

上海科技大学
ShanghaiTech University

Problem No. 17“Popsicle Chain Reaction”

通过**轻微的弯曲**，可将木制的雪糕棒连接在一起，以实现被称作“眼镜蛇编制”形状的链条连锁，当这种链条一端被释放时，**木棒迅速脱落**，且**波面**沿着链条传播。

Wooden popsicle sticks can be joined together by **slightly bending** each of them so that they interlock in a so-called “cobra weave” chain. When such a chain has **one of its ends released**, the sticks **rapidly dislodge**, and a **wave front** travels along the chain. Investigate the phenomenon.



上海科技大学
ShanghaiTech University

- 实验现象
- 定性分析
- 定量实验
- 理论建模
- 特殊讨论

本次报告纲要



上海科技大学
ShanghaiTech University

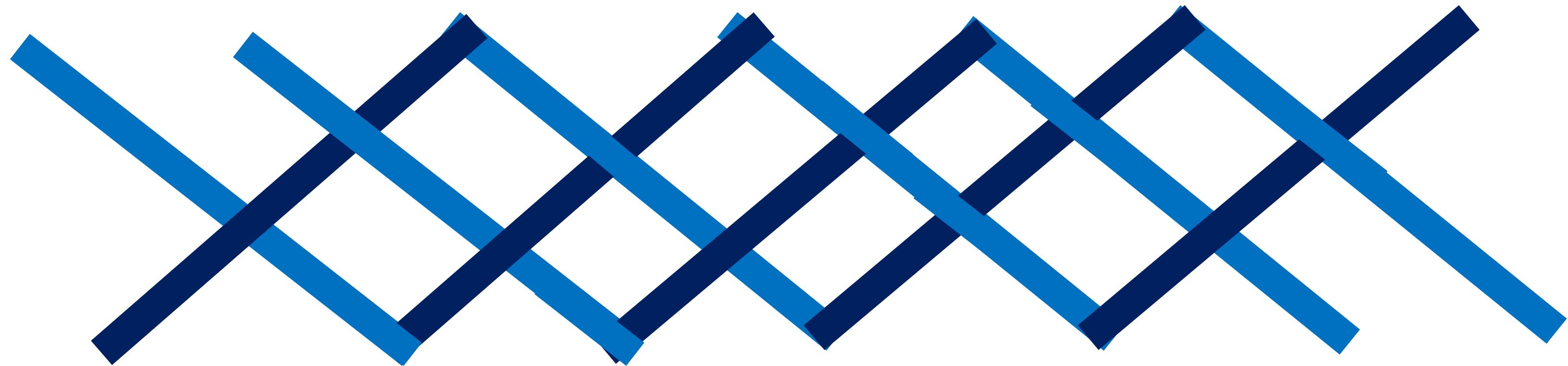
第一部分

实验现象

编织方式(俯视)



上海科技大学
ShanghaiTech University



释放端

波前传递方向----->

实验现象



上海科技大学
ShanghaiTech University



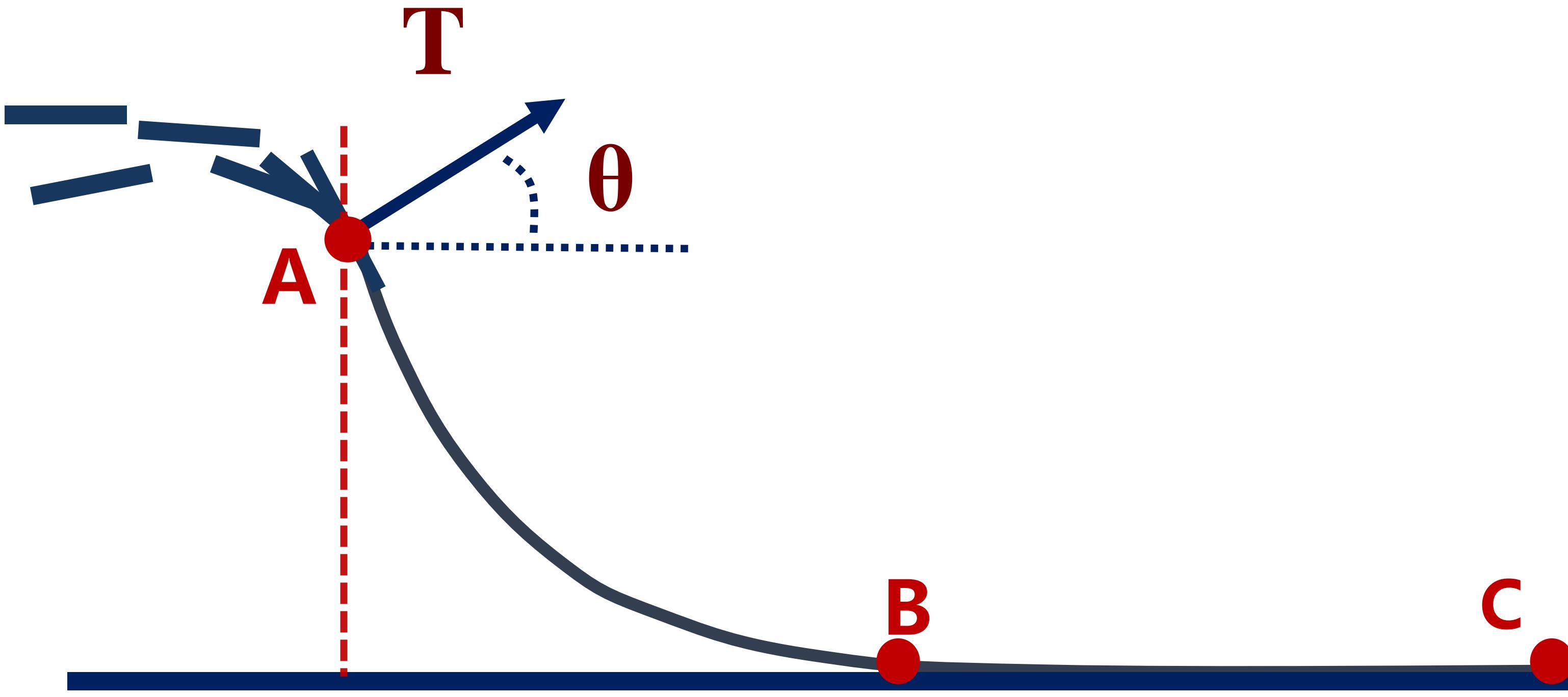


上海科技大学
ShanghaiTech University

第二部分

定性分析

等效抬升力T的引入

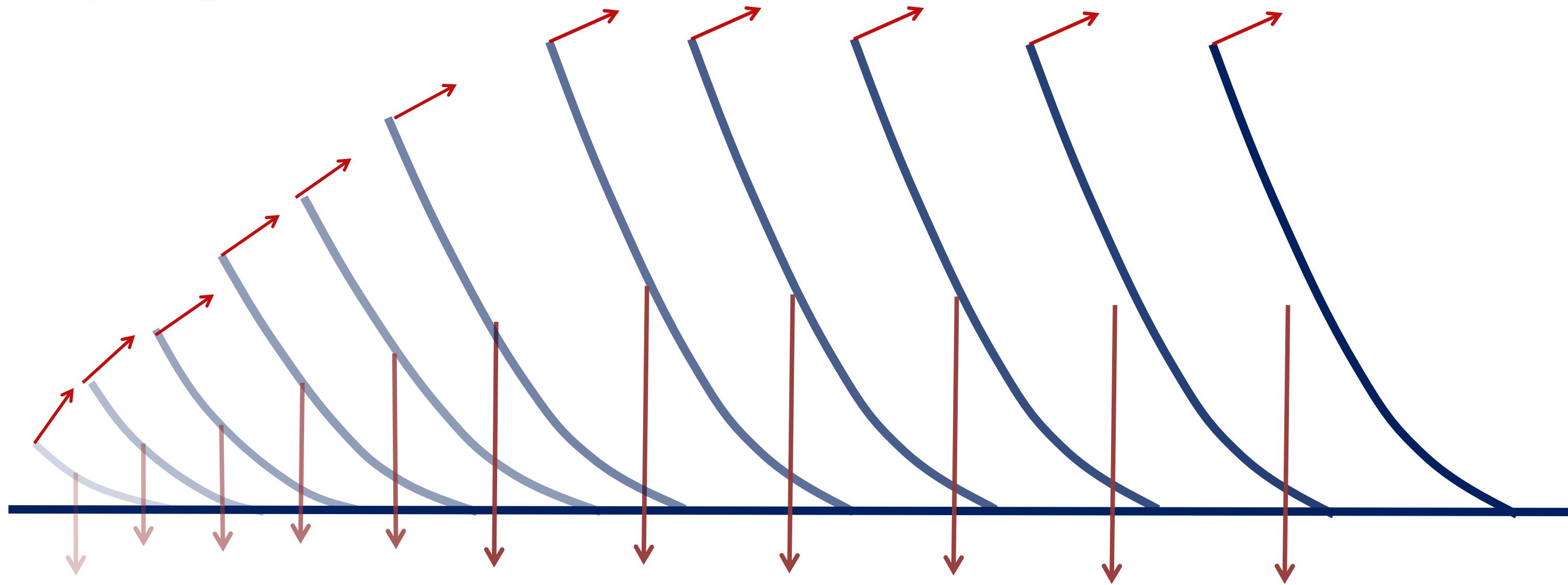


受力角度



上海科技大学
ShanghaiTech University

波面传递方向----->



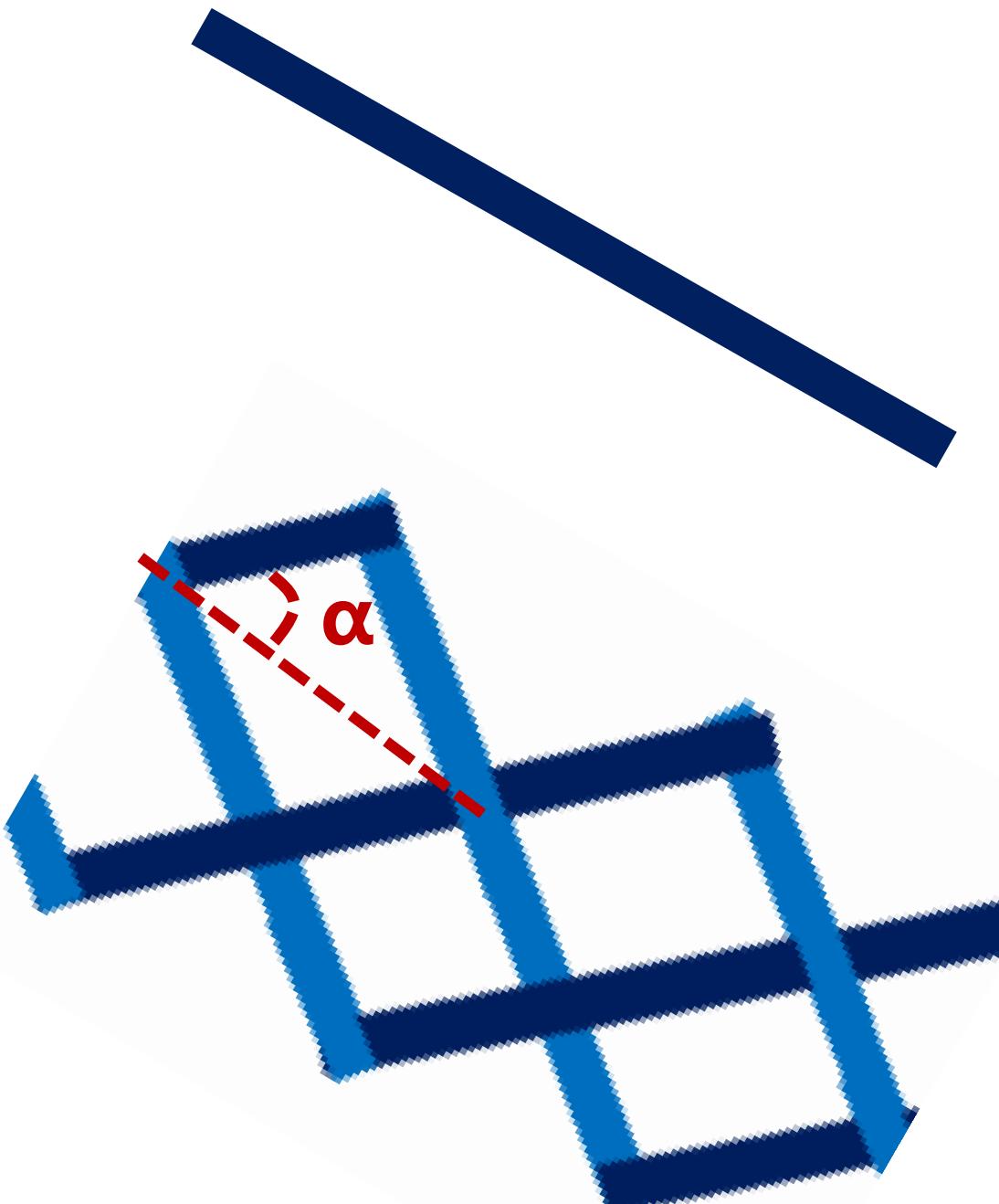


上海科技大学
ShanghaiTech University

第三部分

定量实验

研究变量



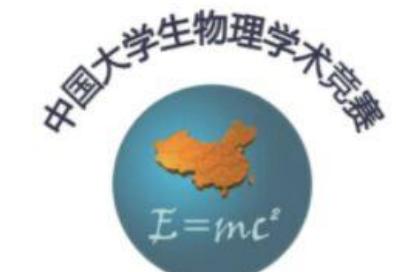
上海科技大学
ShanghaiTech University

单根杆:

