

Análisis de Satisfacibilidad en Lógica Proposicional¹

Marcos Villagra

Departamento de Investigación y Postgrado

Facultad Politécnica

Universidad Nacional de Asunción

Casilla Postal 2169, San Lorenzo, Paraguay

mvillagra@pol.una.py

Benjamín Barán

Departamento de Investigación y Postgrado

Facultad Politécnica

Universidad Nacional de Asunción

Casilla Postal 2169, San Lorenzo, Paraguay

bbaran@pol.una.py

Resumen

Actualmente existe poco entendimiento teórico sobre la mecánica de los algoritmos de búsqueda local y las metaheurísticas. El diseño de vecindades, políticas de selección de soluciones iniciales, y análisis de las estrategias de búsqueda son algunas cuestiones muy importantes para estas clases de algoritmos. Por lo tanto, este trabajo estudia el espacio de asignaciones del problema MAX-SAT, el cual es una variante del problema SAT en lógica proposicional. Particularmente, dos tipos de topologías son analizadas. Este trabajo está enfocado en el estudio de convexidad global, el cual puede ser explotado por algunas metaheurísticas, como ha sido observado en la literatura. Conocer la estructura del espacio de asignaciones dará lugar a un mayor entendimiento sobre la efectividad y eficiencia de metaheurísticas para MAX-SAT.

Palabras Claves: SAT, Búsqueda Local, Metaheurísticas, Convexidad Global.

¹ Un resumen de este trabajo fue publicado y presentado por los autores en el *2nd International Conference on Bio-Inspired Models of Network, Information, and Computing Systems – BIONETICS 2007*, bajo el título *A Global Convexity Analysis on the MAX-SAT Domain..* 10-12 de Diciembre 2007. Budapest, Hungría.

Abstract

To this day, there is little theoretical understanding on the mechanics of local search algorithms and metaheuristics. Design of neighborhoods, policies for selection of initial solutions and analysis of search strategies effectiveness are very important issues for this class of algorithms. Therefore, this work studies the assignments space of MAX-SAT which is a SAT variant, a paradigm in computer science. Particularly, two solution space topologies are analyzed. This analysis is focused on the study of global convexity, which may be exploited by some metaheuristics, as already observed in the literature. Understanding the structure of the solution space will give more insight on metaheuristics effectiveness for MAX-SAT.

Key words: SAT, Local Search, Metaheuristics, Global Convexity.

1. Introducción

El problema de satisfacibilidad en lógica proposicional o SAT (del inglés *Satisfiability Problem*) consiste en encontrar una asignación de valores a variables Booleanas para una fórmula proposicional de tal forma a que se evalúe como verdadera. SAT fue el primer problema NP-completo (COOK, 1971), y como tal se encuentra entre los problemas más importantes de las ciencias de la computación. Este problema tiene aplicaciones en inferencia inductiva (KAMATH et al., 1992), integridad de bases de datos (ASIRELLI et al., 1985), síntesis de circuitos (GU y PURI, 1995), y muchas otras más.

Actualmente existen muchos algoritmos para resolver el SAT. Estos algoritmos pueden ser divididos en dos clases: *Completo*s e *Incompleto*s. Los algoritmos completos indican si una fórmula dada es verdadera o falsa, y retorna una asignación de valores a variables. La mayoría de estos algoritmos están basados en el método de Davis-Putnam

(DAVIS y PUTNAM, 1960; DAVIS et al, 1962), el cual consiste en una búsqueda en árbol con retroceso (del inglés *backtracking*). Los algoritmos incompletos intentan encontrar una asignación que aproxime la satisfacibilidad de una fórmula. Estos métodos están principalmente basados en búsqueda local, donde Walksat (SELMAN et al., 1994) es uno de los más famosos.

Un nuevo enfoque basado en metaheurísticas se está volviendo muy popular. Estos algoritmos son incompletos e incluyen métodos como Templado Simulado (BERINGER et al., 1994), Computación Evolutiva (EIBEN y VAN DER HAUW, 1997), Optimización por Colonia de Hormigas (SOLNON, 2002) por citar algunos. Hasta estos días, los resolutores SAT basados en metaheurísticas no pueden competir contra algoritmos de búsqueda local del estado del arte (STÜTZLE et al., 2006).

La investigación en el área de las metaheurísticas ha evolucionado en base a prueba y el error (BORGES y HANSEN, 2000), motivado por mejorar las mejores soluciones conocidas para problemas dados y no por identificar las razones de los éxitos y fracasos de estos algoritmos. La comunidad científica está comenzando a darse cuenta de la importancia de un entendimiento teórico del diseño de las vecindades de búsqueda, reglas para seleccionar soluciones iniciales, y la efectividad de varias estrategias de búsqueda (JOHNSON, 2000; DIMITRIOU y SPIRAKIS, 2004).

Pocos estudios han sido realizados sobre el espacio de asignaciones de SAT. Dimitriou y Spirakis (DIMITRIOU y SPIRAKIS, 2004) dan evidencias de que es posible identificar *a priori* que estructura de vecindad dará lugar a un buen algoritmo, analizando las propiedades del espacio de búsqueda. ZHANG (2004) estudió la correlación aptitud-distancia de los espacios de asignación donde los óptimos locales se agrupan, hecho que puede ser explotado por los algoritmos de búsqueda local.

Este trabajo presenta un análisis topológico del espacio de asignaciones de *Random-SAT*, i.e., instancias SAT generadas en forma aleatoria. Este análisis está enfocado en el estudio de convexidad global, el cual ha sido observado en el problema del cajero viajante (BORGES y HANSEN, 2000; BOESE et al., 1994; VILLAGRA et al., 2006) y puede ser explotado por una clase de algoritmo de colonia de hormigas (GÓMEZ y BARÁN, 2004). El objetivo de este trabajo es la de proveer un paradigma que permita explicar el comportamiento de las metaheurísticas (principalmente las basadas en población) para SAT, y el diseño de algoritmos eficientes como es sugerido en (BORGES y HANSEN, 2000; VILLAGRA et al., 2006).

El resto de este trabajo se encuentra organizado como sigue. La sección 2 explica el problema SAT y MAX-SAT. La sección 3 presenta la convexidad global en un problema de optimización matemática. La sección 4 introduce el marco teórico. La sección 5 explica la metodología aplicada y el análisis experimental. Luego, una comparación entre un algoritmo de búsqueda local y una metaheurística basada en población es presentada en la sección 6. Finalmente, las conclusiones y trabajos futuros se dejan para la sección 7.

