

# ARC031D 買い物上手 解説

[https://atcoder.jp/contests/arc031/tasks/arc031\\_4](https://atcoder.jp/contests/arc031/tasks/arc031_4)

# 目次

- ① 問題概要
- ② ヒント 1
- ③ ヒント 2
- ④ ヒント 3
- ⑤ ヒント 4
- ⑥ 解法

# 問題概要

## 問題

$M$  個のアイテムが売られており、 $i$  番目のアイテムの値段は  $T_i$  です。  $M$  個のアイテムのうち、1つ以上を買うことを考えます。ここで、 $N$  個のリストがあり、 $i$  番目のリストには  $K_i$  個のアイテムが書かれており、これらをすべて買っている場合  $S_i$  の経験値を得ることができます。このとき、「得られた経験値 ÷ 使ったお金」の最大値を求めてください。

## 制約

- $1 \leq N \leq 100$
- $1 \leq M \leq 100$

# ヒント1

## ヒント

二分探索します．割合の最大化でよく見る典型です．判定問題をどのように解けるか考えましょう．

答えが  $k$  以上か？ という判定問題を立てる（詳細は次スライド）．

## ヒント 2

### ヒント

判定問題を定式化します．答えとして  $k$  以上を達成可能である条件は，

$$\text{経験値} - k \times \text{お金} \geq 0$$

となるような買い方が存在することです．

# ヒント3

## ヒント

判定問題をより定式化します．まず，全ての商品の値段を  $k$  倍することで，単に 経験値 - お金  $\geq 0$  とできるかを考えればよいです．また，この問題は各アイテムについて，買う or 買わないを選択する問題だと考えることができます．つまり，

- $1 \leq i \leq M$  について，  $a_i \in \{0, 1\}$  を定める．
- 各  $1 \leq i \leq N$  について，  $a_{A_{i,1}} = a_{A_{i,2}} = \cdots = a_{A_{i,K_i}} = 1$  の場合に限り，経験値  $S_i$  を得る．
- 使うお金の総和は  $\sum_{a_i=1} T_i$
- このような条件の下で， 経験値 - お金 を最大化しなさいと整理することができます．

## ヒント 4

### ヒント

ヒント 3 の条件をよく考えると，PSP（燃やす埋める問題）であることが分かります．

燃やす埋める問題とは  $\cdots \{0, 1\}$  のどちらかの値をとる変数  $a_1, \cdots, a_n$  および，それらの間にいくつかの条件（例えば， $a_0 = 0, a_1 = 1$  の時に 10 点得る等）があるような状況で， $a_0, \cdots, a_n$  の値を決めるような最適化問題．

## ヒント 4

### ヒント

ヒント 3 の条件をよく考えると、PSP（燃やす埋める問題）であることが分かります。

燃やす埋める問題とは  $\cdots \{0, 1\}$  のどちらかの値をとる変数  $a_1, \cdots, a_n$  および、それらの間にいくつかの条件（例えば、 $a_0 = 0, a_1 = 1$  の時に 10 点得る等）があるような状況で、 $a_0, \cdots, a_n$  の値を決めるような最適化問題。

一般に、最小カット問題に帰着させて解く。詳しい理論は外部サイトを参照してください。

<https://shindannin.hatenadiary.com/entry/2017/11/15/043009>

<https://ei1333.github.io/luzhiled/snippets/memo/>

[project-selection.html](#)



ここでは具体的にどのようなグラフ（ネットワーク）を構築するかの一例を与える。

答えが  $k$  以上になるか？ という判定問題の中で以下のグラフ（ネットワーク）を作成する（ $(u, v, c)$  と書いたら、頂点  $u$  から頂点  $v$  への辺で、容量が  $c$  のものを表すとする）。

答えが  $k$  以上になるか？ という判定問題の中で以下のグラフ（ネットワーク）を作成する．

- 頂点は，
  - $s$ ：ソース， $t$ ：シンク
  - $M$  個のアイテムに対応する  $M$  個の頂点  $a_i$  ( $1 \leq i \leq M$ )
  - $N$  個の条件に対応する  $N$  個の頂点  $b_i$  ( $1 \leq i \leq N$ )
- $i$  番目のアイテムを買わないことに対応する辺  $(s, a_i, 0)$ .
- $i$  番目のアイテムを買うことに対応する辺  $(a_i, t, k \times T_i)$ .
- $i$  番目の条件を使わないことに対応する辺  $(s, b_i, S_i)$ .
- $i$  番目の条件を使うかつ必要な  $A_{i,j}$  番目のアイテムを買わないことを禁止することに対応する辺  $(b_i, a_{A_{i,j}}, \infty)$ .

このようにして作ったグラフの最小カットの値を  $C$  とすると,

$$\sum_{i=1}^N S_i - C \geq 0$$

を満たすことと答えが  $k$  以上であることが同値である.