ABC132F Small Products
解説

https://atcoder.jp/contests/abc132/tasks/abc132_f

目次

問題概要

問題

正の整数を K 個並べた列であって，隣接するどの 2 つの整数の積も N 以下であるものの個数を求めよ．

制約

- $1 \leq N \leq 10^9$
- $2 \leq K \leq 100$

問題の整理

列の数え上げ.

$\rightarrow$DP と相性が良い.

使える数は正整数のみであるから，使える数は $1 \sim N$ だとわかる.

ヒント1

ヒント

素朴な DP として，

$$\mathrm{dp}[i][j] = (\text{左から } i \text{ 個の数を既に決めていて，}$$
$$i \text{ 番目の数が } j \text{ であるような場合の数})$$

というものがあります．これの遷移を考えてみましょう．

遷移は，

$$\mathrm{dp}[i+1][j] = \sum_{j \times k \leq N} \mathrm{dp}[i][k]$$

となります．

ヒント２

ヒント

$\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ より真に大きい数は連続して並ぶことはない，ということを用いて，ヒント１の DP の状態数を減らしましょう．

積が絡む問題で，$\sqrt{\ }$ を用いた高速化は頻出です．

ヒント 3

ヒント

ヒント 1 の DP において，$\mathrm{dp}[i][j]$ を $(1 \leq i \leq K, 1 \leq j \leq \lfloor\sqrt{N}\rfloor)$ の範囲で考えましょう．$\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 以下の数をおくときとそれより大きい数をおくときの遷移を別々に考えましょう．

DP の遷移

i 番目に $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 以下の数があり，$i+1$ 番目に $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 以下の数をおくとき

$$\begin{aligned}\mathrm{dp}[i+1][j] &= \sum_{j\times k\le N, k\le\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \mathrm{dp}[i][k] \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{\lfloor\sqrt{N}\rfloor, \lfloor\frac{N}{j}\rfloor\}} \mathrm{dp}[i][k]\end{aligned}$$

累積和で遷移は $O(1)$.

DP の遷移

i 番目に $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ より大きい数があり，$i+1$ 番目に $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ 以下の数をおくとき

$$\begin{aligned}\mathrm{dp}[i+1][j] &= \sum_{l=\lfloor\sqrt{N}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{N}{j}\rfloor} \sum_{k=1}^{\min\{\lfloor\sqrt{N}\rfloor,\lfloor\frac{N}{l}\rfloor\}} \mathrm{dp}[i-1][k] \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \max\left\{0, \min\left\{\lfloor\frac{N}{j}\rfloor, \lfloor\frac{N}{k}\rfloor\right\} - \lfloor\sqrt{N}\rfloor\right\} \mathrm{dp}[i-1][k]\end{aligned}$$

$\mathrm{dp}[i-1][k]$ は $\mathrm{dp}[i+1][j]$ に，

$$\#\left\{l \mid j \times l \leq N, k \times l \leq N, \lfloor\sqrt{N}\rfloor < l\right\}$$

回だけ足されることを利用．

DPの遷移

$$\mathrm{dp}[i+1][j] = \sum_{k=1}^{j} \max\left\{0, \lfloor\frac{N}{j}\rfloor - \lfloor\sqrt{N}\rfloor\right\} \mathrm{dp}[i-1][k] + \sum_{k=j+1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \max\left\{0, \lfloor\frac{N}{k}\rfloor - \lfloor\sqrt{N}\rfloor\right\} \mathrm{dp}[i-1][k]$$

どちらの項も累積和で $O(1)$.

計算量

今までの話より，DP の状態数は $O(K\sqrt{N})$，各遷移は $O(1)$ より全体の時間計算量は $O(K\sqrt{N})$ 時間．
また，条件を満たす列の後ろに 1 を加えても条件を満たすので，
$\mathrm{dp}[K+1][1]$ が答えになること等を用いると実装が楽になる．