

ABC003D AtCoder 社の冬 解説

https://atcoder.jp/contests/abc003/tasks/abc003_4

目次

- ① 問題概要
- ② ヒント 1
- ③ ヒント 2
- ④ ヒント 3
- ⑤ 解法

問題概要

問題

$R \times L$ の部屋に、 D 個のデスクと L 個のサーバーラックを配置します。ただし、配置したものの全てを含む最小の長方形がちょうど $X \times Y$ になる必要があります。これらの配置としてありうるのは何通りありますか。

制約

- $1 \leq R, C \leq 30$

ヒント1

ヒント

まずは $X \times Y$ の区画にはみ出さずにデスク，サーバーラックを配置する組合せの数の求め方を考えてみましょう．

配置した後にそれらを囲う長方形を考えるのではなく，長方形を決めた後に配置すると思う．

はみ出さない場合の数は，

$$\binom{X+Y}{D} \times \binom{X+Y-D}{L}$$

ヒント2

ヒント

ヒント1では，例えば一番上の行に何も置かないことも許容されてしまします．余分に数えた分を足し引きすることを考えてみましょう．

$f(X, Y)$ を $X \times Y$ の区画からはみ出さずにデスク，サーバーラックを配置する場合の数とする．

一番上の行に何も置かない $\rightarrow f(X - 1, Y)$ 通り

一番右の列に何も置かない $\rightarrow f(X, Y - 1)$ 通り

一番上の行と一番右の列に何も置かない $\rightarrow f(X - 1, Y - 1)$ 通り

ヒント 3

ヒント

包除原理を使います。

数えすぎを除きたいが、除きすぎたり除かな過ぎたりで足し引きが必要
なときは、**包除原理**を使おう。

解法

包除原理は条件で考えるとよい
今回の場合、

- 一番上の行を使う
- 一番下の行を使う
- 一番右の列を使う
- 一番左の列を使う

の 4 条件を満たすものを数えたい.

解法

包除原理は条件で考えるとよい
今回の場合、

- 一番上の行を使う
- 一番下の行を使う
- 一番右の列を使う
- 一番左の列を使う

の 4 条件を満たすものを数えたい。このとき、

$$\begin{aligned} & (0 \text{ 個は必ず満たさない}) - (1 \text{ 個は必ず満たさない}) \\ & + (2 \text{ 個は必ず満たさない}) - (3 \text{ 個は必ず満たさない}) \\ & + (4 \text{ 個は必ず満たさない}) \\ & = (\text{全部満たす}) \end{aligned}$$

左辺のそれぞれは，ヒント 2 で導入した f で簡単に求められる．
あとは $X \times Y$ の長方形を $R \times C$ のどこに入れるかだが，これも容易．