x-x_0)\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 . \qquad 4.17)$$

Определение 2. Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается $\Delta x: \Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Определение 3. Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0, вызванным приращением аргумента Δx , и обозначается Δy или $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \ .$$

Геометрический смысл приращений очевиден из рис.4.4.

Равенство (4.17) в новых обозначениях принимает вид

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0 \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \ .$$

Таким образом, если бесконечно малому приращению аргумента в точке $x = x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции, то функция в этой точке непрерывна. Справедливо и обратное утверждение.

Пример 4.11. Показать, что функция $y = x^2$ непрерывна для любого значения аргумента x.

Решение. Найдем Δy и его предел при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2x\Delta x + (\Delta x)^2) = 2x\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 = 0.$$

Итак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ для любого x.

Пример 4.12. Показать, что функция $y=\cos x$ непрерывна для любого аргумента x.

Решение. Найдем Δy:

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x)-\cos x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x \ .$$

Известно, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1; \left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1.$$

Тогда при любом x имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$

Определение 4. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$ справа, если выполняется предельное равенство

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Аналогично определяется непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ слева:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 5. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение 6. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и непрерывна на концах отрезка $[a, b]$ соответственно справа и слева.

4.22. РАЗРЫВ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Пусть функция $f(x)$ определена при всех значениях x, достаточно близких к точке $x = x_0$.

Определение 1. Функция $f(x)$ при $x = x_0$ (в точке $x = x_0$) имеет разрыв, если в этой точке нарушается хотя бы одно из условий непрерывности. При этом точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва***.

Определение 2. Если существуют конечные левосторонние и правосторонние пределы функции при $x \to x_0$, но они не равны друг другу, т.е. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва первого рода***.

Заметим, что если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то точка $x = x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва***.

Определение 3. Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва второго рода.***

Для примера рассмотрим несколько функций.

1. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Область определения функции: $(-\infty, 0) \cup (0 + \infty)$. В точке $x = 0$ она не определена.

Заметим, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, функция $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода.

2. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. В точке $x=0$ имеет устранимый разрыв. Действительно, значение функции при $x=0$ не определено, но существуют конечные и равные друг другу лево- и правосторонние пределы:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если доопределить функцию, положив $f(0)=1$, то функция

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x\neq 0;\\ 1 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$$

станет непрерывной в точке $x=0$.

3. Функция $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$. В точке $x=0$ имеет разрыв первого рода, так как

$$f(+0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=+1; \quad f(-0)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

4. Функция $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$. В точке $x=0$ имеет разрыв второго рода, так как оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to -0}\cos\frac{\pi}{x}$ и $\lim\limits_{x\to +0}\cos\frac{\pi}{x}$ не существуют.

5. Функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Ее область определения $(-\infty,0)\cup(0+\infty)$. В точке $x=0$ функция не определена.

Заметим. что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty \ .$$

Следовательно, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода.

4.23. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то сумма и разность функций $[f(x)\pm g(x)]$, произведение $(f(x)g(x))$ и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ также непрерывны в точке $x=x_0$.

Доказательство. Непрерывные в точке $x = x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в этой точке пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$ соответственно. По теореме 1 раздела 4.14 функции $[f(x) \pm g(x)], (f(x)g(x))$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имеют соответственно пределы $[f(x_0) + g(x_0)], (f(x_0)g(x_0))$ и $\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$. Тогда по первому определению непрерывности функции в точке $x = x_0$ все перечисленные функции в этой точке непрерывны.

Теорема 2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, а функция $y = f[u]$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Доказательство вытекает из определения непрерывности функций: основные элементарные функции в области их определения непрерывны.

Теорема Вейерштрасса (без доказательства**).** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке обязательно найдутся две точки c_1 и c_2, где достигаются наибольшее (M) и наименьшее (m) значения функции $f(x)$ на $[a, b]$: $f(c_1) = M$, $f(c_2) = m$, причем $m \le f(x) \le M$.

Замечание. Последнее неравенство показывает, что если $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ непрерывна, то она на этом отрезке ограничена. Действительно, пусть $K = \max\{\ |m|, |M|\ \}$. Тогда $|f(x)| \le K$ $(K > 0, K = \text{const})$.

Теорема Коши (без доказательства). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка обязательно найдется по крайней мере одна точка $x = c$ такая, что $f(c) = 0$.

Из геометрических соображений очевидно, что при переходе непрерывной функции из одной полуплоскости в другую, график функции пересечет ось Ox по крайней мере в одной точке.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на этом промежутке наибольшее (M) и наименьшее (m) значения и μ – такое число, что $m < \mu < M$, то внутри отрезка найдется по крайней мере одна точка $x = c$ такая, что $f(c) = \mu$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции и области ее определения.
2. Что называется числовой последовательностью?
3. Дайте определение бесконечно малой последовательности.
4. Сформулируйте свойства бесконечно малых последовательностей.
5. Дайте определение бесконечно большой последовательности.
6. Сформулируйте свойства бесконечно больших числовых последовательностей.
7. Какая связь существует между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями?
8. Дайте определение предела последовательности и укажите его геометрический смысл.
9. Какой предел называют первым классическим (замечательным) и какие пределы следуют из него?
10. Какие пределы называют вспомогательными?
11. Сформулируйте определение предела функции на «языке последовательности» и на «языке ε – δ».
12. Какие теоремы теории пределов вам известны?
13. Какие функции называются бесконечно малыми и бесконечно большими?
14. Какими свойствами обладают бесконечно малые и бесконечно большие функции и какова связь между ними.
15. Какой предел называют вторым классическим (замечательным) пределом?
16. Какие бесконечно малые называют эквивалентными и как их используют для раскрытия неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$?
17. Какие бесконечно малые называют бесконечно малыми одного порядка?
18. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке $x = x_0$.
19. Какие точки называют точками разрыва функции и какова их классификация?
20. Какие свойства непрерывных функций вам известны?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Какие бесконечно малые при $x \to 0$ не являются эквивалентными?	1. $\mathrm{tg}^2 x \sim x^2$ 2. $1-\cos 2x \sim 2x^2$ 3. $\ln(1+5x) \sim 5x$ 4. $\cos 5x - \cos 3x \sim 2x$

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+5)^2-5^2}{x}$ равен	1. 10 2. 25 3. $2x^2$ 4. $25x$
3	Указать область определения функции $y=\log_{2x}(5-3x)$	1. $(1/2;\ 5/3)$ 2. $(0;\ 1/2)$ 3. $(0;\ 1/2)\cup(1/2;\ 5/3)$ 4. $(5/3\ ;\ \infty)$
4	Последовательность $\{y_n\}$ называется бесконечно большой, если	1. $\forall\ E>0\ \exists\ N: n>N \Rightarrow \lvert y_n\rvert = E$ 2. $\forall\ E>0\ \exists\ N: n<N \Rightarrow \lvert y_n\rvert > E$ 3. $\forall\ E>0\ \exists\ N: n>N \Rightarrow \lvert y_n\rvert < E$ 4. $\forall\ E>0\ \exists\ N: n>N \Rightarrow \lvert y_n\rvert > E$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\ln^2(1-2x)}$ равен	1. 0 2. $-5/2$ 3. $25/4$ 4. ∞
6	Какая из указанных функций в точке $x=-2$ не является бесконечно большой?	1. $y=\ln(x+2)$ 2. $y=(x+2)^2$ 3 $y=\mathrm{ctg}(x+2)$ 4. $y=\mathrm{tg}(x+2)^{-2}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{12x}}{\sqrt{4x+\sqrt{8x+\sqrt{3x}}}}$ равен	1. $\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{12/8}$ 3. 4 4. 0
8	Какое утверждение в общем случае неверно, если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$?	1. $\varphi(x)+\psi(x)$ – бесконечно малая функция 2. $\varphi(x)/\psi(x)$ – бесконечно малая функция 3. $\varphi(x)\psi(x)$ – бесконечно малая функция 4. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ограничены

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
9	Числовая последовательность имеет конечный предел, если она	1. Монотонно возрастает (или убывает) и ограничена 2. Ограничена 3. Монотонна 4. Строго возрастающая
10	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\operatorname{ctg}2x}$ равен	1. 1 2. 1/e 3. $e^{1/2}$ 4. e^2

Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Задача об определении скорости точки. Пусть материальная точка движется прямолинейно и неравномерно вдоль оси Ox по закону $x = f(t)$. Требуется найти ее скорость в момент времени t.

Пусть в момент времени t точка находилась в положении M на расстоянии x от начала координат O (рис.5.1). За время Δt она, не меняя направления движения, заняла положение M_1 с абсциссой $x + \Delta x$. Таким образом, за время Δt путь, пройденный движущейся точкой, изменился на Δx. Очевидно, что $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$, а отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ определит среднюю скорость точки $V_{\text{ср}}$ за время Δt. Мгновенная скорость точки в момент t

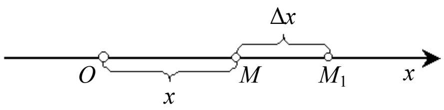

Рис.5.1

$$V_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

Данная формула определяет скорость точки в прямолинейном переменном движении. Например, при свободном падении тяжелой материальной точки в пустоте закон движения определяется формулой $x = gt^2/2$, где g – ускорение свободного падения. Тогда скорость точки в произвольный момент времени вычисляется по формуле (5.1)

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \dfrac{gt^2}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{g\Delta t}{2} \right) = gt.$$

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором промежутке X. Возьмем конечную точку $x \in X$ и дадим ей произвольное приращение $\Delta x \neq 0$, такое, что $x + \Delta x \in X$. Приращение функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение 1. Конечный или бесконечный предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$, называется ***производной функции*** $y = f(x)$ по переменной x и обозначается y', $f'(x)$ или y'_x. Итак,

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.2)$$

Пример 5.1. Найти производную функции $f(x) = x^2$ в произвольной точке x.

Решение. По определению имеем

$$f'(x) = (x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x.$$

Таким образом, $(x^2)' = 2x$. Можно также показать, что $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$.

***Замечание* 1.** Если производная существует при каждом значении x в рассматриваемом промежутке, то она является *функцией* от x и обозначается $f'(x)$.

***Замечание* 2.** Процесс нахождения производной функции называется *дифференцированием.*

Рассмотрим ***геометрический*** смысл понятия производной.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат xOy задан график функции $y = f(x)$. Выберем на кривой точку $M_0(x_0, y_0)$ и точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и проведем секущую M_0M, образующую с осью Ox угол φ (рис.5.2).

Определение 2. Пусть точка M приближается к точке M_0 так, что расстояние между ними $\rho(M_0M) \to 0$. Если при этом секущая M_0M будет приближаться к некоторому предельному положению M_0T так, что угол между прямыми M_0M и M_0T стремится к нулю, то прямая M_0T называется ***касательной к кривой в точке*** M_0.

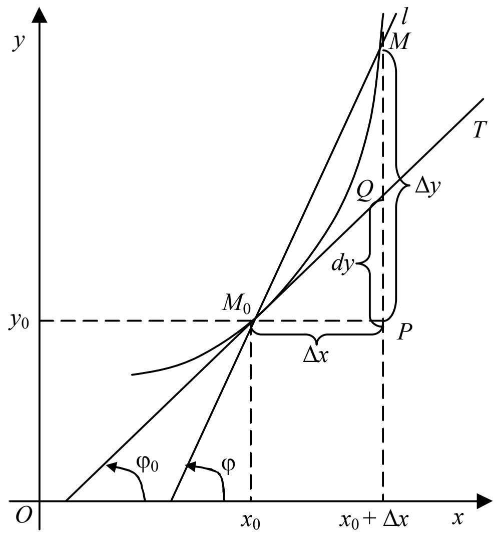

Рис.5.2

Наличие в точке M_0 касательной M_0T, образующей с осью Ox ориентированный угол φ_0, эквивалентно равенству $\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi$, а значит, и равенству $\mathrm{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi$.

Очевидно, что имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PM}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для углового коэффициента k_0 касательной M_0T получим

$$k_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (5.3)$$

Зная угловой коэффициент $k_0 = f'(x_0)$ касательной M_0T и точку, через которую она проходит, выпишем уравнение касательной в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.4)$$

Таким образом, производная $f'(x)$ в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

***Замечание* 3.** Условие существования производной $f'(x)$ в точке x эквивалентно условию существования и единственности касательной к кривой $y = f(x)$ в этой точке. Случаю конечной производной отвечает касательная, не параллельная оси *Oy*, а случаю бесконечной производной – касательная, параллельная оси *Oy*.

Пример 5.2. Составить уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Найдем входящие в него величины:

$$f(x_0) = \sin\pi = 0; \quad f'(x) = \cos x; \quad f'(x_0) = \cos\pi = -1.$$

Тогда имеем $y = (-1)(x - \pi)$ или $y = \pi - x$ – уравнение искомой касательной.

***Механический смысл производной*:** в задаче о скорости материальной точки для прямолинейного неравномерного движения (см. раздел 5.1) имеем

$$V_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \ ,$$

т.е. производная от функции, описывающей закон движения материальной точки, перемещающейся прямолинейно и неравномерно, определяет ее мгновенную скорость.

