# ARC023D GCD区間
## 解説

https://atcoder.jp/contests/arc023/tasks/arc023_4

# 目次

# 問題概要

## 問題

長さ $n$ の数列 $A$ が与えられます．以下のクエリを $m$ 個処理してください．

- 整数 $x$ が与えられる．$\gcd(a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r) = x$ となる組 $(l, r)$ の個数を求めよ．

制約

- $1 \leq n, m \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 10^9$

# ヒント 1

**ヒント**

区間の左端を固定して考えます.

# ヒント 1

**ヒント**

区間の左端を固定して考えます.

$l$ を固定したときに区間 $(l,r)$ が ($r$ が $l \le r$ を満たすように動くとき) 各クエリにどれだけカウントされるかを考えたい.

# ヒント 2

## ヒント

$\gcd(a_l, \dots, a_r)$ を $\gcd(a[l, r])$ と書くことにすると，

$$\gcd(a[l,r]) \geq \gcd(a[l,r+1]) \geq \gcd(a[l,r+2]) \geq \cdots$$

が成り立ちます．

# ヒント 2

**ヒント**

$\gcd(a_l, \ldots, a_r)$ を $\gcd(a[l, r])$ と書くことにすると，

$$\gcd(a[l, r]) \geq \gcd(a[l, r+1]) \geq \gcd(a[l, r+2]) \geq \cdots$$

が成り立ちます．

gcd をとる数が増えれば増えるほど最大公約数は小さくなっていくということ（これ自体は簡単にわかる）．
つまり，$l$ を固定したとき，gcd の値は $r$ のついて単調性があるということ．

## ヒント3

**ヒント**

$\gcd(a[l,r+1])$ は $\gcd(a[l,r])$ の約数になります

$\gcd(a[l,r+1]) = \gcd(\gcd(a[l,r]), a[r+1])$ なのでそうなる．

# ヒント 4

**ヒント**

もし， $\mathrm{gcd}(a[l,r]) > \mathrm{gcd}(a[l,r+1])$ ならば， $\mathrm{gcd}(a[l,r+1])$ は $\mathrm{gcd}(a[l,r])$ の半分以下の値になります．

# ヒント 4

## ヒント

もし， $\gcd(a[l,r]) > \gcd(a[l,r+1])$ ならば， $\gcd(a[l,r+1])$ は $\gcd(a[l,r])$ の半分以下の値になります．

$\gcd(a[l,r+1])$ は $\gcd(a[l,r])$ の約数．
一般に，$x$ より真に小さい $x$ の約数は $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ 以下である．

# 重要な性質

**Claim**

$X = \{\gcd(a[l, r]) \mid l \le r \le n\}$ とおいたとき，$X$ の要素数は $O(\log a[l])$ である．

# 重要な性質

**Claim**

$X = \{\gcd(a[l,r]) \mid l \le r \le n\}$ とおいたとき，$X$ の要素数は $O(\log a[l])$ である．

$\gcd(a[l,r])$ は $r$ について単調非増加であったから，列

$$\gcd(a[l,l]) \ge \gcd(a[l,l+1]) \ge \cdots \ge \gcd(a[l,n-1]) \ge \gcd(a[l,n])$$

において，$>$ となるのは $O(\log a[l])$ 個（さらに，今回の場合は高々 $\log_2 a[l]$ 個であることも分かる）という主張である．

# 重要な性質

**Claim**

$X = \{\gcd(a[l,r]) \mid l \leq r \leq n\}$ とおいたとき，$X$ の要素数は $O(\log a[l])$ である．

（証明）

$>$ となる個数を $k$ とおく．ヒント 4 より，不等号 1 個につき gcd の値は少なくとも半分になるから，

$$\left\lfloor \frac{\gcd(a[l,l])}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a[l]}{2^k} \right\rfloor \geq \gcd(a[l,n]) \geq 1$$

$$\therefore a[l] \geq 2^k \qquad \therefore \log_2 a[l] \geq k$$

# 解法

各 $l$ について，前ページの $X$ は要素数が少ないため，それを直接求めることができる．
（$\because r$ についての単調性を用いて，$\mathrm{gcd}(a[l,k]) > \mathrm{gcd}(a[l,k+1])$ となる $k$ を左から順に求めればいい．これはセグ木上の二分探索を用いるか，計算量は悪くなるが通常の二分探索 $+$ セグ木でもおそらく通る.）
また，$X$ の各要素が何回出現するかも $>$ の位置からすぐに分かる．
全ての $l$ についてこれらを求めてまとめたものを $\mathrm{std} :: \mathrm{map}$ 等に保存しておくことでクエリに高速に答えられる．