ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Типовик

Вариант № 120

Выполнил:
Студентка группы J3111
Нимеева Ангелина Борисовна
ИСУ: 466898
Преподаватель:
Табиева А.В.

Санкт-Петербург
2025

Задание 1

Исследовать данную функцию на равномерную непрерывность на данном множестве пользуясь определением.

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}},\ \text{а) } X = [1, +\infty);\ \text{б) } X = (0,\ 1).$$

① $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$

а). $X = [1; +\infty)$.

Определение: f равн. непр. на X, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in X:\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

При $x, y \geq 1$:

$$|f(x) - f(y)| = \left|2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \left|2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right|$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(x-y)$$

т.к. $x, y \geq 1$, то $c \geq 1$: $\frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2}$

Тогда:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x-y|.$$

$$2|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x-y|.$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\right| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt{xy}} \leq \frac{\frac{1}{2}|x-y|}{\sqrt{xy}}.$$

т.к. $x, y \geq 1$, то $\sqrt{xy} \geq 1$: $\frac{\frac{1}{2}|x-y|}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|\sqrt{x} - \sqrt{y}| + \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| \leq |x-y| + \frac{1}{2}|x-y| = \frac{3}{2}|x-y|$$

$\forall \varepsilon > 0$: $\delta\ \frac{2\varepsilon}{3}$: $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{2}\delta = \varepsilon$.

Функция равн. непр.

б). $X = (0,1)$.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in X: |x-y| < \delta$ но $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

$\exists \varepsilon = 1$, δ-любое. $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

Тогда: $|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right| = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\left(\frac{2}{n} + n\right) - \left(\frac{2}{n+1} + (n+1)\right)\right| =$

$= \left|1 - \frac{2}{n(n+1)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Функция не равномерно непрерывная.

Задание 2

Преобразовать выражение к интегральной сумме, доказать существование соответствующего интеграла и найти предел.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1-n}^{n} \frac{k}{kn+2n^2}$$

Решение:

② $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1-n}^{n} \frac{k}{kn+2n^2}$

Преобразуем $\frac{k}{kn+2n^2}$:

$$\frac{k}{kn+2n^2} = \frac{(k+2n)-2n}{kn+2n^2} = \frac{k+2n}{kn+2n^2} - \frac{2n}{kn+2n^2} =$$

$$= \frac{\cancel{k+2n}}{n(\cancel{k+2n})} - \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(k+2n)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{k+2n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2n}{k+2n}\right).$$

Подставим и рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1-n}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2n}{k+2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1-n}^{n}\left(1 - \frac{2n}{k+2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\underbrace{\sum_{k=1-n}^{n} 1}_{2n} - 2n\sum_{k=1-n}^{n} \underbrace{\frac{1}{k+2n}}_{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{k+2n}}\right) = \frac{1}{n}\left(2n - \frac{2n}{n}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{n}{k+2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(2n - 2\sum_{k=1-n}^{n}\frac{n}{k+2n}\right) = 2 - \frac{2}{n}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{n}{k+2n}.$$

Замена: $j = k+n$

$k = 1-n \Rightarrow j = (1-n)+n = 1$

$k = n \Rightarrow j = n+n = 2n$

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{n}{(j-n)+2n} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{n}{j+n}$$

Упростим:

$$\frac{\cancel{n}}{j+n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\frac{j}{n}+1\right)} = \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$$

Подставим: $\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$

$$S_n = 2 - \frac{2}{n} \cdot n \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}.$$

Рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2 - 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$$

Заметим, что:

$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$ – это частичная интегральная сумма функции $\frac{1}{1+x}$ на $[0;2]$, значит она стремится к значению интеграла от этой функции на отрезке $[0;2]$. При $n\to\infty$:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} \to \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx$$

Функция $\frac{1}{1+x}$ непрерывна на $[0;2]$, значит, интеграл существует.

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x| \Big|_0^2 = \ln 3.$$

Подставим: $\lim_{n\to\infty} S_n = 2 - 2\ln 3$.

Ответ: $2 - 2\ln 3$.