5.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0 и некоторой ее окрестности, называется *дифференцируемой* в этой точке, если существует конечная производная $f'(x_0)$.

Теорема (*необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке*). Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы приращение функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, можно было представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{5.5}$$

где A – некоторое число; $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$y'_x(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x(x_0) = \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(x, \Delta x)$ – бесконечно малая функция, т.е. $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда следует, что $\Delta y = y'_x(x_0)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x$, а это и значит, что выполнено равенство (5.5), ибо $y'_x(x_0)$ – число.

Достаточность. Допустим, что приращение функции можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Предположив, что $\Delta x \neq 0$, получим отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$. Перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, а это значит, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную A, т.е. $y'_x(x_0) = A$.

5.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИЙ

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Отсюда по теореме о связи функции и ее предела имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

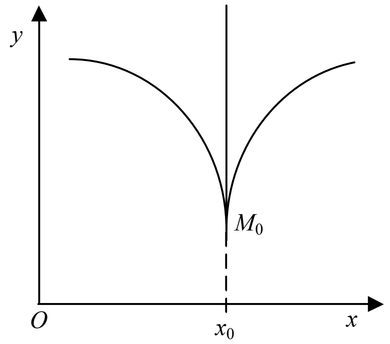

Рис.5.3

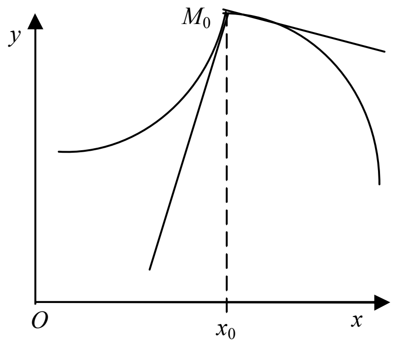

Рис.5.4

Замечание. Обратное утверждение не имеет места, так как из непрерывности функции в некоторой точке, вообще говоря, не следует дифференцируемость функции в этой точке. Рассмотрим, например, две функции, графики которых представлены на рис.5.3 и 5.4. Обе эти функции непрерывны в точке x_0, но они не будут дифференцируемы в этой точке. Касательная к графику первой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ параллельна оси *Oy*, т.е. первая функция обладает в точке x_0 бесконечной производной. График второй функции в точке x_0 вообще не имеет единственной касательной, поэтому функция в точке x_0 не может иметь конечной производной.

Определение 1. Точки, подобные x_0 на рис.5.3, называются ***точками возврата*** функции, а подобные точкам x_0 на рис.5.4 – ***угловыми точками.***

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой на некотором промежутке*** X, если эта функция дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

Отметим при этом, что в принадлежащих промежутку *X* граничных точках должна иметь место односторонняя дифференцируемость (правосторонняя или левосторонняя). В частности, если $X = [a, b]$ - замкнутый отрезок, то в его граничных точках a и b $(a < b)$ должны существовать соответственно односторонние конечные пределы:

$$y'_x(a) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad y'_x(b) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Графиком функции, дифференцируемой на некотором промежутке, служит сплошная линия без точек возврата и угловых точек. Такую линию будем называть ***гладкой***.

5.5. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то имеют место следующие правила дифференцирования:

$$f \pm g = f' \pm g'; \qquad (5.6)$$

$$(fg)' = f'g + fg'; \qquad (5.7)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \text{ при } g(x) \neq 0. \qquad (5.8)$$

Доказательство. Ограничимся доказательством равенства (5.7).

Пусть $y(x) = f(x)g(x)$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x) + \Delta f) \cdot (g(x) + \Delta g) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x},$$

где Δf и Δg – приращения функций $f(x)$ и $g(x)$, соответствующие приращению аргумента Δx, при этом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g$$

в силу дифференцируемости, а следовательно, непрерывности функций $f(x)$, $g(x)$ в точке x. Итак,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f g(x) + \Delta f \Delta g - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) + 0 \cdot f'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

Предлагаем самостоятельно доказать (5.6) и (5.8).

Пример 5.3. Вычислить производную функции

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \text{ в точке } x = 3.$$

Решение. Найдем производную функции $y = f(x)$, используя правило дифференцирования суммы

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)' = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(-\frac{1}{2}x^2\right)' + x' + 2'.$$

Вынесем постоянный множитель за знак производной:

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + x' + 2' = \frac{1}{4}\left(x^4\right)' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + x' + 2',$$

по формуле дифференцирования степенной функции и с учетом равенства нулю производной постоянной функции получим

$$\frac{1}{4}\left(x^4\right)' - \frac{1}{2}\left(x^2\right)' + x' + 2' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{1}{2}\cdot 2x + 1 + 0 = x^3 - x + 1.$$

Итак, $f'(x) = x^3 - x + 1.$

Найдем теперь значение производной в точке $x = 3$, для чего в данное выражение вместо x надо подставить число 3: $f'(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25.$

Пример 5.4. Найти производную функции $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$.

Решение: Выпишем производную

$$y' = \frac{(\sin x)'x^2 - (x^2)'\sin x}{(x^2)^2} = \frac{\cos x\cdot x^2 - \sin x\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(x\cos x - 2\sin x)}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}.$$

Замечание. Можно доказать, что $(c\cdot f)' = c\cdot f'$, $(c = \text{const})$ и

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'. \tag{5.9}$$

5.6. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение. Если производная $y'(x)$ – дифференцируема в точке x, то *производной второго порядка* (второй производной) в этой точке называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Аналогично *производная третьего порядка* функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$.

Таким образом, *производная n-го порядка* от функции $y = f(x)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Обозначается n-я производная так: $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

5.7. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Определение 1. Пусть даны функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. В этом случае переменная y называется сложной функцией переменной x Переменная u называется промежуточным аргументом.

Теорема 1. Пусть функция $u = \varphi(x)$ при данном x имеет производную $u'_x = \varphi'(x)$; функция $y = f(u)$ при соответствующем значении u имеет производную $y'_u = f'(u)$. Тогда производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ определяется по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x. \tag{5.10}$$

Доказательство. Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, значит $\Delta u = \varphi'_x \Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x$, где $\alpha(x,\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В свою очередь, функция $y = f(u)$ дифференцируема по u, т.е.

$$\Delta y = f'_u \Delta u + \beta(u, \Delta u)\Delta u \text{ при } \Delta u \to 0.$$

Тогда $\Delta y = f'_u \cdot (\varphi'_x \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x) + \beta(u, \Delta u) \cdot \Delta u$ и пусть $\Delta x \to 0$. Тогда в силу непрерывности дифференцируемой функции окажется, что и $\Delta u \to 0$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'_u \left(\varphi'_x + \alpha(x, \Delta x) \right) + \beta(u, \Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \right].$$

Здесь $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \beta(u, \Delta u) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, так как $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и, кроме того, $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Окончательно получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_u(u)\varphi'_x(x), \text{ т.е. } \{y[u(x)]\}'_x = y'_u u'_x.$$

Замечание. Данное правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Например, если $y = f(g),\ g = \varphi(h),\ h = \beta(x)$, то $y'_x = y'_g g'_h h'_x$.

Пример 5.5. Найти производную функции $y = \ln(x^2 + x + 5)$.

Решение. Выпишем производную

$$y' = \frac{1}{x^2 + x + 5}(x^2 + x + 5)' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 5}.$$

Определение 2. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, и пусть Y – множество ее значений. Допустим, что эта функция строго возрастает или строго убывает на множестве X. Тогда каждому значению $x \in X$ отвечает единственное значение $y \in Y$ и наоборот, т.е. на множестве Y

определена функция $x=\varphi(y)$ такая, что множество X является множеством ее значений и $f(\varphi(y))=y$. Эту функцию называют ***обратной*** по отношению к функции $y=f(x)$.

Если функция $y=f(x)$ задана аналитически, то обратную функцию можно получить, разрешив это соотношение относительно переменной x, после чего обычно обозначают аргумент обратной функции через x, а саму функцию через y (последняя операция не является обязательной).

Из курса математики средней школы известно, что графики прямой и обратной функции располагаются симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Итак, отметим без доказательства, что если некоторая функция $y=f(x)$ определена и строго возрастает на множестве X, то у нее существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая определена и строго возрастает на множестве Y, которое является множеством значений прямой функции $y=f(x)$.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x обратную функцию $x=x(y)$ и функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x и $y'_x \neq 0$, тогда обратная функция $x=x(y)$ также дифференцируема в соответствующей точке $y=y(x)$ и имеет место соотношение

$$x'_y = 1/y'_x. \tag{5.11}$$

Доказательство. Функция $y=f(x)$ по условию теоремы дифференцируема в точке x, тогда она непрерывна в этой точке, т.е. если функция, например, возрастает (убывает) и $\Delta x \neq 0$, то и $\Delta y \neq 0$, причем $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Пусть теперь $\Delta y \to 0$,тогда в силу непрерывности $y(x)$ и $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

5.8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказанная теорема о дифференцировании обратной функции позволяет легко получить формулы для вычисления производных от обратных тригонометрических функций.

Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. Она определена и строго возрастает на интервале $[-1, 1]$. Она служит обратной для функции $x=\sin y$, определенной на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$. Следовательно,

$$\left(\arcsin x\right)'_x = \frac{1}{\left(\sin y\right)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5.9. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Основные формулы запишем в таблицу:

1. $(C)' = 0$, если C – постоянная.
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
3. $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$.
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$.
7. $(\sin x)' = \cos x$.
8. $(\cos x)' = -\sin x$.
9. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
10. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5.10. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется продифференцировать степенно-показательную функцию вида $y = u(x)^{v(x)}$ или произведение нескольких функций, или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто оказывается удобным обе части данного выражения сначала прологарифмировать по основанию е, а потом уже приступить к непосредственному дифференцированию. Этот прием получил название логарифмического дифференцирования, а производная от логарифма функции называется логарифмической производной. Итак, пусть $y(x) = u(x)^{v(x)}$, тогда $\ln y(x) = v(x) \cdot \ln(u(x))$. Продифференцируем левую и правую часть этого равенства по x:

$$\frac{1}{y} y'_x(x) = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x) \Rightarrow$$

$$y'_x(x) = [u(x)]^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)). \qquad (5.12)$$

Пример 5.6. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение. Функция $y = x^{\sin x}$ является показательно-степенной. Тогда

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \sin x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Итак, производная функции $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

5.11. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть значения двух переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением $F(x, y) = 0$. Если при подстановке в это уравнение функции $y = f(x)$, определенной в некотором интервале (a, b), последнее обращается в тождество, то говорят, что задана *неявная* функция $y(x)$. В дальнейшем будем считать функцию $y(x)$ дифференцируемой в заданном интервале. Прием нахождения производной от неявно заданной функции проиллюстрируем на примерах.

Пример 5.7. Найти производную y'_x из уравнения $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. Пусть $y = f(x)$ – функция, определяемая заданным уравнением, т.е. $x^3 + (y(x))^3 + 3xy(x) = 0$. Продифференцировав по x обе части тождества, получим $3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0$. Откуда $y'(y^2 - x) = y - x^2$; $y' = (y - x^2)/(y^2 - x)$.

Пример 5.8. Найти производную y'_x в точке $M(1; 1)$, если $2y = 1 + xy^3$.

Решение. Продифференцируем обе части равенства $2y(x) = 1 + x \cdot y(x)^3$ по x: $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. Полагая $x = 1$ и $y = 1$, получим $2y' = 1 + 3y'$, откуда $y' = -1$.

Заметим, что уравнение $F(x, y) = 0$ определяет также неявную функцию x от y. Чтобы найти производную x'_y, нужно дифференцировать обе части уравнения по y и из полученного равенства определить x'_y по формуле (5.11).

5.12. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке производную, отличную от нуля. Тогда в точке x_0 для любого $\Delta x \neq 0$ имеет место соотношение

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

(здесь $\alpha(x, \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$), которое представляет собой сумму двух слагаемых. Первое из этих слагаемых $f'(x_0)\Delta x$ есть бесконечно малая функция одного порядка с Δx, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а второе слагаемое $\alpha(x, \Delta x)\Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ называют ***главной частью приращения*** функции Δy.

Определение. Произведение $f'(x_0)\Delta x$, представляющее собой главную часть приращения функции в точке x_0, линейную относительно Δx, называется ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в этой точке и обозначается dy или $df(x_0)$. Итак,

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{5.13}$$

Заметим, что приращение Δx аргумента x, который здесь выступает как независимая переменная, обычно обозначают символом dx и называют ***дифференциалом независимой переменной.*** Это непосредственно следует из определения дифференциала, если положить $f(x) = x$. Таким образом, формулу (5.13) для дифференциала функции записывают в виде

$$dy = f'(x_0)dx, \tag{5.14}$$

т.е. дифференциал функции в данной точке равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал (приращение) независимой переменной.

Из формулы (5.14) находим, что $f(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$. Таким образом, производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Символ $\dfrac{dy}{dx}$ часто применяют для обозначения производной функции y по переменной x.