l : 杆长 u : 杆弯曲储存势能 u_k : 动能

I_E : 惯矩*模量 m : 质量 δ : 厚度

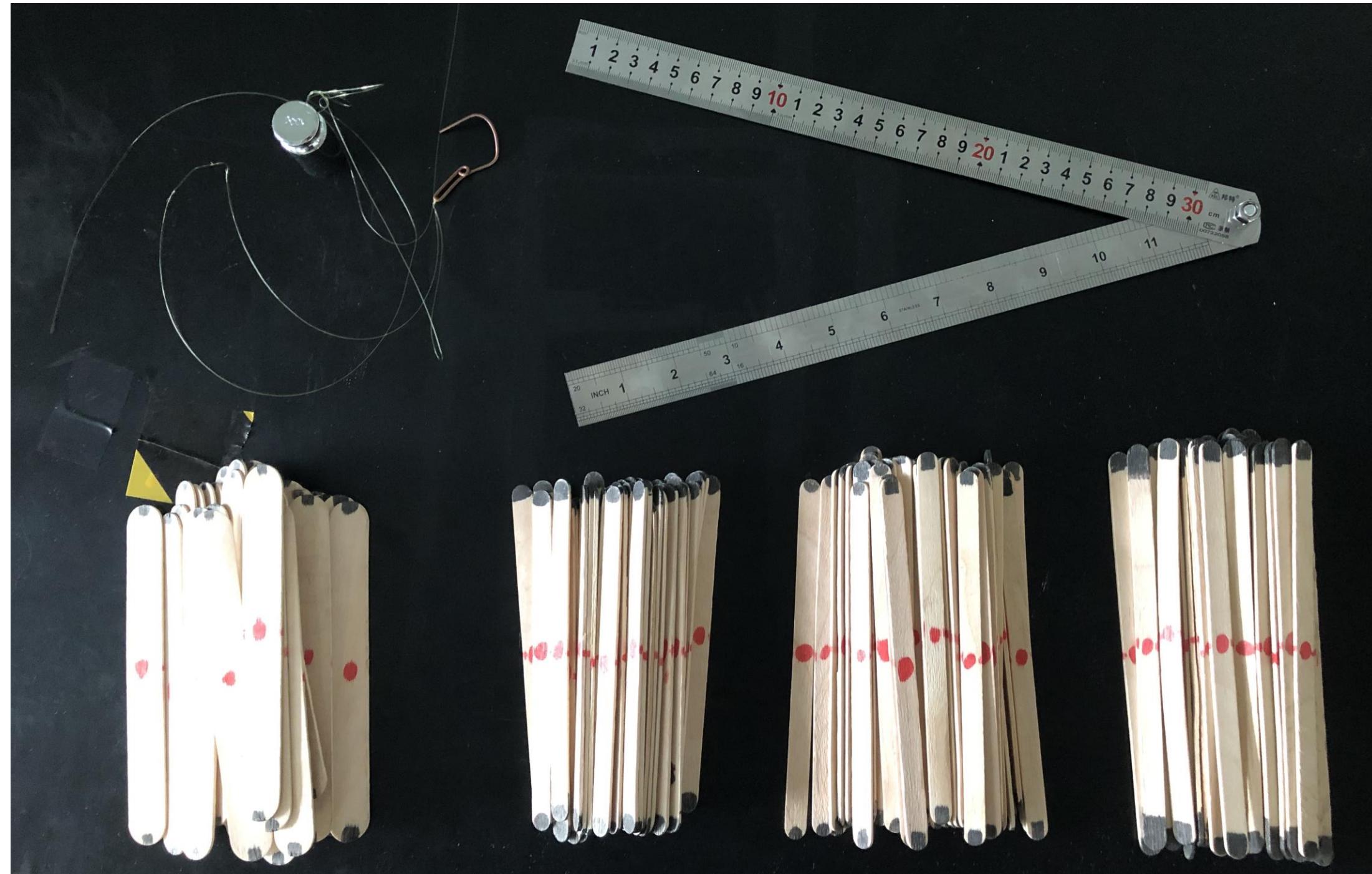
木棒种类



CUPT

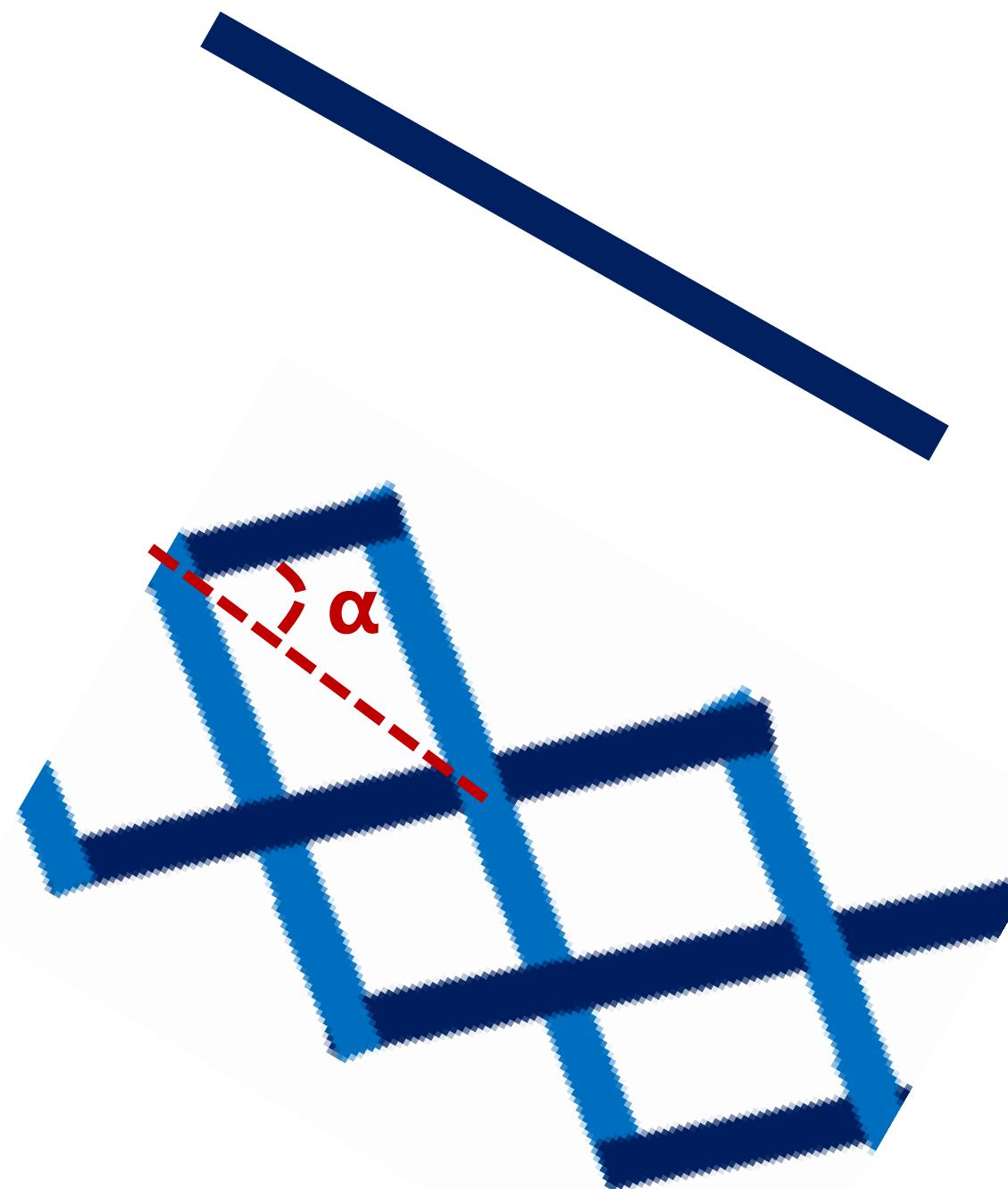


上海科技大学
ShanghaiTech University



长度/m	厚度/m	宽度/m
A: 0.15	0.001597	0.0176
B: 0.15	0.001975	0.0091
C: 0.16	0.001963	0.0096
D: 0.18	0.001966	0.0096

研究变量



上海科技大学
ShanghaiTech University

单根杆:

l : 杆长 u : 杆弯曲储存势能 u_k : 动能

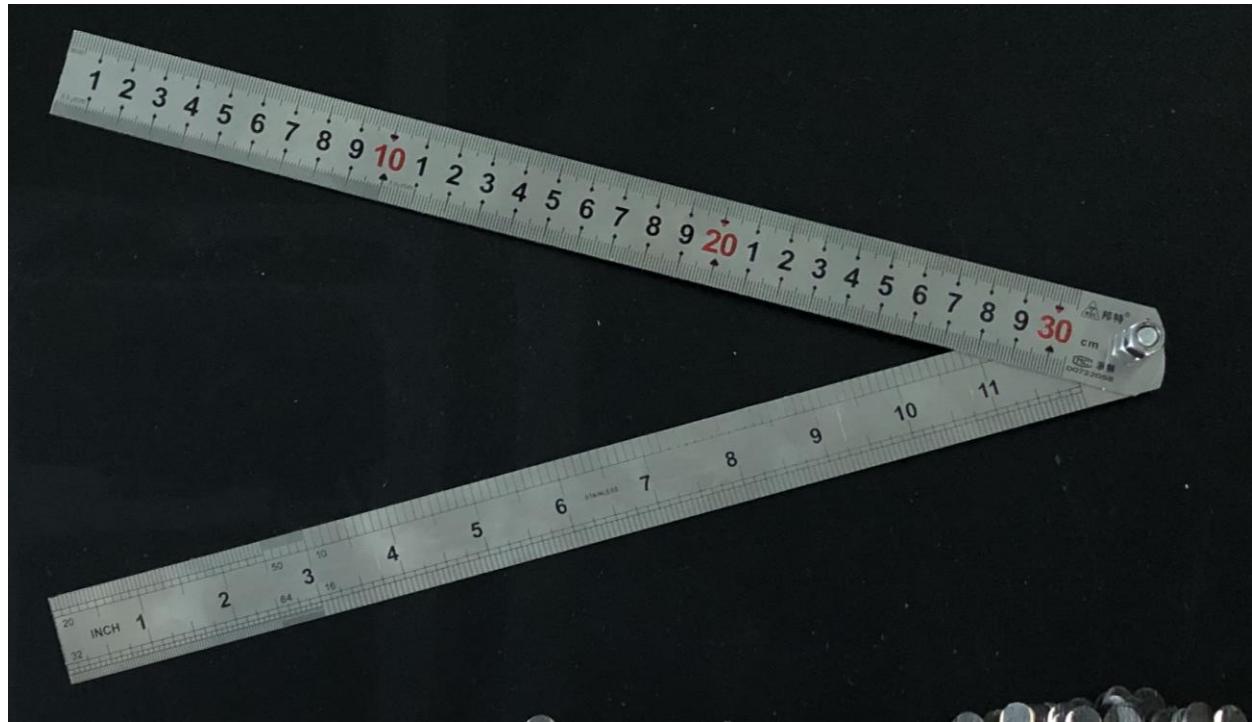
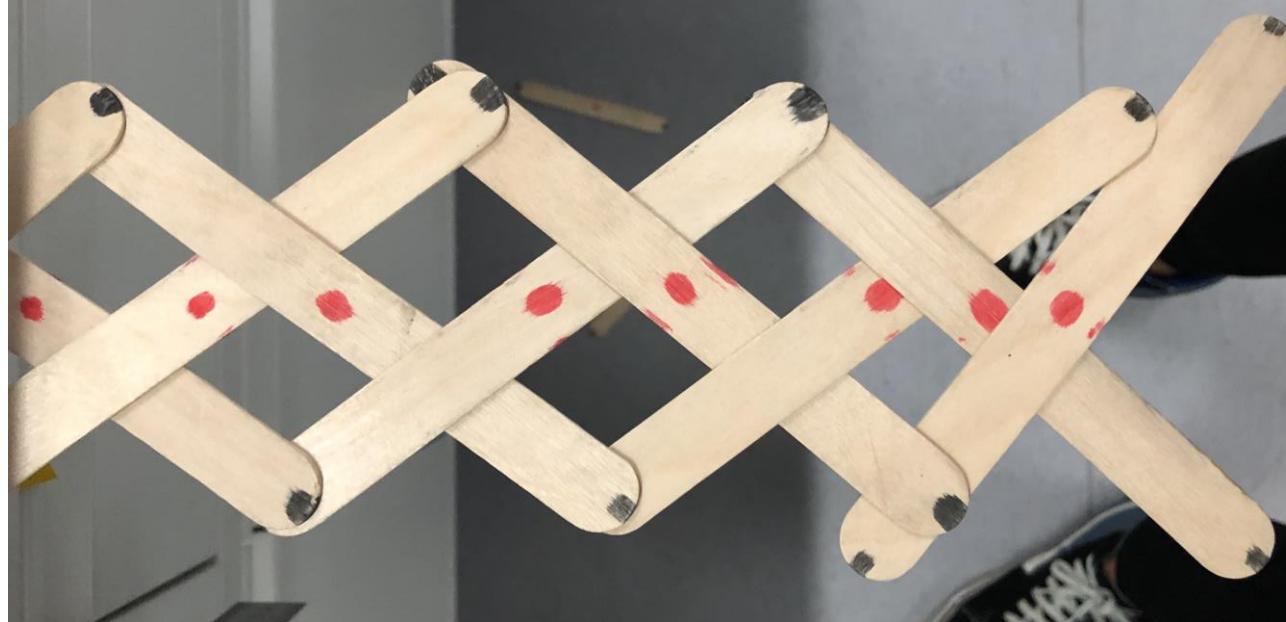
I_E : 惯矩*模量 m : 质量 δ : 厚度

杆组:

S : 杆组总长 h : 波前高度 ρ : 线密度

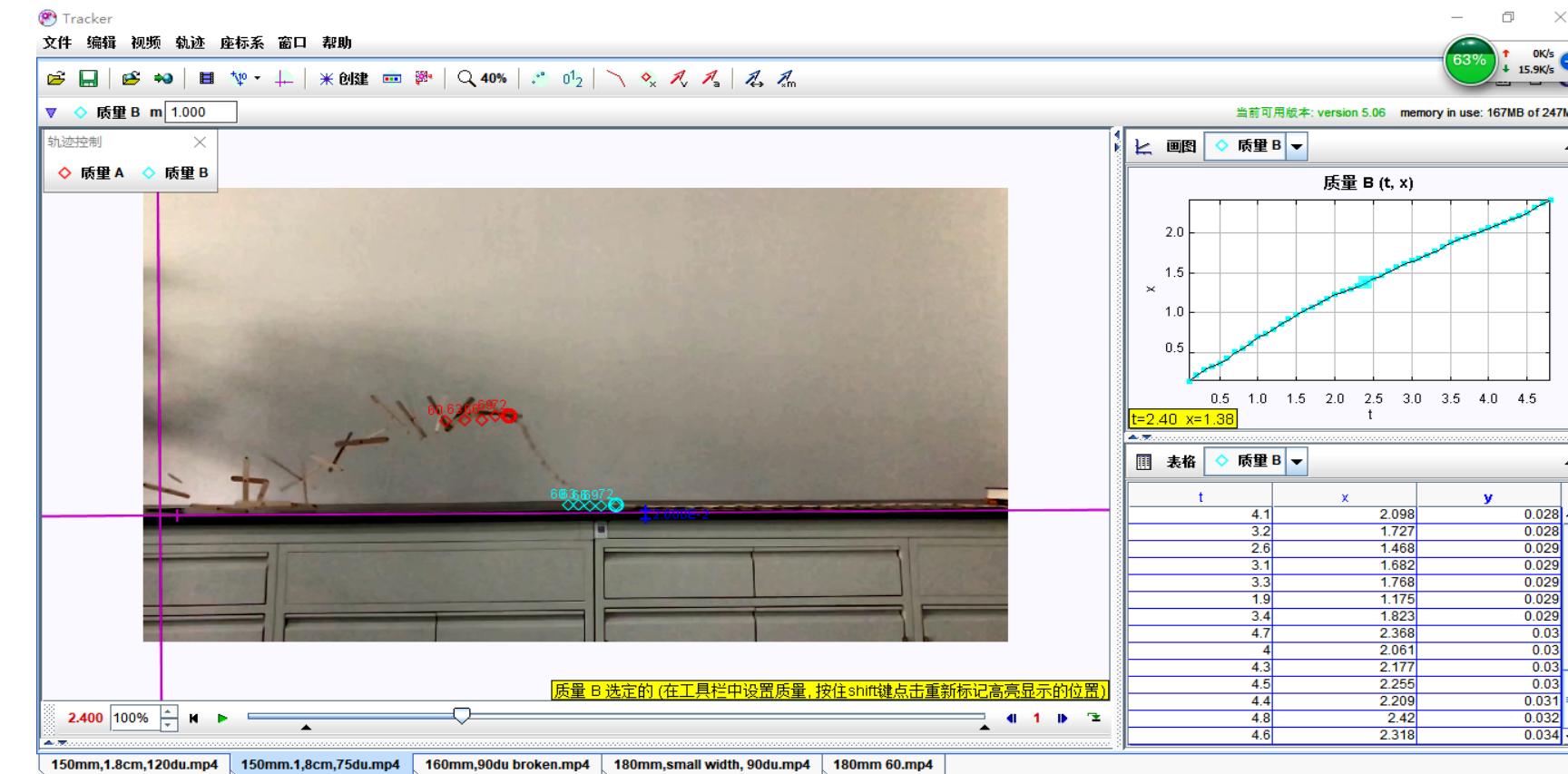
α : 编制角度 K : 等效模量

编制规则



主要编制模式：

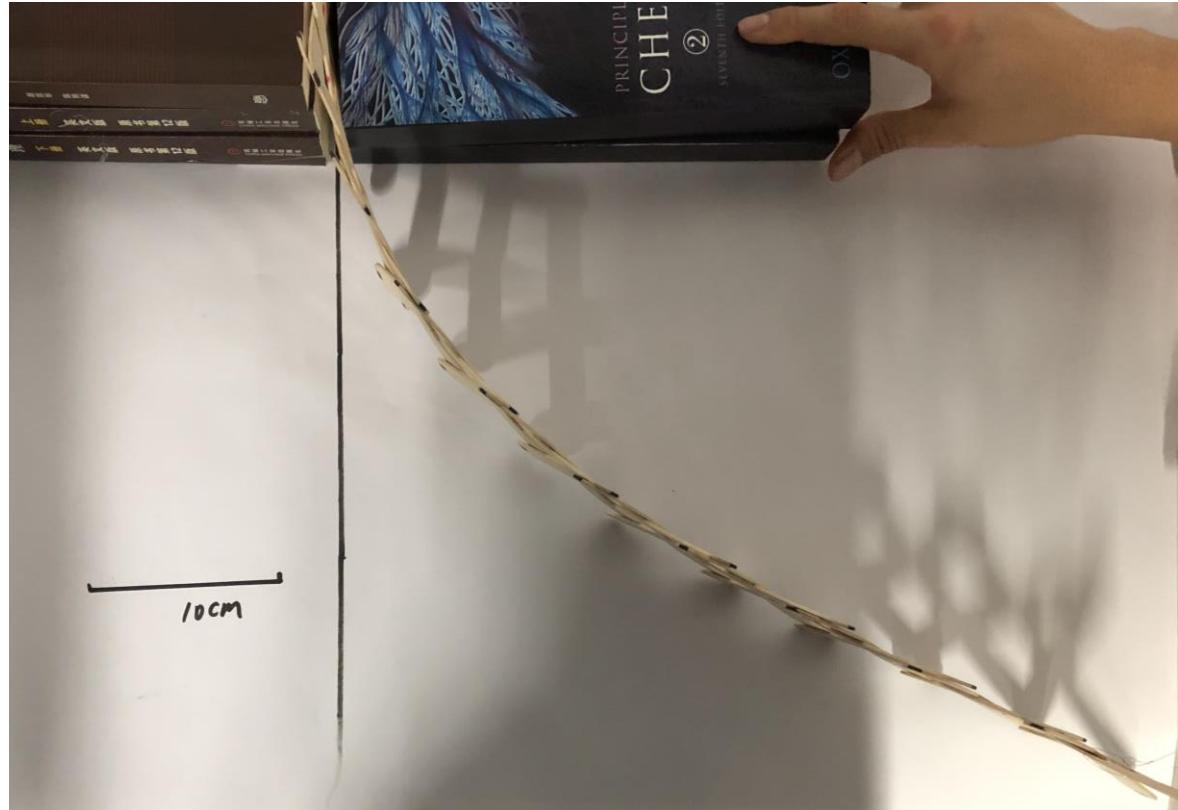
15cm-60°	15cm-75°	15cm-90°	15cm-120°
16cm-90°	18cm'-60°	18cm-90°	18cm-120°



