ABC100D Patisserie ABC
解説

https://atcoder.jp/contests/abc100/tasks/abc100_d

目次

問題概要

問題

長さ N の数列 x, y, z が与えられる．1 以上 N 以下の整数を重複なく M 個選び，p_i $(1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_M \leq M)$ とするとき，

$$\left|\sum_{i=1}^{M} x_{p_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{M} y_{p_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{M} z_{p_i}\right|$$

の値としてありうる最大値は？

制約

- $1 \leq N \leq 1000$
- $1 \leq M \leq N$
- $-10^{10} \leq x_i, y_i, z_i \leq 10^{10}$

ヒント 1

ヒント

式に絶対値があるままだと厄介なので，絶対値を外すことを考えてみましょう.

ヒント 1

ヒント

式に絶対値があるままだと厄介なので，絶対値を外すことを考えてみましょう．

絶対値が出てきたら毎回うまく外せるとは限らないことに注意．
後でも説明するが，今回は絶対値の最大化だから上手くいく！

ヒント 2

ヒント

$|x| = \max\{x, -x\}$ であることを使います．これにより，$|x|$ を最大化するには x か $-x$ どちらかを最大化すればよいです．

ヒント 2

ヒント

$|x| = \max\{x, -x\}$ であることを使います．これにより，$|x|$ を最大化するには x か $-x$ どちらかを最大化すればよいです.

この問題の一つ目の典型ポイント.

絶対値は max で書けます.

ヒント 2

ヒント

$|x| = \max\{x, -x\}$ であることを使います．これにより，$|x|$ を最大化するには x か $-x$ どちらかを最大化すればよいです．

この問題の一つ目の典型ポイント．
絶対値は max で書けます．
$|x|$ の最大化時には，x か $-x$ のどちらかの最大化になることが重要！
逆に $|x|$ の最小化を考えると，x と $-x$ の両方とも 0 に近づける必要がある（こちらの場合条件が「かつ」になるので，線形計画問題等とは相性が良かったりする）．

ヒント 3

ヒント

問題の式には絶対値が 3 つあるので，計 8 通りの絶対値の外し方があります.

問題の式

$$\left|\sum_{i=1}^{M} x_{p_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{M} y_{p_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{M} z_{p_i}\right|$$

絶対値の外し方

$$
\begin{aligned}
|a| + |b| + |c| = \max\{ & a + b + c, a + b - c \\
& a - b + c, a - b - c \\
& - a + b + c, -a + b - c \\
& - a - b + c, -a - b - c\}
\end{aligned}
$$

なので，左辺の最大化は右辺のどれか一つを最大化すればいい！

解法

どのように絶対値を外すかを固定する（$2^3 = 8$ 通り）.

解法

どのように絶対値を外すかを固定する（$2^3 = 8$ 通り）.
絶対値を外した後は貪欲でよい.
例えば,

$$\sum_{i=1}^{M} x_{p_i} - \sum_{i=1}^{M} y_{p_i} + \sum_{i=1}^{M} z_{p_i}$$

と絶対値を外した場合は，$x_i - y_i + z_i$ の値が大きい順に M 個選べばよい.

解法

どのように絶対値を外すかを固定する（$2^3 = 8$ 通り）.
絶対値を外した後は貪欲でよい.
例えば,

$$\sum_{i=1}^{M} x_{p_i} - \sum_{i=1}^{M} y_{p_i} + \sum_{i=1}^{M} z_{p_i}$$

と絶対値を外した場合は，$x_i - y_i + z_i$ の値が大きい順に M 個選べばよい.
M 個選ぶときに，ソートを用いると時間計算量は $O(N \log N)$ 時間.
選択アルゴリズムを用いると $O(N)$ 時間.