Вернемся к графику функции $y = f(x)$, представленному на рис.5.2. Как легко заметить, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 геометрически представляет собой приращение ординаты QP касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

5.13. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Если x - независимая переменная, а $y = f(x)$ – дифференцируемая функция, то $dy = y'_x dx$. Покажем, что если переменная x является функцией другой независимой переменной, то дифференциал сохраняет свою форму.

Пусть $x = x(t)$ – дифференцируемая функция переменной t. Следовательно, $y = y[x(t)]$ – сложная функция переменной t, и тогда $dy = y'_t \cdot dt = = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx$, т.е. $dy = y'_x dx$. Такое свойство первого дифференциала называют свойством инвариантности формы первого дифференциала.

5.14. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Поскольку дифференциал функции $y = f(x)$ представляет собой главную часть приращения функции, линейную относительно приращения аргумента Δx, то $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$ или $\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Разность между приращением функции Δy и дифференциалом этой функции dy есть величина бесконечно малая высшего порядка, чем Δx. Поэтому при $y' \neq 0$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$, т.е. приращение и дифференциал являются эквивалентными бесконечно малыми. Таким образом, при малых Δx имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$. Из этого следует формула для приближенного вычисления функции при малых приращениях аргумента

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{5.15}$$

Пример 5.9. Вычислить приближенно arcsin 0,51.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x$. Полагая $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$, применим формулу (5.15) в виде

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\Delta x.$$

Так как $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$, то

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 \approx 0{,}513\ldots$$

Пример 5.10. Вычислить приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - 2x$ при изменении x от $x = 3$ до $x_1 = 3{,}01$.

Решение. При заданных условиях $\Delta x = 0{,}01$. Тогда

$$dy = y'dx = (2x - 2)\Delta x = (2 \cdot 3 - 2)\, 0{,}01 = 0{,}04;$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (3 + 0{,}01)^2 - 2(3 + 0{,}01) - 3^2 + 2 \cdot 3 =$$
$$= (3{,}01)^2 - 6{,}02 - 9 + 6 = 0{,}0401.$$

Погрешность, которую мы допустили, заменив приращение функции дифференциалом, равна $\Delta y - dy$. Абсолютная величина погрешности $\Delta = |\Delta y - dy|$.=0,0401 – 0,04 ≈ 0,0001. Относительная погрешность

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}0001}{0{,}0401} = 0{,}00249 \approx 0{,}0025,\text{ т.е. всего } 0{,}25\ \%.$$

5.15. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

В геометрии и механике часто употребляется параметрический способ задания кривой. Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся материальной точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$x = \varphi(t);\ \ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]. \tag{5.16}$$

При изменении параметра t в промежутке $[\alpha, \beta]$ точка с координатами $(x=\varphi(t), y=\psi(t))$ описывает всю кривую или рассматриваемую ее часть. Задание кривой уравнениями (5.16) называется ***параметрическим***.

Если из уравнений (5.16) можно исключить параметр t, то получим явное или неявное задание функции $y = f(x)$. Исключение параметра t из уравнений движения материальной точки приводит к уравнению траектории этой точки.

Пример 5.11. Установить, какую линию определяют уравнения $x = 2t - 4t^2$; $y = t - 2t^2$.

Решение. Если второе уравнение умножить на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим $2y = x$. Это уравнение определяет прямую.

Пример 5.12. Установить, какую линию определяют уравнения $x = r\cos t$; $y = r\sin t$ при одном из следующих условий: 1) $t \in [0, \pi]$; 2) $t \in [\pi, 2\pi]$; 3) $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Для исключения параметра t возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2 t \\ y^2 = r^2\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Теперь рассмотрим указанные условия:

1. Пусть $t \in [0, \pi]$, тогда $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Перед корнем выбран знак плюс потому, что если t изменяется в промежутке $[0, \pi]$, то $y \geq 0$. В этом случае искомая линия – это полуокружность с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

2. Пусть $t \in [\pi, 2\pi]$, тогда $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Это уравнение определяет полуокружность с центром в начале координат, расположенную в нижней полуплоскости.

3. Пусть $t \in [0, 2\pi]$, тогда уравнения $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ определяют окружность радиуса r с центром в начале координат.

Укажем, что в случае явного задания функции $y = f(x)$, где $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a, b]$, кривую, определяемую этим уравнением, можно легко задать параметрическим способом:

$$x = t;\ \ y = f(t),\ t \in [a, b].$$

Теорема. Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции по t и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная от функции y по x

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \ \text{ или } \ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Доказательство. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы по переменной t на множестве, где эти функции определены. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \Delta t}{x'_t . \Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

По этой же схеме можно вычислить старшие производные. Например, вторая производная имеет вид $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется производной функции в точке?
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. Как выглядит уравнение касательной к графику функции в данной точке?
4. В чем состоит механический смысл первой производной?
5. Что называется дифференциалом функции?
6. Каков геометрический смысл дифференциала?
7. В чем состоит и для какого вида функций применяется логарифмическое дифференцирование?

8. Чему равна производная суммы, произведения и частного двух функций?

9. Докажите формулу нахождения производной произведения двух функций.

10. Как найти производную сложной функции?

11. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.

12. Перечислите формулы таблицы производных.

13. Что называется второй производной функции?

14. В чем состоит механический смысл второй производной от функции, описывающей прямолинейное движение материальной точки?

15. Что понимают под производной n-го порядка?

16. В каком случае функция называется дифференцируемой k раз?

17. Как применяют дифференциал к приближенным вычислениям?

18. Можно ли утверждать, что если функция непрерывна на интервале (a, b), то она дифференцируема на этом интервале?

19. Выведете формулу для дифференцирования функции, заданной параметрически.

20. Можно ли сказать, что функция $y = |x|$ дифференцируема при $x = 0$?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Производная $f'(x)$ функции $f(x)x+3x^3$ в точке $x_0=1$ равна	1. 8 2. 9 3. 10 4. 6
2	Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)=\sin x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ равен	1. $0{,}5dx$ 2. $2dx$ 3. $(-1)dx$ 4. В п.1-3 правильного ответа нет
3	Производная произведения дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ вычисляется по формуле	1. $(uv)' = u'v'$ 2. $(uv)' = u'v - v'u$ 3. $(uv)' = u'v' - vu$ 4. $(uv)' = u'v + uv'$
4	Для какой из функций вторая производная постоянна?	1. $y = \sin x$ 2. $y = e^x$ 3. $y = x^2 + 3x - 10$ 4. $y = \arcsin x$

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
5	Какое равенство определяет производную функции $y(x)$ в случае ее параметрического задания в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$?	1. $y'_x = y'_t + x'_t$ 2. $y'_t = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ 3. $y'_t = -\dfrac{y'_t}{x'_t}$ 4 $y'_t = \dfrac{x'_t}{y'_t}$
6	В какой точке касательная к кривой $y = (x-3)^2 + 10$ параллельна оси абсцисс?	1. $x = 3$ 2. $x = -3$ 3. $x = -1$ 4. $x = 2$
7	Закон прямолинейного движения точки задан функцией $y(t) = 4t^2 + 2t - 5$. Чему равна скорость точки при $t = 3$?	1. 8 2. 10 3. 24 4. 26
8	Если $y = 2^{(3x^2+1)}$, то y'_x равна	1. $2^{(3x^2+1)} \ln(2) \cdot 3 \cdot 2x$ 2. $(3x^2+1)2^{3x^2}$ 3. $(3x^2+1)2^{3x^2} \ln(2)$ 4. $\dfrac{2^{3x^2+1}}{\ln(2)}$
9	Формула для производной сложной функции $(f(u))'_x$ имеет вид	1. $f'(u)$ 2. $f'(u')$ 3. $f'(u') \cdot u$ 4. $f'(u) \cdot u'$
10	Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид	1. $y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 2. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 3. $y = y_0 + f'(x)(x - x_0)$ 4. В п.1-3 правильного ответа нет

Глава 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

6.1.1. Теорема Ферма

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, а в некоторой внутренней его точке $x = c$, $c \in (a, b)$, достигает наибольшего (или наименьшего) значения. Если в этой точке существует конечная первая производная, то она равна нулю, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. Допустим для определенности, что в точке c функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, т.е. $f(c) \geq f(x)$ для любого $x \in (a, b)$. Придадим значению c достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Отсюда при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x)}{\Delta x} \geq 0$$

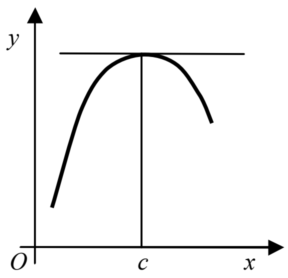

Рис.6.1

и, так как $f'(c)$ существует, то

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c) \geq 0. \tag{6.1}$$

При $\Delta x > 0$ имеем $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c) \leq 0. \tag{6.2}$$

Из одновременного выполнения неравенств (6.1) и (6.2) следует, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна оси абсцисс (рис.6.1).

В теореме Ферма существенно, что c – внутренняя точка. Например, функция $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0; \pi/2]$ достигает в граничной (не внутренней) точке $c = 0$ наименьшего значения, но ее производная в этой точке равна единице ($\cos 0 = 1$).

6.1.2. Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в интервале (a, b) и принимает на его концах равные значения $f(a) = f(b)$, то внутри интервала (a, b) существует такая точка c, что $f'(c) = 0$.

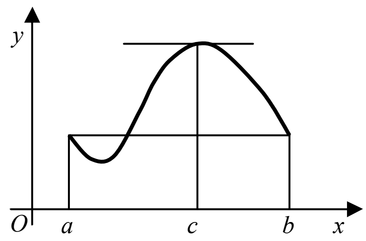

Рис.6.2

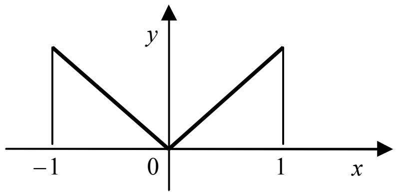

Рис.6.3

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке то она принимает на нем наибольшее (M) и наименьшее (m) значения по свойству функции, непрерывной на замкнутом промежутке. Тогда возможны только два случая.

1. $M = n$, тогда $f(x)$ постоянна на $[a,b]$, т.е. $f(x) = \text{const}$ для всех $x \in [a,b]$. Поэтому в любой точке интервала (a,b) имеем $f'(x) = 0$.

2. $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно из значений M или m достигается в некоторой точке $c \in (a,b)$. Следовательно, справедлива теорема Ферма: $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если граничные ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется такая точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (рис.6.2). Если требование дифференцируемости нарушается хотя бы в одной точке интервала (a,b), то производная функции не обращается в нуль. Например, для функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1;1]$ (рис.6.3) выполнены все условия теоремы Ролля, кроме существования производной в точке $x = 0$. Действительно, в интервале $(-1;1)$ нет такой точки, где производная равна нулю: $f'(x) = -1$, если $-1 < x < 0$, и $f'(x) = 1$, если $0 < x < 1$, а при $x = 0$ производной $f'(x)$, как уже отмечалось, не существует.

6.1.3. Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы в интервале (a,b) и $\varphi'(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a,b)$. Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, для которой справедлива формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Отметим, что $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, так как в противном случае по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ равнялась бы нулю внутри отрезка, что противоречит условию теоремы. Введем вспомогательную функцию, удовлетворяющую всем условиям теоремы Ролля, равенством вида $F(x) = f(x) - R\,\varphi(x)$, где R – некоторое постоянное число, подлежащее определению. Тогда функция $F(x)$ как линейная комбинация функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b). Подберем теперь R так, чтобы $F(a) = F(b): f(a) - R\varphi(a) = f(b) - R\varphi(b)$. Отсюда получим

$$R = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}. \tag{6.4}$$

При таком выборе R функция $F(x) = f(x) - R\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому имеется такая точка $c \in (a,b)$, в которой $F'(c) = 0$. Найдем $F'(x): F'(x) = f'(x) - R\varphi'(x)$. Тогда при $x = c$ имеем $F'(c) = f'(c) - R\varphi'(c) = 0$ или $\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)} = R$. Используя формулу (6.4), получим

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Теорема доказана.

Формулу (6.3) обычно называют *формулой Коши* (*обобщенной формулой конечных приращений*).

6.1.4. Формула конечных приращений (формула Лагранжа)

Формула конечных приращений (формула Лагранжа) является важным частным случаем формулы Коши. Для ее вывода полагаем в (6.3) $\varphi(x) = x$. Тогда $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, $\varphi'(x) = 1$ и формула (6.3) примет вид

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{6.5}$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{6.6}$$

где $a < c < b$.

Формула (6.6) называется *формулой конечных приращений, или формулой Лагранжа.* В соответствии с этой формулой приращение функции на отрезке равно приращению аргумента, умноженному на значение производной функции в некоторой внутренней точке этого интервала. Функция $f(x)$, входящая в формулу (6.6), должна быть в соответствии с теоремой Коши непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b).