上海科技大学
ShanghaiTech University

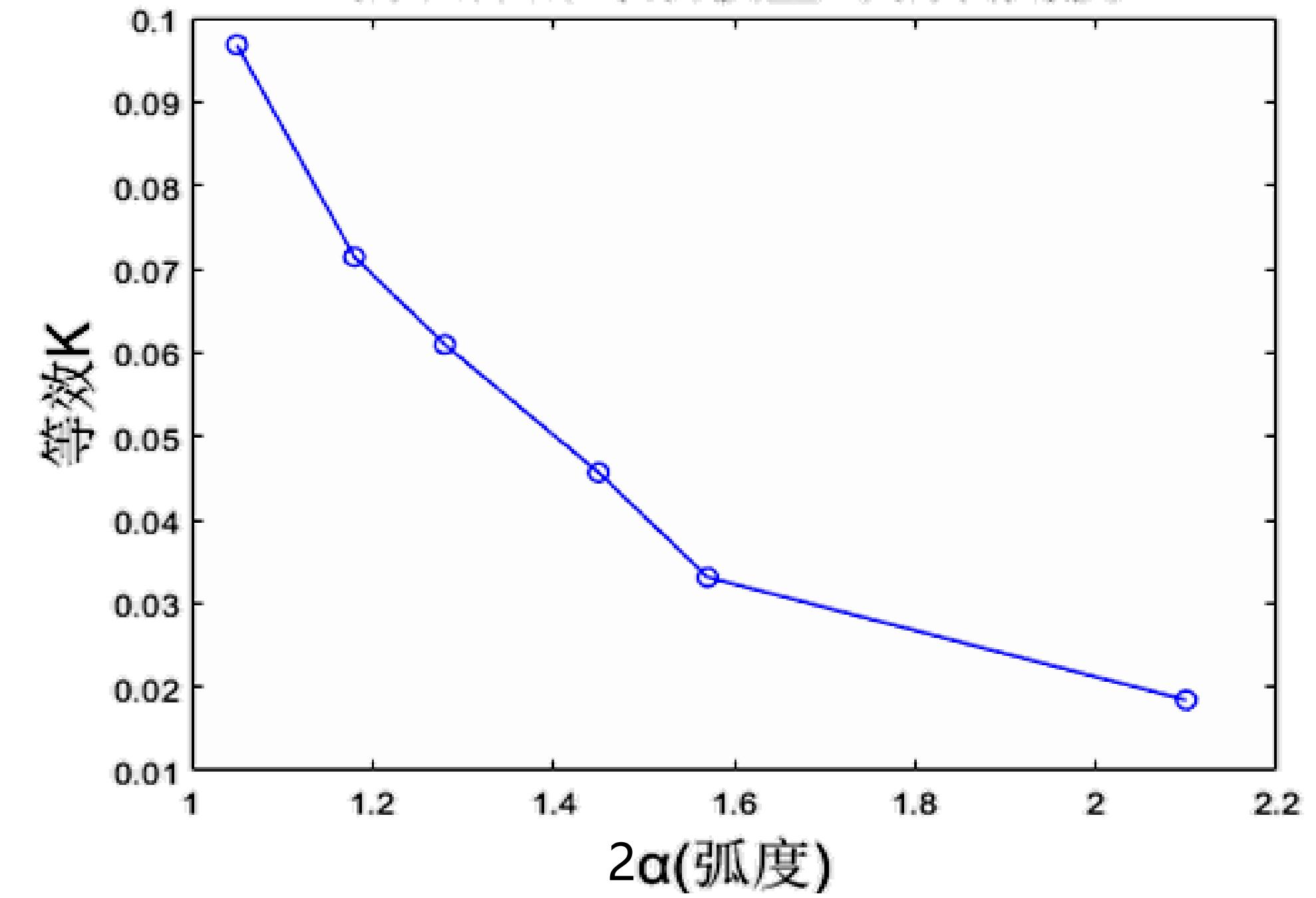
模量测量

杆组
单杆

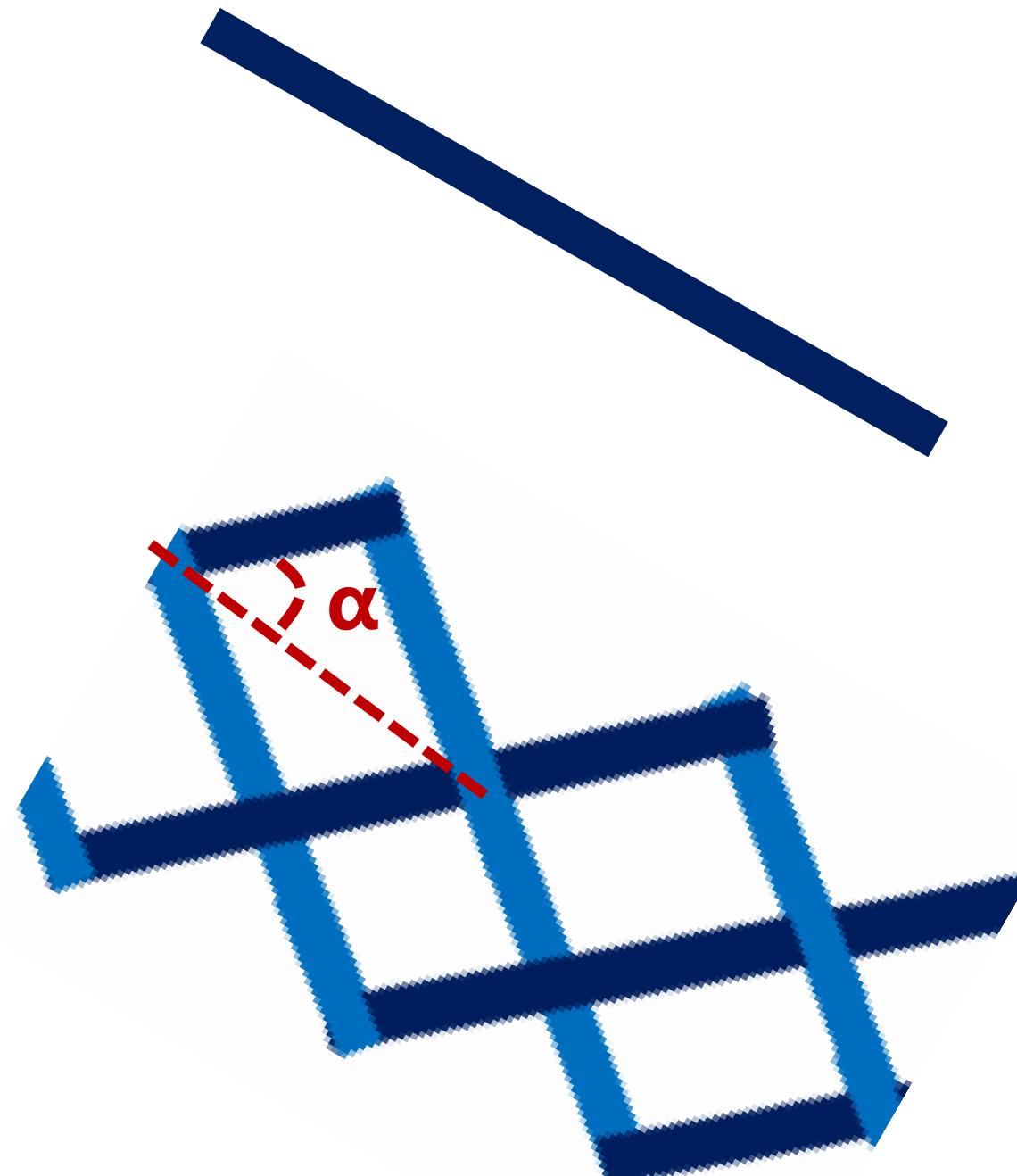


上海科技大学
ShanghaiTech University

编织体的等效模量与编制角度



研究变量



上海科技大学
ShanghaiTech University

单根杆:

l : 杆长 u : 杆弯曲储存势能 u_k : 动能

I_E : 惯矩*模量 m : 质量 δ : 厚度

杆组:

S : 杆组总长 h : 波前高度 ρ : 线密度

α : 编制角度 K : 等效模量

λ : 杆组长度减少速率

入定义

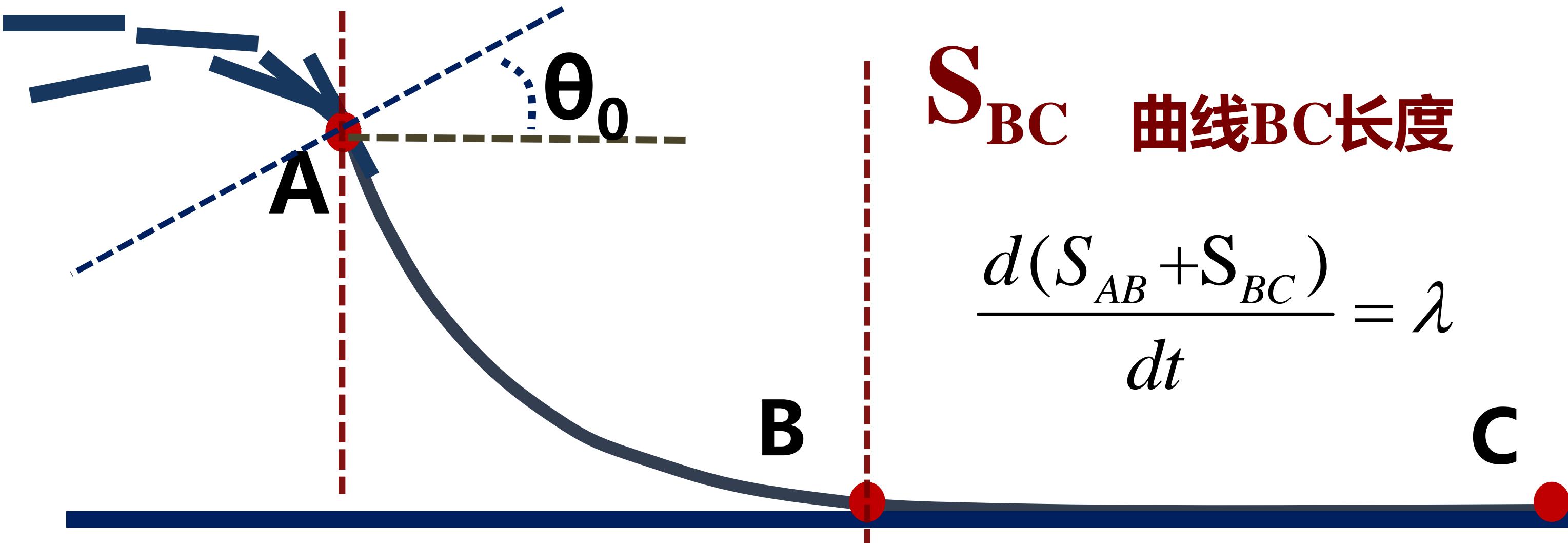


上海科技大学
ShanghaiTech University

S_{AB} 曲线AB长度

S_{BC} 曲线BC长度

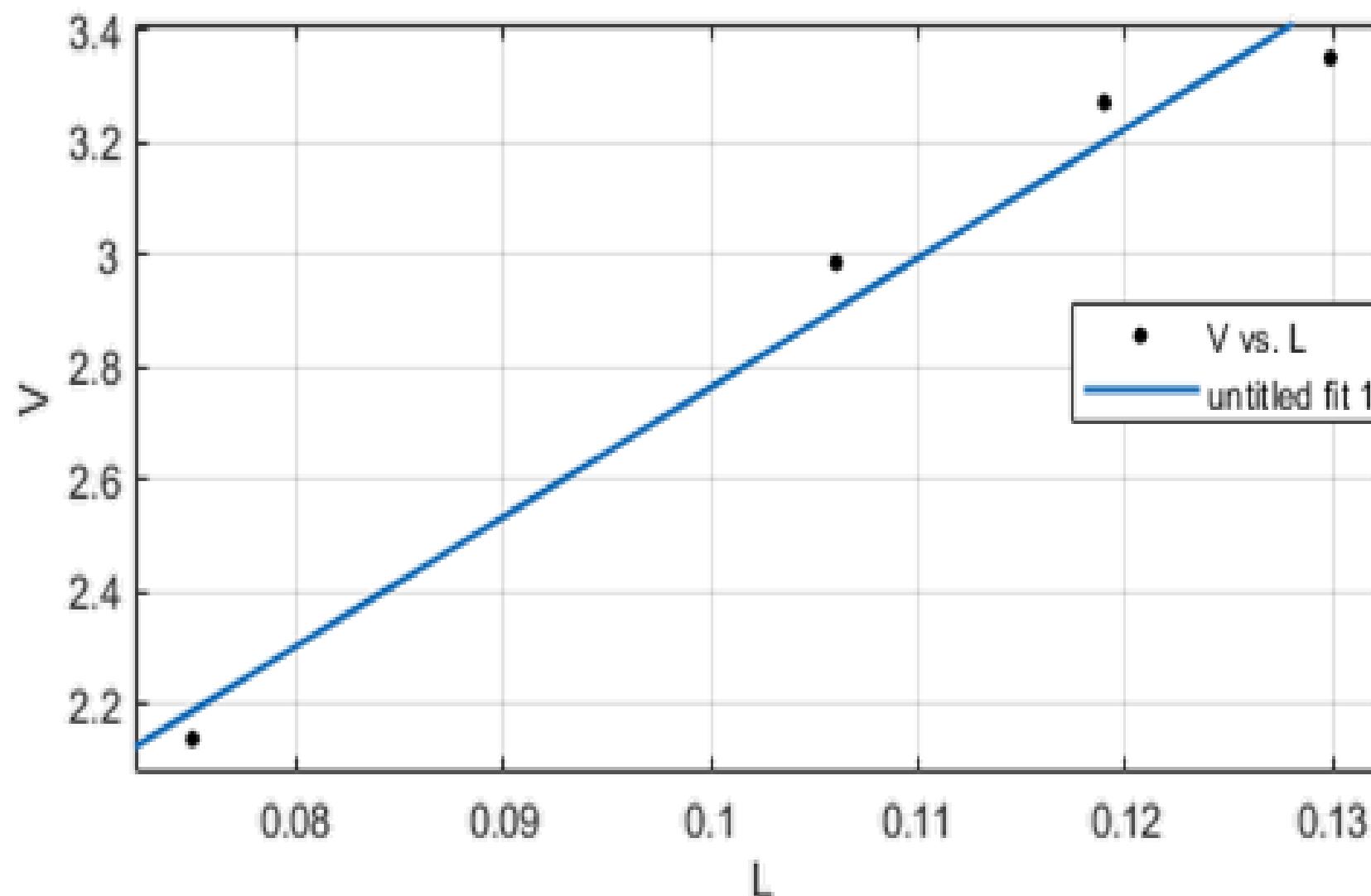
$$\frac{d(S_{AB} + S_{BC})}{dt} = \lambda$$