Задание 4

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением
$x^4 + y^4 = a^2xy.$

Решение:

④ $x^4+y^4=a^2xy.$

Перейдём в полярные координаты:

$x=r\cos\varphi \qquad y=r\sin\varphi.$

Подставим:

$(r\cos\varphi)^4+(r\sin\varphi)^4=a^2(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)$

$r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=a^2r^2\cos\varphi\sin\varphi \quad |:r^2,\ r\neq 0.$

$r^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=a^2\cos\varphi\sin\varphi.$

$$r^2=\frac{a^2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$$

Заметим, что:

$r^2\geqslant 0 \Rightarrow \cos\varphi\sin\varphi\geqslant 0.$

Значит, кривая сущ-ет в интервалах

$\varphi\in[0;\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[\pi;\frac{3\pi}{2}].$

Т.к. кривая симметрична относительно начала координат, достаточно вычислить площадь в одном из них и умножить результат на 2:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}d\varphi.$$

$$S=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}d\varphi.$$

Заметим, что:

$$\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi.$$

Тогда ответ:

$$S = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi}\, d\varphi.$$

Задание 5

Кривая задана как пересечение поверхностей, заданных данными уравнениями в декартовых координатах. Задайте кривую параметрически и найдите длину кривой.

$x^2 = 9y$, $16xy = 9z^2$, $|z| \le 12$.

Решение:

(5) $x^2 = 9y$, $16xy = 9z^2$, $|z| \le 12$

Выразим y:

$$y = \frac{x^2}{9}.$$

Подставим:

$$16x\left(\frac{x^2}{9}\right) = 9z^2$$

$$\frac{16x^3}{9} = 9z^2$$

$$z^2 = \frac{16x^3}{81}$$

$$z = \pm\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$$

Пусть $x = t$, тогда: $y = \frac{t^2}{9}$, $z = \pm\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{9}$, $t \geq 0$.

Найдём длину кривой по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{\Big(\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=1}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=\frac{2t}{9}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=\pm\frac{2\sqrt{t}}{3}}\Big)^2}\, dt.$$

Подставляем значения:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{2t}{9}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{t}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{81} + \frac{4t}{9}} = \sqrt{\frac{4t^2+36t+81}{81}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2t+9)^2}{81}} = \frac{2t+9}{9}$$

При $t = 9 \Rightarrow z = \pm 12$.

$$L = \int_0^9 \frac{2t+9}{9}\, dt = \frac{1}{9}\left(t^2 + 9t\right)\Big|_0^9 = \frac{1}{9}(81+81) = 18.$$

Задание 6

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак – на абсолютную и условную сходимость.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x\sqrt{x}}dx \; ;$$

Решение:

6). $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x}}\,dx.$

Особые точки: 0, ∞.

∄ 0:

$\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)$ – огр., т.к. $|\sin| \leq 1$

$$\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$, $p > 1 \Rightarrow$ расходится.

∄ ∞:

$$\sin\left(x+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right) = \sin(x)$$

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$, $p > 1 \Rightarrow$ сходится.

Значит: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x}}\,dx$ – расходится.

Задание 7

Исследовать интеграл на сходимость в каждой особой точке. Если функция меняет знак – на абсолютную и условную сходимость.

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx \ ;$$

Решение:

$$(7)\ \int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx.$$

Преобразуем:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx = \int_0^\infty \frac{\ln((1+x^2)^2-x^2)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}dx$$

Заметим, что:

$\ln(1+x^2+x^4) \geq 0$, $x^{3/2} \geq 0$, $e^x-1 \geq 0$ на $[0;\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ законопост.

Особые точки: $0, \infty$.

$\nexists$ 0:

$$\ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x\to 0} \ln(1+x^2) \xrightarrow{x\to 0} x^2$$

$$e^x-1 \xrightarrow{x\to 0} x$$

$$\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{x^2}{x^{3/2}\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$, $p<1 \Rightarrow$ сходится.

4) ∞

$\ln(1+x^2+x^4) \xrightarrow{x\to\infty} 4\ln x$

$e^x - 1 \xrightarrow{x\to\infty} e^x$

т.к. e^x - растет быстрее $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)} = 0.$

Значит: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^{3/2}(e^x-1)}\,dx$ - сходится.

Лабораторная работа

Решение [здесь]