Формулу (6.6) можно записать в другой форме. Значения a и b обозначим x и $x + \Delta x$ соответственно. Тогда получим

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{c-x}{\Delta x}=\theta,$$

где θ – некоторое число, удовлетворяющее условию $0<\theta<1$. Отсюда $c=x+\theta\Delta x$, и формула (6.6) в новых обозначениях примет вид

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

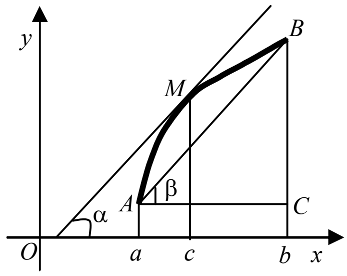

Рис.6.4

Геометрический смысл формулы Лагранжа представлен рис.6.4. Пусть $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ – точки графика функции $y=f(x)$; AB – хорда, соединяющая точки A и B. Тогда отношение $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\beta$, где β – угол наклона хорды AB к оси Ox. Так как значение производной функции $f(x)$ в точке c равно тангенсу угла α наклона касательной к графику этой функции в точке $M(c,f(c)): f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$, то формула (6.5) может быть записана в виде: $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), то между точками a и b имеется по крайней мере одна точка c, в которой касательная к графику данной функции параллельна хорде AB.

Пример 6.1. Выписать формулу Лагранжа для функции $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке [0;1] и найти значение c.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции найдем производную:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{(1+x)^2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2}\times$$

$$\times\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}\frac{-2}{(1+x)^2}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Откуда

$$f'(c)=-\frac{1}{1+c^2}.$$

Далее вычислим

$$f(a)=f(0)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4};\quad f(b)=f(1)=\operatorname{arctg}0=0;\quad b-a=1-0=1.$$

Окончательно формула конечных приращений (6.6) примет вид

$$0-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{1+c^2} \text{ или } \frac{1}{1+c^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда получим

$$c=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$$

В теоремах Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши речь идет о существовании некоторой «средней» точки $c\in(a,b)$, в которой выполняется то или иное равенство. Поэтому рассмотренную группу теорем можно объединить названием *теоремы о средних значениях.*

6.1.5. Формула Тейлора

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, содержащем точку $x = a$. Предположим, что в этом промежутке она имеет все производные до $(n + 1)$-го порядка включительно. Поставим задачу найти алгебраический многочлен, степень которого не превышает n, достаточно точно описывающий функцию $f(x)$ в окрестности точки a. Искомый многочлен $P_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1) значение многочлена в точке a равно значению данной функции в этой точке;

2) значения всех производных многочлена до n-го порядка включительно в точке a равняются значениям соответствующих производных от функции $f(x)$ в этой точке.

Таким образом, можно записать

$$P_n(a)=f(a);\quad P_n'(a)=f'(a);\quad P_n''(a)=f''(a);...;P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \tag{6.7}$$

Будем искать алгебраический многочлен $P_n(x)$ по степеням $(x-a)$ с неопределенными коэффициентами:

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+...+C_n(x-a)^n. \tag{6.8}$$

Неопределенные коэффициенты $C_0,C_1,...,C_n$ должны быть такими, чтобы выполнялись условия (6.7). Сначала найдем производные от многочлена $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+...+nC_n(x-a)^{n-1}; \\ P_n''(x)=2\cdot1\cdot C_2+3\cdot2\cdot C_3(x-a)+\ldots+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}; \\ \qquad\qquad\qquad\ldots \\ P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot C_n. \end{array}\right\} \tag{6.9}$$

Подставим в левые и правые части равенств (6.8) и (6.9) вместо x значение a и используем условия (6.7). При этом получим

$$f(a)=C_0;\ \ f'(a)=C_1;\ \ f''(a)=2\cdot 1\cdot C_2;$$

$$f'''(a)=3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3;\ \ldots;\ f^{(n)}(a)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.$$

Отсюда

$$C_0=f(a);\qquad C_1=f'(a);\quad C_2=\frac{1}{1\cdot 2}f''(a);$$

$$C_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a);\ldots;C_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a).$$

Используя обозначение $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ $(0!\equiv 1)$ и подставляя найденные значения $C_0,C_1,\ldots,C_n$ в формулу (6.8), получим искомый многочлен, который называется *многочленом Тейлора для функции* $f(x)$:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Обозначим $R_n(x)$ – разность значений данной функции и ее многочлена Тейлора (рис.6.5): $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Тогда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ или в развернутом виде:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \quad (6.10)$$

Слагаемое $R_n(x)$ в формуле (6.10) называется *остаточным членом*. Формула (6.10) дает возможность заменить функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, определяемой значением остаточного члена $R_n(x)$.

Для оценки величины $R_n(x)$ запишем остаточный член в форме

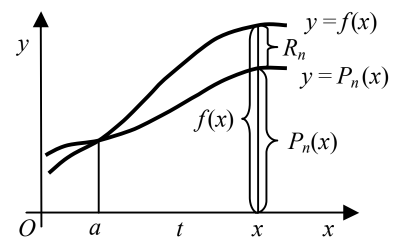

Рис.6.5

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \quad (6.11)$$

где $Q(x)$ – некоторая неизвестная функция. В соответствии с этим обозначением перепишем формулу (6.10):

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+.$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \quad (6.12)$$

При фиксированном x (напомним, что a – заданное число) функция $Q(x)$ имеет определенное значение, которое обозначим q.

Введем вспомогательную функцию от аргумента t, причем t заключено между a и x (рис.6.5):

$$F(t)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{q}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\right), \qquad (6.13)$$

где значение q определяется из соотношения (6.12) при фиксированном x и заданном a.

Покажем, что функция $F(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке $[a, x]$, а именно: эта функция непрерывна на отрезке $[a, x]$ и дифференцируема в интервале (a, x), так как является линейной комбинацией функций, обладающих указанными свойствами, и на основе формулы (6.12) $F(x)=F(a)=0$. Поэтому к функции $F(t)$ применима теорема Ролля. Найдем $F'(t)$, пользуясь формулой (6.13):

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{2f''(t)}{2!}(x-t)-$$

$$-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}-$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)q}{(n+1)!}(x-t)^n.$$

Или после сокращения

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{q}{n!}(x-t)^n.$$

На основе теоремы Ролля существует точка $t=c\in(a, x)$, в которой $F'(c)=0$. В этой точке получим

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{q}{n!}(x-c)^n=0.$$

откуда $q=f^{(n+1)}(c)$. Подставляя найденное значение q в формулу (6.11), имеем

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (6.14)$$

Полученное выражение и определяет *остаточный член в форме Лагранжа.*

Окончательно формула (6.11) примет теперь вид

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (6.15)$$

Последнее выражение называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

В частности, при $n=0$ формула (6.15) примет вид $f(x)=$ $=f(a)+f'(c)(x-a)$, т.е. формулы Лагранжа.

При n = 1 имеем

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2. \qquad (6.16)$$

Отбросив в последнем выражении остаточный член, имеем

$$f(a+\Delta x)-f(a)\approx f'(a)\Delta x, \quad \Delta x=x-a,$$

или

$$\Delta f(a)\approx df(a).$$

Таким образом, получим известное приближенное представление приращения функции в данной точке x = a ее дифференциалом в этой точке.

Рассмотрим предел отношения остаточного члена в форме Лагранжа (6.14) к разности $(x-a)^n$ при $x\to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!(x-a)^n}=\frac{1}{(n+1)!}\lim_{x\to a}f^{(n+1)}(c)(x-a)=0.$$

Итак,

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0, \qquad (6.17)$$

что означает

$$R_n(x)=o((x-a)^n), \qquad (6.18)$$

где «o-малое» $o((x-a)^n)$ – величина более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$. В указанной форме остаточный член $R_n(x)$ был представлен Дж. Пеано, и формула (6.15) примет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+$$

$$+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n). \qquad (6.19)$$

Формула (6.19) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

6.1.6. Примеры разложения функций по формуле Маклорена

В разделе 6.1.5 показано, что достаточно гладкие функции с помощью формулы Тейлора можно приближенно, с определенной степенью точности заменить алгебраическим многочленом. Ошибка такой замены определяется величиной остаточного члена формулы Тейлора (6.14). Так как точка c, как правило, неизвестна, то величину $R_n(x)$ нельзя вычислить. В этом случае необходимо оценить значение модуля $R_n(x)$, т.е. найти абсолютную погрешность приближенного равенства $f(x)\approx P_n(x)$.

Рассмотрим примеры разложения некоторых функций по формуле Тейлора при $a = 0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (6.20)$$

где точка $c\in(0,x)$. Этот частный случай формулы Тейлора называется *формулой Маклорена*.

Построим формулу Маклорена для следующих функций.

1. $f(x) = e^x$. Вычислим значения производных:

$$f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$$

при $x = 0$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

Таким образом, получим

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}. \qquad (6.21)$$

Ошибка приближенного равенства (6.21) определяется оценкой остаточного члена вида

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c\in(0,x).$$

В частности, если функция $f(x) = e^x$ задана на отрезке [–1; 1] то получим следующую оценку $R_n(x)$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}; \qquad c \in (-1;1).$$

Итак, $|R_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!}$ для $\forall\, x \in [-1;1]$, т. е. абсолютная погрешность приближенного равенства (6.21) для функции e^x на отрезке [–1; 1]

$$\Delta = \frac{3}{(n+1)!}.$$

Определим, при каком значении n абсолютная погрешность приближенного равенства (6.21) на отрезке [–1; 1] не превосходит 0,001. Нужное значение n найдем из условия

$$\Delta = \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001.$$

Вычислим последовательно: $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 3 \cdot 2 = 6$; $4! = 3! \cdot 4 = 24$; $5! = 4! \cdot 5 = 120$; $6! = 5! \cdot 6 = 720$; $7! = 6! \cdot 7 = 5040$. Очевидно, что $\Delta < 0{,}001$ при $n+1=7$, или $n=6$. Итак, с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, имеем приближенную формулу

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!}, \quad x \in [-1;\ 1].$$

В частности, при $x = 1$ получим

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718.$$

2. $f(x) = \sin x$. В точке $x = 0$ значение функции $f(0) = 0$. Вычислим ее производные в этой точке:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f'''(0) = -1;$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Отсюда имеем рекуррентную формулу

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n - \textit{нечетное}, \\ 0, & n - \textit{четное}. \end{cases}$$

Подставляя полученные значения в формулу (6.20), получим разложение функции $f(x)=\sin x$ по формуле Маклорена:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\ c\in(0,x).$$

Вычислим приближенное значение sin 20°. Если ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$\sin 20^{\circ}=\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3\approx 0{,}342,$$

то абсолютная погрешность такого приближения равна абсолютной величине остаточного члена:

$$|R_3|=\left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}\sin(c+2\pi)\right|\le\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}\approx 0{,}00062<0{,}001.$$

Следовательно, sin 20° = 0,342 с точностью до 0,001.

3. $f(x)=\cos x$. Аналогично предыдущей процедуре получим

$$\cos x = x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\ c\in(0,x);$$

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0,\ n-\textit{нечетное},\\ (-1)^{n/2},\ n-\textit{четное}.\end{cases}$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Данная функция определена и бесконечное число раз дифференцируема для $x>-1$. Вычислим производные:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x};\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2};\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3};$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4};...;f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Тогда

$$f(0)=0;\quad f'(0)=1;\quad f''(0)=-1;\ ...;\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!.$$

Формула Маклорена для функции $f(x)=\ln(1+x)$ имеет вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

где остаточный член

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}(n+1)},\ c\in(0,x).$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x>-1$. Вычислим производные

$$f'(x)=\alpha(1-x)^{\alpha-1};\ f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3};\dots\ ;f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Таким образом,

$$f(0)=1;\ \ f'(0)=\alpha;\ \ f''(0)=\alpha(\alpha-1);\ \ f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2);\dots;$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1).$$

Формула Маклорена для функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ примет вид

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ c\in(0,x).$$

6.1.7. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Часто при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ непосредственная подстановка в выражение для $f(x)$ вместо x предельного значения a приводит к одной из следующих неопределенностей:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0\cdot\infty\},\ \{\infty-\infty\},\ \{0^0\},\ \{\infty^0\},\ \{1^{\infty}\}.$$

В этом случае нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о его значении в случае существования последнего. Поэтому говорят, что в точке a имеет место *неопределенность соответствующего типа*, а вычисление предела называют *раскрытием неопределенности.*

Неопределенности типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ **и** $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к нулю при $x\to a$.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности, исключая, может быть, саму точку a; кроме того имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0. \qquad (6.22)$$

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел отношения функций и они равны, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.23}$$

Доказательство. В формуле (6.23) значение a может быть как конечным, так и бесконечным.

1. Рассмотрим случай, когда a – конечное число. Пусть $x\neq a$ – точка рассматриваемой окрестности. По условию теоремы функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки a, значит, они непрерывны в этой окрестности. Доопределим их в точке $x = a$ так, чтобы они были непрерывны в точке a: $f(a)=0$; $g(a)=0$. Применяя формулу Коши (6.3), будем иметь

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ c\in(a,x). \tag{6.24}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x\to a$. Так как $c\in(a,x)$, то при $x\to a$ имеем $c\to a$. Поэтому, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ также существует и равен A:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Окончательно имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь $a=\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. Полагая $x=1/z$, получим $z\to 0$ при $x\to\infty$ и, следовательно, $\lim\limits_{z\to 0}f(1/z)=0$, $\lim\limits_{z\to 0}g(1/z)=0$.