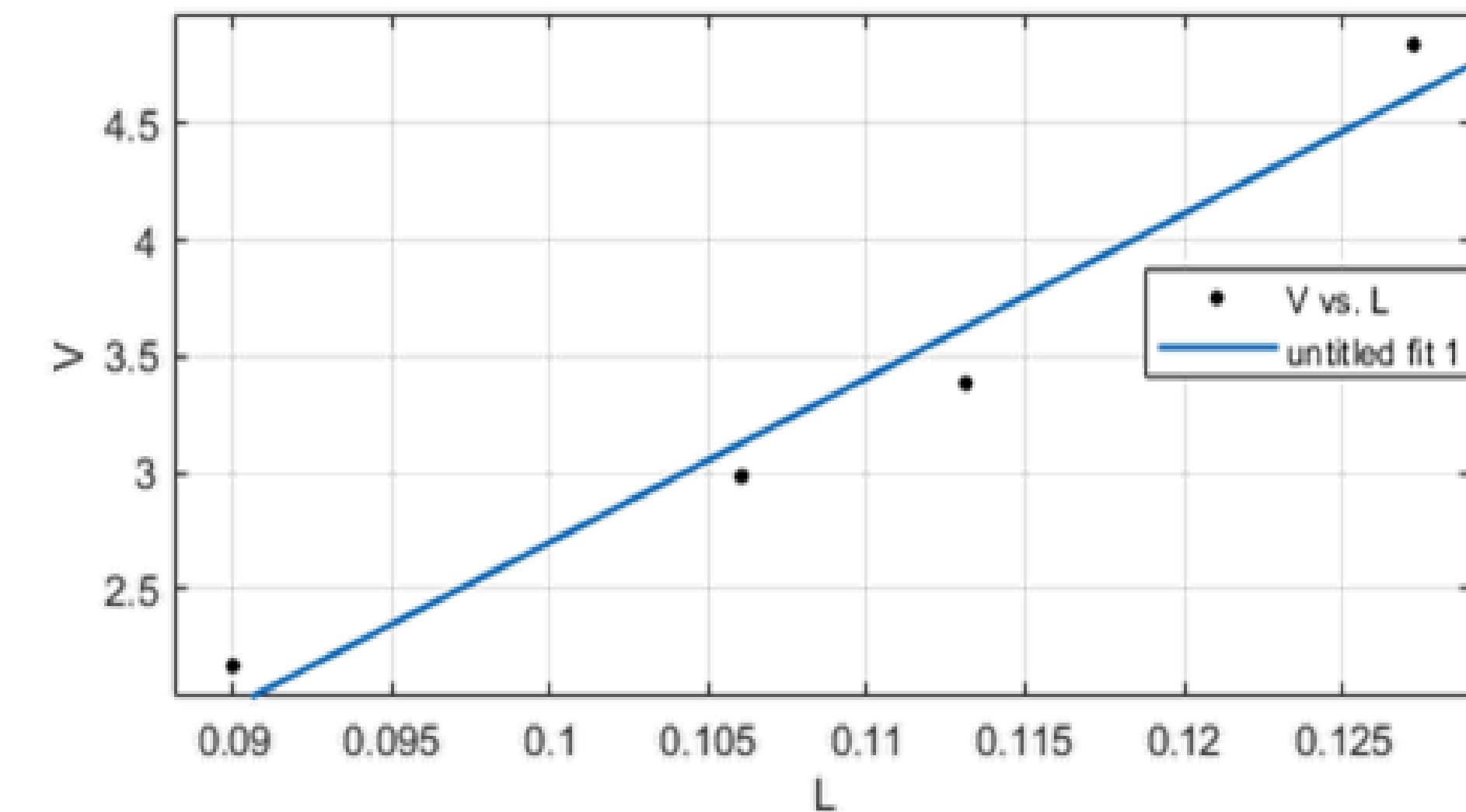
入测量



上海科技大学
ShanghaiTech University



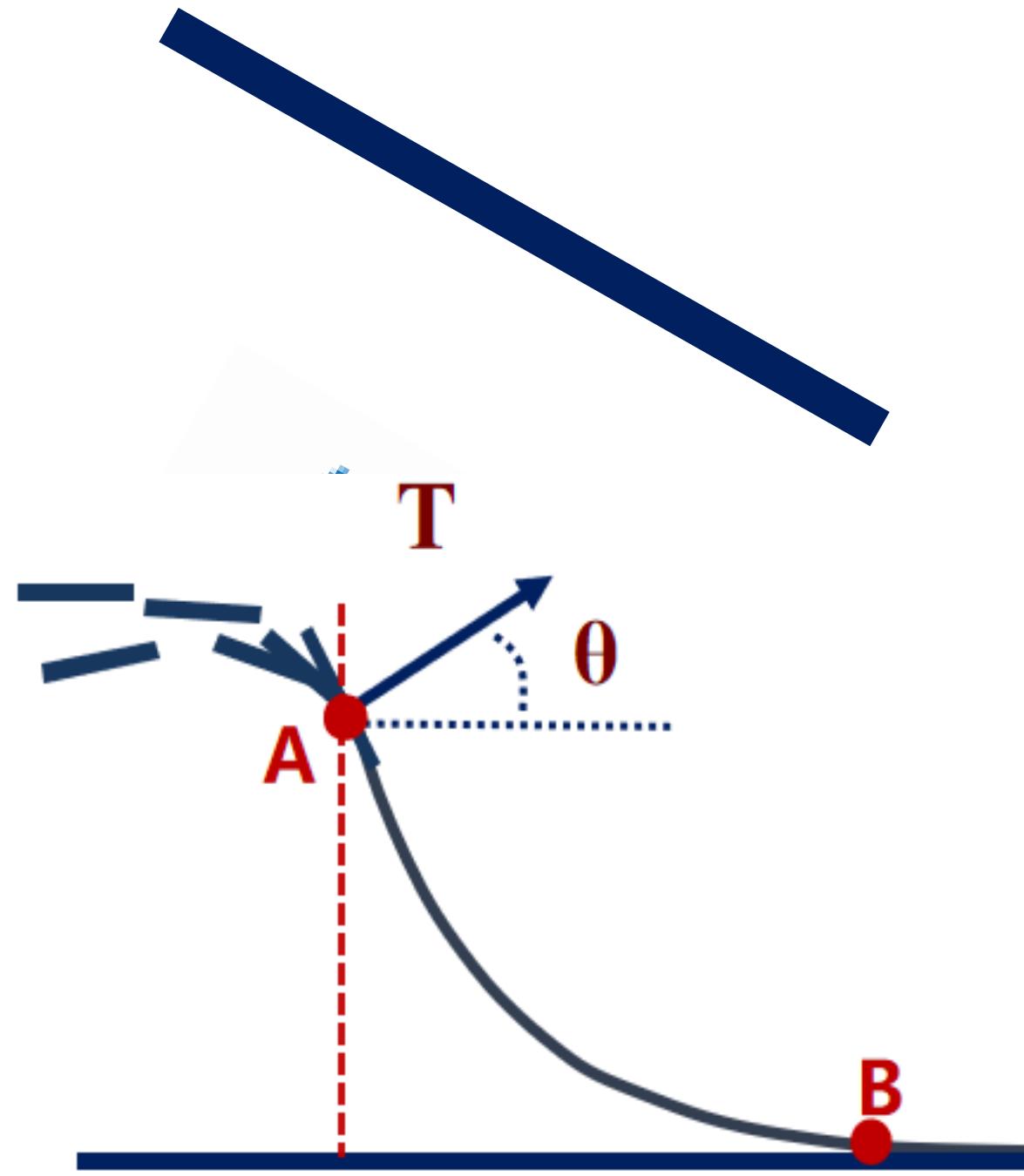
cos α 改变 $r^2: 0.994$



杆长改变 $r^2:$

0.996

研究变量



单根杆:

l : 杆长 u : 杆弯曲储存势能 v : 速度

I_E : 惯矩*模量 m : 质量 δ : 厚度

杆组:

S : 杆组总长 h : 波前高度 ρ : 线密度

α : 编制角度 K : 等效模量

λ : 杆组长度减少速率 T : 假设作用力

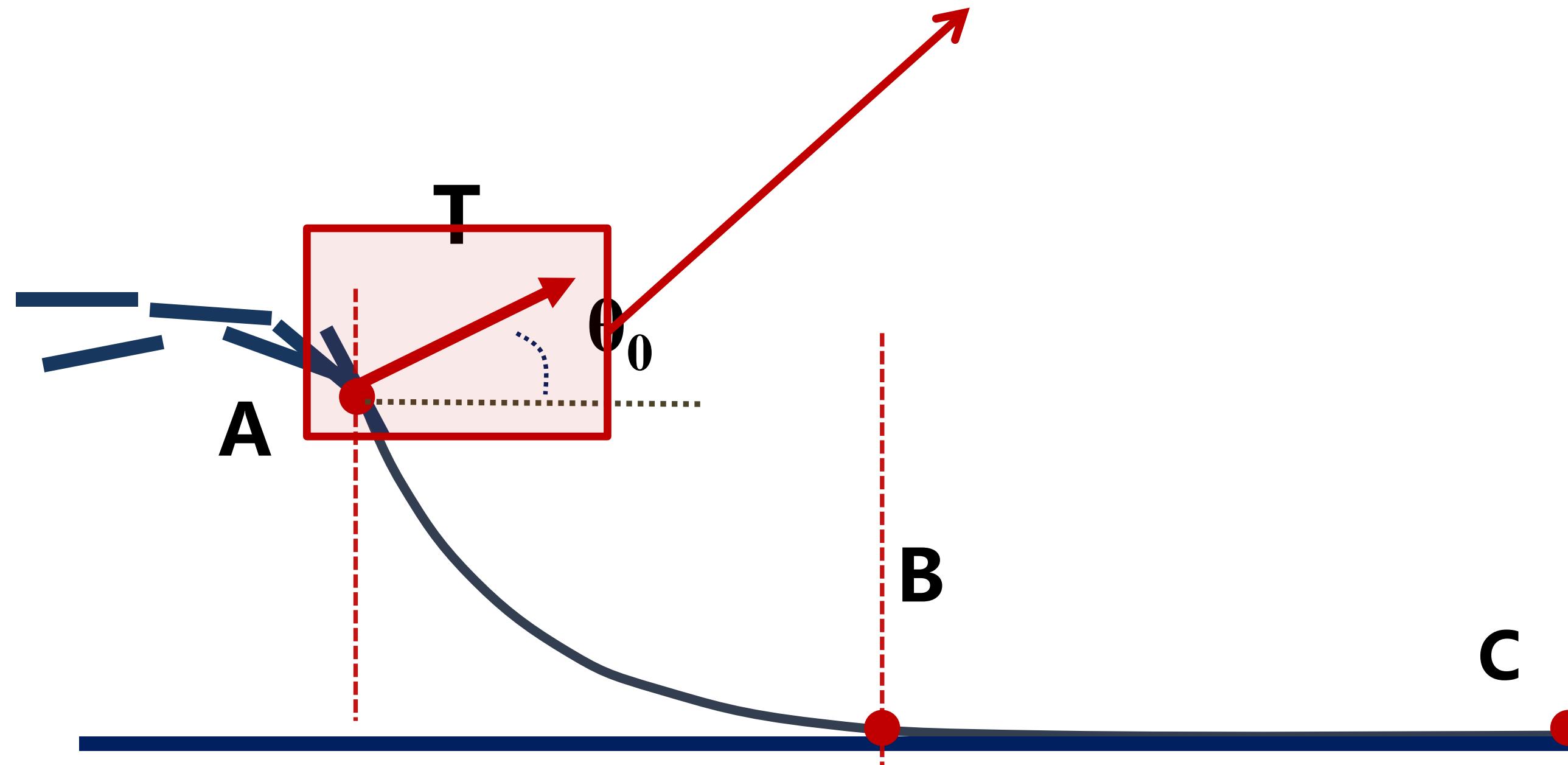


稳定的受力



上海科技大学
ShanghaiTech University

实验结果：抬升力平均意义上是定值





上海科技大学
ShanghaiTech University

第三部分

理论分析

理论假设



上海科技大学
ShanghaiTech University

- 1. 波面稳定时的杆组---->连续介质**
- 2. 地面刚性足够大**
- 3. 不考虑杆与杆之间碰撞**
- 4. 不考虑空气阻力, 杆与杆相对位移, 波面储存势能等**

能量守恒



上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u = dE_K + dE_P + dU_P + \frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u_K$$

单根杆储存势能 波面能量变化 U_P : 排出杆势能和 排出杆动能

E_K

E_P

U_P

u

u_K

能量守恒



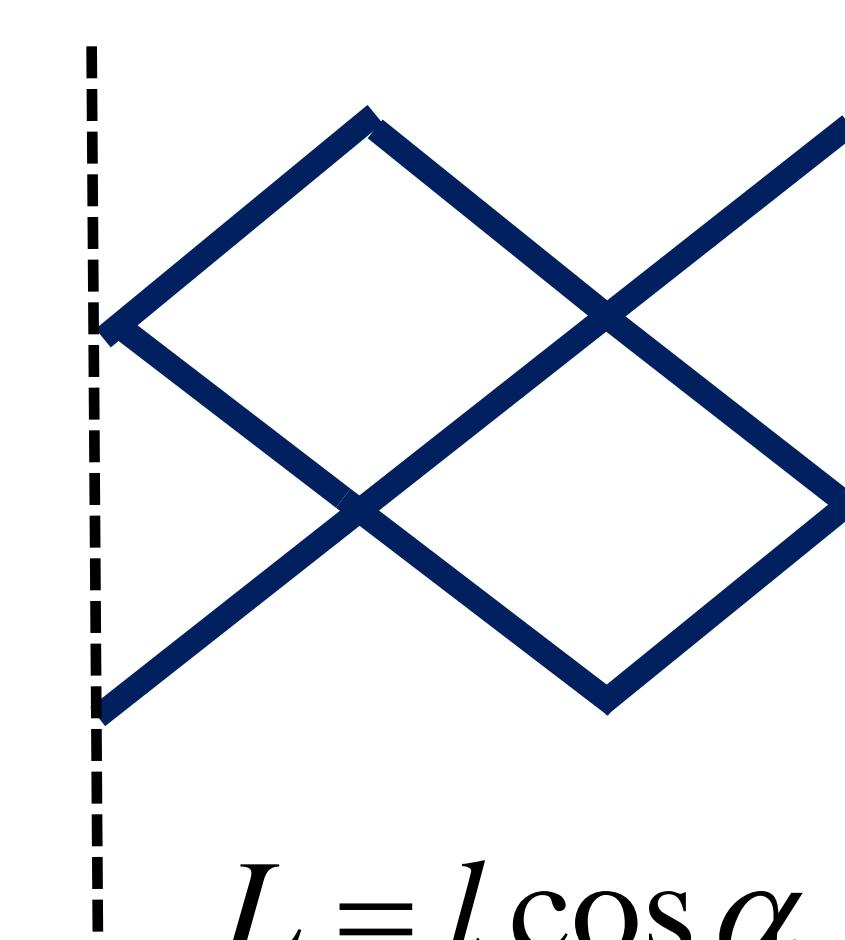
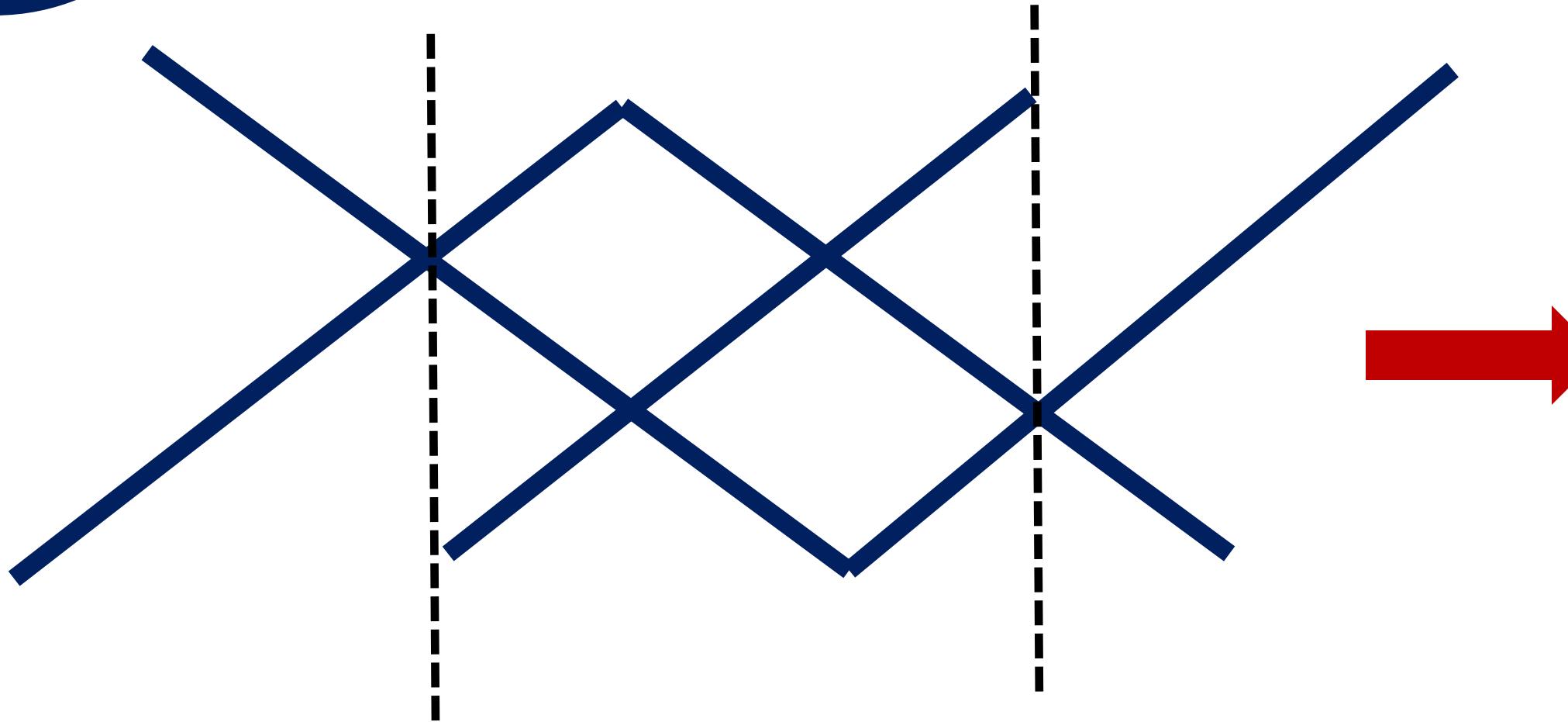
上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u = dE_K + dE_P + dU_P + \frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u_K$$