2. El Problema SAT

SAT (GAREY y JOHNSON, 1979) se define como un conjunto de variables Booleanas $X = \{x_1, K, x_n\}$ y una fórmula o sentencia $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ donde n denota el número de variables. El objetivo es encontrar una asignación $x = \langle x_1, K, x_n \rangle \in \{0,1\}^n$ (i.e., un modelo) donde $f(x) = 1$. La fórmula se dice *satisfacible* si existe un modelo, de otra forma se dice que es *no satisfacible*. Un literal es una variable (también llamado átomo o símbolo) o su negación. Una cláusula es una disjunción de literales, i.e.,

literales conectados por el operador lógico \cup ². La fórmula f se encuentra en forma normal conjuntiva o CNF (del inglés *Conjunctive Normal Form*) si $f(x) = c_1(x) \cup \dots \cup c_m(x)$, donde cada c_i es una cláusula y m denota el número de cláusulas. Las fórmulas pertenecientes a la familia k -CNF tienen exactamente k literales por cláusula. SAT puede asumirse sin pérdida de generalidad poseer fórmulas CNF (TSEITIN, 1968), donde k -SAT solo contiene sentencias en k -CNF. Se sabe que 2-SAT se resuelve en tiempo polinomial, mientras que k -SAT es NP-completo para $k \geq 3$ (GAREY y JOHNSON, 1979).

MAX-SAT es una variante de optimización de SAT. Dado un conjunto de cláusulas, MAX-SAT es el problema de encontrar una asignación x que maximice el número de cláusulas satisfechas $f(x)$. En MAX-SAT ponderado cada cláusula c_i tiene asignado un peso w_i , mientras que en MAX-SAT no ponderado se tiene $w_i = 1$ para toda i . Entonces, cuando se busca por una solución de MAX-SAT también se está buscando asignaciones para SAT. Por lo tanto, las soluciones se refieren a asignaciones y viceversa. Solo existe una diferencia entre MAX-SAT y SAT, donde MAX- k -SAT es NP-difícil para $k \geq 2$ (GAREY y JOHNSON, 1979).

En 3-SAT, transiciones rápidas en la solubilidad de una instancia puede observarse. Este fenómeno es llamado transición de fase (del inglés *phase transition*). Si la instancia tiene pocas cláusulas se dice que es no-restringida y es fácil encontrar un modelo. Si hay un gran número de cláusulas se dice que la instancia es sobre-restringida, y una buena heurística será capaz de recortar rápidamente gran parte del árbol de búsqueda. La transición de fase ocurre cuando se pasa de instancias no-restringidas a instancias sobre-restringidas (CHEESEMANN, et al., 1991). Las instancias más difíciles se encuentran entre estos dos tipos de instancias, donde el 50% de ellas es satisfacible

² en arquitectura de computadores este operador es la compuerta lógica OR denotada también por $+$.

con aproximadamente $m/n \gg 4.3$. Este valor se conoce como punto de cruce (CRAWFORD Y AUTON, 1993).

Este trabajo estudia el espacio de asignaciones de *Random-MAX-3-SAT*, el cual de ahora en adelante será referido simplemente como RMS.

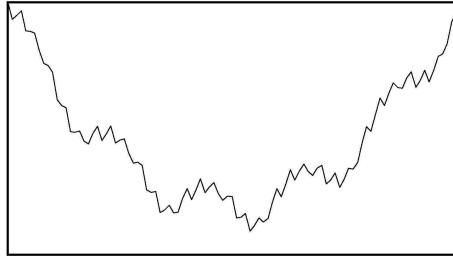
3. Propiedades del Espacio de Búsqueda

En general, los algoritmos son estudiados por medio de problemas de prueba o análisis de complejidad. Si un algoritmo no se comporta como se esperaba, entonces se aplican cambios hasta encontrar un procedimiento efectivo y eficiente. De otra forma, el algoritmo es descartado. Algunos autores han sugerido un nuevo enfoque para el diseño de algoritmos (BORGES y HANSEN, 2000; VILLAGRA et al., 2006), donde el problema es estudiado primero y luego un algoritmo apropiado es construido acorde a las características topológicas del espacio de búsqueda (ZHANG, 2004; GUTIÉRREZ y BRIZUELA, 2006).

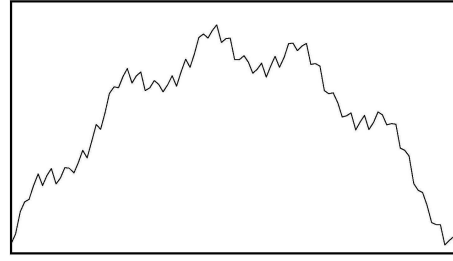
Trabajos previos descubrieron la existencia de una estructura topológica para el problema del cajero viajante conocido como Convexidad Global (BORGES y HANSEN, 2000; BOESE et al., 1994; VILLAGRA et al., 2006). Convexidad global no es convexidad en un sentido estricto (BORGES y HANSEN, 2000), pero puede ser usado para denotar la observación empírica de que los mejores óptimos locales se encuentran cerca en una pequeña parte del espacio de soluciones, el cual con suerte contiene al óptimo global.

En un contexto de minimización, BOESE et al. (1994) sugirieron una analogía con una estructura de gran valle, en el cual el conjunto de óptimos locales parecen convexos con un solo óptimo global. Aunque no existe una definición formal de

convexidad global, la figura 1 da un bosquejo intuitivo de una estructura globalmente convexa.



(a) en un contexto de minimización



(b) en un contexto de maximización

Figura 1. Bosquejo intuitivo de la estructura de un espacio globalmente convexo.

