Eksamen, forår 2021

MC- del

(1) Svar b), løsninger på anden form

(2) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+s-2} = \frac{s+2}{(s+2)(s-1)}$

$= \frac{1}{s-1}, \quad s \notin \{-2, 1\}$

Svar c)

(3) $u(t) = \operatorname{Im}(e^{2it})$

Svaret er

$y(t) = \operatorname{Im}(H(2i)\, e^{2it})$

$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2i-1} e^{2it}\right)$

$= -\frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{2}{5}\cos(2t)$

Svar c)

(4) Røtter: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = -3$

Ikke asymptotisk stabilt!

Da roden $\lambda = 0$ har algebraisk multiplicitet 1 (og dermed geometrisk multiplicitet 1) er systemet stabilt.

Svaret er a)

(5) Svaret er a)

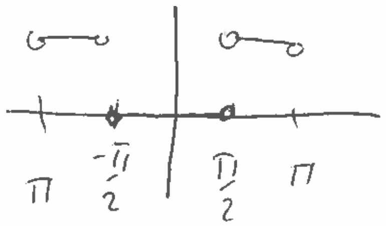
(6) Svaret er c)

(7) Svaret er a)

(8) Svaret er b)

(9) Svaret er c)

(10)



f er lige, så $b_n = 0$, $\forall n$.

I følge sætn. 6.3 er

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} = 1$$

og

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0$$

Svaret er c)

(11) I følge Parseval er

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2,$$

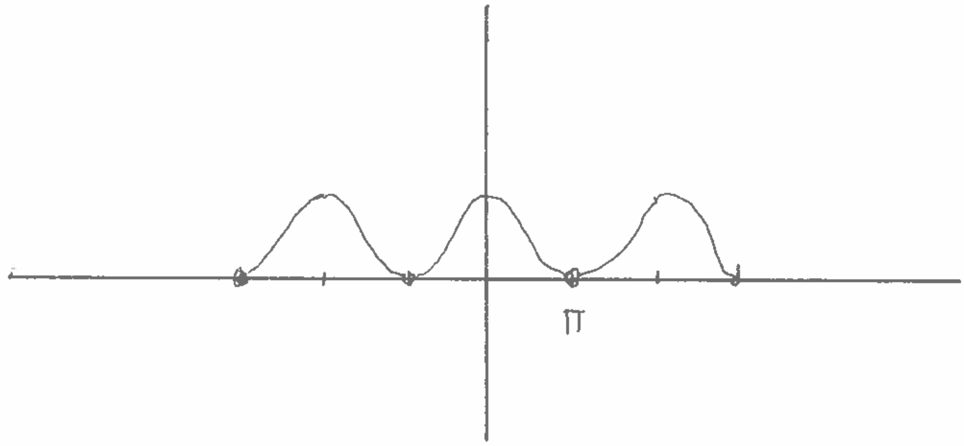
så

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Svaret er b)

Opgave 2

(i)



Bemærk at funktionen <u>ikke</u> er kontinuert i punkterne $\pi + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$

(ii) Funktionen er stykkevist differentiabel (check det!), men ikke kontinuert i $x = \pi$. Så ifølge Fouriers sætning konvergerer Fourierrækken mod $\dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \dfrac{e^{-\pi^2} + e^{-0\pi}}{2} = \underline{\underline{e^{-\pi^2}}}$

(iii) Nej, da f ikke er kont kan Fourierrækken ikke konvergere uniformt mod f [men den konvergerer uniformt mod den 2π-periodiske udvidelse af $g(x) = e^{-x}$ $-\pi \le x < \pi$

Opgave 3:

(i)
$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right|$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} |x|^n \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\le \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

(ii) Uligheden $\frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N \le 0.1$ er opfyldt for $\underline{\underline{N = 2}}$

Opgave 4

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 \\ a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + a$$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + a$$

Betingelsen for asymptotisk stabilitet er

$$\begin{cases} -2a > 0 \\ a^2 + a > 0 \end{cases}, \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a \cancel{<} 0 \\ a(a+1) > 0, \end{cases}$$

dvs.

$$\underline{\underline{a < -1}}$$