单根杆储存势能 波面能量变化 U_P : 排出杆势能和 排出杆动能

$$E_K \quad E_P$$

波面具有的能量E



杆组线密度：

$$\rho = \frac{3m}{l \cos \alpha}$$

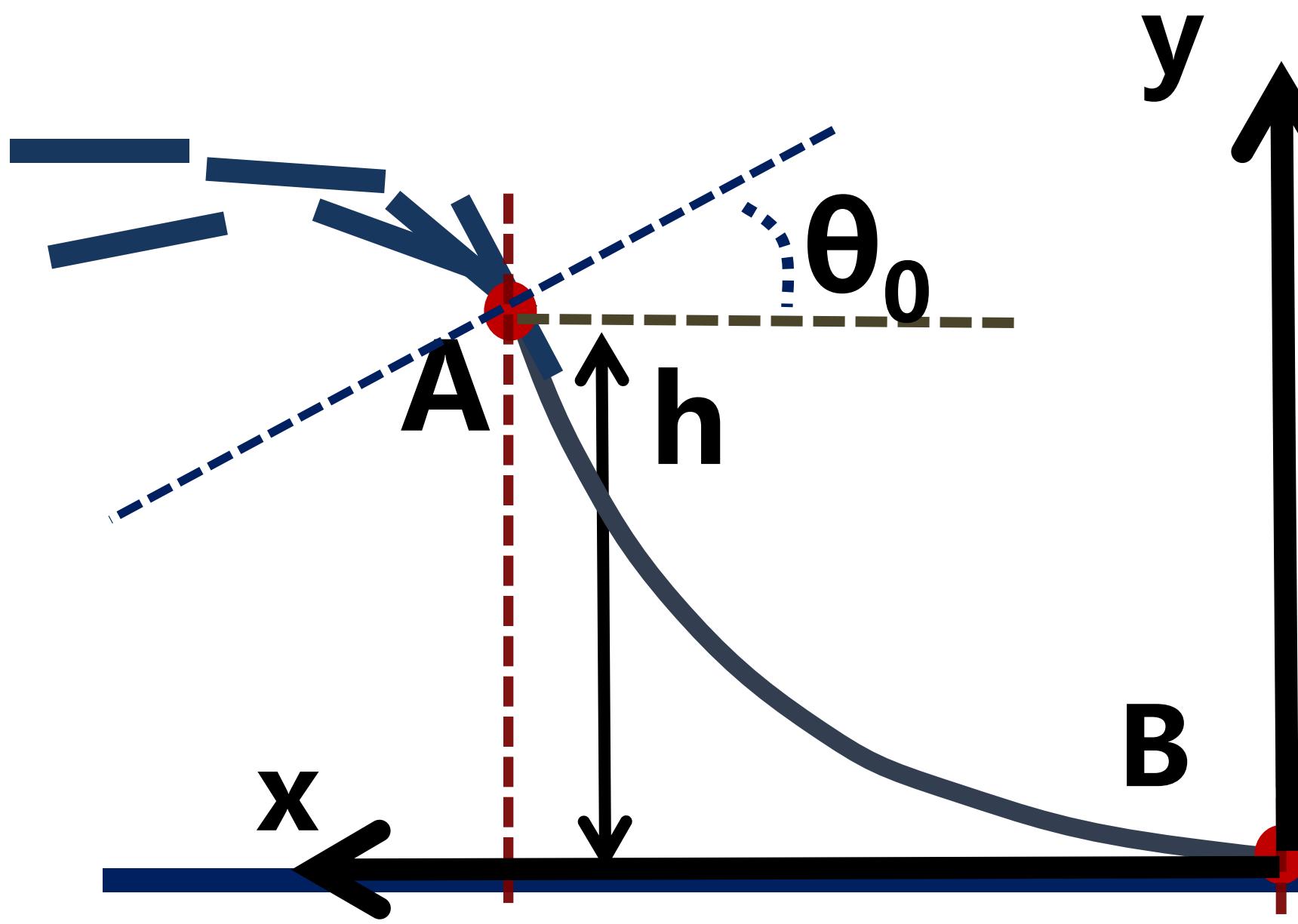


上海科技大学
ShanghaiTech University

波面具有的能量E



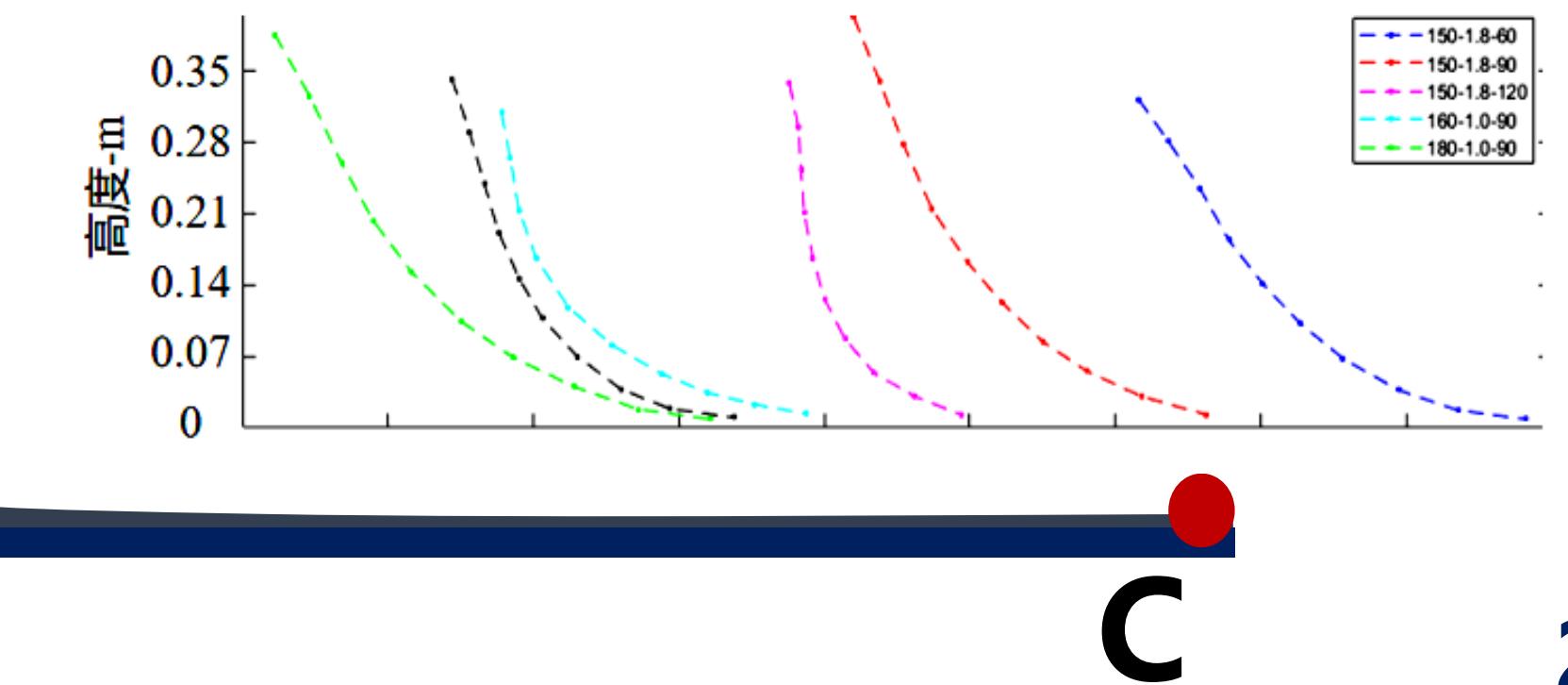
上海科技大学
ShanghaiTech University



稳定时：

$$v_{\text{波面}} = \lambda = \frac{dS_{BC}}{dt}$$
$$E_K = \frac{S_{AB} \rho \lambda^2}{2}, \quad E_P = \int_0^h \rho g y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} dy$$

不同编制方式波面形状

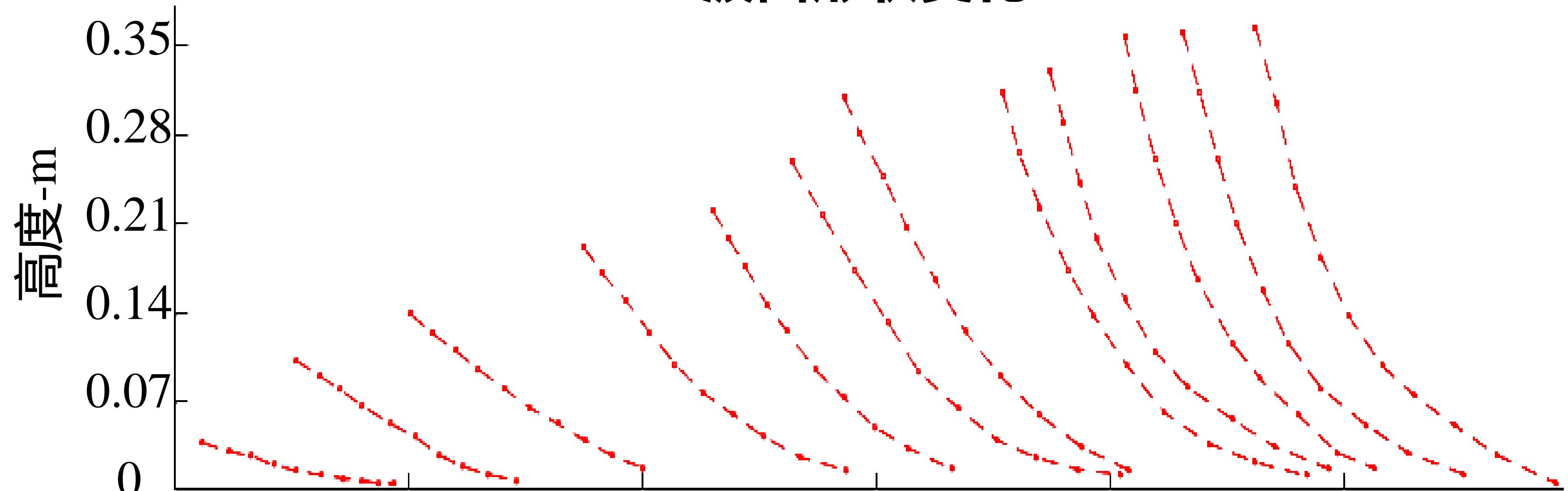


波面形状



上海科技大学
ShanghaiTech University

波面形状变化

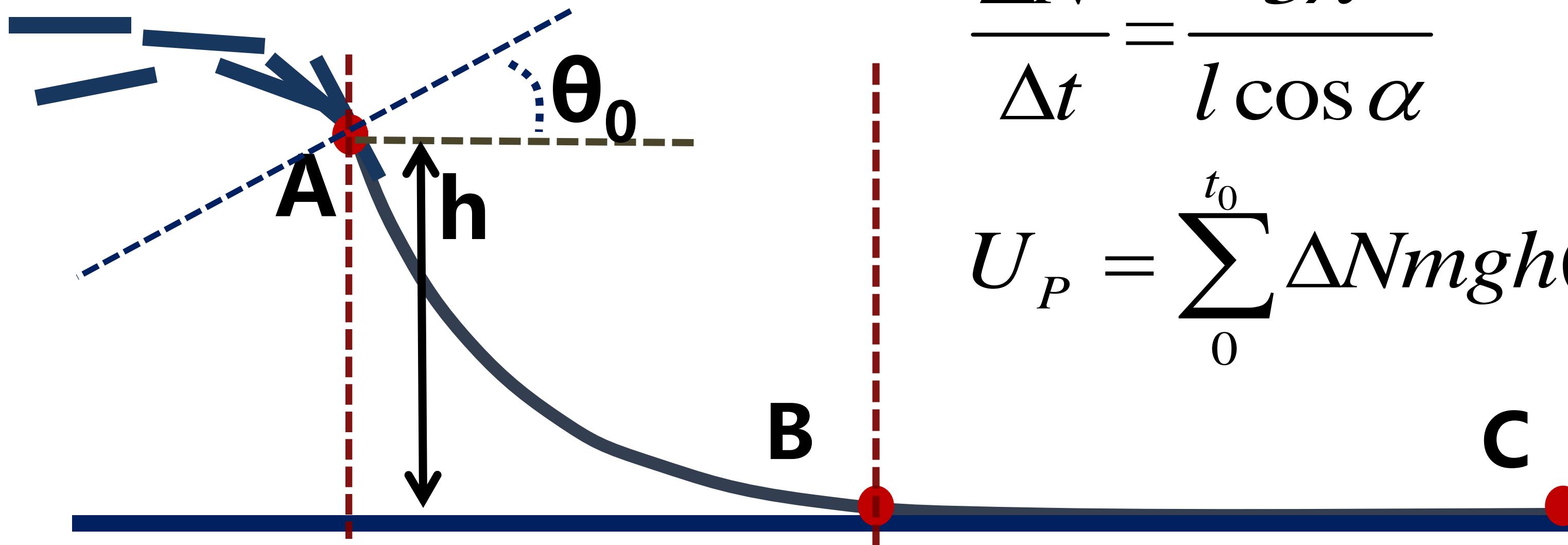


波前曲线拟合----> 波前动能势能计算

推开杆势能和Up



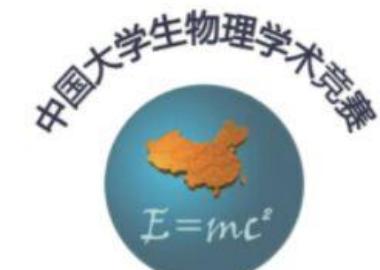
上海科技大学
ShanghaiTech University



$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{3\lambda}{l \cos \alpha}$$

$$U_P = \sum_0^{t_0} \Delta N mgh(t) \Delta t$$

能量守恒



上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u = dE_K + dE_P + dU_P + \frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u_K$$

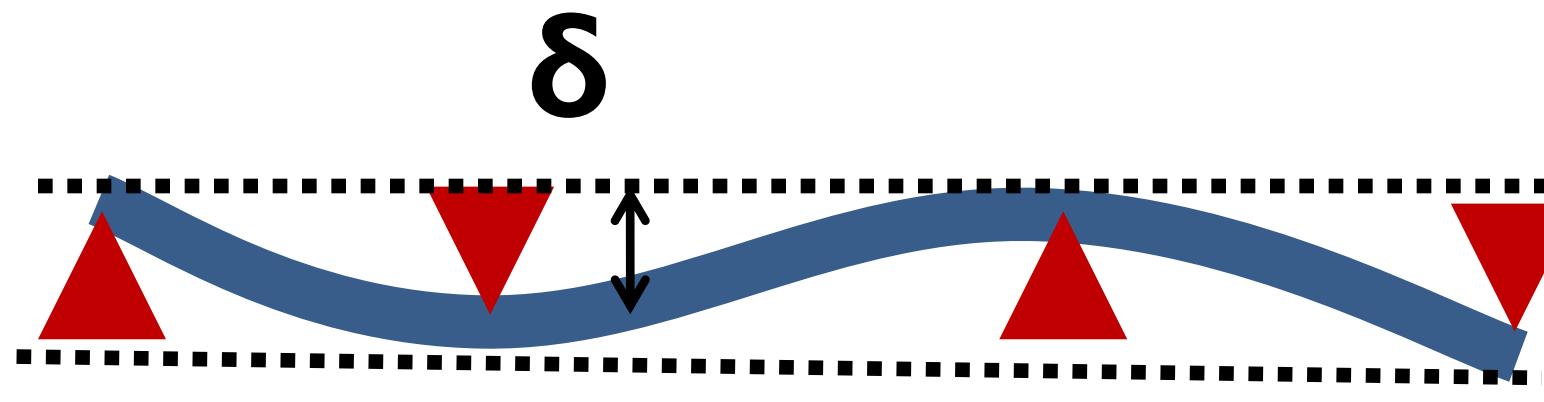
单根杆储存势能 波面能量变化 U_P : 排出杆势能和 排出杆动能

单根杆储存能量u



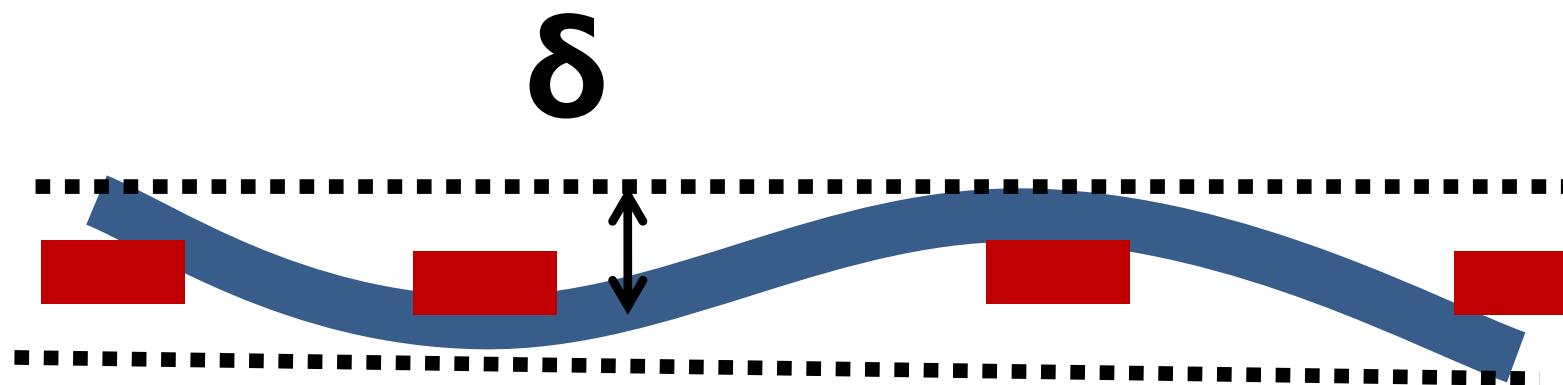
上海科技大学
ShanghaiTech University

$$u = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx$$



四点接触--->

$$u = 432 \frac{EI}{L^3} \delta^2$$



四面接触--->

$$u \approx 872.4 \frac{EI}{L^3} \delta^2$$

单根杆储存能量



上海科技大学
ShanghaiTech University

杆型号	完全弹起高度: m(保留2位)
A	1.34
B	3.68
C	2.62
D	2.17

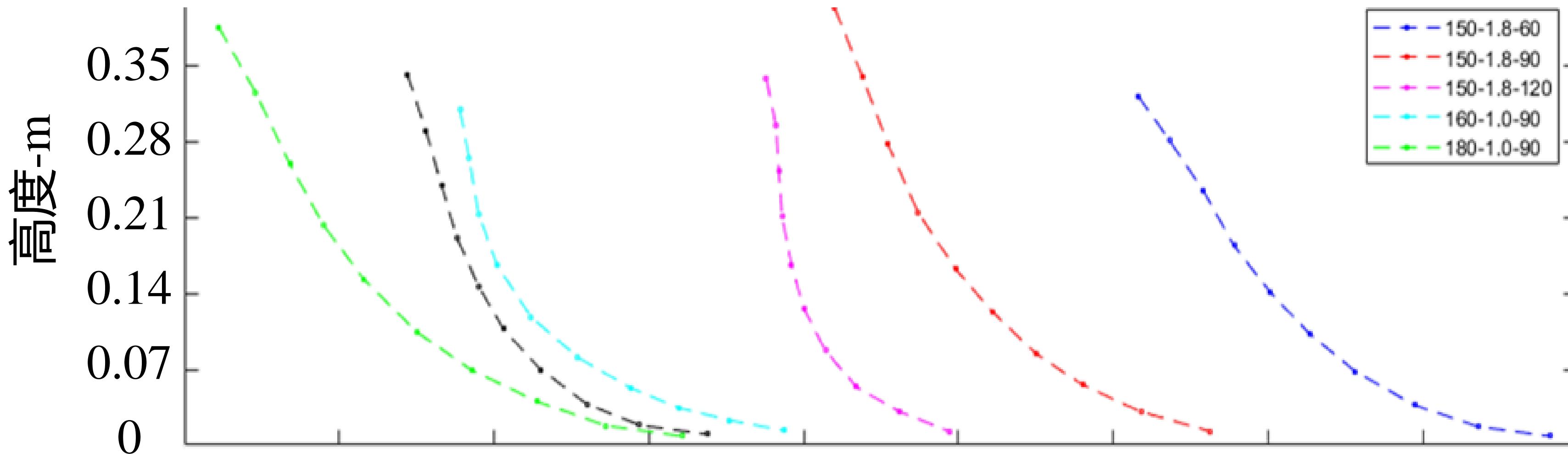
八种编制方式产生的
波面高度均低于40cm
能量的转换? 效率?