Sea $M = \{x^1, \dots, x^t\}$ una muestra con cardinalidad $|M| = t$ tomada del espacio de soluciones factibles S de un problema de optimización con estructura globalmente convexa. También, sea $d(x^i, x^j)$ una métrica de distancia entre las soluciones x^i y x^j , y $f(x)$ el valor de la función objetivo para la solución x . Considerando un contexto de minimización sin pérdida de generalidad³, la figura 2(a) muestra un caso particular para $t=6$. Claramente, las mejores soluciones se encuentran ubicadas en el centro del espacio respecto al conjunto M . La figura 2(b) muestra una gráfica de dispersión de $f(x)$ y la distancia media de cada $x \in M$ al conjunto M definida como:

$$d(x, M) = \frac{1}{t} \sum_{x^i \in M} d(x, x^i) \quad (1)$$

Existe una correlación positiva entre la calidad de la solución y la distancia media a la muestra; en otras palabras, cuanto mejor sea la solución $f(x)$, menor será su distancia media $d(x, M)$, i.e., buenas soluciones se encuentran ubicadas centralmente respecto a M .

La convexidad global solo puede existir cuando una topología ha sido establecida en el espacio de soluciones (i.e., distancia entre soluciones y superficie de

³ minimizar f es igual a maximizar $-f$.

costos) (BORGES y HANSEN, 2000). Entonces, una métrica de calidad y una estructura de vecindad⁴ deben ser definidas en el espacio de soluciones.

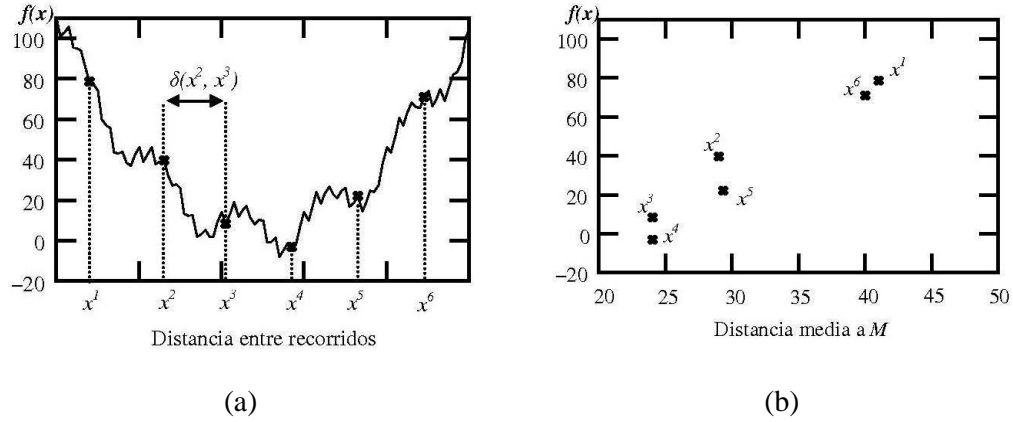


Figura 2. Propiedades de un problema globalmente convexo.

La hipótesis de convexidad global está basada en dos supuestos (BORGES y HANSEN, 2000):

1. *Convexidad*: Los óptimos locales están reunidos en una región relativamente pequeña del espacio de soluciones.
2. *Centralidad*: Los mejores óptimos locales se encuentran ubicados centralmente respecto al resto.

Si ambos supuestos son válidos, es de esperar que los óptimos locales estén próximos en una región pequeña cerca del óptimo global (BORGES y HANSEN, 2000).

Un análisis de convexidad global para RMS con dos topologías diferentes es presentado en este trabajo. Estas topologías mantienen la misma función objetivo (i.e., número de cláusulas satisfechas) y difieren solo en la estructura de vecindad, las cuales son (DIMITRIOU y SPIRAKIS, 2004):

1. **GREEDY**: dos asignaciones son vecinas si y solo si una resultada de la otra debido a la complementación de solo una de sus variables. Así, cualquier asignación tiene exactamente n vecinos.

⁴ también conocida como mapeo de vecindad.

2. **WALKSAT**: dos asignaciones son vecinas si y solo si uno resulta del otro debido a la complementación de una variable perteneciente a una cláusulas no satisfecha. Nótese que el número de vecinos puede ser menor a n .

La motivación para estudiar estas estructuras de vecindad es debido a su popularidad y para observar como el espacio de soluciones es afectado utilizando uno o el otro. Este análisis es complementario a los estudios realizados por Dimitriou y Spirakis (DIMITRIOU y SPIRAKIS, 2004), y (ZHANG, 2004).

4. Medición del Espacio de Soluciones

Para rendir bien en la práctica, la estructura de vecindad de los algoritmos de búsqueda local (y también metaheurísticas) deben de cumplir varios criterios, los cuales son específicos del problema (BORGES y HANSEN, 2000). Un criterio importante es que la estructura de vecindad no tenga una tendencia a crear superficies de costos engañosas. Este tipo de superficies se crean si el óptimo global se encuentra lejos de los óptimos locales (BORGES y HANSEN, 2000). Así, una métrica de distancia es necesaria para entender la distribución de las asignaciones en el espacio de búsqueda.

Definición 1. Sea M una muestra y $x^i, x^j \in M$ dos asignaciones. La distancia entre las asignaciones $d(x^i, x^j)$ se define como la distancia de Hamming (HAMMING, 1950).

En problemas globalmente convexos, buenas soluciones se encuentran en la región central del espacio de soluciones (GÓMEZ y BARÁN, 2004). Varias clases de metaheurísticas basadas en población explotan el hecho de que las mejores soluciones encontradas durante la búsqueda son las que guían el proceso hacia la región central del espacio de soluciones (GÓMEZ y BARÁN, 2004). Generalmente, de una forma u otra,

la mayoría de las metaheurísticas implementan algún tipo de elitismo (COELLO et al., 2007). Por lo tanto, es importante conocer la distribución de las asignaciones respecto a las mejores soluciones. Por lo tanto otras dos métricas son introducidas.

Definición 2. Sea M^* el conjunto de las mejores asignaciones de un conjunto muestra M (i.e., $M^* \subseteq M$) y $x \in M$ una asignación. La distancia media de una asignación al conjunto de las mejores asignaciones del conjunto muestra se define como:

$$d(x, M) = \frac{1}{|M^*|} \sum_{x^i \in M^*} d(x, x^i)$$

Definición 3. Sea M^* el conjunto de las mejores asignaciones de un conjunto muestra M y $x \in M$ una asignación. La distancia mínima de una asignación al conjunto de las mejores asignaciones del conjunto muestra se define como (JONES y FORREST, 1995):

$$D(x, M^*) = \min_{x^i \in M^*} \{d(x, x^i)\}$$

Finalmente, la siguiente definición da una idea del grado de convergencia para las mejores asignaciones en el conjunto muestra.

