# Forelæsning 12 Matematik 2, kursus 01035

1) Potensrækker til løsning af homogene differentialligninger.

2) Potensrækker til løsning af inhomogene differentialligninger

Vi betragter differentialligningen

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad (1)$$

Vi søger en løsning på potensrække formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (2)$$

## Potensrækkemetoden for differentialligninger

1) Indsæt potensrække antagelsen i (2) i differentialligningen (1) og orden efter potenser af $t$, dvs efter $t^n$.

2) Bestem en rekursionsformel for $c_n$.

Vi differentierer

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \qquad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

Indsat i ligning (1) giver

$$t \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, c_{n+1}\, t^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (n+1)n\, c_{n+1} + c_n \right) t^n = 0}$$

Iflg. identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) kan vi udlede en rekursionsformel for $c_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad (n+1)n\, c_{n+1} + c_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{c_0 = 0 \quad \text{og} \quad c_{n+1} = \frac{-c_n}{(n+1)n} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (3)$$

Her er $c_1 \in \mathbb{R}$ en arbitrær reel konstant.

Konvergensradius for potensrækken (3) kan bestemmes med brug af kvotientkriteriet (sætning 4.30).

Vi betragter

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{og introducerer} \quad a_n = c_n t^n$$

Vi udregner kvotienten for $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1} t^{n+1}}{c_n t^n} \right| = \left| \frac{-\frac{c_n}{(n+1)n} t^{n+1}}{c_n t^n} \right| =$$

$$\left| \frac{-1}{(n+1)n} \right| \left| \frac{t^{n+1}}{t^n} \right| = \frac{1}{(n+1)n} |t| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty$$

og $\forall t \in \mathbb{R}$

Heraf fås konvergensradius $\rho = \infty$.

Den $N$'te afsnitssum $S_N(t)$ med $N = 3$ er

$$S_3(t) = \sum_{n=0}^{3} c_n t^n = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$c_1$ er en arbitrær konstant.

$$c_2 = -\frac{c_1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} c_1$$

$$c_3 = -\frac{c_2}{3 \cdot 2} = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2} c_1\right) = \frac{1}{12} c_1$$

Vi har

$$S_3(t) = c_1 t - \frac{1}{2} c_1 t^2 + \frac{1}{12} c_1 t^3$$

$$= c_1 \left( t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{12} t^3 \right)$$

Vi iagttager at $y(0) = c_0 = 0$

$y'(0) = c_1$

Et eksplicit funktionsudtryk for $c_n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ kan findes ud fra tabellen:

| $n$ | $c_{n+1}$ |
|---|---|
| $1$ | $c_2 = \frac{-1}{2 \cdot 1} c_1 = \frac{-1}{2} c_1$ |
| $2$ | $c_3 = \frac{-1}{3 \cdot 2} c_2 = \frac{(-1)^2}{3 \cdot 2 \cdot 2} c_1$ |
| $3$ | $c_4 = \frac{-1}{4 \cdot 3} c_3 = \frac{(-1)^3}{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} c_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n-1$ | $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n((n-1)!)^2} c_1$ |

Potensrækken for $y$ er givet ved det eksplicitte udtryk

$$\boxed{y(t) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n((n-1)!)^2} t^n} \qquad (4)$$

Dette er den første løsning ud af 2 lineært uafhængige løsninger til differentialligningen i (1). Den anden løsning kan ofte findes med Frobenius' metode, men ikke altid.

I Frobenius' metode indsætter vi løsnings-antagelsen

$$y(t) = t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\alpha}$$

i ligning (1), bestemmer parameteren $\alpha$ og bestemmer en ny rekursionsformel for $c_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

# Eksempel vedrørende en inhomogen diff. ligning

I differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + y = u(t) \qquad (5)$$

er

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n \qquad (6)$$

En partikulær løsning antages givet på potens-række formen

$$y_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (7)$$

Vi differentiere $y_p$ to gange

$$y_p' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} \qquad y_p'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

Disse udtryk indsættes i ligning (5) og vi får med (6)

$$t y_p'' + y_p = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n\, c_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n = 0$$

$\Updownarrow$

$$(c_0 - d_0)\,t^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)n\,c_{n+1} + c_n - d_n\right)t^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(c_0 - d_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)n\,c_{n+1} + c_n - d_n\right)t^n = 0$$

Fra identitetssætningen for potensrækker har vi

$$c_0 - d_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_0 = d_0} \tag{8}$$

og

$$(n+1)n\,c_{n+1} + c_n - d_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{n+1} = \frac{d_n - c_n}{(n+1)\,n} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Denne rekursionsformel kan også skrives som

$$\boxed{c_n = \frac{d_{n-1} - c_{n-1}}{n(n-1)} \quad \text{for } n = 2, 3, 4, \ldots} \tag{9}$$

Det andet led $c_1$ i potensrækken for $y_p$ er ikke bestemt og er dermed en arbitrær konstant. Potensrækken for $y_p$ er

$$y_p(t) = d_0 + c_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} c_n t^n \tag{10}$$

Konvergensradius $\rho$ kan bestemmes når $d_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ er givet.

De første 4 led i (10) findes fra rekursions-formlen (9). Vi laver en tabel

| $n$ | $c_n$ |
|---|---|
| 1 | $c_1$ er arbitrær |
| 2 | $c_2 = \dfrac{d_1 - c_1}{2 \cdot 1}$ |
| 3 | $c_3 = \dfrac{d_2 - c_2}{3 \cdot 2} = \dfrac{d_2 - \frac{d_1 - c_1}{2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{2d_2 - d_1 + c_1}{12}$ |

Tabel I

Vi har afsnitssummen for $N = 3$

$$S_3(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

og fra tabel I

$$S_3(t) = d_0 + c_1 t + \frac{d_1 - c_1}{2} t^2 + \frac{d_2 - c_2}{3 \cdot 2} t^3$$