ALVARADO PALACIOS FERNANDO
TAPIA GARCÍA ANGEL GABRIEL
ROSAS FRANCO DIEGO ANGEL
JIMÉNEZ MILKE SAMUEL

PUNTO EXTRA 1

ÁLGEBRA SUPERIOR

1.

Diga cuáles de los siguientes conjuntos es elemento el conjunto vacío, justificando sus respuestas:

(I) $\varnothing$) $\varnothing \notin \varnothing$, ya que los dos son conjuntos (el conjunto vacío) y este se define como el conjunto sin elementos.

(II) $\{\varnothing\}$) $\varnothing \in \{\varnothing\}$, si pertenece ya que $\{\varnothing\}$ es el conjunto unitario que tiene como elemento al conjunto vacío.

(III) $\{\{\varnothing\}\}$) $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$, ya que $\{\{\varnothing\}\}$ es el conjunto unitario, con un elemento que es el conjunto unitario por lo que el conjunto vacío no puede pertenecer.

(IV) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$, ya que $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ tiene dos elementos, el conjunto vacío y un conjunto unitario.

2.

Considere el conjunto $\mathbb{U} = \{-7, -2, -1, 0, 5, 11, 23, 47, 100\}$ y los subconjuntos $A = \{-7, 0, 5, 47, 100\}$ y $B = \{-1, 0, 5, 11, 23\}$ Encuentre:

- $A \cap B = \{0, 5\}$
- $A^c \cap B = A^c = \{-2, -1, 11, 23\} \therefore A^c \cap B = \{-1, 11, 23\}$
- $A \cap B^c = B^c = \{-7, -2, 47, 100\} \therefore A \cap B^c = \{-7, 47, 100\}$
- $A^c \cap B^c = \{-2\}$
- $(A \cap B)^c = \{-7, -2, -1, 11, 23, 47, 100\}$

3.

Sea $\mathbb{U}$ un conjunto universal. Demuestre que para cualquier subconjunto A de $\mathbb{U}$ se tiene que:

- $A \cap \varnothing = \varnothing$
  Demostración por reducción a lo absurdo.
  Supongamos que $A \cap \varnothing \neq \varnothing$, por definición tenemos:
  $A \cap \varnothing = \{x \in A \wedge x \in \varnothing\}$, entonces de nuestra suposición estaríamos diciendo que $x \in \varnothing$, lo que es absurdo ! ya que $\varnothing$ no tiene elementos.
  $\therefore A \cap \varnothing = \varnothing$

- $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$
  Demostración por reducción al absurdo.
  Supongamos que $A \cup \mathbb{U} \neq \mathbb{U}$, por definición de unión tenemos que $A \cup \mathbb{U} = \{x \in A \vee x \in \mathbb{U}\}$
  Entonces de nuestra suposición estaríamos diciendo que $x \notin \mathbb{U}$, lo que es absurdo ! ya que por hipótesis $x \in \mathbb{U}$
  $\therefore A \cup \mathbb{U} \neq \mathbb{U}$

- $A \cap A^c \neq \varnothing$
  Demostración por reducción al absurdo.
  Supongamos que $A \cap A^c \neq \varnothing$, lo que significaría que $\exists x | x \in A \cap A^c$
  Pero por definición tenemos que:
  $A \cap A^c = \{x \in A \wedge x \notin A \wedge x \in \mathbb{U}\}$
  lo que nos lleva a una contradicción ! por que no puede ser que:
  $x \in A \wedge x \notin A$
  $\therefore A \cap A^c = \varnothing$

- $A \cup A^c = \mathbb{U}$
  Demostración por reducción al absurdo.
  Supongamos que $A \cup A^c \neq \mathbb{U}$, por definición de complemento sabemos que:
  $A^c = \{x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A\}$, pero por hipotesis sabemos que $x \in A$
  Por lo que $\{(x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A) \cup x \in A\}$! Por lo que es absurdo que $x \notin A$ y que $x \in \mathbb{U}$.

4.

Demuestra que para cualquiera conjunto A y B, se tiene que:

(a) $A \subseteq B$ si y solo si $A \setminus B = \varnothing$;
$(\implies) A \subseteq B \implies A \setminus B = \varnothing$
Demostración por contradicción:
$A \subseteq B(1) \wedge A \setminus B \neq \varnothing(2)$
Por definición podemos expresar a (1) y (2) como:
$A \subseteq B := \forall x(x \in A \implies x \in B)$ y $x \in A \setminus B := (x \in A \wedge x \notin B)!$
Esto nos lleva a una contradicción ya que la diferencia de A y B, $x \in A$ y $x \notin B$, pero se dijo que $\forall x(x \in A \implies x \in B)$ por lo que no puede ser que $x \in A$ y $x \notin B$.

$(\Longleftarrow) A \setminus B = \varnothing \implies A \subseteq B$
Demostración por contrapositiva:
Si $A \subsetneqq B \implies A \setminus B \neq \varnothing$, por definición de diferencia tenemos que:
$x \in A - B := (x \in A \wedge x \notin B)$, por hipótesis tenemos que:
$A \subsetneqq B := \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ por lo que si a esto le aplicamos una diferencia nos quedaría que:
$x \in A \wedge x \notin B$ (def) y como $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ entonces $A \setminus B \neq 0$ lo que demuestra que:
$A \setminus B = \varnothing \implies A \subseteq B$

(b) $B \subseteq A$ si y solo si $(A \setminus B) \cup B = A$;
$(\implies) B \subseteq A \implies (A \setminus B) \cup B = A$
Demostración por contradicción:
Si $B \subseteq A(1) \wedge (A \setminus B) \cup B \neq A(2)$, por definición, sabemos que:
$B \subseteq A := \forall x(x \in B \implies x \in A)$
y que $(A \setminus B) \cup B \neq A$ es $x \in (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B)$ pero $x \notin A!$.
Esto es una contradicción ya que si $\forall x(x \in B \implies x \in A)$
y $(x \in A \wedge x \in B)$,
no puede ser $x \notin A$ ya que en ambos casos $x \in A$.
$\therefore B \subseteq A \implies (A \setminus B) \cup B = A$.

$(\Longleftarrow)(A \setminus B) \cup B = A \implies B \subseteq A$

Por definición podemos expresar a $(A \setminus B) \cup B = A$ como:
$x \in (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B) = A$
por lo tanto $(\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B) \subseteq A(1)$
y $A \subseteq (\{x \in A \wedge x \notin B\} \vee x \in B)$,
por (1) tenemos dos casos $\{x \in A \wedge x \notin B\} \subseteq A$ que es cierto ya que por teorema de reflexibilidad(visto en clase) $A \subseteq A$
y tenemos el segundo caso $B \subseteq A$, lo que completa la demostración.