Definición 4. Sea M^* el conjunto de las mejores asignaciones de un conjunto muestra M .

La distancia de M^* se define como:

$$d(M^*) = \frac{2}{|M^*|^2} \sum_{i=1}^{|M^*|-1} \sum_{j=i+1}^{|M^*|} d(x^i, x^j) \quad \text{donde } x^i, x^j \in M^*$$

Nótese que mientras más cerca estén las asignaciones en M^* , más pequeña será el valor de esta métrica.

5. Análisis Experimental

Esta sección presenta el análisis de varias instancias de RMS considerando dos estructuras de vecindad diferentes: GREEDY y WALKSAT, como fueron definidas más arriba.

5.1. Instancias Estudiadas

Dos clases de instancias aleatorias tomadas de SATLIB (HOOS y STÜTZLE, 2000) son utilizadas: Satisfacibles y No Satisfacibles. La tabla 1 muestra todas las instancias con sus correspondientes números de variables y cláusulas.

Claramente, para todas las instancias de la tabla 1 se tiene $m/n \gg 4.3$, i.e., están en transición de fase. Es interesante también considerar los casos sub-restringidos y los sobre-restringidos. Entonces, para transformar cada instancia a sub-restringida, 50% de las cláusulas son aleatoriamente eliminadas; y para transformar cada instancia a una sobre-restringida, 50% más cláusulas son agregadas. Para este último caso, las cláusulas son agregadas siguiendo las reglas dadas en (HOOS y STÜTZLE, 2000). La tabla 1 también muestra el número de cláusulas para los casos sub-restringidos y sobre-restringidos considerados en el presente trabajo.

5.2. Detalle del Proceso Experimental

Para cada una de las 48 ($8 \times 2 \times 3 = 48$) instancias de la tabla 1 (transición de fase, sub-restringido, sobre-restringido) un conjunto muestra fue creado con cardinalidad $|M| = n^2$ fue creado aleatoriamente sin repeticiones. Luego, cada asignación para todos los conjuntos muestra fueron optimizados localmente utilizando

Tabla 1. Instancias de SATLIB estudiadas

	Satisfacibles	No Satisfacibles	n	m	0.5m	1.5m
1	uf50-01	uuf50-01	50	218	109	327
2	uf100-01	uuf100-01	100	430	215	645
3	uf125-01	uuf125-01	125	538	269	807
4	uf150-01	uuf150-01	150	645	323	968
5	uf175-01	uuf175-01	175	753	377	1130
6	uf200-01	uuf200-01	200	860	430	1290
7	uf225-01	uuf225-01	225	960	480	1440
8	uf250-01	uuf250-01	250	1065	533	1598

las vecindades GREEDY y WALKSAT respectivamente, obteniendo de esta manera 96 ($48 \times 2 = 96$) conjuntos muestra nuevos, y se midieron las siguientes variables:

1. número de cláusulas satisfechas $f(x)$;
2. distancia media al conjunto muestra $d(x, M)$ (def. 2);
3. distancia media a las mejores soluciones $d(x, M^*)$ (def. 3);
4. distancia mínima a las mejores soluciones $D(x, M^*)$ (def. 4).

Luego, las siguientes correlaciones fueron calculadas entre cada par de las variables citadas arriba para cada conjunto muestra:

1. número de cláusulas satisfechas y distancia media al conjunto muestra, denotada por $r_{f,M}$;
2. distancia media al conjunto de las mejores soluciones y distancia media al conjunto muestra, denotada por $r_{B,M}$;

3. distancia mínima al conjunto de mejores soluciones y distancia media al conjunto muestra, denotada por $r_{D,M}$;
4. distancia mínima al conjunto de mejores soluciones y distancia media al conjunto de mejores soluciones, denotada por $r_{D,B}$.

Estas correlaciones tiene por objetivo medir cuan globalmente convexo es el espacio de asignaciones, para las vecindades GREEDY y WALKSAT.

5.3. Resultados

Un resumen de las correlaciones obtenidas y otros resultados experimentales pueden encontrarse en la tabla 2. La columna $r_{f,M}$ muestra la concentración de asignaciones en una región del espacio de búsqueda. Nótese que mientras más cerca se encuentre $r_{f,M}$ a -1, más juntas estarán las buenas asignaciones (porque MAX-SAT es un problema de optimización), i.e., más globalmente convexo es el espacio de búsqueda. Para ambas vecindades, las instancias sub-restringidas presentan valores de correlación pequeños tendiendo a 0, indicando así que las asignaciones están dispersas en el espacio de búsqueda. Por lo tanto, en estas instancias no puede observarse convexidad global. Mirando a los casos sobre-restringidos, los valores de $r_{f,M}$ son más negativos (tendiendo a -1) cuando son comparados a los casos sub-restringidos. Aunque algunos casos exhiben bajas correlaciones, otros presentan altas correlaciones. Estos resultados sugieren que esas instancias sobre-restringidas son más globalmente convexas. Las instancias en transición de fase presentan correlaciones entre los casos sub-restringidos y sobre-restringidos. Estas se encuentran en un punto de inflexión en el espacio de búsqueda, i.e., no se puede afirmar si son o no globalmente convexas.

El hecho de que los mejores óptimos locales están más juntos en las instancias sobre-restringidas es confirmado por las columnas $|M^*|$ y $d(M^*)$. Cuando una

instancia es sub-restringida, existen muchos óptimos locales con valores grandes de $d(M^*)$. Cuando se transita de los casos sub-restringidos, pasando a través de los casos en transición de fase, a los sobre-restringidos, estos valores se vuelven más pequeños. Esto sugiere una concentración de buenos óptimos locales en la región central del espacio de asignaciones.

