# 日立コン 2020C ThREE
## 解説

https://atcoder.jp/contests/hitachi2020/tasks/hitachi2020_c

# 目次

# 問題概要

## 問題

$N$ 頂点の木が与えられる．各頂点に 1 から $N$ までの数字を重複なく，以下の条件を満たすように書き込むことはできるか．できるなら解を一つ出力せよ．

- 頂点 $i, j$ の距離がちょうど 3 であるとき，頂点 $i$ の数字と頂点 $j$ の数字の和または積の少なくとも一方は 3 の倍数である．

制約

- $2 \leq N \leq 2 \times 10^5$

# ヒント 1

いわゆる構築問題.

サンプルも 1 つで激弱なので自分で例を考える必要があります.

# ヒント1

いわゆる構築問題.

サンプルも 1 つで激弱なので自分で例を考える必要があります.

**ヒント**

必ず解は存在します.

# ヒント 1

いわゆる構築問題.

サンプルも 1 つで激弱なので自分で例を考える必要があります.

**ヒント**

必ず解は存在します.

構築問題でありがちなやつ.

# ヒント１

いわゆる構築問題.

サンプルも１つで激弱なので自分で例を考える必要があります.

**ヒント**

必ず解は存在します.

構築問題でありがちなやつ.

困ったときはジャッジに聞く（ペナ覚悟で全てのケースで解なしと出力してみる）のもあり.

# ヒント１

いわゆる構築問題.
サンプルも１つで激弱なので自分で例を考える必要があります.

**ヒント**

必ず解は存在します.

構築問題でありがちなやつ.
困ったときはジャッジに聞く（ペナ覚悟で全てのケースで解なしと出力してみる）のもあり.
必ず解があるからと言って，それを示すのは具体的な構築方法を示すことがほとんどなので，少し考えることが狭められる程度.

# ヒント 2

## ヒント

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.

# ヒント 2

**ヒント**

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.
以降，二部グラフ判定時のように各頂点を赤と青を塗ったとして話を進めます.

# ヒント 2

**ヒント**

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.

以降，二部グラフ判定時のように各頂点を赤と青を塗ったとして話を進めます.

頂点 $u$ を固定した時,

# ヒント 2

**ヒント**

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.

以降，二部グラフ判定時のように各頂点を赤と青を塗ったとして話を進めます.

頂点 u を固定した時,

- 頂点 u と隣接する頂点（距離が 1 の頂点）は頂点 u と違う色で塗られている.

# ヒント 2

**ヒント**

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.

以降，二部グラフ判定時のように各頂点を赤と青を塗ったとして話を進めます.

頂点 u を固定した時,

- 頂点 u と隣接する頂点（距離が 1 の頂点）は頂点 u と違う色で塗られている.
- u との距離が 2 の頂点は u と同じ色である.

# ヒント 2

## ヒント

二部グラフが関係します.

木は二部グラフです（実際一つ根を固定してそこから交互に色を塗ることを考えれば容易）.

以降，二部グラフ判定時のように各頂点を赤と青を塗ったとして話を進めます.

頂点 u を固定した時,

- 頂点 u と隣接する頂点（距離が 1 の頂点）は頂点 u と違う色で塗られている.
- u との距離が 2 の頂点は u と同じ色である.
- u との距離が 3 の頂点は u と違う色である.

# ヒント 3

## ヒント

問題では距離が 3 の頂点間について条件が課されていますが，距離が奇数の頂点間について条件を満たす数字の配置が存在します.

# ヒント 3

## ヒント

問題では距離が 3 の頂点間について条件が課されていますが，距離が奇数の頂点間について条件を満たす数字の配置が存在します．

これがこの問題の最大の非自明ポイント．

# ヒント 3

## ヒント

問題では距離が 3 の頂点間について条件が課されていますが，距離が奇数の頂点間について条件を満たす数字の配置が存在します.

これがこの問題の最大の非自明ポイント.
競プロ典型として,「条件を強めて / 弱めてその問題の答えに繋がるものを求められないか」を考える時がある.