u_k 项的计算



上海科技大学
ShanghaiTech University

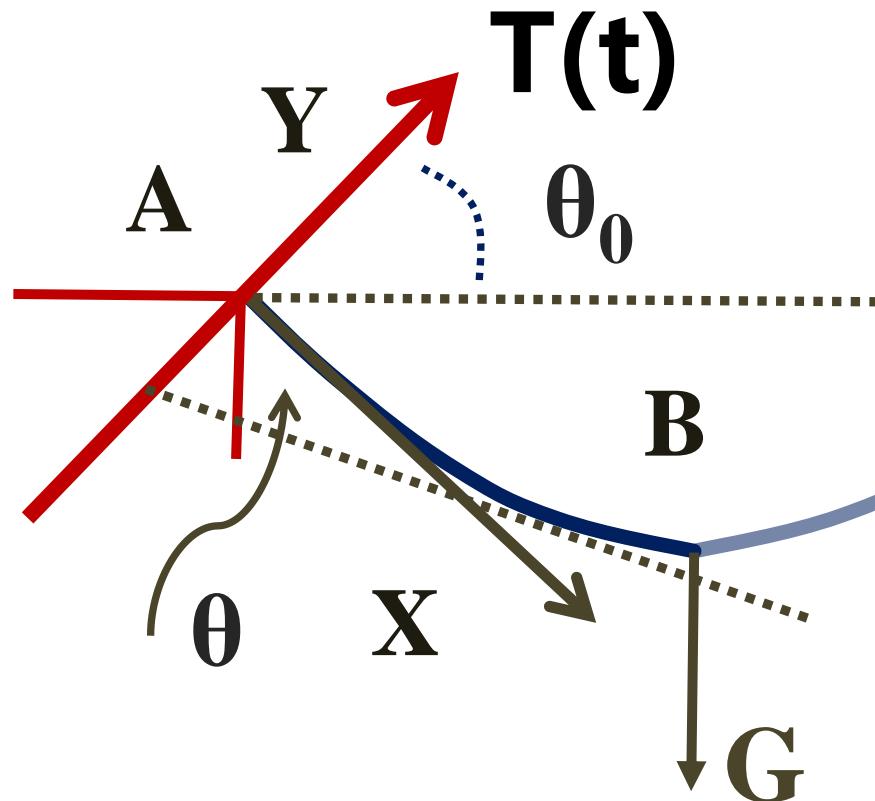
不同编制方式波面形状



u_K 项的计算



上海科技大学
ShanghaiTech University



$$K \frac{d^2\theta}{ds^2} - T \sin \theta = 0 \Rightarrow \frac{K}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + T \cos \theta = C_1$$

$$S = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{d\theta}{ds} = 0$$

解得：

$$S_{AB} = \sqrt{\left(\frac{KT}{2}\right)} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$$

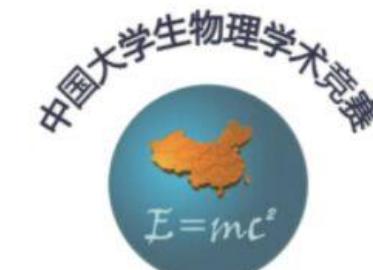
$$T = \frac{2S_{AB}^2}{K} \left(\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \right)^{-2}$$

$$\lambda dt \rho v = T dt$$



$$u_K = \frac{l \cos \alpha S_{AB}^4}{3K^2 \lambda^3} \left(\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \right)^{-1}$$

能量守恒



上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u = dE_K + dE_P + dU_P + \frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u_K$$

单根杆储存势能 波面能量变化 U_P : 排出杆势能和 排出杆动能

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU_P}{dt} = \frac{3\lambda}{l \cos \alpha} (u - u_K)$$

$$\frac{E + U_P}{t_0} = \frac{3\lambda}{l \cos \alpha} (u - u_K)$$

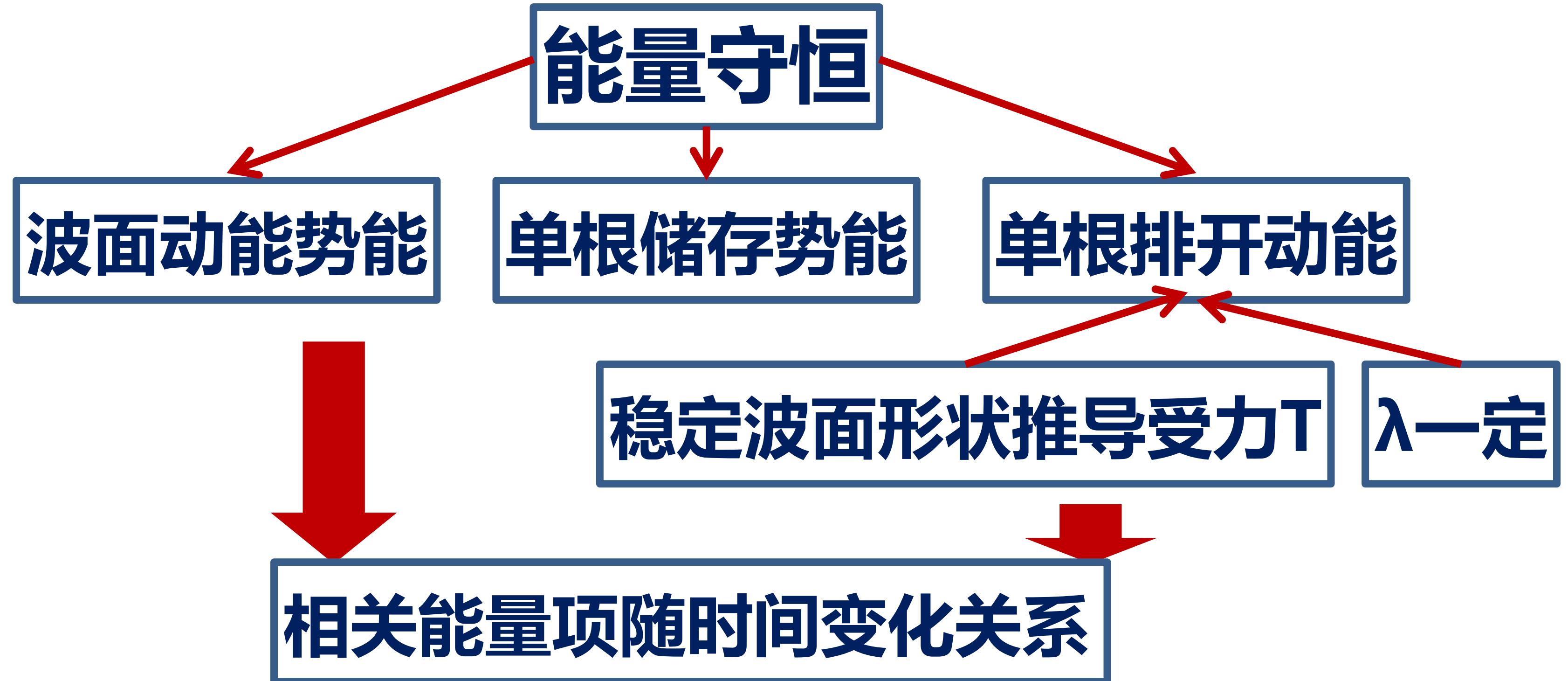
波面能量变化率

排出杆势能变化率

理论小结



上海科技大学
ShanghaiTech University



能量守恒

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU_P}{dt} = \frac{3\lambda}{l \cos \alpha} (u - u_K)$$

实验观察： dE/dt

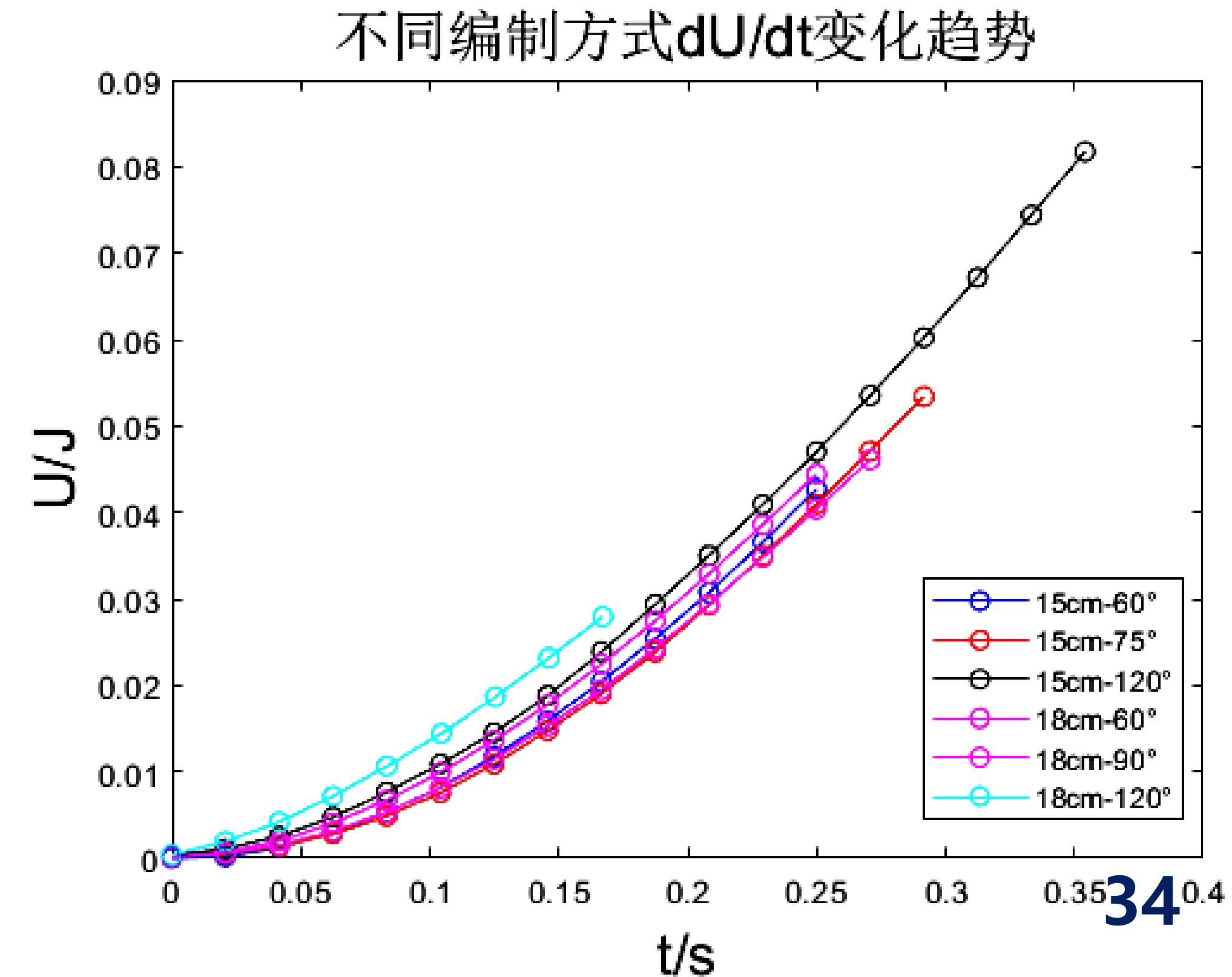
逐渐趋于零

推测: dU_p/dt

斜率逐渐增加至稳定



上海科技大学
ShanghaiTech University



验证(波面稳定时)



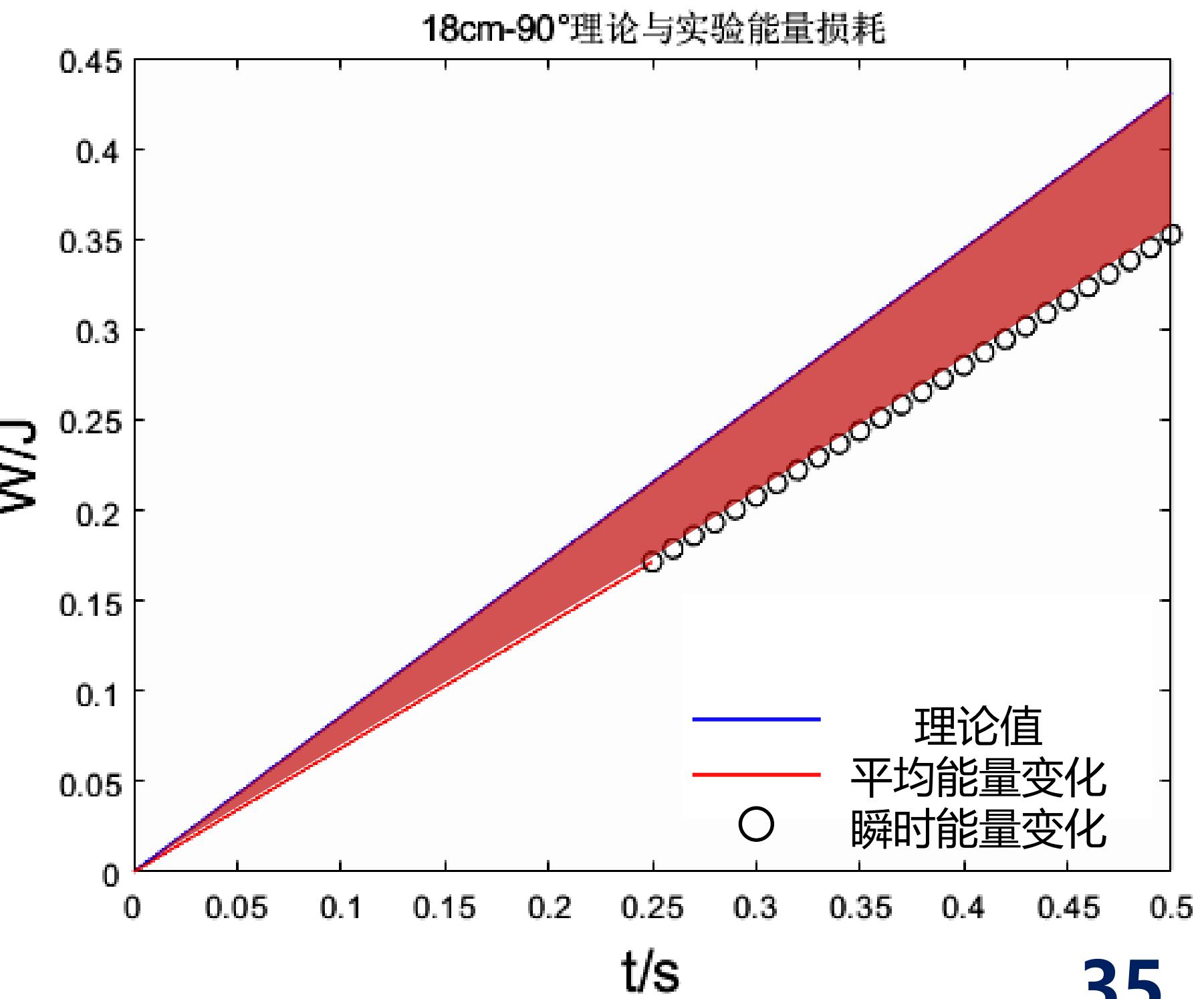
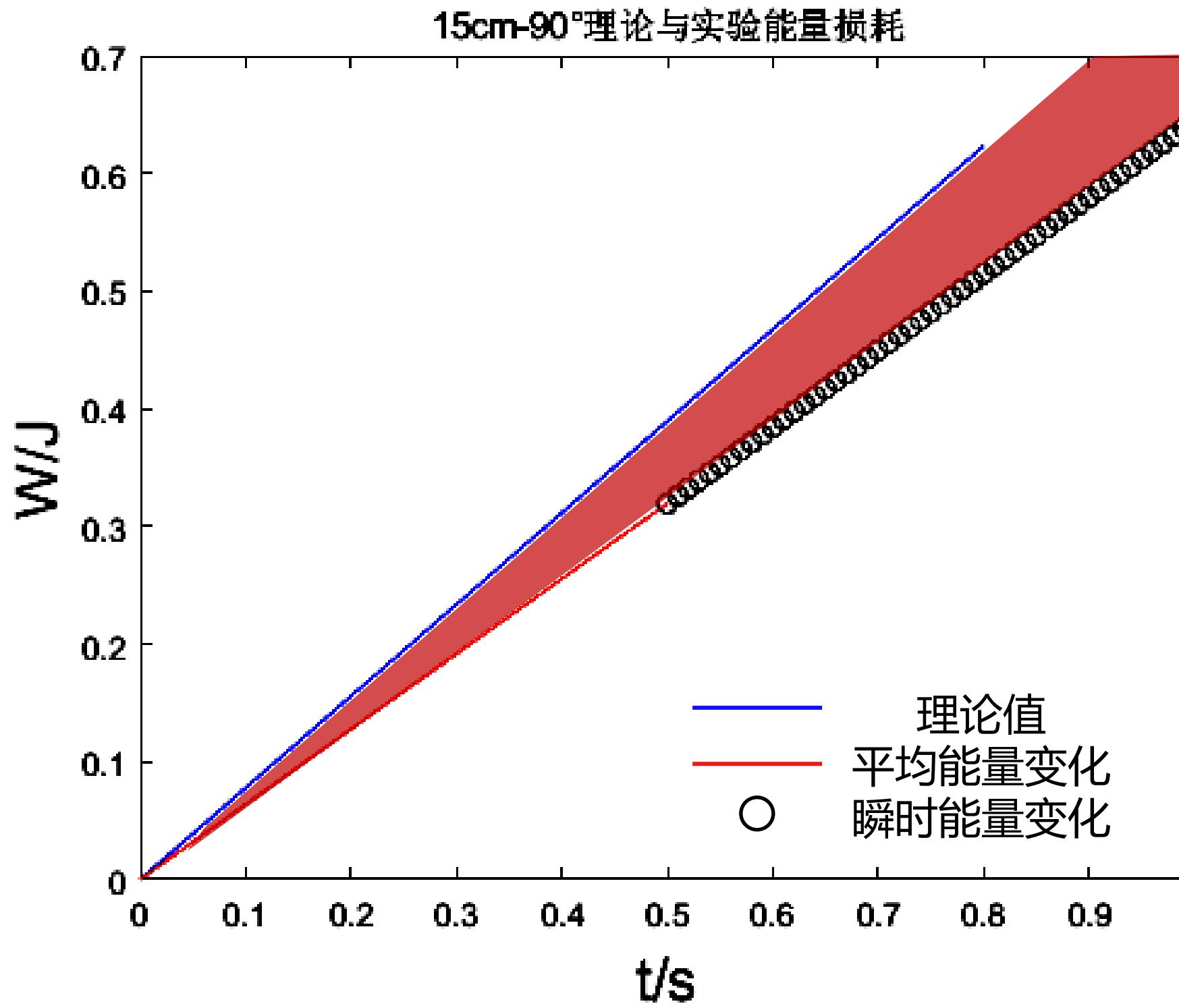
上海科技大学
ShanghaiTech University