La geometría del problema puede ser vista como un hipercubo mostrado en la figura 3. Mirando de esta forma el problema, una instancia sub-restringida presenta la formación de grupos (del inglés *clusters*) o islas en el conjunto M^* , i.e., existen óptimos locales que no pueden obtenerse de otras asignaciones por medio de una movida de vecindad (complementación de una variable)⁵. Por ejemplo, sean tres modelos $x^1 = 1010, x^2 = 0010, x^3 = 0001$ para una fórmula f , i.e., $M^* = \{x^1, x^2, x^3\}$. Los modelos x^1 y x^2 son vecinos según la vecindad GREEDY⁶; mientras que el modelo x^3 no tiene a ningún modelo en M^* como vecino. De esta manera se forman los grupos $\{x^1, x^2\}$ y $\{x^3\}$ en M^* , donde ninguno de estos pueden alcanzarse a partir del otro a través de la complementación de una sola variable. Este ejemplo ilustra la ausencia de convexidad global en instancias sub-restringidas. En general, para los casos sub-restringidos, los valores de $r_{B,M}$ son cercanos a 1 debido a que existen muchos óptimos locales cerca de cada grupo en M^* como se muestra en la figura 4, i.e., $d(x, M)$ y $d(x, M^*)$ poseen valores similares; mientras que los valores para $r_{D,M}$ están cercanos a 0, porque existe un solo grupo cerca de los óptimos locales.

Pasando por los casos sub-restringidos, transición de fase, a los sobre-restringidos, las correlaciones $r_{B,M}$ se vuelven más pequeñas; mientras que las

⁵ este hecho fue confirmado por los autores que estudiaron instancias de 8 variables no reportadas aquí.

⁶ un modelo no posee ningún vecino según la vecindad WALKSAT.

correlaciones para $r_{D,M}$ se vuelven más grandes. Esto ocurre debido a que el número de grupos tiende a uno solo, y hace que $r_{B,M}$ aumente.

Por último, todos estos resultados sugieren que RMS no es globalmente convexo, excepto algunas instancias sobre-restringidas. Como consecuencia, es claro porque las metaheurísticas basadas en población no son totalmente exitosas resolviendo SAT cuando son comparadas con algoritmos de búsqueda local. Sin embargo, según estos resultados, es posible postular que las metaheurísticas basadas en población pueden llegar a ser efectivas para instancias RMS sobre-restringidas, debido a su propiedad de convexidad global.

Como detalle final, no existe mucha diferencia entre las vecindades GREEDY y WALKSAT, dado que las correlaciones fueron muy similares para ambas en todas las instancias. Entonces, es de esperar que las metaheurísticas basadas en población no serán capaces de encontrar mejores asignaciones utilizando uno o el otro. Esto parece una contradicción debido a que los algoritmos basados en la vecindad WALKSAT (SELMAN et al., 1994) demostraron ser ampliamente mejores que los basados en GREEDY (SELMAN et al., 1992). Sin embargo, trabajos previos (DIMITRIOU y SPIRAKIS, 2004) sugieren que la vecindad WALKSAT es más adecuada para buscar con algoritmos que manejan una sola solución. Esto podría también explicar la ventaja de los algoritmos de búsqueda local y metaheurísticas no basadas en población (como Búsqueda Reactiva (BATTITI y PROTASI, 1997)), sobre las metaheurísticas basadas en población.

Tabla 2. Resultados obtenidos de las pruebas experimentales.