- ○○の中の最大値を求めよと言われた際に，○○の要素全てを列挙する.
- 最適性から○○の場合のみを考えればよい.

# ヒント 3

**ヒント**

問題では距離が 3 の頂点間について条件が課されていますが，距離が奇数の頂点間について条件を満たす数字の配置が存在します.

これがこの問題の最大の非自明ポイント.
競プロ典型として,「条件を強めて / 弱めてその問題の答えに繋がるものを求められないか」を考える時がある.

- ◯◯の中の最大値を求めよと言われた際に，◯◯の要素全てを列挙する.
- 最適性から◯◯の場合のみを考えればよい.

この問題は構築なので必然性は薄いが，あてはめられなくもない.

# 解法

ではどうやってやるか.

初めに，少し問題を言い換えておく.

# 解法

ではどうやってやるか.

初めに，少し問題を言い換えておく.

問題では 3 の倍数かどうかが問題なので，全ての数を 3 で割ったあまりで考える.

1 を $\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor$ 個，2 を $\lfloor \frac{N+1}{3} \rfloor$ 個，0 を $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ 個配置する問題になる.

# 解法

ではどうやってやるか.

初めに，少し問題を言い換えておく.

問題では 3 の倍数かどうかが問題なので，全ての数を 3 で割ったあまりで考える.

1 を $\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor$ 個，2 を $\lfloor \frac{N+1}{3} \rfloor$ 個，0 を $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ 個配置する問題になる.

このとき，距離が奇数の 2 頂点に書かれている数字が以下の組み合わせなら条件を満たす.

| | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | × | ○ | ○ |
| 2 | ○ | × | ○ |
| 0 | ○ | ○ | ○ |

# 解法

| | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | × | ◯ | ◯ |
| 2 | ◯ | × | ◯ |
| 0 | ◯ | ◯ | ◯ |

表を見ると 0 が最強だと気づく.

# 解法

| | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | × | ○ | ○ |
| 2 | ○ | × | ○ |
| 0 | ○ | ○ | ○ |

表を見ると 0 が最強だと気づく．
先程の二部グラフの考え方と合わせると，片方の色の頂点の数字を全て 0 にできれば強いことに気づく．

# 解法

(i) 赤または青の頂点が $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ 個以下のとき
条件を満たす色の頂点の個数が使える 0 の個数より少ない.
その色の頂点の数字を全て 0 にすればよい.

# 解法

(i) 赤または青の頂点が $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ 個以下のとき
条件を満たす色の頂点の個数が使える 0 の個数より少ない.
その色の頂点の数字を全て 0 にすればよい.
(ii) 赤と青の頂点がどちらも $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ 個より多いとき
0 をうまく使うことはできなくなるが，代わりに，1 を赤の頂点に，2 を青の頂点に完全に割り振ることが可能.
残りに 0 を詰め込む.
必ず上記のどちらかに該当するので，この問題は解けました.

# 実装について

実装は？

# 実装について

実装は？

無ではない.

# 実装について

実装は？

無ではない.

全体の実装方針の一例を書きます.

1. 頂点を赤と青に塗り分ける（0 と 1 とか）. BFS や DFS でよい.
2. 赤の頂点より青の頂点が多ければ色を交換.
3. 赤の頂点の個数で場合分けをし，各頂点に数字を割り振っていく. mod 3 の値ごとにどの数字まで使ったか等を持ちながらやるといい.

# 最後に

**問題**

逆に，木と各頂点の数字が与えられたとき，問題の条件を満たすかどうかを $O(N)$ で判定せよ．

# 最後に

## 問題

逆に，木と各頂点の数字が与えられたとき，問題の条件を満たすかどうかを $O(N)$ で判定せよ．

これはちゃんと距離 3 を使わないとダメ．
できるけど実装したくないというやり方しか思いつきません．

# 最後に

自分は構築問題が大の苦手なのですが，どうやったら得意になれるんでしょうか.
いくつか典型要素もあるのですが，割とこの問題は当てはまらず...