`xiaoyaowudi` 的树（tree）

其实题目里的平方和并不重要，改成 k 次方和是一样做的 ~~相信大家都会维护 0,1...k 次方和然后用 NTT 合并~~。

有 $d(u)=-1$ 的情况就不说了。

我们先考虑 $d(u)$ 定义为到 u 最近的白点距离怎么做。如果我们知道了一个 $d(u)$ 的**填法**，那么必然是所有 $d(u)=0$ 的位置染白，其余位置染黑。可以发现，这样的**填法**合法的充要条件是，所有相邻点 $d(u)$ 差不超过 1，并且对任意 $d(u)>0$ 的点，存在一个邻居 $d(v)=d(u)-1$。而且每个填法和染法一一对应。

因此就可以树形 DP 了。记录 $dp[u][x][0/1]$ 表示 $d(u)=x$ 时子树内的方案数，以及是否存在一个儿子满足了 $d(v)=d(u)-1$ 的条件。父亲从儿子转移上来时，也可以去满足儿子的这个条件。根据 $|d(u)-d(fa[u])|\le 1$，可以直接枚举 $d(fa[u])$ 的值。

而拓展到本题 $d(u)$ 的定义是基本上一样的。填法和染法仍然一一对应（可能黑白互换要乘 2），根据所有的 $d(u)=d(v)=1$ 可知 u,v 异色，对于周围都同色的 u 仍然是需要至少一个邻居 $d(v)=d(u)-1$。这同样可以用 $0/1$ 记录到状态里去。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$。

万宁俄罗斯方块（大招版）

注：本题为 [HNOI 2009] 积木游戏 加强版，此题目前只能找到一篇复杂度为 $O(n\sqrt{n})$ 的题解，我们给出了一种 $O(n\log n)$ 的做法，于是加了个 0 后出了这题。

用一个支持区间覆盖和求区间最大值的线段树就可以模拟堆矩形的过程，具体地，在线段树上维护每个横坐标的最高的被矩形覆盖的位置，加入横坐标范围为 $[x,y]$ 的矩形（由于题目输入的特性，需要将 x 加一或者 y 减一）时求 $[x,y]$ 的区间最大值 M 然后区间覆盖 $M+h$，其中 h 是矩形的高。

解法一

$O(n\log n)$, ix35/Kubic

加入一个横坐标范围 $[x,y]$，高度为 h 的矩形 R 后形成的新的洞的轮廓上至少要有一条 R 的边，事实上只有如下五种情况：

1. 洞的轮廓只包含 R 的下边;
2. 洞的轮廓只包含 R 的左边;
3. 洞的轮廓只包含 R 的右边;
4. 洞的轮廓同时包含 R 的左边和下边;
5. 洞的轮廓同时包含 R 的右边和下边。

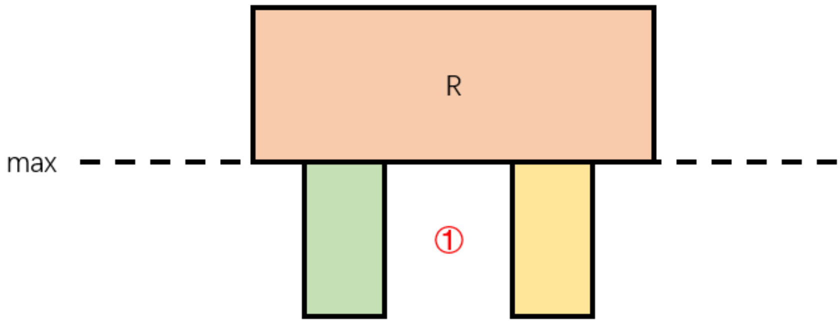
这是因为轮廓显然不可能包含 R 的上边（否则 R 正上方还有别的矩形），也不可能同时包含 R 的左边和右边（否则 R 浮空）。

下面分别讨论这些情况。

1. 洞的轮廓只包含 R 的下边:

   其一般情况如下图，一个洞 ① 从上面被 R 堵住，两边也各被堵住。

   我们求出 R 的横坐标范围 $[x,y]$ 的区间最大值的同时，也求出有多少段由区间最大值组成的连续段，那么两个连续段之间的部分就是一个这样的洞，而连续段数量容易在线段树上顺便维护。



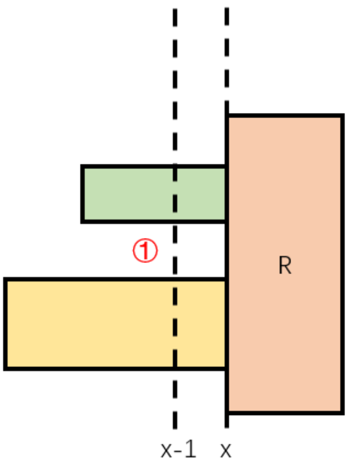
2. 洞的轮廓只包含 R 的左边（右边）：

   其一般情况如下图，一个洞从右边被 R 堵住，上下也各被堵住。

   我们称上下被堵住，左右有一边被堵住的结构叫做“半洞”，我们发现只要考虑横坐标 $x-1$ 处的半洞即可。

   具体地，用 set 维护每个横坐标处的半洞（这个洞在对应横坐标处的上下边界），加入 R 后只会在 x,y 处各增加至多一个半洞（即原本的上边界到 R 的下边界之间的空洞），要查询包含 R 左边（右边）的新洞时只需要在 $x-1$（$y+1$）的 set 中找到 R 这一段纵坐标上的半洞数量即可。