	GREEDY						WALKSAT					
	$\rho_{I,M}$	$\rho_{B,M}$	$\rho_{\Delta,M}$	$\rho_{\Delta,B}$	$ M^* $	$\delta(M^*)$	$\rho_{I,M}$	$\rho_{B,M}$	$\rho_{\Delta,M}$	$\rho_{\Delta,B}$	$ M^* $	$\delta(M^*)$
Underconstrained							Underconstrained					
uf50-01	-0.37	0.94	0.362	0.453	875	22.522	-0.361	0.943	0.331	0.423	879	22.493
uf100-01	-0.412	0.931	0.325	0.406	1265	46.011	-0.408	0.933	0.322	0.401	1278	45.895
uf125-01	-0.386	0.955	0.322	0.365	857	57.191	-0.369	0.945	0.317	0.365	896	57.066
uf150-01	-0.348	0.908	0.326	0.395	549	68.136	-0.343	0.93	0.325	0.376	543	68.141
uf175-01	-0.347	0.948	0.333	0.377	527	80.249	-0.345	0.948	0.32	0.364	551	80.043
uf200-01	-0.333	0.909	0.35	0.408	227	92.941	-0.333	0.902	0.376	0.438	245	92.72
uf225-01	-0.336	0.926	0.332	0.383	310	103.621	-0.315	0.953	0.306	0.338	571	102.376
uf250-01	-0.343	0.927	0.325	0.377	466	113.330	-0.338	0.922	0.36	0.411	249	113.963
Average	-0.359	0.93	0.334	0.395	634.5	73	-0.351	0.935	0.332	0.389	651.5	72.837
uuf50-01	-0.418	0.958	0.424	0.486	824	22.652	-0.462	0.961	0.446	0.498	821	22.529
uuf100-01	-0.398	0.935	0.347	0.418	873	45.108	-0.394	0.921	0.361	0.446	857	45.185
uuf125-01	-0.305	0.906	0.276	0.353	709	57.044	-0.305	0.923	0.276	0.339	681	57.039
uuf150-01	-0.39	0.95	0.319	0.358	667	69.46	-0.386	0.944	0.319	0.368	656	69.545
uuf175-01	-0.33	0.913	0.343	0.403	339	80.212	-0.328	0.918	0.337	0.391	344	80.476
uuf200-01	-0.307	0.842	0.382	0.478	93	93.21	-0.307	0.817	0.372	0.489	85	93.617
uuf225-01	-0.319	0.916	0.386	0.445	221	102.617	-0.323	0.926	0.383	0.434	234	102.969
uuf250-01	-0.334	0.894	0.422	0.491	106	115.352	-0.329	0.892	0.394	0.456	109	115.309
Average	-0.35	0.914	0.362	0.429	479	73.207	-0.354	0.913	0.361	0.428	473.375	73.334
Phase Transition							Phase Transition					
uf50-01	-0.565	0.746	0.764	0.983	5	19.7	-0.567	0.644	0.644	1	2	22
uf100-01	-0.456	0.643	0.606	0.82	4	41.833	-0.453	0.314	0.314	1	1	0
uf125-01	-0.471	0.339	0.339	1	1	0	-0.484	0.51	0.51	1	1	0
uf150-01	-0.527	0.554	0.554	1	1	0	-0.524	0.749	0.558	0.746	7	62.048
uf175-01	-0.392	0.347	0.347	1	1	0	-0.385	0.349	0.349	1	1	0
uf200-01	-0.542	0.47	0.47	1	1	0	-0.537	0.545	0.545	1	1	0
uf225-01	-0.497	0.763	0.6	0.772	8	97.643	-0.491	0.504	0.452	0.93	2	90
uf250-01	-0.555	0.551	0.551	1	1	0	-0.555	0.587	0.49	0.881	3	104.333
Average	-0.501	0.552	0.529	0.947	2.750	19.897	-0.5	0.525	0.483	0.945	2.25	34.798
uuf50-01	-0.522	0.529	0.531	0.958	2	22	-0.541	0.614	0.577	0.946	4	19.167
uuf100-01	-0.539	0.502	0.502	1	1	0	-0.542	0.738	0.601	0.846	4	40.333
uuf125-01	-0.498	0.744	0.579	0.797	9	57.333	-0.516	0.688	0.598	0.883	5	55.4
uuf150-01	-0.533	0.615	0.602	0.971	2	67	-0.515	0.76	0.554	0.773	9	63.889
uuf175-01	-0.479	0.709	0.599	0.869	4	76.167	-0.485	0.512	0.462	0.929	2	94
uuf200-01	-0.421	0.519	0.519	1	1	0	-0.42	0.408	0.408	1	1	0
uuf225-01	-0.429	0.538	0.415	0.843	2	104	-0.43	0.371	0.371	1	1	0
uuf250-01	-0.477	0.504	0.504	1	1	0	-0.475	0.503	0.503	1	1	0
Average	-0.487	0.582	0.531	0.93	2.75	40.813	-0.491	0.574	0.509	0.922	3.375	34.099
Overconstrained							Overconstrained					
uf50-01	-0.771	0.883	0.871	0.944	67	17.158	-0.763	0.9	0.876	0.948	57	17.081
uf100-01	-0.487	0.574	0.533	0.946	2	42	-0.474	0.528	0.528	1	1	0
uf125-01	-0.662	0.597	0.597	1	1	0	-0.661	0.615	0.599	1	3	44.667
uf150-01	-0.528	0.633	0.633	1	1	0	-0.522	0.778	0.75	0.968	2	50
uf175-01	-0.567	0.58	0.58	1	1	0	-0.555	0.51	0.452	1	2	57
uf200-01	-0.547	0.525	0.525	1	1	0	-0.553	0.628	0.628	1	1	0
uf225-01	-0.5	0.447	0.447	1	1	0	-0.559	0.515	0.515	1	1	0
uf250-01	-0.542	0.623	0.623	1	1	0	-0.566	0.599	0.599	1	1	0
Average	-0.575	0.608	0.601	0.986	9.375	7.395	-0.582	0.634	0.618	0.972	8.5	21.093
uuf50-01	-0.409	0.578	0.468	0.891	10	20.111	-0.427	0.61	0.502	0.899	8	21.25
uuf100-01	-0.475	0.543	0.543	1	1	0	-0.464	0.321	0.323	0.998	2	31
uuf125-01	-0.518	0.381	0.381	1	1	0	-0.534	0.543	0.5	0.953	2	50
uuf150-01	-0.553	0.525	0.476	0.899	4	65.667	-0.549	0.28	0.28	1	1	0
uuf175-01	-0.557	0.593	0.593	1	1	0	-0.556	0.595	0.595	1	1	0
uuf200-01	-0.481	0.58	0.58	1	1	0	-0.472	0.496	0.496	1	1	0
uuf225-01	-0.558	0.495	0.495	1	1	0	-0.558	0.494	0.494	1	1	0
uuf250-01	-0.57	0.596	0.596	1	1	0	-0.575	0.619	0.619	1	1	0
Average	-0.515	0.536	0.517	0.974	2.5	10.722	-0.517	0.495	0.476	0.981	2.125	12.781

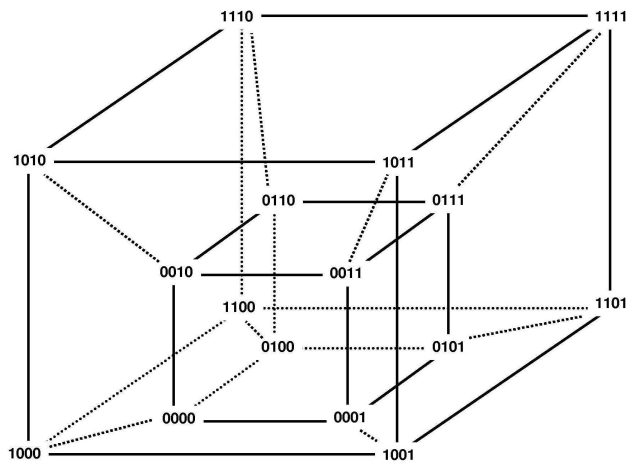


Figura 3. Geometría de hipercubo para un espacio de búsqueda de 4 variables.

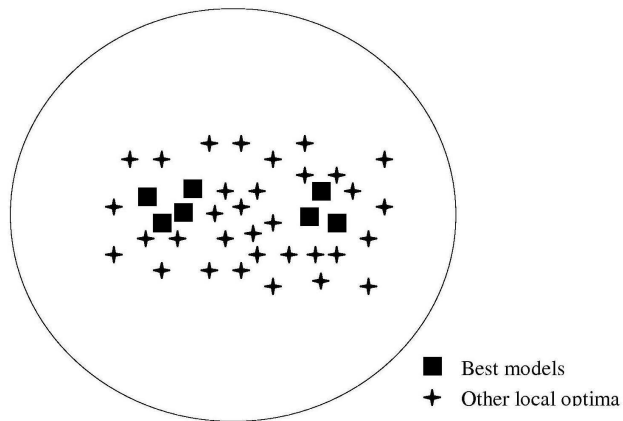


Figura 4. Distribución de óptimos locales para una instancia sub-restringida.

6. Búsqueda Local versus Metaheurísticas: Un Enfoque Preliminar

Los resultados obtenidos en la sección anterior sugieren que RMS no es globalmente convexo cuando es sub-restringido o en transición de fase. Cuando es sobre-restringido, se presenta una concentración de las mejores asignaciones en el espacio de búsqueda, i.e., la instancia es más globalmente convexa, y por lo tanto, las

metaheurísticas basadas en población pueden ser competitivas, como fue postulado más arriba.