Применяя доказанную теорему к отношению $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(1/z)}{g(1/z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)\left(-1/z^2\right)}{g'(1/z)\left(-1/z^2\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(1/z)}{g'(1/z)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Аналогичную теорему можно доказать и для неопределенности типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Итак, для раскрытия неопределенностей типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можно сформулировать следующее правило.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых (или двух бесконечно больших) функций существует и равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{6.25}$$

если выполнены условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности (кроме, может быть, самой точки a);

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ $\quad(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty)$;

3) существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ конечный или бесконечный.

Замечание. Если предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь представляет собой неопределенность типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то правило Лопиталя применяется еще раз.

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{x-2}$.

Решение. Подстановка предельного значения $x=2$ в выражение предела приводит к неопределенности типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Функции $f(x)=\sin \pi x$ и $g(x)=x-2$ дифференцируемы: $f'(x)=\pi\cos\pi x$, $g'(x)=1$. Предел отношения производных существует:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\pi\cos 2\pi}{1}=\pi.$$

Поэтому получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sin \pi x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\pi\cos \pi x}{1}=\frac{\pi\cos 2\pi}{1}=\pi.$$

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Решение. При $x\to +\infty$ имеем неопределенность типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}.$$

Получена неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Итак, имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty.$$

Отметим, что формула (6.25) справедлива только в том случае, если предел, стоящий справа (конечный или бесконечный) существует, т.е. при выполнении условия 3 правила Лопиталя. Иногда предел, стоящий слева существует, в то время как предел, стоящий справа, не существует. Например, предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ существует и равен 1. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Но отношение производных

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x$$

при $x\to\infty$ не имеет предела.

Неопределенности типа $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$. Вначале с помощью тождественных преобразований следует привести предел к неопределенности типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. После этого можно непосредственно применять правило Лопиталя.

Пример 6.4. Найти

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}.$$

Решение. Подставив в выражение для заданной функции предельное значение аргумента $x=1$, получим

$$\lim_{x\to1}(1-x)=0;\ \lim_{x\to1}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty.$$

Таким образом, имеем неопределенность типа $\{0\cdot\infty\}$. Учитывая, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}},$$

перейдем к вычислению $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$, т.е. к раскрытию неопределенности типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{-2}\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

Пример 6.5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0,\quad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0,$ то имеем неопределенность типа $\{\infty-\infty\}$. Приведем данное выражение к общему знаменателю

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}.$$

Для раскрытия получившейся неопределенности типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{(\ln x(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{1-0-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x\cdot 1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}.$$

Вновь возникла неопределенность типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, которую раскрываем также по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Неопределенности типа $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$. В этих случаях используется основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (в частности, $e^{\ln b} = b$) и свойство непрерывности показательной функции:

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

Пример 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$, то имеем неопределенность типа $\{1^\infty\}$. Найдем вначале предел логарифма заданной функции:

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}.$$

Возникла неопределенность типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x) = \ln 1 = 0$. Чтобы ее раскрыть, необходимо дважды применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg} x)'}{(x)'} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

Используя основное логарифмическое тождество и непрерывность показательной функции, получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

6.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

6.2.1. Критерий постоянства функций. Признаки монотонности (возрастание и убывание функций)

Теорема 1 (*критерий постоянства функции*). Для постоянства функции $f(x)$ на некотором промежутке X необходимо и достаточно, чтобы равенство $f'(x) = 0$ выполнялось во всех точках этого промежутка.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(x) = \text{const}$, $x \in X$. Тогда, как известно, $f'(x) = 0$ во всех точках промежутка X.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ для любого $x \in X$. Возьмем любые две точки $x_1, x_2 \in X$. По формуле Лагранжа (6.6)

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c), \quad c\in(x_1,x_2)\subset X.$$

Но так как $f'(x)=0$ для всех $x\in X$, то и $f'(c)=0$, в силу чего из предыдущего равенства получим $f(x_2)-f(x_1)=0$ или $f(x_1)=f(x_2)$. Отсюда следует, что $f(x)=\text{const}, x\in X$. Теорема доказана.

Сформулируем и докажем необходимое и достаточное условия возрастания функций.

Теорема 2 (*признак возрастания функции*). 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема и возрастает на некотором промежутке X, то ее производная на этом промежутке не отрицательна, т.е. $f'(x)\geq 0, \forall x\in X$ (необходимый признак возрастания функции).

2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, причем $f'(x)>0, \forall x\in X$, то данная функция на этом промежутке возрастает (достаточный признак возрастания функции).

Доказательство. 1. Пусть $f(x)$ дифференцируема и возрастает на промежутке X. Возьмем значение аргумента $x\in X$ (x – внутренняя точка промежутка X) и придадим ему такое приращение Δx, что $x+\Delta x\in X$. Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{6.26}$$

Так как $f(x)$ – функция возрастающая, то $f(x+\Delta x)>f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$ при $\Delta x<0$. В обоих случаях

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0. \tag{6.27}$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, то она имеет на нем конечную производную. Согласно неравенству (6.27)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0,$$

т.е. $f'(x)\geq 0$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $f'(x)>0$ на промежутке X. Возьмем любые две точки $x_1, x_2\in X$ такие, что $x_2>x_1$. По формуле Лагранжа (6.6) имеем

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_2-x_1), \tag{6.28}$$

где $x_1<c<x_2$.

Поскольку $f'(x)>0, \forall x\in X$ и $c\in X$, то $f'(c)>0$. Тогда из соотношения (6.28) следует, что $f(x_2)-f(x_1)>0$ или $f(x_2)>f(x_1)$. Другими словами, функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, что и требовалось доказать.

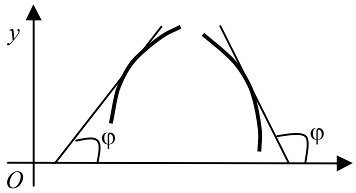

Рис.6.6

Также доказывается аналогичная теорема для убывающей функции.

Теорема 3 (*признак убывания функции*). 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема и убывает на некотором промежутке X, то ее производная на этом промежутке не положительна, т.е. $f'(x) \le 0, \forall x \in X$ (необходимый признак убывания функции).

2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке X, причем $f'(x) < 0, \forall x \in X$, то данная функция на этом промежутке убывает (достаточный признак убывания функции).

Обе эти теоремы имеют простое геометрическое истолкование. В любой точке промежутка возрастания функции $y = f(x)$ касательная к ее графику образует с осью Ox острый угол φ; на промежутке убывания функции угол φ – тупой (рис.6.6). Иначе говоря, промежутку возрастания функции $f(x)$ соответствует случай $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) > 0$, а промежутку убывания $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) < 0$.

Пример 6.7. Определить промежутки монотонности (возрастания и убывания) функции $y = f(x) = x\ln x$.

Решение. Для определения промежутков (интервалов) возрастания и убывания функции найдем ее производную:

$$y' = f'(x) = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Заметим, что функция $y = x\ln x$ определена для $x > 0$, ее производная

$$f'(x) > 0 \text{ при } \begin{cases} \ln x + 1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{\mathrm{e}};$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } \begin{cases} \ln x + 1 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Таким образом, функция $y = x\ln x$ возрастает на интервале $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$ и убывает на интервале $\left(0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

6.2.2. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность X этой точки, что для $\forall x \in X$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если существует такая окрестность X этой точки, что для $\forall x \in X$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значения функции $f(x)$ в точках ее максимума и минимума называются *максимумом и минимумом этой функции* и обозначаются $\max f(x)$ и $\min f(x)$:

$$\begin{aligned} &\big(f(x_0) = \max f(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in X,\ x \neq x_0:\ f(x) < f(x_0)\big); \\ &\big(f(x_0) = \min f(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in X,\ x \neq x_0:\ f(x) > f(x_0)\big). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами* или *экстремальными значениями* этой функции (рис.6.7):

а) точки x_1 и x_3 – точки максимума функции, где функция переходит от возрастания к убыванию (в направлении возрастания координаты x);

б) точки x_2 и x_4 – точки минимума функции, где функция переходит от убывания к возрастанию.

Теорема 1 (*необходимое условие гладкого экстремума*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) = \max f(x)$. Тогда в силу формулы (6.29) имеем

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ при } \Delta x > 0;$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. имеет в этой точке конечную производную, то при $\Delta x \to 0$ оба эти отношения стремятся к общему пределу $f'(x_0)$, равному нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если в точке экстремума график функции имеет касательную и эта касательная не параллельна оси Oy (как, например, в точке x_3 на рис.6.7), то эта касательная непременно параллельна оси Ox.

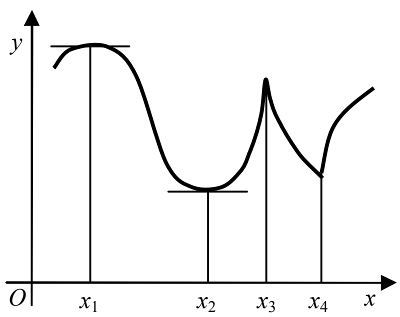

Рис.6.7

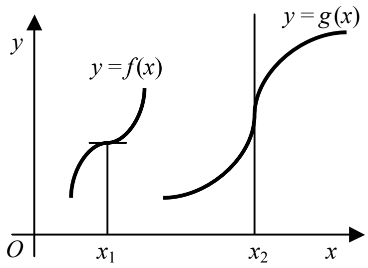

Рис.6.8

Итак, в точках *гладкого экстремума* функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x_0) = 0$ (точки x_1 и x_2 на рис.6.7). Существуют, однако, и точки экстремума другого типа – так называемые точки *острого экстремума*, в которых функция $f(x)$ не является дифференцируемой. Здесь возможны два случая:

а) $f'(x) = \infty$, как в точке x_3 на рис.6.7;

б) $f'(x)$ не существует, как в точке x_4 на рис.6.7.

Определение 2. *Критическими точками* функции $f(x)$ называются точки, где $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$, или $f'(x)$ не существует, при условии, что в двух последних случаях функция непрерывна в соответствующей точке.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то эта точка является критической точкой функции.

Эта теорема выражает *необходимое условие экстремума функции* $f(x)$. Однако обратная ей теорема не верна: не всякая критическая точка функции $f(x)$ является и ее экстремальной точкой. Например, для функций, графики которых представлены на рис.6.8, точки x_1 и x_2 будут критическими, так как $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = \infty$. Однако ни одна из этих точек не является экстремальной для соответствующей функции.

6.2.3. Достаточное условие экстремума

Итак, если функция $y = f(x)$ и имеет экстремум, то только в критических точках: $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$, или $f'(x)$ не существует.

Однако, как отмечено в разделе 6.2.2, функция может и не иметь экстремума в критической точке. Поэтому для окончательного решения вопроса о наличии экстремума нужны некоторые дополнительные сведения о поведении исследуемой функции в критической точке и ее окрестности. Иначе говоря, функция только тогда имеет в критической точке экстремум, когда в этой точке выполняется *достаточное условие экстремума.* Каждая из следующих трех теорем и представляет собой такое достаточное условие. При исследовании функции на экстремум можно пользоваться любой из них.

Теорема 1 (*достаточное условие экстремума на основе первой производной*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала кроме, может быть, самой точки x_0.

1. Если в некоторой окрестности X критической точки x_0 функции $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то $f(x_0) = \max f(x)$.

2. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $f(x_0) = \min f(x)$.

3. Если в некоторой окрестности критической точки функции $f'(x)$ сохраняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

Доказательство. Пусть точка $x \neq x_0$, $x \in X$. По формуле Лагранжа (6.6) имеем

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c), \; c \in (x_0, x). \tag{6.30}$$

1. Если $x < x_0$, то и $c < x_0$. В этом случае $f'(c) > 0, x - x_0 < 0$, а потому из (6.30) получим, что $f(x) - f(x_0) < 0$ или $f(x) < f(x_0)$. Если же $x > x_0$, то и $c > x_0$, и в этом случае $f'(c) < 0, x - x_0 > 0$, так что из (6.30) снова следует, что $f(x) < f(x_0)$.

Таким образом, получим

$$\forall x \in X \quad x \neq x_0 : \quad f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \max f(x).$$

Аналогично можно доказать п.2 и 3 теоремы.

Итак, *достаточное условие экстремума* в критической точке x_0 функции $f(x)$ состоит в перемене знака производной $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0. Если при переходе через x_0 в направлении возрастания аргумента x производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 будет максимум, если с минуса на плюс, то в точке x_0 имеем минимум функции. Если при прохождении через критическую точку производная не меняет знака, то в критической точке экстремума нет, и эта точка принадлежит либо промежутку убывания функции, либо промежутку возрастания в зависимости от знака $f'(x)$.