   （利用单调性，用 queue 或 vector 也可）



3. 洞的轮廓同时包含 R 的左边（右边）和下边：

   这只是边界情况，处理 2 中的半洞和 1 中的最大值连续段的时候进行一些特判即可。

时间复杂度为 $O(n\log n)$。

解法二

$O(n\sqrt{n})$, bzy。期望得分 80 分。

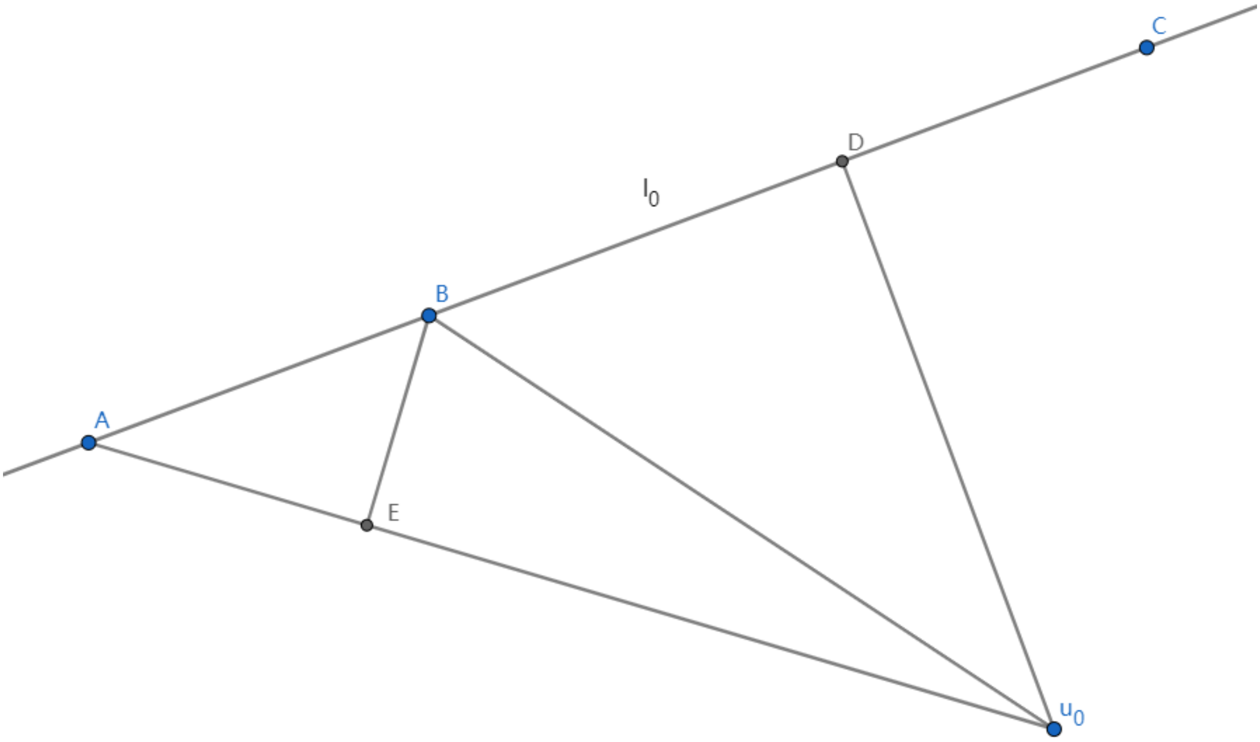
https://www.luogu.com.cn/blog/bzyAdvanced/solution-p4729

点阵（matrix）

我们考虑不合法的点集是什么样的。

下面证明，**对于任意一个不全共线的点集 S，必存在一条直线恰好经过 S 中的两个点。**

> 如果不存在，即任意经过两个点的直线经过第三个点。
>
> 设 T 为所有经过 S 中的两个点的直线组成的集合
>
> $G=\{(u,l)\mid \operatorname{dist}(u,l)\neq 0, u\in S, l\in T\}$，由于所有点不全共线，因此 G 不为空，且 G 有限
>
> 因此我们取 G 中 $\operatorname{dist}(u,l)$ 最小的元素，假设为 (u_0,l_0)

> 由于 l_0 经过 S 中的两个点，因此 l_0 至少经过 S 中的三个点，假设为 A, B, C
>
> 作 $u_0D \perp l_0$，垂足为 D
>
> 根据抽屉原理，A, B, C 至少有两个在 D 同侧（包含 D），假设为 A, B，且 B 在线段 AD 上
>
> 
>
>
> 作 $BE \perp Au_0$，垂足为 E
>
> 由于 $\angle ABu_0 \geq \angle ADu_0 = 90^\circ > \angle Au_0D \geq \angle Au_0B$
>
> 所以 $Au_0 > AB$，$BE = \dfrac{2S_{\triangle ABu_0}}{Au_0} < \dfrac{2S_{\triangle ABu_0}}{AB} = Du_0$
>
> 因此 (B, Au_0) 比 (u_0, l) 更优，矛盾！

所以任意不合法的点集所有点必共线，然后就可以愉快的推式子了。

以下只考虑 ≥ 3 个点的情况。

我们对于竖直，水平，斜 45° 和其他直线分别计算。

对于最后一种

$$Ans = 4\sum_{i\geq 2}\sum_{1\leq k\leq i}[\gcd(i,k)=1]\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{N}{i}\right\rfloor}(N+1-i\cdot j)(N+1-k\cdot j)\cdot\left(2^{j-1}-1\right)$$

化简完是关于 $\phi(i), i\phi(i), i^2\phi(i)$ 的形式

设 $g_k(i) = i^k$

那么 $\left(\left(i^k\phi(i)\right)\circ g_k\right)(j) = j^{k+1}$，于是就可以愉快的用杜教筛了，时间复杂度 $\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$