第三章 线性方程组的直接解法

3.6 Cholesky解Hilbert矩阵

分析

- 直接生成Hilbert矩阵
- 进行Cholesky分解
- 计算b并加入扰动项
- 分布计算x
  - 计算$Ly=b$中的y,采用直接求解法求得
  - 再计算$L^Tx=y$中的x，同样采用直接求解法求得
- 最后求出$||r||_\infty$，$||\triangle x||_\infty$

解题思路

Hilbert的矩阵的生成 见`Hilbert.m`

```
function [H]=Hilbert( n )
    H = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            H(i,j)=1/(i+j-1);
        end
    end
end
```

Cholesky的分解 见`Chlesky.m`

直接采用书上3.10算法实现:

```
function [L] = cholesky(A,n)
    for j = 1:n
        for k = 1:j-1
            A(j,j) = A(j,j)-A(j,k)*A(j,k);
        end
        A(j,j) = sqrt(A(j,j));
        for i = j+1:n
            for k = 1:j-1
                A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(j,k);
            end
            A (i,j) = A(i,j)/A(j,j);
        end
        L = zeros(n,n);
        for p = 1:n
            for k = 1:p
```

```
                L(p,k) = A(p,k);
            end
        end
    end
end
```

Cholesky分解后，求$LL^Tx=b$见`solve_x.m`

可分两步计算，先计算$Ly=b$中的y,采用直接求解法求得，再计算$L^Tx=y$ 中的x,同样采用直接求解法求得，只是顺序是和前一个式子的求解顺序相反，具体算法如下：

```
function [x] = solve_x(L,b,n)
    y = zeros(n,1);
    for i = 1:n
        y(i) = b(i);
        for j = 1:i-1
            y(i) = (y(i) - L(i,j)*y(j));
        end
        y(i)=y(i)/L(i,i);
    end
    U = L';
    x = zeros(n,1);
    for i = n:-1:1
        x(i) = y(i);
        for j = (i+1):n
            x(i) = (x(i) - U(i,j)*x(j));
        end
        x(i) = x(i)/U(i,i);
    end
end
```

入口函数 见`main.m`

最后，在入口函数中完成整体算法流程，n和扰动项delta_b可直接在`main.m`中修改。

```
n=8;
delta = zeros(n,1);
delta(1:n) = 1e-7;
H = Hilbert(n);
x = ones(n,1);
b = H*x + delta;
L = cholesky(H,n);
x_hat = solve_x(L,b,n);
r = b - H*x_hat;
delta_x = x_hat - x;
r_max = 0;
delta_x_max = 0;
for i = 1:n
    if r_max < abs(r(i))
        r_max = abs(r(i));
    end
    if delta_x_max < abs(delta_x(i))
```

```
        delta_x_max = abs(delta_x(i));
    end
end
r_max
delta_x_max
```

实验结果

> 实验中添加扰动均为白扰动

无扰动

	r-无穷范数	△x-无穷范数
n=8	2.2204e-16	4.1154e-07
n=10	4.4409e-16	4.4459e-04
n=12	4.4409e-16	0.3358

有扰动

	r-无穷范数	△x-无穷范数
n=8	2.2204e-16	0.0216
n=10	4.4409e-16	0.7007
n=12	4.4409e-16	23.6202

实验结论

- 随着n的增加，r的无穷范数会增加,误差的无穷范数也会增加，误差的无穷范数增加较快，成指数级增长，受影响较大。
- 加上扰动对残差没有影响，对误差的无穷范数影响很大。
- 在n=12且加上扰动时，问题甚至出现了发散现象。

这些结论说明了Hilbert矩阵是一个病态矩阵，且随着n的增加，病态性越来越严重。