Пример 6.8. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции

$$y = f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x.$$

Решение. Производная данной функции

$$y' = f'(x) = (x - 2\operatorname{arctg} x)' = 1 - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

на всей числовой оси определена и конечна. Поэтому данная функция может иметь только такие критические точки, в которых $f'(x) = 0$, т.е. точки $x_1 = -1, \; x_2 = 1$. На промежутке возрастания функции $f'(x) > 0$, т.е. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$. Это неравенство выполняется при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Соответственно $f'(x) < 0$ и функция $f(x)$ убывает при $x \in (-1; \, 1)$.

При переходе через критическую точку $x_1 = -1$ первая производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, значит, x_1 – точка максимума. Аналогично, точка $x_2 = 1$ – это точка минимума, потому что при переходе через нее первая производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс.

Найдем экстремальные значения функции:

$$\max f(x) = f(-1) = -1 - 2\,\mathrm{arctg}(-1) = -1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\min f(x) = f(1) = 1 - 2\,\mathrm{arctg}\,1 = 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Пример 6.9. Найти экстремумы функции

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}\,.$$

Решение. Область определения данной функции – вся числовая ось: $x \in R$. Производная заданной функции

$$y' = f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

существует и конечна всюду, исключая точку $x = 0$, в которой $f'(0) = \infty$. При этом в критической точке $x = 0$ сама функция непрерывна. Очевидно, что при $x < 0$ первая производная $f'(x) > 0$, а при $x > 0$ имеем $f'(x) < 0$. Поскольку при переходе через критическую точку $x = 0$ первая производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то эта точка – максимум данной функции. Причем $x = 0$ – острый максимум, в котором касательная к графику функции параллельна оси Oy. Найдем максимальное значение функции: $\max f(x) = f(0) = 1$.

Теорема 2 (*достаточное условие экстремума на основе второй производной*). Если в некоторой окрестности критической точки x_0 функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, $f'(x) = 0$, и при этом $f''(x) < 0$, то имеем $f(x_0) = \max f(x)$; в случае $f''(x) > 0$, имеем $f(x_0) = \min f(x)$.

Доказательство. Для функции $f(x)$ напишем формулу Тейлора (6.16) в окрестности точки x_0 $(a = x_0)$ при $n = 1$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

В силу условия $f'(x_0) = 0$ последнее равенство принимает вид

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \qquad (6.31)$$

Пусть $f''(x_0) < 0$, тогда, вследствие непрерывности $f''(x)$ в точке x_0, обязательно существует такая окрестность X этой точки, в которой $f''(x) < 0$. Пусть x в формуле (6.31) принадлежит этой окрестности ($x \in X$), но тогда и $c \in X$, ибо c лежит между x и x_0, в силу чего $f''(c) < 0$. Таким образом, в этом случае правая часть (6.31) отрицательна, откуда $f(x) < f(x_0)$.

Итак, при $f''(x)<0,$ имеем

$$\forall x \in X \quad x \neq x_0: \quad f(x)<f(x_0) \quad \Rightarrow f(x_0)=\max f(x).$$

Первая часть теоремы доказана, вторая ее часть доказывается аналогично.

Итак, если в критической точке x_0 будет выполняться условие $f'(x)=0$, $f''(x)<0,$ то x_0 – точка максимума функции $f(x)$, если же $f'(x)=0$, $f''(x)>0,$ то x_0 – точка минимума.

Пример 6.10. Найти экстремумы функции

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2.$$

Решение. Первая производная данной функции $f'(x)=x^3-2x^2-3x$ на всей числовой оси определена и конечна. В этом случае критическими точками могут быть лишь те точки, в которых $f'(x) = 0$. Определим эти точки из уравнения

$$f'(x)=x^3-2x^2-3x=0.$$

Корни этого уравнения (в порядке возрастания): $x_1=-1;$ $x_2=0;$ $x_3=3.$ Найдем вторую производную $f''(x)=3x^3-4x-3$ и вычислим ее значения в критических точках:

1) $f''(-1)=4>0,$ следовательно, $f(-1)=\min f(x)=\frac{17}{12};$

2) $f''(0)=-3<0,$ следовательно, $f(0)=\max f(x)=2;$

3) $f''(3)=12>0,$ следовательно, $f(3)=\min f(x)=-\frac{37}{4}.$

Теорема 2 представляет собой частный случай более общего утверждения, использующего понятие производных высших порядков. Приведем это утверждение без доказательства в форме теоремы.

Теорема 3 (*достаточное условие экстремума, на основе производных высших порядков*). Пусть в некоторой окрестности критической точки x_0 функция $f(x)$ дифференцируема n раз, n-я производная функции непрерывна в этой окрестности, и выполняются равенства $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда справедливо:

1) если n – нечетное, то функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0;

2) если n – четное, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, причем *максимум,* если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и *минимум*, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Пример 6.11. Найти экстремумы функции

$$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

Решение. Найдем первую производную:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 4(x-1)^3 \cdot$$

Поскольку $f'(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, то критические точки определяются из уравнения $f'(x) = 0$ или $(x-1)^3 = 0$. Отсюда следует, что существует единственная критическая точка $x_0 = 1$. На основе теоремы 3 исследуем характер найденной критической точки:

$$f''(x) = (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)' = 12x^2 - 24x + 12, \quad f''(1) = 0;$$

$$f'''(x) = (12x^2 - 24x + 12)' = 24x - 24, \quad f'''(1) = 0;$$

$$f^{(4)} = (24x - 24)' = 24.$$

Производная четвертого порядка $f^{(4)}(x) > 0$ при любом действительном x. Следовательно, в точке $x = 1$ рассматриваемая функция имеет минимум и $\min f(x) = f(1) = 0$.

6.2.4. Отыскание наименьших и наибольших значений функции на промежутке

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором промежутке X (конечном или бесконечном). Если $X = [a,b]$ – отрезок, то среди значений функции на этом отрезке обязательно существуют и наименьшее (m), и наибольшее (M) значения функции. Очевидно, что если наибольшее значение M достигается во внутренней точке $[a,b]$, то оно будет одним из максимумов функции; но оно может достигаться и в граничных точках интервала.

Следовательно, для отыскания наибольшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ надо сравнить все ее максимумы в интервале (a,b) и значения $f(a)$ и $f(b)$ и из них выбрать наибольшее. Аналогично, наименьшим значением $f(x)$ на $[a,b]$ будет наименьшее из всех минимумов функции и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Если промежуток X не является отрезком, то на этом промежутке функция может не достигать наибольшего и наименьшего значений. Если же эти значения существуют, то их можно найти на основе следующей теоремы.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет на этом промежутке единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет наибольшим или наименьшим на X в зависимости от того, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

Доказательство (от противного). Пусть x_0 – единственная точка экстремума функции $f(x)$ на X, причем $f(x_0) = \max f(x)$. Предположим, что $\exists\ x_1 \in X : f(x_1) > f(x_0)$.

В силу непрерывности $f(x)$ на отрезке с граничными точками x_0 и x_1, она принимает на этом интервале свое наименьшее значение в некоторой точке x_2. Эта точка, очевидно, не может совпасть ни с x_0, ни с x_1, так как x_0 – по условию точка максимума, значит, $f(x_0) > f(x)$ для x, достаточно близких к x_0, а $f(x_1) > f(x_0)$ по предположению, и потому $f(x_2) = \min f(x)$. Но это противоречит условию теоремы о единственном экстремуме функции $f(x)$ на X, поэтому неравенство $f(x_1) > f(x_0)$ несправедливо и, следовательно,

$$f(x) \le f(x_0), \quad \forall x \in X.$$

Теорема доказана.

Пример 6.12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

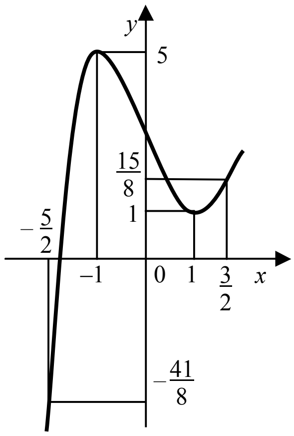

Рис.6.9

Решение. Первый этап – нахождение экстремумов функции на отрезке $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Производная функции $f'(x) = 3x^2 - 3$ существует и конечна на всей числовой оси. Поэтому критические точки определяются из уравнения $f'(x) = 0$ или $3(x^2 - 1) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Чтобы убедиться в наличии экстремумов в этих точках, воспользуемся теоремой 2 из раздела 6.2.3. Найдем вторую производную: $f''(x) = 6x$. Тогда $f''(x_1) = f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, значит, в точке $x_1 = -1$ заданная функция имеет максимум $\max f(x) = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 3 = 5$. Аналогично, $f''(x_2) = f''(1) = 6 > 0$, следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция достигает минимума $\min f(x) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$.

Второй этап – вычисление значений функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 3 = -\frac{41}{8}; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{8}.$$

В заключение сравним найденные значения функции:

$$\max f(x) = f(-1) = 5, \quad \min f(x) = f(1) = 1, \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{41}{8}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8}.$$

Таким образом, наибольшего значения данная функция достигает в точке $x = -1$, при этом $f(-1) = 5$. Наименьшее значение функция принимает в точке $x = -\frac{5}{2}$, и $f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{41}{8}$. График функции приведен на рис.6.9.

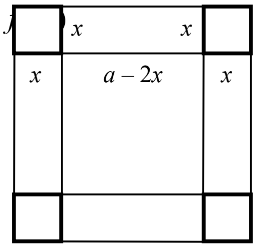

Рис.6.10

Пример 6.13. Из квадратного листа жести со стороной a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (рис.6.10), необходимо изготовить коробку наибольшего объема.

Решение. Обозначим сторону вырезаемого квадрата x. Тогда объем коробки $V(x) = x(a-2x)^2$, $x \in \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$. Найдем производную функции $V(x)$:

$$V'(x) = (a-2x)^2 - 4x(a-2x) = (a-2x)(a-6x).$$

Между значениями 0 и $a/2$ производная $V'(x)$ обращается в нуль в единственной точке $x = a/6$. Вторая производная

$$V''(x) = -2(a-6x) - 6(a-2x) = -8a + 24x$$

и при $x = a/6$:

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0\ .$$

Следовательно, функция $V(x)$ в точке $x = a/6$ имеет максимум. Это единственный экстремум в интервале $\left(0; \dfrac{a}{2}\right)$. Поэтому на основе доказанной теоремы, можно сделать вывод: $V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \dfrac{2a^3}{27}$ – наибольшее значение объема коробки, полученной при вырезании по углам квадратов со стороной $x = a/6$.

6.2.5. Выпуклость и точки перегиба

Понятие выпуклости кривой может быть введено несколькими способами. Можно показать, что определения 1-3 эквивалентны.

Определение 1. График функции $y = f(x)$, называется *выпуклым вверх* или просто *выпуклым* на промежутке X, если любая дуга этого графика с концами в точках, принадлежащих данному промежутку, расположена *не ниже* стягивающей ее *хорды* (рис.6.11, *а*). График функции называется *выпуклым вниз* или *вогнутым* на промежутке X, если любая его дуга с концами в точках, принадлежащих данному промежутку, расположена *не выше* стягивающей ее *хорды* (рис.6.11, *б*).

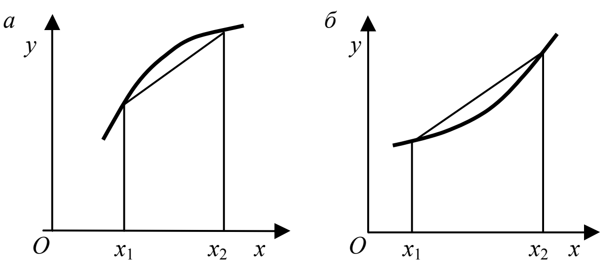

Рис.6.11

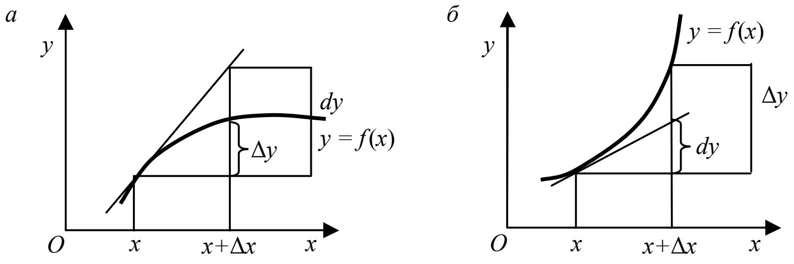

Рис.6.12

Определение 2. График функции $y = f(x)$, называется *выпуклым вверх* (*выпуклым вниз)* на промежутке X, если он целиком лежит *под касательной* (*над касательной*), проведенной к нему в любой точке этого промежутка (рис.6.12).

Если график функции $y = f(x)$ – выпуклый вверх на промежутке X (рис.6.12, *а*), то $\Delta y < dy, \forall x \in X$.Если график функции $y = f(x)$ – выпуклый вниз на промежутке X (рис.6.12, *б*), то $\Delta y > dy, \forall x \in X$ (в обоих этих случаях $x + \Delta x \in X$). Учитывая, что $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x)\Delta x$, определение 2 можно записать в несколько иной форме.