编制方式	15cm-90°	18cm-90°
理论: $\frac{3\lambda}{L \cos \alpha} (u - u_K)$	0.779J/s ≈83%	0.861J/s ≈80%
平均: $\frac{E + U_P}{t_0}$	0.639J/s	0.686J/s
瞬时: $\frac{dE}{dt} + \frac{dU_P}{dt}$	0.651J/s	0.724J/s

验证(波面稳定时)



上海科技大学
ShanghaiTech University



差异分析



上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u = dE_K + dE_P + dU_P + \frac{3\lambda dt}{l \cos \alpha} u_K$$

空气阻力，杆与杆相对位移，波面储存势能 $\approx 17\%$



上海科技大学
ShanghaiTech University

第五部分

特殊讨论

波面破裂



上海科技大学
ShanghaiTech University



波面破裂



上海科技大学
ShanghaiTech University



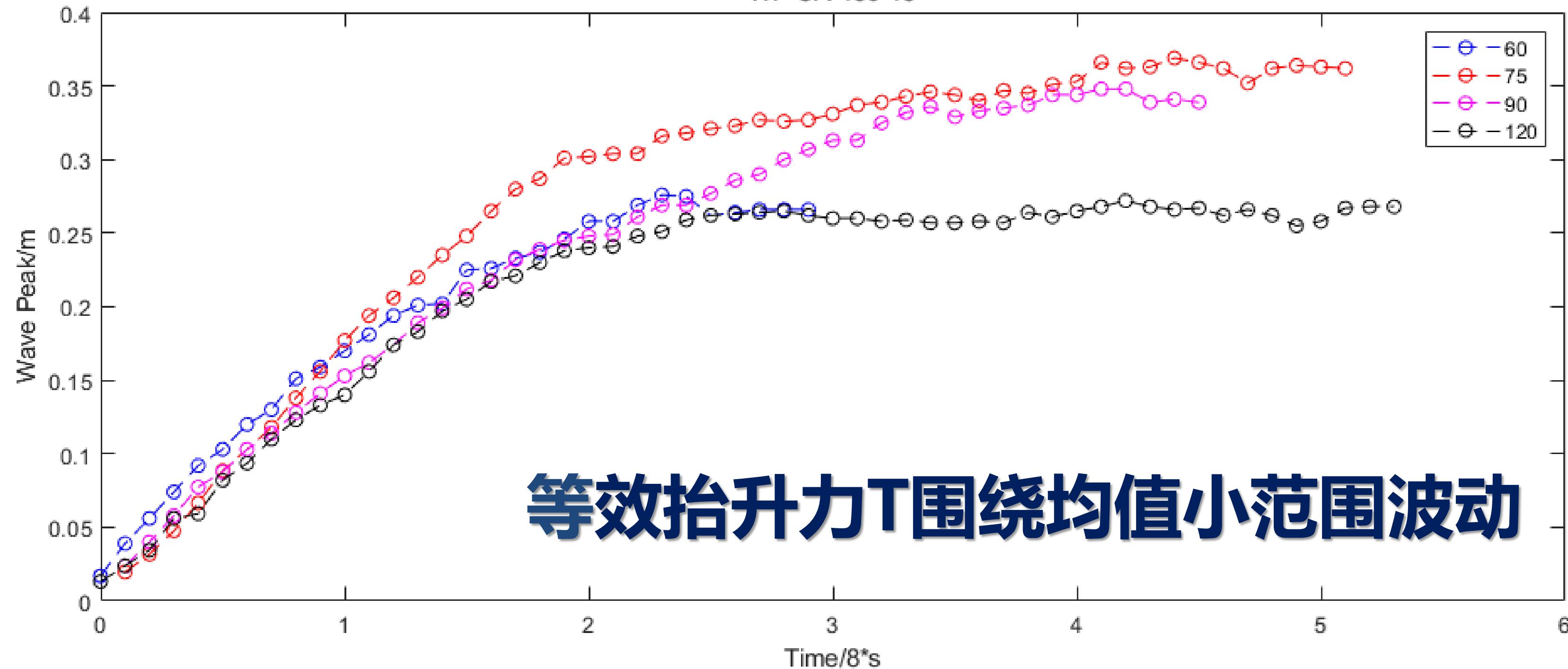
杆组弯曲曲率过大--->单根杆弯曲程度过大
节点处压力增大，作用面方向扭转--->滑移

波面振荡



上海科技大学
ShanghaiTech University

WP-CA-150-18



等效抬升力T围绕均值小范围波动

总结



1. λ 与 I 或 $\cos\alpha$ 成正比
2. 杆组等效模量随 α 增大而减小
3. 从受力角度对波面形成并稳定过程定性解释
4. 利用能量守恒，波面稳定静态受力推导了 u_k 项
5. 进行了计算验证，给出了其他未定量计算的能量耗散
6. 定性解释波面破裂和波面振荡问题

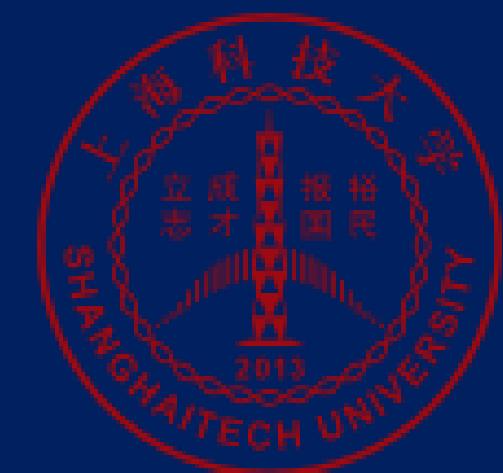
参考文献



1. 《朗道——弹性力学》；
- 2.J. Sautel, A. Bourges, A. Caussarie, N. Plihon, and N. Taberlet. The physics of a popsicle stick bomb. Am. J. Phys. 85, 10, 783-790 (2017)
- 3.J.-P. Boucher, C. Clanet, D. Quéré, and F. Chevy. Popsicle-stick cobra wave. Phys. Rev. Lett. 119, 084301 (2017)
- 4.A. Papastathopoulos-Katsaros and S. Sardelis. A physical model for the popsicle stick cobra. Emergent Scientist 1, 3 (2017)

谢谢

上海科技大学
ShanghaiTech University

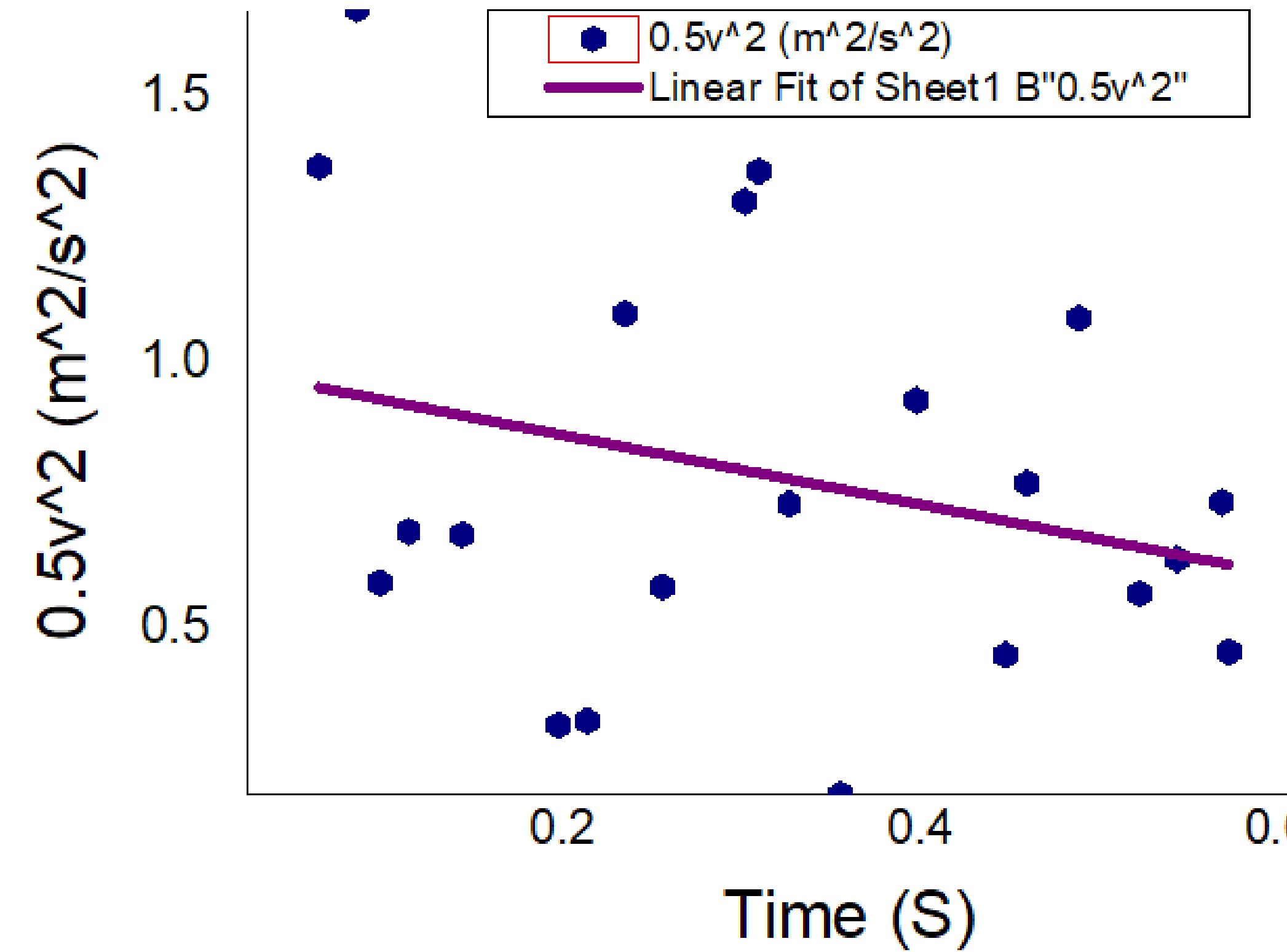


附件

排出杆动能分析



上海科技大学
ShanghaiTech University



波面建立



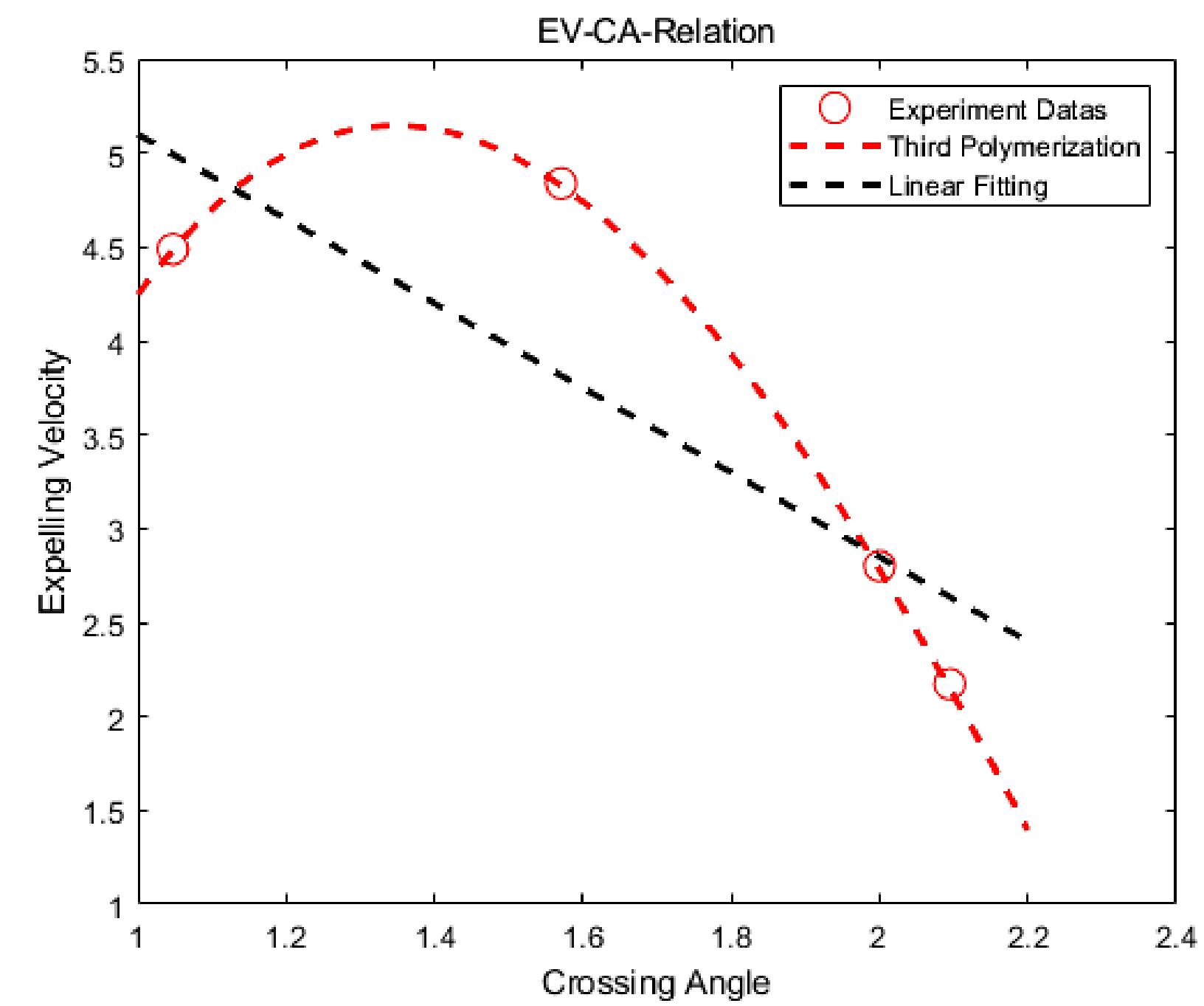
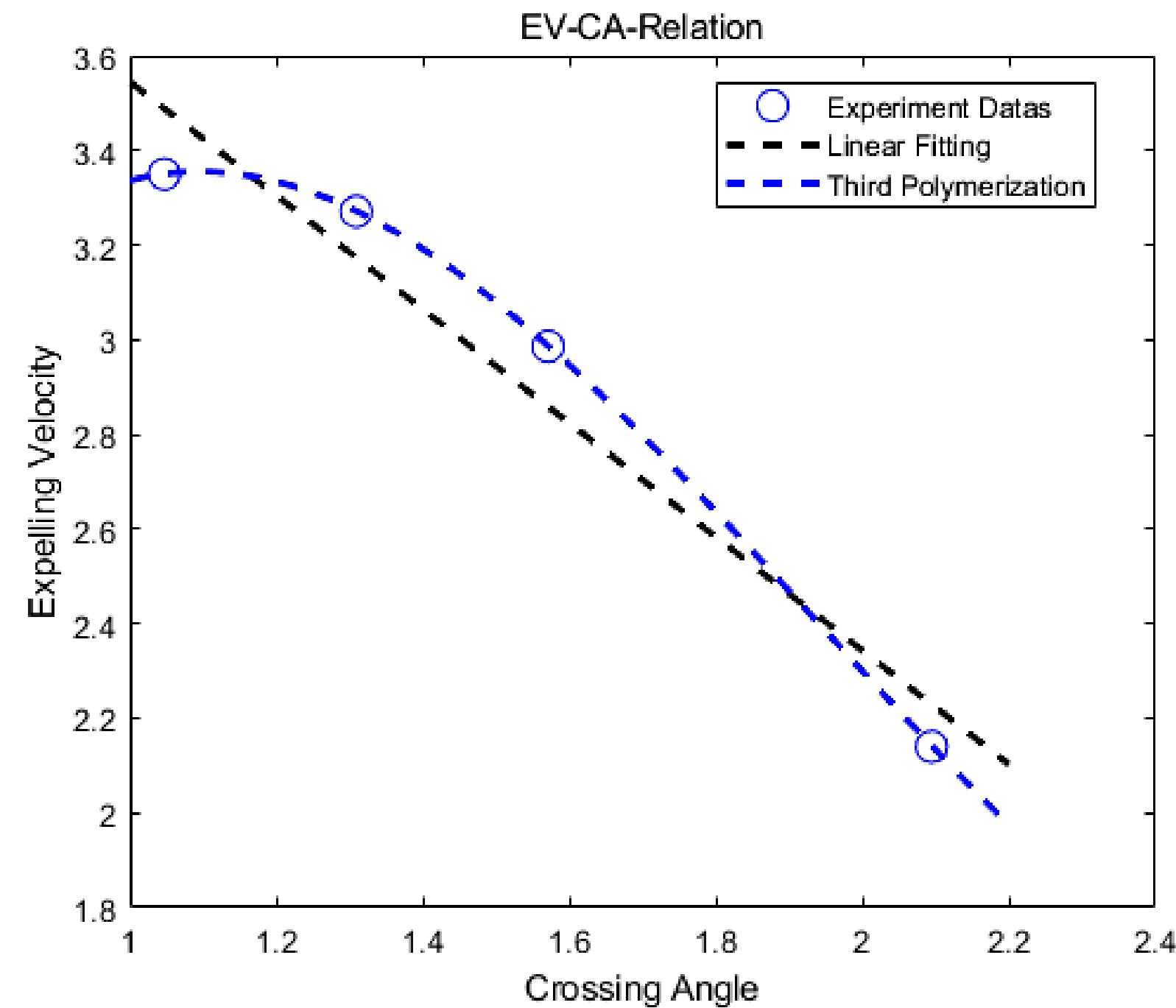
上海科技大学
ShanghaiTech University

