Løsninger til eksamensopgaverne

17. maj 2014

Opg. 1 (i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Da $\frac{1}{n}+\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$ for $n \to \infty$ og dermed

$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}+\frac{\pi}{4}\right) \to \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ for $n \to \infty$

er rækken divergent ifølge n'te ledskriteriet

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg 1 (ii)

R_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+n)^2}$ $\qquad a_n = \frac{(-1)^n}{(2+n)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+n)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Fra eksempel 4.34 side 99 i lærebogen er denne række konvergent. Heraf følger at R_1 er absolut konvergent og dermed også konvergent

$\boxed{\text{svaret er b}}$

Opg 1 (iii)

$$R_2: \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{2^n} x^n = 4 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

For $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$ har kvotient-rækken summen

$$4 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1-\frac{x}{2}} = 4 \frac{\frac{x^3}{2 \cdot 4}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x^3}{2-x}$$

Jvf. korollar 5.5 side 109.

$$\boxed{\text{svaret er } c}$$

Opg 1 (iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} b^{2n} x^n \qquad b > 0$$

Konvergens radius ρ bestemmes med brug af kvotientkriteriet

Indfør $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} b^{2n} x^n = \frac{(-1)^n}{n^2} (b^2 x)^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} (b^2 x)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n^2} (b^2 x)^n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} b^2 |x| =$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} b^2 |x| \to b^2 |x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Potensrækken er konvergent for

$b^2|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{b^2} = \rho$

$\boxed{\text{svaret er } b}$

Opg 1 (v)

$$y'' + y' + y = \sin(\omega t)$$

Overførings funktionen er $H(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$

Vi bemærker at $\sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$

$s = i\omega$. Det stationære svar er

$$y(t) = \mathrm{Im}\left(H(i\omega)\, e^{i\omega t}\right)$$

Vi udregner først

$$H(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1} = \frac{1}{1-\omega^2 + i\omega} =$$

$$\frac{1-\omega^2 - i\omega}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\omega^2 - i\omega}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right)\right) =$$

$$\frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}\cos(\omega t)$$

$\boxed{\text{svaret er } b}$

Opg 1 (vi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos(nt)}{n^3} - \frac{\sin(nt)}{(2n+1)^2} \right\}$$

For at finde en majorantrække betragtes

$$\left| \frac{\cos(nt)}{n^3} - \frac{\sin(nt)}{(2n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(2n+1)^2} = k_n$$

Ifølge resultaterne i eksempel 4.34 side 99 er $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ konvergent.

$\boxed{\text{svaret er } c}$

Opg. 2

Vi betragter $\underline{x}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ $\quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (2)

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + a - 4$$

2(i) Vi ganger $P(\lambda)$ med (-1) og får

$$Q(\lambda) = -P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + (4-a)$$

Ifølge korollar 2.41 side 59 i lærebogen er systemet (2) asymptotisk stabilt såfremt

$a_1 = 5 > 0$ ok

$a_2 = 8 > 0$ ok

$a_3 = 4 - a > 0 \iff a < 4$

samt $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4-a \\ 1 & 8 \end{vmatrix} > 0 \iff$

$40 - (4-a) > 0 \iff 36 + a > 0 \iff$

$a > -36$

Systemet er asymptotisk stabilt for

$$\boxed{-36 < a < 4}$$

Opg 3

Vi betragter $y' + xy = x^2 e^{-x}$ $x \in \mathbb{R}$ (¥)

Opg 3 (i)

Vi har potensrækken for $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Heraf fås

$$x^2 e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} x^n}{(n-2)!} = \underline{\underline{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-2)!}}}$$

Opg 3 (ii)

Vi indsætter $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i (¥)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Heraf fås ved indsættelse i (¥)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-2)!}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} =$$

Opg 3 (ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n =$$

$$a_1 + 2a_2 x + a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}] x^n =$$

$$a_1 + (2a_2 + a_0) x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}] x^n =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-2)!}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 + (2a_2 + a_0) x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + a_{n-1} - \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \right] x^n = 0$$