Определение 3. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* на промежутке X, если в любой точке $x \in X$ выполняется условие

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \le 0, \tag{6.32}$$

и *выпуклым вниз* на промежутке X, если в любой точке $x \in X$ выполняется условие

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x \ge 0. \tag{6.33}$$

Теорема 1 (*достаточное условие выпуклости графика функции*). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X. Если $f''(x) < 0$ для любого $x \in X$, то график функции на X – выпуклый вверх, если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in X$, то график – выпуклый вниз.

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ и $x + \Delta x \in X$. Выпишем формулу Тейлора (6.16) при $n = 1$, полагая в ней вместо a и x соответственно x и $x + \Delta x$:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\Delta x + \frac{f''(c)}{2!}(\Delta x)^2$$

или

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x = \frac{1}{2} f''(c)(\Delta x)^2, \; c \in (x, x + \Delta x).$$

Отсюда следует, что если $f''(x) < 0, \forall x \in X$, то правая часть последнего равенства отрицательна, и приходим к условию (6.32), означающему выпуклость вверх графика функции $y = f(x)$ на X; если же $f''(x) > 0$, $\forall x \in X$, то пра-

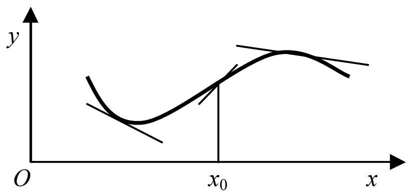

Рис.6.13

вая часть последнего равенства положительна, тогда имеем условие (6.33), означающие выпуклость вниз графика функции $y = f(x)$ на X. Теорема доказана.

График функции $y = f(x)$ может изменять характер выпуклости в области определения данной функции. Общая граничная точка промежутков выпуклости вверх и выпуклости вниз графика функции $y = f(x)$ называется *точкой перегиба* этой функции (или графика функции).

Геометрически это означает, что кривая лежит над касательной с одной стороны от точки перегиба и под касательной – с другой стороны (рис.6.13).

В частности, на рис.6.13 левее точки перегиба x_0 $(x < x_0)$ график является выпуклым вниз (лежит выше касательной), правее точки перегиба $(x > x_0)$ график является выпуклым вверх (лежит ниже касательной).

Исходя из определения 3, делаем вывод, что если x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то выражение

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x = x - x_0,$$

имеет противоположные знаки для любых двух точек x, достаточно близких к точке x_0, но лежащих по разные стороны от нее. Таким образом, можно дать другое определение точки перегиба.

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой перегиба* графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, если для достаточно малых по значению Δx выражение

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \qquad (6.34)$$

меняет свой знак одновременно с изменением знака Δx.

Теорема 2. Если производная $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то эта точка для функции $f(x)$ будет точкой перегиба.

Доказательство. Преобразуем выражение (6.34) с помощью формулы конечных приращений Лагранжа:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x - f'(x_0)\Delta x =$$

$$= \left(f'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0)\right)\Delta x, \; 0 < \theta < 1.$$

Если производная $f'(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то разность в скобках для достаточно малых значений Δx сохраняет знак при перемене знака Δx. Но тогда выражение (6.34) изменяет свой знак при перемене знака Δx. Отсюда следует, что x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Если $f'(x_0) = \max f'(x)$, то при переходе через x_0 производная функции $f'(x)$, т.е. $f''(x)$, меняет знак с плюса на минус, в силу чего до точки x_0 график $y = f(x)$ выпуклый вниз, а после этой точки – выпуклый вверх. Если же

$f'(x_0) = \min f'(x)$, то при переходе через x_0 производная $f''(x)$ изменяет знак с минуса на плюс, в силу чего до точки x_0 график $y = f(x)$ − выпуклый вверх, а после этой точки − выпуклый вниз.

Таким образом, для отыскания точек перегиба функции $f(x)$ нужно решить экстремальную задачу (задачу на отыскание экстремума) для функции $\varphi(x) = f'(x)$: если x_0 − точка максимума производной $f'(x)$, то для функции $f(x)$ эта точка будет точкой перегиба, в которой выпуклость вниз переходит в выпуклость вверх, если же x_0 − точка минимума производной $f'(x)$, то для функции $f(x)$ это будет точка перегиба, в которой выпуклость вверх сменяется выпуклостью вниз.

Замечание. Данная теорема дает достаточное, но не необходимое условие существования точки перегиба функции $f(x)$. Это значит, что точка может быть точкой перегиба функции $f(x)$ в случае, когда она не является экстремальной точкой для производной $f'(x)$. Поэтому, отыскивая точки перегиба непрерывной функции $f(x)$, нужно исследовать те точки, в которых $f''(x) = \infty$ или $f''(x)$ не существует.

Пример 6.14. Исследовать характер выпуклости графика функции

$$y = f(x) = \ln(x-3) - 2x.$$

Решение. Данная функция определена при $x > 3$. Ее первая производная $f'(x) = \dfrac{1}{x-3} - 2$, вторая производная $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$. Очевидно, что вторая производная нигде не обращается в нуль. При $x = 3$ вторая производная обращается в бесконечность, но функция в точке $x = 3$ не определена. Таким образом, точек перегиба у функции $f(x) = \ln(x-3) - 2x$ нет. Так как во всей области определения функции выполняется неравенство $f''(x) < 0$, то на промежутке $(3, +\infty)$ график функции − выпуклый вверх.

Пример 6.15. Исследовать характер выпуклости и найти точки перегиба графика функции $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}x$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Найдем ее первую и вторую производные:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}; \quad f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Вторая производная определена на всей числовой оси и нигде не обращается в бесконечность. Уравнение $f''(x) = 0$ или $4x/(1+x^2)^2 = 0$ имеет единственное решение: $x = 0$. При этом левее точки $x = 0$ (при $x < 0$) имеем $f''(x) < 0$, т.е. график функции обращен выпуклостью вверх. Правее точки $x = 0$ (при $x > 0$) график функции обращен выпуклостью вниз, так как $f''(x) > 0$. Следовательно, точка $x = 0$ является точкой перегиба.

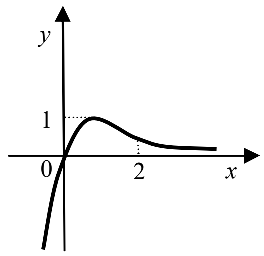

Рис.6.14

Пример 6.16. Найти точки перегиба функции $f(x)=3xe^{-x}$.

Решение. Область определения данной функции – вся числовая ось $X=(-\infty,+\infty)$. Первая производная данной функции $\varphi(x)=f'(x)=3e^{-x}-3xe^{-x}=$ $=3e^{-x}(1-x)$, вторая производная $\varphi'(x)=f''(x)=-3e^{-x}\times$ $\times(1-x)-3e^{-x}=3e^{-x}(-1+x-1)=3e^{-x}(x-2)$.

Производная $\varphi'(x)=f''(x)$ равна нулю при $x=2$, значит, эта точка будет критической для функции $\varphi(x)$. Исследуем точку $x=2$. Имеем $f''(x)<0$ при $x<2$ и $f''(x)>0$ при $x>2$, откуда следует, что $x=2$ будет точкой перегиба данной функции. Левее этой точки график функции обращен выпуклостью вверх, а правее – выпуклостью вниз.

График функции $y=3xe^{-x}$ представлен на рис.6.14.

6.2.6. Асимптоты графика функции

В практических задачах часто представляет интерес исследование поведения функции и формы ее графика при неограниченном удалении его точек от начала координат. При этом неограниченно возрастают по абсолютной величине либо обе координаты точек графика, либо одна из них.

Может случиться, что когда точка $M(x,f(x))$ «стремится по графику в бесконечность», график функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к некоторой прямой (рис.6.15). В этом случае, расстояние от такой прямой, называемой *асимптотой,* до графика функции стремится к нулю.

Можно выделить следующие типы асимптот.

1. Наклонные и горизонтальные (как частный случай) асимптоты.

Определение. Прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или при $x\to-\infty$), если

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0 \text{ или } f(x)=kx+b+\alpha(x), \qquad (6.35)$$

где $\alpha(x)\to0$ при $x\to\pm\infty$.

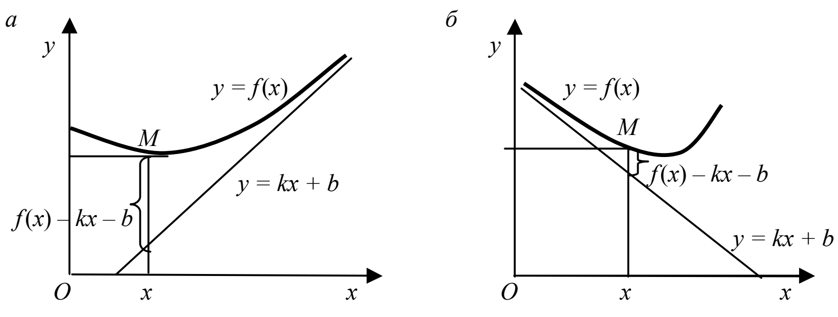

Рис.6.15

На рис.6.15 схематически изображены именно наклонные асимптоты. Если $k=0$, то уравнение $y=b$ задает *горизонтальную асимптоту.*

Пусть график функции $y=f(x)$ имеет асимптоту $y=kx+b$ при $x\to+\infty$ (рис.6.15, *а*). Тогда имеет место равенство (6.35): $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Разделив обе части (6.35) на x и переходя к пределу при $x\to+\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=0$, то

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{6.36}$$

Тогда из равенства (6.35) следует, что

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{6.37}$$

Итак, если график функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ имеет асимптоту $y=kx+b$, то справедливы соотношения (6.36) и (6.37). Обратно, если существуют конечные пределы (6.36) и (6.37), то из соотношения (6.37) сразу получаем (6.35), т.е. приходим к наличию наклонной асимптоты.

Таким образом, чтобы выписать уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, сначала надо найти значение k по формуле (6.36), а затем вычислить b по формуле (6.37), в которую подставлено найденное значение k.

Если хотя бы один из пределов (6.36) или (6.37) бесконечен или не существует, то график функции $y=f(x)$ не имеет наклонной асимптоты. При $x\to-\infty$ нужно провести такие же аналогичные действия, но пределы, (6.36) и (6.37) вычисляются при $x\to-\infty$ (рис.6.15, *б*).

2. Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$. Из определения следует, что для отыскания вертикальных асимптот графика функции $y=f(x)$ нужно найти точки, вблизи которых данная функция неограниченно возрастает (в частности, точки бесконечного разрыва). Если a − такая точка, то уравнение $x=a$ задает вертикальную асимптоту графика функции $y=f(x)$.

Пример 6.17. Найти асимптоты графика функции $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

Решение. Функция $y=x-2\operatorname{arctg}x$ определена и непрерывна при всех x, поэтому вертикальных асимптот график функции не имеет.

Ищем уравнения наклонных асимптот графика функции $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ в виде $y = kx + b$, где k и b находим по формулам (6.36) и (6.37):

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 2\mathrm{arctg}x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x - 2\mathrm{arctg}x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \dfrac{2}{1+x^2}}{1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (x - 2\mathrm{arctg}x - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-2\mathrm{arctg}x) =$$

$$= \begin{cases} -2\cdot\dfrac{\pi}{2} \text{ при } x\to+\infty \\ -2\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \text{ при } x\to-\infty \end{cases} = \begin{cases} -\pi \text{ при } x\to+\infty \\ \pi \text{ при } x\to-\infty. \end{cases}$$

Итак, функция $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ имеет две наклонные асимптоты: $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$ и $y = x + \pi$ при $x \to -\infty$.

Пример 6.18. Найти асимптоты графика функции $y = \ln x$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на промежутке $X = (0, +\infty)$. Найдем ее предел в граничной точке множества определения, т.е. при стремлении аргумента x к нулю справа: $\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty$. Таким образом, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \ln x$.

Выясним вопрос о наличии наклонных асимптот. По формуле (6.36) найдем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

По формуле (6.37) имеем

$$b = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - 0\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\cdot$$

Поскольку последний предел бесконечен, то график функции $y = \ln x$ не имеет наклонных асимптот.

6.2.7. Общий план исследования функций

Чтобы построить эскиз графика функции, нужно не только знать координаты некоторых точек, принадлежащих графику, но и представлять себе характер поведения данной функции на промежутках между известными точками. Результаты, изложенные ранее, дают возможность определить наиболее характерные точки каждой кривой: экстремумы и точки перегиба. Кроме того, на основе изучения первой и второй производных заданной функции можно получить информацию о промежутках монотонности и характере выпуклости графика функции.

Эскиз графика функции можно уточнить, найдя точки пересечения кривой с осями координат. Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox определяются из уравнения: $f(x) = 0$. Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Oy можно найти, положив $x = 0$, т.е. вычислив значения $f(0)$.

Некоторые характерные свойства графика можно установить без использования производных. В частности, таково свойство периодичности функции; свойство четности $(f(-x) = f(x))$ – график четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетности $(f(-x) = -f(x))$ – график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Для исследования функции и построения четкого эскиза ее графика, можно рекомендовать следующий общий план исследования.

1. Установить область определения функции. При наличии точек разрыва найти в них односторонние пределы данной функции; определить, имеет ли график функции вертикальные асимптоты.

2. Найти наклонные асимптоты графика функции.