编制方式	15cm- 60°	15cm- 75°	15cm- 90°	15cm- 120°	18cm- 60°	18cm- 90°	18cm- 120°	16cm- 90°
波面稳定的所需要的特征时间 t_0 : s	0.250	0.291	0.500	0.354	0.271	0.250	0.167	
波面稳定的高度: m	0.250	0.257	0.311	0.298	0.286	0.291	0.237	0.277

粗糙结论：波面稳定所需时间与波面稳定高度对立

Experiment and Results

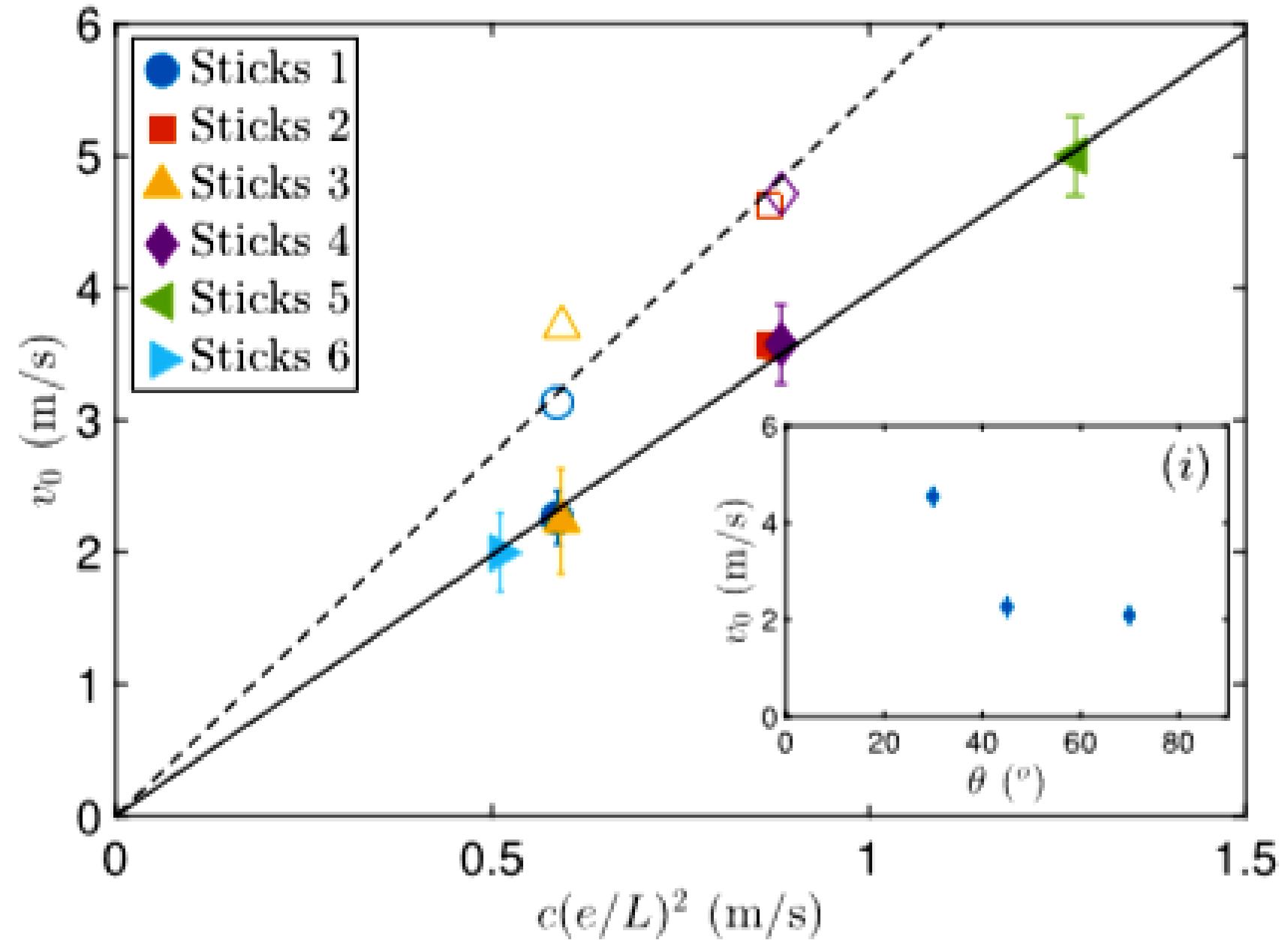
EV with Parameters α : Crossing Angle



入意义

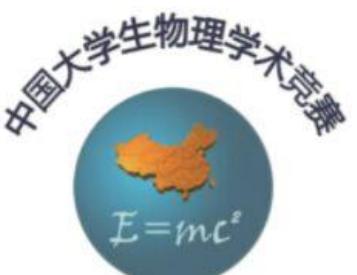


上海科技大学
ShanghaiTech University

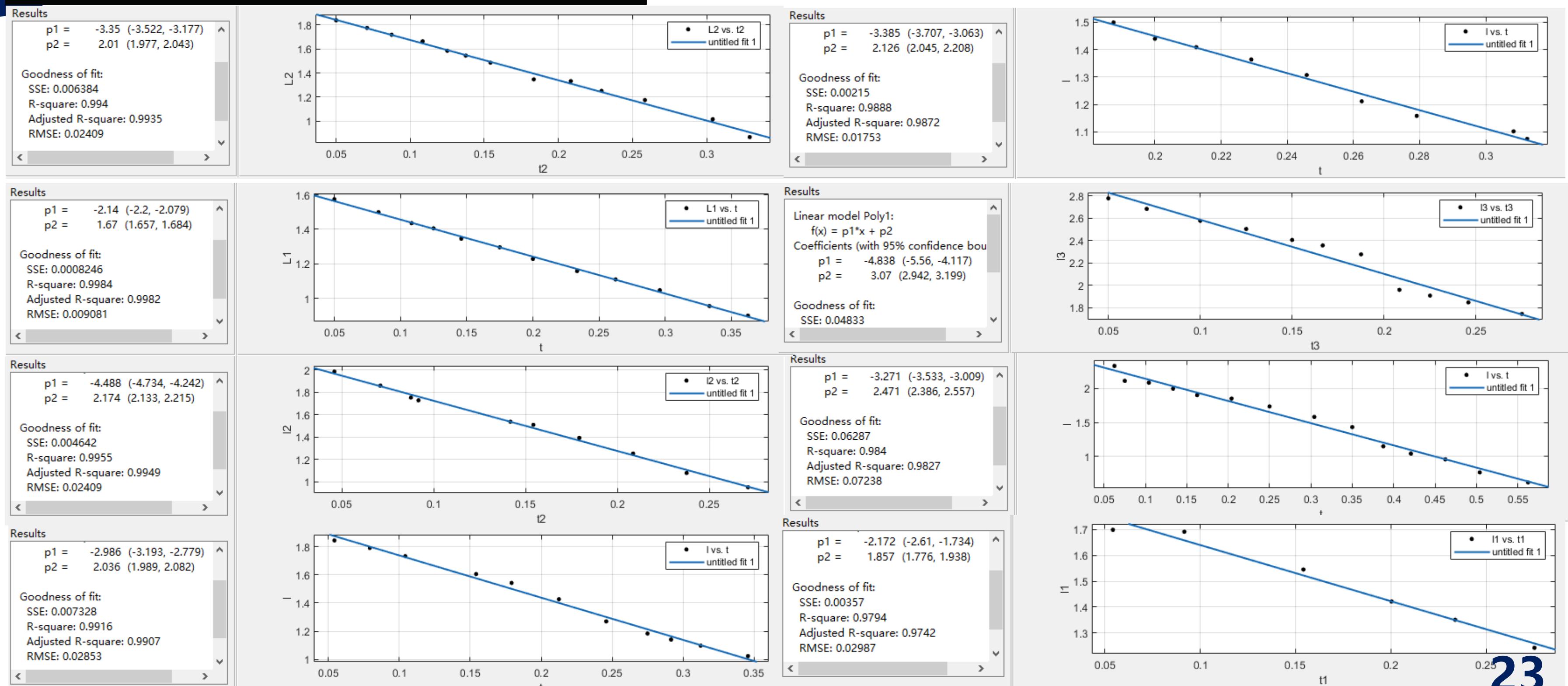


入意义：
由编制方式决定的、
可以表征波面在杆组
传播群速度的量

入测量



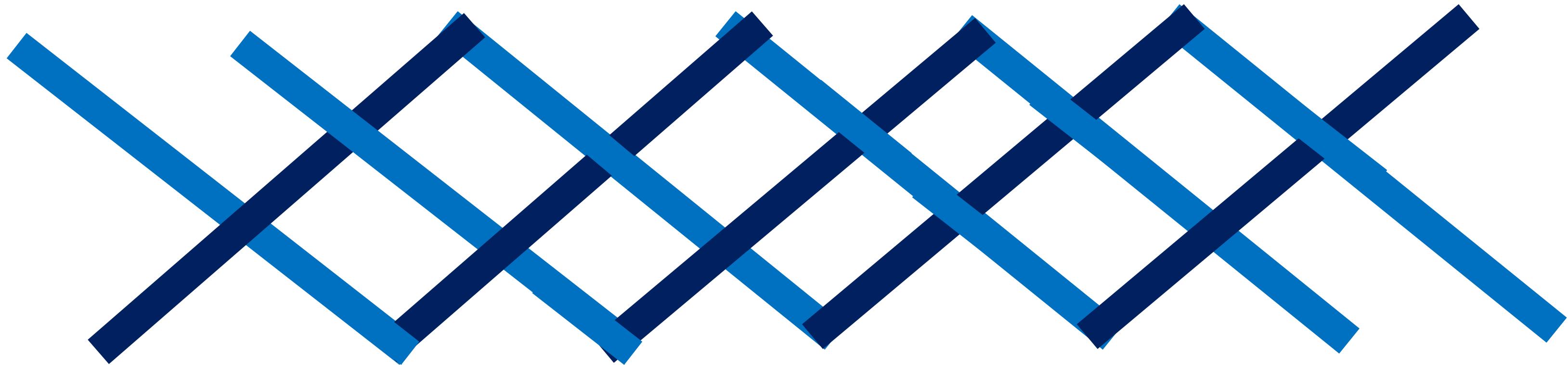
上海科技大学
ShanghaiTech University



编织方式(俯视)



上海科技大学
ShanghaiTech University



<----- 波前传递方向

释放端

实验现象



上海科技大学
ShanghaiTech University

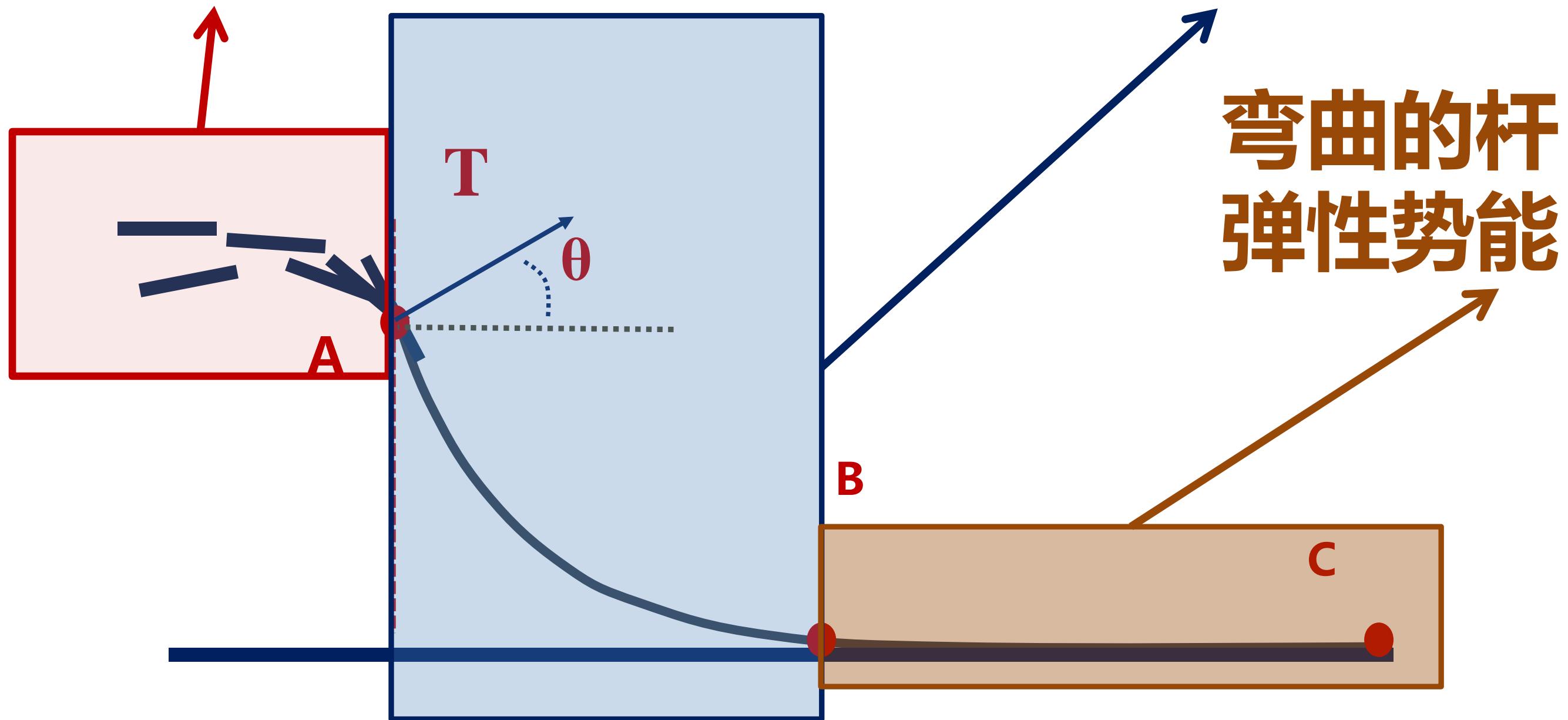


能量角度



上海科技大学
ShanghaiTech University

飞出杆：
动能+势能



波面：
动能+势能(重力+弹性)

弯曲的杆：
弹性势能