Para probar el enunciado de que las metaheurísticas basadas en población pueden ser más efectivas que los algoritmos de búsqueda local para instancias RMS sobre-restringidas, dos algoritmos son comparados. El primero es el conocido Walksat (SELMAN et al., 1994); el segundo es un algoritmos de Optimización por Colonia de Hormigas (ACO) conocido como Omicron ACO (GÓMEZ y BARÁN, 2005), el cual fue renombrado como Omicron SAT (OSAT). La instancia (uf125-01) fue seleccionada para la prueba dado que las correlaciones obtenidas en ella fueron las más significativas.

Los dos algoritmos fueron ejecutados por cinco minutos. Walksat⁷ se corrió con un máximo de 10^6 *flip* por intento, y diferentes parámetros de ruido. OSAT se ejecutó con los siguientes parámetros: 10 hormigas, omicron=600, $\alpha=\beta=1$, y un población elitista de 15 asignaciones. La figura 5 muestra una comparación de los algoritmos para los casos sobre-restringido y en transición de fase.

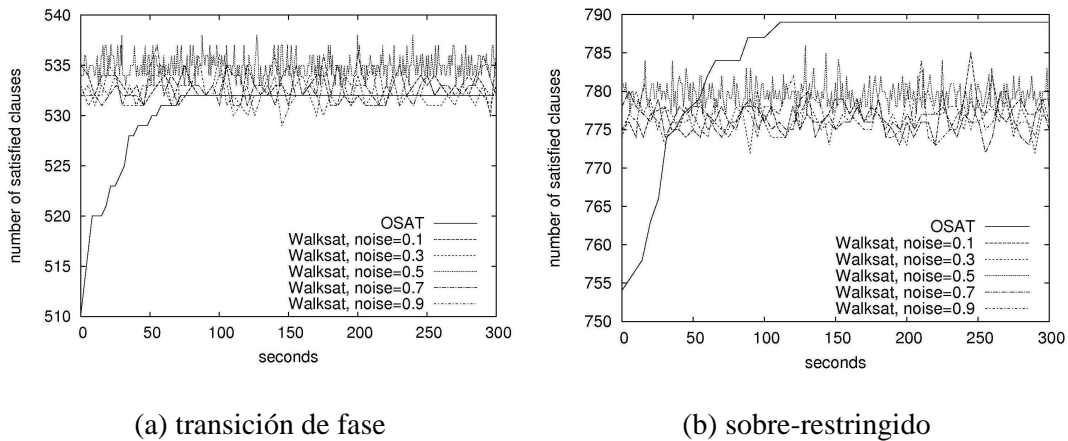


Figura 5. Comparación entre Walksat y OSAT en los casos sobre-restringidos y en transición de fase.

⁷ la versión de Walksat es v46.

Claramente, Walksat encuentra mejores asignaciones que OSAT cuando la instancia está en transición de fase acorde a la figure 5(a); mientras, OSAT gana a Walksat cuando la instancia es sobre-restringida acorde a la figure 5(b), como era esperado. El mejor ruido obtenido fue de 0.5.

OSAT es más efectivo que Walksat en el caso sobre-restringido porque es un algoritmo elitista que explota la convexidad global (GÓMEZ y BARÁN, 2004), y la instancia seleccionada presentaba buenas correlaciones. La prueba fue repetida varias veces, siempre obteniendo los mismos resultados. Por lo tanto, metaheurísticas basadas en población eficientes pueden superar a los algoritmos de búsqueda local en los casos sobre-restringidos, donde altas correlaciones existen. Los resultados para el caso sub-restringido mostraron que ambos algoritmos son eficientes, pero Walksat fue capaz de encontrar modelos más rápido que OSAT.

Nótese que OSAT y Walksat son enfoques muy simples. Estos algoritmos fueron seleccionados para estudiar hasta que punto la hipótesis establecida se mantenía en un contexto muy simple. Aún queda por estudiar como mejores heurísticas y metaheurísticas basadas en población (e.g., Rnovelty (MCALLESTER, 1997; HOOS, 1999), UnitWalk (HIRSCH y KOJEVNIKOV, 2005), Ant-Solver (SOLNON, 2002), GASAT (LARDEUX et al., 2006) se comportan.

7. Conclusiones y Trabajos

Este trabajo presentó un análisis experimental del espacio de asignaciones de *Random-MAX-3-SAT*. Varias instancias 3-SAT tomadas de SATLIB fueron analizadas en los casos sub-restringidos, transición de fase, y sobre-restringidos. Los resultados obtenidos sugieren que las instancias sub-restringidas y en transición de fase no son

globalmente convexas. Sin embargo, algunas instancias sobre-restringidas exhiben la propiedad de convexidad global.

La convexidad global es una propiedad importante que las metaheurísticas basadas en población pueden explotar de forma a encontrar buenos óptimos locales (GÓMEZ y BARÁN, 2004). Así, la hipótesis de que las metaheurísticas basadas en población pueden ser efectivas respecto a los algoritmos de búsqueda local para instancias MAX-3-SAT sobre-restringidas fue establecida. En ese sentido, una comparación entre Walksat y OSAT (una metaheurística basada en población) mostró que la hipótesis previa es cierta, por lo menos experimentalmente en un contexto muy simple⁸. Por lo tanto, investigación en encontrar buenas metaheurísticas basadas en población utilizando la función objetivo de MAX-SAT es, a primera vista, desmotivante. Aunque, todos estos experimentos están basados en resultados empíricos y solo son ciertos para las instancias estudiadas, dado que no existe teoría formal de convexidad global.

La generalización de estos resultados a problemas de satisfacción de restricciones es importante, ya que permitirá el diseño de nuevas metaheurísticas para esta clase de problemas. Una comparación entre algoritmos de búsqueda local del estado del arte y metaheurísticas basadas en población competitivas queda por hacer en instancias más grandes. Por último, un análisis de convexidad global en instancias estructuradas (i.e., problemas de la vida real) dará más información sobre la efectividad de los algoritmos de búsqueda local para SAT.

⁸ Una comparación más sistemática puede encontrarse en (VILLAGRA y BARÁN, 2007).

