



Facultad de Ciencias

Álgebra Superior I

Tarea 1: Conjuntos

Nombre del alumno

Grupo: 4010

Fecha

1.

Diga cuáles de los siguientes conjuntos es elemento el conjunto vacío, justificando sus respuestas:

- (I) $\emptyset \notin \emptyset$, ya que los dos son conjuntos (el conjunto vacío) y este se define como el conjunto sin elementos.
- (II) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$, si pertenece ya que $\{\emptyset\}$ es el conjunto unitario que tiene como elemento al conjunto vacío.
- (III) $\{\{\emptyset\}\} \notin \{\{\emptyset\}\}$, ya que $\{\{\emptyset\}\}$ es el conjunto unitario, con un elemento que es el conjunto unitario por lo que el conjunto vacío no puede pertenecer.
- (IV) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$, ya que $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ tiene dos elementos, el conjunto vacío y un conjunto unitario.

2.

Considere el conjunto $\mathbb{U} = \{-7, -2, -1, 0, 5, 11, 23, 47, 100\}$ y los subconjuntos $A = \{-7, 0, 5, 47, 100\}$ y $B = \{-1, 0, 5, 11, 23\}$ Encuentre:

- $A \cap B = \{0, 5\}$
- $A^c \cap B = A^c = \{-2, -1, 11, 23\} \therefore A^c \cap B = \{-1, 11, 23\}$
- $A \cap B^c = B^c = \{-7, -2, 47, 100\} \therefore A \cap B^c = \{-7, 47, 100\}$
- $A^c \cap B^c = \{-2\}$
- $(A \cap B)^c = \{-7, -2, -1, 11, 23, 47, 100\}$

3.

Sea \mathbb{U} un conjunto universal. Demuestre que para cualquier subconjunto A de \mathbb{U} se tiene que:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demostración por reducción a lo absurdo.

Supongamos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$, por definición tenemos:

$A \cap \emptyset = \{x \in A \wedge x \in \emptyset\}$, entonces de nuestra suposición estaríamos diciendo que $x \in \emptyset$, lo que es absurdo ! ya que \emptyset no tiene elementos.

$\therefore A \cap \emptyset = \emptyset$

- $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $A \cup \mathbb{U} \neq \mathbb{U}$, por definición de unión tenemos que

$A \cup \mathbb{U} = \{x \in A \vee x \in \mathbb{U}\}$

Entonces de nuestra suposición estaríamos diciendo que $x \notin \mathbb{U}$, lo que es absurdo ! ya que por hipótesis $x \in \mathbb{U}$

$\therefore A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

- $A \cap A^c = \emptyset$

Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $A \cap A^c \neq \emptyset$, lo que significaría que $\exists x | x \in A \cap A^c$

Pero por definición tenemos que:

$A \cap A^c = \{x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in \mathbb{U}\}$

lo que nos lleva a una contradicción ! por que no puede ser que:

$x \in A \wedge x \notin A$

$\therefore A \cap A^c = \emptyset$

- $A \cup A^c = \mathbb{U}$

Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $A \cup A^c \neq \mathbb{U}$, por definición de complemento sabemos que:

$A^c = \{x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A\}$, pero por hipotesis sabemos que $x \in A$

Por lo que $\{(x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A) \cup x \in A\}$! Por lo que es absurdo que $x \notin A$

y que $x \in \mathbb{U}$.

4.

Demuestra que para cualquiera conjunto A y B , se tiene que:

- (a) $A \subseteq B$ si y solo si $A \setminus B = \emptyset$;

$$(\implies) A \subseteq B \implies A \setminus B = \emptyset$$

Demostración por contradicción:

$$A \subseteq B(1) \wedge A \setminus B \neq \emptyset(2)$$

Por definición podemos expresar a (1) y (2) como:

$$A \subseteq B := \forall x(x \in A \implies x \in B) \text{ y } x \in A \setminus B := (x \in A \wedge x \notin B)!$$

Esto nos lleva a una contradicción ya que la diferencia de A y B , $x \in A$ y $x \notin B$, pero se dijo que $\forall x(x \in A \implies x \in B)$ por lo que no puede ser que $x \in A$ y $x \notin B$.

$$(\Longleftarrow) A \setminus B = \emptyset \implies A \subseteq B$$

Demostración por contrapositiva:

Si $A \not\subseteq B \implies A \setminus B \neq \emptyset$, por definición de diferencia tenemos que:

$x \in A - B := (x \in A \wedge x \notin B)$, por hipótesis tenemos que:

$A \not\subseteq B := \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ por lo que si a esto le aplicamos una diferencia nos quedaría que:

$x \in A \wedge x \notin B$ (def) y como $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ entonces $A \setminus B \neq \emptyset$ lo que demuestra que:

$$A \setminus B = \emptyset \implies A \subseteq B$$

- (b) $B \subseteq A$ si y solo si $(A \setminus B) \cup B = A$;

$$(\implies) B \subseteq A \implies (A \setminus B) \cup B = A$$

Demostración por contradicción:

Si $B \subseteq A(1) \wedge (A \setminus B) \cup B \neq A(2)$, por definición, sabemos que:

$$B \subseteq A := \forall x(x \in B \implies x \in A)$$

y que $(A \setminus B) \cup B \neq A$ es $x \in (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B)$ pero $x \notin A$!

Esto es una contradicción ya que si $\forall x(x \in B \implies x \in A)$

y $(x \in A \wedge x \in B)$,

no puede ser $x \notin A$ ya que en ambos casos $x \in A$.

$$\therefore B \subseteq A \implies (A \setminus B) \cup B = A.$$

$$(\Longleftarrow)(A \setminus B) \cup B = A \implies B \subseteq A$$

Por definición podemos expresar a $(A \setminus B) \cup B = A$ como:
 $x \in (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B) = A$
 por lo tanto $(\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B) \subseteq A$ (1)
 y $A \subseteq (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B)$,
 por (1) tenemos dos casos $\{x \in A \wedge x \notin B\} \subseteq A$ que es cierto ya que por
 teorema de reflexibilidad (visto en clase) $A \subseteq A$
 y tenemos el segundo caso $B \subseteq A$, lo que completa la demostración.