3. Отметить свойства графика функции, не связанные с производными, например, симметрию и периодичность.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5. Вычислив первую производную функции, установить промежутки ее возрастания и убывания, определить экстремумы.

6. С помощью второй производной исследовать характер выпуклости графика функции, найти точки перегиба.

Пример 6.19. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение. 1. Область определения функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 0$: $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Найдем в точке $x = 0$ левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = -\infty$. Таким образом, в точке $x = 0$ данная функция терпит бесконечный разрыв, а график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

2. Определим, имеет ли график функции наклонные асимптоты. Найдем k и b:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x^4} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x^3} = 0.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. Легко получить, что при $x \to -\infty$ график данной функции имеет ту же самую асимптоту $y = 0$.

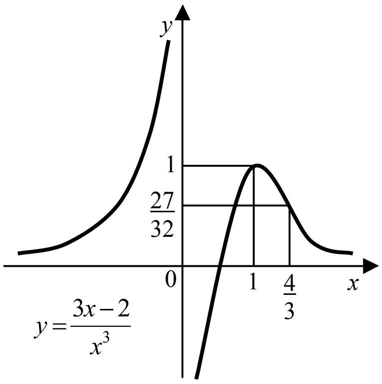

Рис.6.16

3. Найдем $f\left(-x\right)=\dfrac{3(-x)-2}{(-x)^3}=\dfrac{3x+2}{x^3}$.

Поскольку $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. С осью Oy график данной функции не пересекается, поскольку точка $x = 0$ не входит в область определения функции. Чтобы найти точки пересечения графика с осью Ox, решим уравнение $\dfrac{3x-2}{x^3}=0$. Оно имеет единственный корень $x=2/3$. Значит, график функции пересекает ось Ox в точке $\left(2/3\ ;0\right)$.

5. Найдем первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{3x-2}{x^3}\right)'=\frac{3x^3-3x^2(3x-2)}{x^6}=\frac{6(1-x)}{x^4}.$$

Первая производная обращается в бесконечность при $x = 0$, но эта точка не входит в область определения функции. Поэтому данная функция имеет единственную критическую точку $x = 1$, в которой $f'\left(x\right)=0$.

Функция возрастает на промежутке, где $f'\left(x\right)>0$. В данном случае промежуток возрастания $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)$. Функция убывает там, где $f'\left(x\right)<0$, т.е. $x\in\left(1,+\infty\right)$. Таким образом, в точке $x = 1$ данная функция имеет максимум: $\max f\left(x\right)=f\left(1\right)=1$.

6. Найдем вторую производную:

$$f''(x)=6\left(\frac{1-x}{x^4}\right)'=6\frac{-x^4-4x^3(1-x)}{x^8}=\frac{6}{x^5}\left(3x-4\right).$$

Как в пункте 5, исследуем лишь точку, в которой $f''\left(x\right)=0$, т.е. точку $x=4/3$. График функции является выпуклым вверх, если $f''\left(x\right)<0$; в данном случае при $x\in\left(0;4/3\right)$. График функции является выпуклым вниз, где $f''\left(x\right)>0$; для данной функции при $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(4/3,+\infty\right)$. Точка $x=4/3$ является точкой перегиба; $f\left(4/3\right)=27/32$.

Схематически график функции $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^3}$ изображен на рис.6.16.

Пример 6.20. Исследовать функцию $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение. 1. Эта функция определена, непрерывна и положительна на всей числовой оси $X=(-\infty;+\infty)$, вертикальных асимптот не имеет.

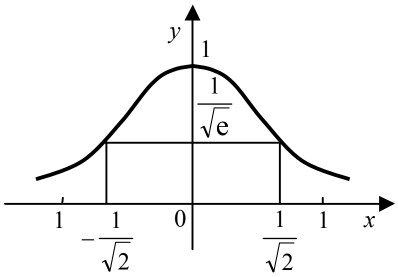

Рис.6.17

2. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}=0$, то очевидно, что $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=0$, т.е. прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

3. Функция является четной, так как $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$; ее график симметричен относительно оси ординат.

4. С осью Oy график пересекается в точке (0; 1); с осью Ox график не пересекается, так как $e^{-x^2}\neq 0$ при всех x.

5. Найдем критические точки функции и исследуем их характер с помощью первой производной:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}.$$

Производная обращается в ноль только в точке $x=0$; при $x>0$ $f'(x)<0$, т.е. при $x\in(0,+\infty)$ данная функция убывает; при $x\in(-\infty,0)$ данная функция возрастает, поскольку $f'(x)>0$ при $x<0$. Таким образом, в точке $x=0$ исследуемая функция имеет максимум: $\max f(x)=f(0)=1$.

6. Найдем вторую производную:

$$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Вторая производная $f''(x)$ равна нулю при $x_1=-1/\sqrt{2}$ и при $x_2=1/\sqrt{2}$. В промежутках $\left(-\infty;\ -1/\sqrt{2}\right)$ и $\left(1/\sqrt{2};\ +\infty\right)$ имеем $f''(x)>0$, значит, график функции выпуклый вниз. В промежутке $\left(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\right)$ будем иметь $f''(x)<0$ и график функции выпуклый вверх. Точки $x_1=-1/\sqrt{2}$ и $x_2=1/\sqrt{2}$ являются точками перегиба графика данной функции, причем $f\left(-1/\sqrt{2}\right)=f\left(1/\sqrt{2}\right)=1/\sqrt{e}$. График функции схематически изображен на рис.6.17.

Пример 6.21. Исследовать функцию $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(x-5)$ и сделать схематический чертеж ее графика.

Решение. 1. Эта функция определена и непрерывна при всех $x\in(-\infty,+\infty)$, значит, не имеет вертикальных асимптот.

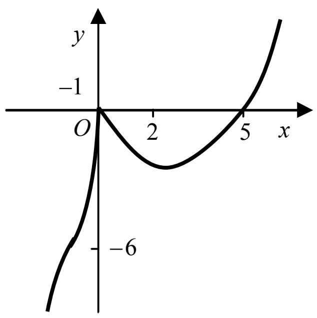

Рис.6.18

2. Наклонных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$.

3. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4. Так как $f(0)=0$ и $f(5)=0$, то график функции проходит через точки (0;0) и (5;0).

5. Найдем первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}.$$

При $x = 0$ $f'(x) = \infty$, при $x = 2$ $f'(x) = 0$, значит, $x = 0$ и $x = 2$ являются критическими точками функции. Определим промежутки возрастания, убывания функции и ее экстремумы. Результаты исследования для наглядности можно представить в форме:

x	$(-\infty; 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	> 0	∞	< 0	0	> 0
$f(x)$	Возрастает	$\max f(x) = 0$	Убывает	$\min f(x)=-3\sqrt[3]{4}$	Возрастает

Заметим, что поскольку в точке $x = 0$ первая производная обращается в бесконечность, то в этой точке функция имеет так называемый острый экстремум (максимум).

6. Запишем вторую производную функции:

$$f''(x)=\frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

При $x = -1$ $f''(x) = 0$, при $x = 0$ $f''(x)$ не существует. Установим промежутки выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба. Результаты исследования функции с помощью второй производной следующие:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	< 0	0	> 0	Не существует	> 0
$f(x)$	Выпуклость	Перегиб $f(-1) = -6$	Вогнутость	0	Вогнутость

По результатам исследования строим схематический чертеж графика данной функции (рис.6.18).

Вопросы для самопроверки

1. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы удовлетворять условиям теоремы Ферма?

2. Почему теорема Ролля называется также теоремой о корнях производной?

3. Каким условиям должны удовлетворять функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, чтобы для них можно было записать формулу Коши?

4. Какая формула называется формулой конечных приращений (формулой Лагранжа)?

5. Как выглядит формула Тейлора (n + 1)-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ с остаточным членом в форме Лагранжа?

6. Каким образом из формулы Тейлора получить формулу Маклорена?

7. Как формулируется правило Лопиталя? В каком случае его применяют вновь?

8. Остаются ли справедливыми формулы Коши, Лагранжа и Тейлора не только при $a < b$, но и при $b < a$?

9. Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f'(x)$ была постоянной на некотором промежутке?

10. Каково достаточное условие возрастания (убывания) функции?

11. Какая точка называется точкой экстремума функции?

12. Какое значение аргумента функции называется критической точкой?

13. Каково необходимое условие экстремума функции?

14. Каково достаточное условие экстремума, использующее производную 1-го порядка?

15. Каково достаточное условие экстремума, использующее производную 2-го порядка?

16. Какая кривая называется выпуклой вверх (вниз)?

17. Какая точка называется точкой перегиба графика функции?

18. Каким будет график функции $y = f(x)$ (выпуклым вверх или вниз) в зависимости от знака второй производной $f''(x)$?

19. Какие бывают типы асимптот графика функции?

20. По каким формулам находят коэффициенты k и b в уравнении наклонной асимптоты $y = kx + b$?

Тесты

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
1	Если $f(x)=\sin x,\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, то из формулы Лагранжа следует, что $f'(c)$, где $c\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$, равна	1. 0 2. $\frac{3}{2\pi}$ 3. 1 4. $\frac{3\pi}{2}$
2	Многочлен Маклорена $P_n(x)$ для функции $f(x)=\ln(1+x)$ имеет вид	1. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$ 2. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}$ 3. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 4. $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}$
3	Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$ по правилу Лопиталя	1. $\ln 2$ 2. 0 3. 1 4. $\frac{1}{\ln 2}$
4	Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$, применяя правило Лопиталя несколько раз	1. 1 2. 0 3. $+\infty$ 4. 6
5	С помощью тождественного преобразования и правила Лопиталя найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$	1. $-\infty$ 2. 1 3. 0 4. -1

№ п/п	Вопрос	Варианты ответа
6	Функция $f(x)=\sqrt{x^2+1}$	1. Возрастает при $x\in(-\infty;+\infty)$ 2. Убывает при $x\in(-\infty;+\infty)$ 3. Убывает при $x\in(-\infty;0)$ и возрастает при $x\in(0;+\infty)$ 4. Постоянна при $x\in(-\infty;+\infty)$
7	Для функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ найти точку экстремума	1. $x_0=-1$ 2. $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 3. $x_0=0$ 4. Точки экстремума нет
8	Из уравнений $y=-x$ (I) и $y=x$ (II) выбрать уравнения асимптот графика функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$:	1. Оба уравнения – асимптоты 2. Оба уравнения – не асимптоты 3. Уравнение I – асимптота, а II – не асимптота 4. Уравнение I – не асимптота, а II – асимптота
9	График функции $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ является выпуклым вниз на промежутке	1. $(-\infty,0)$ 2. $(0,+\infty)$ 3. $(-\infty,+\infty)$ 4. $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
10	Наибольшее значение функции $f(x)=4x^3-8x^2+4x$ на промежутке $[0;1]$	1. $25/27$ 2. $4/9$ 3. $9/16$ 4. $16/27$

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Глава 4

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
Номер правильного ответа	4	1	3	4	3	2	1	2	1	3

Глава 5

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
Номер правильного ответа	3	1	4	3	2	1	4	1	4	3

Глава 6

Номер вопроса	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10
Номер правильного ответа	2	3	1	2	3	3	3	1	3	4

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Берман Г.Н*. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб: Специальная литература, 2005.

2. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике. / *И.Н.Бронштейн, К.А. Семендяев.* М.: Лань, 2010.

3. *Данко П.Е*. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевников. М.: Высшая школа, 1999.Ч.1, 2.

4. Математический практикум: Учебно-методическое пособие / Под ред. А.П.Господарикова; Горный университет. СПб, 2012. Ч.1, 2.

5. *Пискунов Н.С*. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Интеграл-пресс, 2007. Т.1, 2.

6. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1998.

Дополнительный

7. *Барбоченко Л.В.* Введение в анализ. Пределы / Л.В.Барбоченко, А.П.Господариков, Л.А.Милова, Т.С.Обручева; Горный университет. СПб, 1993.

8. *Бугров С.Я.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / С.Я.Бугров, С.М.Никольский. М.: Наука, 1984.

9. *Бугров С.Я*. Дифференциальное и интегральное исчисление / *С.Я.Бугров*, *С.М.Никольский.* М.: Наука,1988.

10. *Карпухина О.Е*. Теория пределов и дифференциальное исчисление: Учеб. пособие / Ленинградский горный институт. Л., 1975.

11. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1977.

12. *Смирнов В.И*. Курс высшей математики. СПб: БХВ-Петербург, 2008. Т.1.

13. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. М.: Лань, 2010. Т.1.

Учебное электронное издание

ГОСПОДАРИКОВ Александр Петрович
ВОЛЫНСКАЯ Ирина Александровна
КАРПУХИНА Ольга Ефремовна
СКЕПКО Ольга Александровна
ОБРУЧЕВА Татьяна Сергеевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В шести томах

Том 2

**НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**

Учебник

Редактор *Л.А.Левина*
Оригинал-макет выполнен авторским коллективом

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано в свет .2015.
Уч.-изд.л. 5. Заказ . С 304.

Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
РИЦ Национального минерально-сырьевого университета «Горный»
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2