ARC065E へんなコンパス
解説

https://atcoder.jp/contests/arc065/tasks/arc065_c

目次

問題概要

問題

xy 平面上の N 点がある．また，常に二つの異なる点を指すコンパスを持っている．コンパスが点 P_i と点 P_j を指しており，$d(P_i, P_j) = d(P_i, P_k)$(マンハッタン距離) であるとき，点 P_i と点 P_k を指す状態に変更できる．コンパスが初めに点 P_a と点 P_b を指しているとき，コンパスが指している点の組としてありうるのは何通り？

制約

- $1 \leq N \leq 10^5$

ヒント１，２

ヒント

コンパスが点 P_i を指す可能性があるかどうかを求める方法を考えてみよう．

ヒント

各点を頂点とするグラフで，マンハッタン距離が $d(P_a, P_b)$ と等しいものに辺を貼ったグラフを G とするとき，
コンパスが点 P_i を指す可能性がある $\Leftrightarrow$ G において点 P_i と点 P_a に対応する頂点が同じ連結成分にある

グラフ G での捜査を行うことが一つの目標となる．
グラフ G を陽に作ろうとすると辺の数が $O(N^2)$ となってきびしい．

ヒント3

ヒント

45 度回転を考えよう（初見ならばググる or 解説スライドのこの部分まで見てみてください）.

マンハッタン距離と言えば 45 度回転（典型）.
マンハッタン距離のややこしい点として，

$$d(P_i, P_j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$$

と x 座標と y 座標で独立でないということが挙げられる．
$\rightarrow$ 45 度回転をすれば解決！（詳しくは次スライドで解説）

45 度回転

背景については詳しく解説しない．

点 (x_i, y_i) に対して，$x'_i = x_i + y_i$，$y'_i = x_i - y_i$ という座標変換のことを 45 度回転という．

競技プログラミングにおいては，45 度回転前の座標でのマンハッタン距離が 45 度回転後の座標でどのように表されるかが重要である．

実際，

$$
\begin{aligned}
|x_i - x_j| + |y_i - y_j| &= \max\{x_i - x_j, x_j - x_i\} + \max\{y_i - y_j, y_j - y_i\} \\
&= \max\{x_i - x_j + y_i - y_j, x_i - x_j + y_j - y_i, \\
&\qquad x_j - x_i + y_i - y_j, x_j - x_i + y_j - y_i\} \\
&= \max\{|(x_i + y_i) - (x_j + y_j)|, |(x_i - y_i) - (x_j - y_j)|\} \\
&= \max\{|x'_i - x'_j|, |y'_i - y'_j|\}
\end{aligned}
$$

と表される．

ヒント4

ヒント

コンパスが指す片方の点が P_i であるとき，もう片方の点としてありうるものの個数を求める方法を考えよう．

ヒント2と組み合わせると，コンパスが指す可能性のある全ての点 P_i について，もう片方の点としてありうるものの個数を足したものを 2 で割ると答えがでる．

解法

やるべきことは二つ．

Step 1.　ヒント 2 で考えたグラフ G で P_a と連結な点を列挙する．

Step 2.　Step 1 で求めた各点に対して，相方としてありうる点の個数を求める．

Step 1.

ヒント2で考えたグラフ G で P_a と連結な点を列挙する．
点 P_i と点 P_j の距離が $d = d(P_a, P_b)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \max\left\{|x'_i - x'_j|, |y'_i - y'_j|\right\} = d \\
&\Leftrightarrow x'_j = x'_i - d \text{ and } y'_i - d \leq y'_j \leq y'_i + d \\
&\quad\;\; x'_j = x'_i + d \text{ and } y'_i - d \leq y'_j \leq y'_i + d \\
&\quad\;\; x'_i - d \leq x'_j \leq x'_i + d \text{ and } y'_j = y'_i - d \\
&\quad\;\; x'_i - d \leq x'_j \leq x'_i + d \text{ and } y'_j = y'_i + d
\end{aligned}
$$

のいずれかを満たす．

点 P_i と隣接する頂点を列挙するには，上の条件を満たす点を列挙すればいいことになる．これは，各 x' の値ごとに y' の値，および y' の値ごとに x' の値を管理すればどちらかを固定して調べられる．また，これを平衡二分木等のデータ構造を用いて実現することで，一度見た点の削除が可能となり，ネックであった辺の個数の問題を解決できる．

Step 2.

Step 1. の解説によると，G で P_a と連結な各 P_i について，

$$
\begin{aligned}
x'_j = x'_i - d \text{ and } y'_i - d \le y'_j \le y'_i + d \\
x'_j = x'_i + d \text{ and } y'_i - d \le y'_j \le y'_i + d \\
x'_i - d \le x'_j \le x'_i + d \text{ and } y'_j = y'_i - d \\
x'_i - d \le x'_j \le x'_i + d \text{ and } y'_j = y'_i + d
\end{aligned}
$$

のいずれかを満たす点 P_j の個数を求めればよく，これは x' の値ごとに y' の値，y' の値ごとに x' の値を配列などで昇順に持つことで容易に実現できる．Step 1,2 どちらも $O(N \log N)$ 時間でできる．