8. Referencias

- ASIRELLI, P.; DE SANTIS, M.; MARTELLI, A. 1985. Integrity Constraints in Logic Databases. *Journal of Logic Programming*, 3:221-232.
- BATTITI, R.; PROTASI, M. 1997. Reactive Search, A History-Sensitive Heuristic for MAX-SAT. *Journal of Experimental Algorithmics*, 2:2.
- BERINGER, A; ASCHEMAN, G.; HOOS, H; METZGER, M.; WEIß, A. 1994. GSAT versus Simulated Annealing. En: *European Conference on Artificial Intelligence*. John Wiley & Sons. p. 130-134.
- BOESE, K.; KAHNG, A.; MUDDU, S. 1994. A New Adaptive Multi-Start Technique for Combinatorial Global Optimization. *Operations Research Letters*, 16(20):101-113.
- BORGES, P.; HANSEN, P. 2000. A Study of Global Convexity for a Multiple Objective Traveling Salesman Problem. En: RIBEIRO, C.; HANSEN, P., ED. *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Kluwer. Cap. 6, p. 129-150.
- CHEESEMAM, P.; KANEFSKY, B.; TAYLOR, W. 1991. Where the Really Hard Problems Are. En: *Proceedings of IJCAI'91*. Morgan Kaufmann. P. 331-337.
- COELLO, C.; LAMONT, G.; VAN VELDHUIZEN, D. 2007. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. 2da. Edición. Springer.
- COOK, S. 1971. The Complexity of Theorem Proving Procedures. En: *Proceedings of the 3rd ACM Symposium on Theory of Computing*. p. 151-156.
- CRAWFORD, J.; AUTON, L. 1993. Experimental Results on the Crossover Point in Satisfiability Problems. En: *Proceedings of the 11th National Conference on Artificial Intelligence*.
- DAVIS, M.; LOGEMANN, G.; LOVELAND, D. 1962. A Machine Program for Theorem-Proving. *Communications of the ACM*, 5:394-397.

- DAVIS, M.; PUTNAM, H. 1960. A Computing Procedure for Quantification Theory. *Journal of the ACM*, 7(3):201-215.
- DIMITRIOU, T.; SPIRAKIS, P. 2004. How to Tell a Good Neighborhood from a Bad One: Satisfiability of Boolean Formulas. En: *Experimental and Efficient Algorithms*, volumen 3059 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer.
- EIBEN, A. ; VAN DER HAUW, J. 1997. Solving 3-SAT with Adaptive Genetic Algorithms. En: *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Evolutionary Computation*. IEEE Press. p. 81-86
- GAREY, M.; JOHNSON, D. 1979. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman & Company.
- GÓMEZ, O.; BARÁN, B. 2004. Reasons of ACO's Success in TSP. En: *Ant Colony, Optimization, and Swarm Intelligence*, volumen 3172 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer. p. 226-237.
- GÓMEZ, O.; BARÁN, B. 2005. Omicron ACO: A New Ant Colony Optimization Algorithm. *CLEI Electronic Journal*, 8(1).
- GU, J.; PURI, R. 1995. Asynchronous Circuit Synthesis with Boolean Satisfiability. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits*, 14(8):961-973.
- GUTIÉRREZ, E; BRIZUELA, C. 2006. ILS-Perturbation Based on Local Optima Structure for the QAP Problem. En: *Proceedings of the 5th Mexican International Conference on Artificial Intelligence – MICAI 2006*. p. 404-414.
- HAMMING, R. 1950. Error Detecting and Error Correcting Codes. *Bell System Technical Journal*, 26(2):147-160.
- HIRSCH, E.; KOJEVNIKOV, A. 2005. UnitWalk: A New SAT Solver that Uses Local Search Guided by Unit Clause Elimination. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 43(1):91-111.

HOOS, H. 1999. On the Run-Time Behaviour of Stochastic Local Search Algorithms for SAT. En: *Proceedings of AAAI'99*.

HOOS, H.; STÜTZLE, T. 2000. SATLIB: An Online Resource for Research on SAT. En: *Proceedings of the 3rd Workshop on Satisfiability (SAT 2000)*. IOS Press.

JOHNSON, D. 2000. Report on Challenges for Theoretical Computer Science. En: *Workshop on Challenges for Theoretical Computer Science*.

JONES, T.; FORREST, S. 1995. Fitness Distance Correlation as a Measure of Problem Difficulty for Genetic Algorithms. En: *Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms*. Morgan Kaufmann. P. 184-192.

KAMATH, A.; KARMAKAR, N.; RAMAKRISHNAN, K.; RESENDE, M. 1992. A Continuous Approach to Inductive Inference. *Mathematical Programming*, 57:215-238.

LARDEUX, F.; SAUBION, F.; HAO, J. 2006. GASAT : A Genetic Local Search Algorithm for the Satisfiability Problem. *Evolutionary Computation*, 14(2):223-253.

MCALLESTER, D. 1997. Evidence for Invariants in Local Search. En: *Proceedings of AAAI'97*. AAAI Press.

SELMAN, B.; KAUTZ, H.; COHEN, B. 1994. Noise Strategies for Improving Local Search. En: *Proceedings of AAAI'94*. AAAI Press. P. 337-343.

SELMAN, B.; LEVESQUE, H.; MITCHELL, D. 1992. A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems. En: *Proceedings of AAAI'92*. AAAI Press. P. 440-446.

SOLNON, C. 2002. Ants Can Solve Constraint Satisfaction Problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(4):347-357.

STÜTZLE, T.; HOOS, H.; ROLI, A. 2006. A Review of the Literature on Local Search Algorithms for MAX-SAT. Reporte Técnico AIDA-01-02 - Technische Universität Darmstadt.

- TSEITIN, G. 1968. On the Complexity of Derivation in Propositional Calculus. *Studies in Constructive Mathematics and Mathematical Logic*, 2:115-125.
- VILLAGRA, M.; BARÁN, B.; GÓMEZ, O. 2006. Global Convexity in the Bi-Criteria Traveling Salesman Problem. En: BRAMER, M., ED., *Artificial Intelligence in Theory and Practice*. Springer. P. 217-226.
- VILLAGRA, M.; BARÁN, B. 2007. Ant Colony Optimization with Adaptive Fitness Function for Satisfiability Testing. En: LEIVANT, D.; DE QUEIROZ, R., ED., *Logic, Language, Information and Computation*, volumen 4576 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer. P. 351-360.
- ZHANG, W. 2004. Configuration Landscape Analysis and Backbone Guided Local Search. Part I: Satisfiability and Maximum Satisfiability. *Artificial Intelligence*, 158(1):1-26.