Ifølge identitets sætningen for potensrækker har vi nu

$$a_1 = 0 \qquad 2a_2 + a_0 = 0$$

$$(n+1) a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \qquad \text{for } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Dvs:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = 0 \qquad a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \\ a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n-2)!} \quad \text{for } n = 2, 3, \ldots \end{array}}$$

a_0 er en arbitrær konstant

8

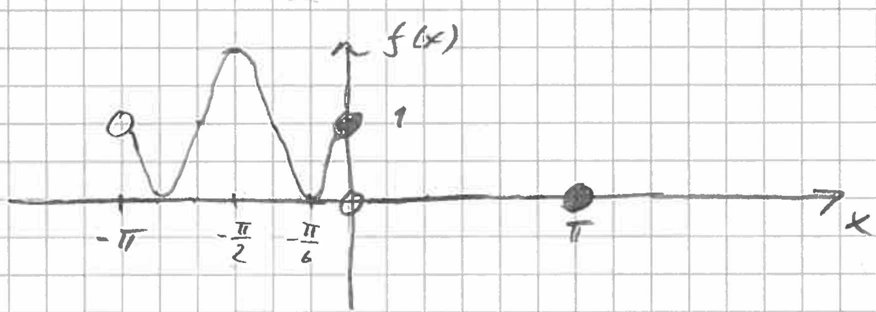
Opg. 4

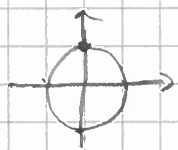
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(3x) & \text{for } -\pi < x \leq 0 \\ 0 & \text{for } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

f er 2π periodisk

4 (i)

Grafen for f





4 (ii) Ifølge Fouriers sætning konvergerer Fourierrækken for f mod

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to 0_-} f(x) + \lim_{x \to 0_+} f(x)\right] = \frac{1}{2}(1+0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

i punktet $x = 0$.

4 (iii) Da f er diskontinuert i $x = 0$ vil man altid kunne finde x tilstrækkelig tæt på 0 således at $|f(x) - S_N(x)| > \varepsilon$, ligegyldigt hvor stort et N vi vælger. Ifølge definition 5.28, side 124 i Lærebogen, er Fourierrækken derfor ikke uniform konvergent.

Bemærk at $S_N(x)$ er den N'te afsnitssum for Fourierrækken.

Opg 4 (iv)

Fourierrækken for f er

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

Fourier koefficienterne er givet ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (1 + \sin(3x)) \cos(nx)\, dx$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$

og

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (1 + \sin(3x)) \sin(nx)\, dx$$

Med brug af Maple fås

$$a_0 = 1 - \frac{2}{3\pi}$$

$$a_n = \frac{3n \cos(n\pi) + 3n}{\pi n (n^2 - 9)} = \frac{3((-1)^n + 1)}{\pi (n^2 - 9)}$$

for $n = 1, 2, 4, 5, 6, \ldots$

Der må ikke divideres med 0 for $n = 3$.

For n ulige og $n \neq 3$ er $a_n = 0$

For $n = 3$ har vi

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (1+\sin(3x))\cos(3x)\,dx = 0$$

samlet kan vi skrive med $n = 2m$

$$a_m = \frac{6}{\pi(4m^2-9)}$$

Igen med brug af Maple fås

$$b_n = \frac{n^2\cos(n\pi) - n^2 - 9\cos(n\pi) + 9}{\pi n(n^2-9)} =$$

$$\frac{(n^2-9)(-1)^n - (n^2-9)}{\pi n(n^2-9)} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n}$$

for $n = 1, 2, 4, 5, 6, \ldots$ Bemærk $n \neq 3$

For $n = 3$ har vi

$$b_3 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}$$

$b_n = 0$ for n lige

Samlet kan vi skrive med $n = 2m-1$

$$b_m = \frac{-2}{\pi(2m-1)} \qquad \text{for } m = 1, 3, 4, 5, \ldots$$

Heraf fås Fourierrækken for f

$$\boxed{\begin{aligned} f \sim \; & \frac{1}{2} - \frac{1}{3\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{6}{\pi(4m^2-9)} \cos(2mx) \\ & - \frac{2}{\pi}\sin(x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right)\sin(3x) \\ & \qquad - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{2}{\pi(2m-1)} \sin((2m-1)x) \end{aligned}}$$