DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timers prøve, 16. maj 2011
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30% , Opgave 2: 35%, Opgave 3: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 2 og 3 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgave 2 og 3 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2.5 %.

Opgave 1

(1) Hvilke konvergensforhold gælder for den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$:

a) rækken er betinget konvergent.

b) rækken er absolut konvergent.

c) rækken er divergent.

d) ved ikke.

(2) Hvilken symmetriegenskab har funktionen $f(x)=e^{\sin(x)}$, $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x)$ er ulige.

b) $f(x)$ er lige.

c) $f(x)$ er hverken lige eller ulige.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter på næste side.

(3) Konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4} x^n$ er:

a) $\rho = 5$.

b) $\rho = 1$.

c) $\rho = \infty$.

d) ved ikke.

(4) For den inhomogene lineære differentialligning

$$y'' + y' + 4y = u(t) \ ,$$

hvor $y = y(t)$, $t \geq 0$, er den tilhørende overføringsfunktion givet ved $H(s) = \frac{1}{s^2+s+4}$, $s \in \mathbb{C} \backslash \{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{15}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{15}\}$. Hvad er det stationære svar på påvirkningen $u(t) = 2\sin(t)$?

a) $y(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t)$.

b) $y(t) = \frac{3}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t)$.

c) $y(t) = \frac{3}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$.

d) ved ikke.

(5) For det lineære og homogene differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \qquad \text{hvor} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} ,$$

oplyses at det karakteristiske polynomium er $P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+3)$. $\mathbf{x}(t)$ er en 3-dimensional vektorfunktion. Tillige oplyses at nedenstående tre vektor funktioner er lineært uafhængige løsninger til systemet.

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} , \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-t} , \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} ,$$

Hvad gælder for egenværdien $\lambda = -1$:

a) Den algebraiske multiplicitet er 2 og den geometriske multiplicitet er 1.

b) Den algebraiske multiplicitet er 2 og den geometriske multiplicitet er 2.

c) Den algebraiske multiplicitet er 3 og den geometriske multiplicitet er 2.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter på næste side.

(6) Vi betragter differentialligningen

$$t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ty=0$$

og søger en løsning på potensrække formen

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\ .$$

Hvilken rekursionsformel vil de ukendte koefficienter a_n opfylde?

a) $a_n=-\frac{1}{n^2}a_{n-2}$ for $n=2,3,4,\ldots$, og $a_1=0$ samt $a_n\neq 0$ for $n=3,5,7,\ldots$.

b) $a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)^2}a_n$ for $n=0,1,2,3,\ldots$. Koefficienterne a_0 og a_1 kan begge være forskellige fra 0.

c) $a_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)^2}a_n$ for $n=0,2,4,\ldots$, og $a_n=0$ for $n=1,3,5,\ldots$.

d) ved ikke.

Opgave 2

I denne opgave betragtes det homogene og lineære differentialligningssystem givet ved:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)\ ,\qquad \text{hvor}\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&\sigma&2\\4&-1&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\ .$$

Parameteren σ er en reel konstant og t er tiden. Vektorfunktionen $\mathbf{x}(t)$ har dimensionen 3.

(1) Bestem tre lineært uafhængige løsninger til systemet for $\sigma=4$. Egenværdier og egenvektorer må bestemmes med brug af Maple.

(2) Bestem tre lineært uafhængige reelle løsninger til systemet for tilfældet $\sigma=-9$. Maple må bruges til bestemmelse af egenværdier og egenvektorer.

(3) For hvilke værdier af $\sigma\in\mathbb{R}$ er systemet asymptotisk stabilt?

Opgaven fortsætter på næste side.

Opgave 3

Funktionen $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, er 2π-periodisk og i intervallet $]-\pi, \pi]$ er f givet ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi < t < 0 \\ \alpha & \text{for} \quad t = 0 \\ 4 + \sin(4t) & \text{for} \quad 0 < t < \pi \\ \beta & \text{for} \quad t = \pi \end{cases}$$

På reel form har $f(t)$ Fourierrækken $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.

(1) Bestem α og β således at Fourierrækken konvergerer punktvis mod $f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) Skitser grafen for $f(t)$ for $t \in [-\pi, \pi]$.

(3) Undersøg om Fourierrækken er uniformt konvergent.

(4) Bestem samtlige Fourierkoefficienter a_n, $n = 0, 1, 2, ...$ og b_n, $n = 1, 2, ...$ Du må bruge Maple. Opskriv Fourierrækken for $f(t)$.

Opgavesættet slut.