Løsning Skriftlig 3-timers prøve, 13. maj 2024
Kursus: Matematik 2, 01034/01035/01037

1. Del A: Mat 2, MC Opgaver

(1) Svaret er (c), $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)$, fordi rødderne til den karakterligning er $\lambda = 2$ med multiplicitet 2 (svarer til $c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$), og $\lambda = \pm i$ (som svarer til $c_3\cos t + c_4\sin t$).

(2) Svaret er (d), $H(s) = \frac{s^2+3}{s^2+2s+1}$, $s \neq -1$. Formlen er blot karakterligningen fra højre side divideret med karakterligningen fra venstre side. Nænveren $s^2 + 2s + 1$ har kun én rod, $s = -1$ (med multiplicitet 2).

(3) Svaret er (c), systemet er ustabilt. Det er fordi matricen A har en egenværdi med positiv realdel, ($\lambda = 3$).

(4) Svaret er (a), $\rho = 2$. Kan findes ved at kigge på

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2+n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{2+n}|x| \to \frac{1}{2}|x| \quad \text{når } n \to \infty,$$

og $\frac{1}{2}|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$.

(5) Svaret er (b), A er absolut konvergent og B er betinget konvergent. Hvis vi skriver

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2+n}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}},$$

har vi

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2},$$

og vi ved at $\sum \frac{1}{n^2}$ er konvergent. Så $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent, ved sammenligningskriteriet, d.v.s., A er absolut konvergent.

Om B, vi har $\cos(n\pi) = (-1)^n$, så

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},$$

og $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ er monoton aftagende med $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, så B er konvergent ved Leibnitz kriteriet. Men B er kun betinget konvergent, fordi rækken $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ er divergent (af formen $\sum \frac{1}{n^r}$, med $r \leq 1$).

(6) Svaret er (c), ingen konklusion om konvergens for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Det er fordi vi er kun givet at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er konvergent. Vi ved ikke om den er *absolut konvergent*. Hvis, f.eks., $b_n = \frac{1}{n^2+1}$, så er $\sum a_n$ nødvendigvigt konvergent. Men, hvis, f.eks., $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, og $a_n = \frac{1}{n+2}$, så er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, $0 < a_n < |b_n|$, og $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

(7) Svaret er (a), A er en majorantrække, og B er en konvergent majorantrække. Vi har:

$$\left|\frac{\cos(x)+\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2} \leq \frac{3}{n},$$

så både A og B er majorantrækker. Men kun B er konvergent (A er divergent).

(8) Svaret er (b), $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{i}{n^2})$, $n > 0$. Dette følger fra formlen: $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ for $n > 1$.

(9) Svaret er (e), $5+2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1)+2c_{n-1}))t^n = 0$. Differentialligningen kan skrives som

$$y''(t)+2ty(t)+5=0.$$

Ved indsættelse af potensrækken $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, fås

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^{n+1} + 5 &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}t^n + 5 &= 0 \\
2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}t^n + 5 &= 0.
\end{aligned}$$

2. Del B

Opgave 1

(1) Vi skal vise, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{100+n}{2+n^3}$ er absolut konvergent. Vi har:

$$|a_n| = \frac{100+n}{2+n^3},$$

som ligner $\frac{1}{n^2}$ når n er stor, så vi kigge på $|a_n|/b_n$, hvor $b_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{100+n}{2+n^3} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{100n^2+n^3}{2+n^3} = \frac{\frac{100}{n}+1}{\frac{2}{n^3}+1} \to 1, \quad \text{når } n \to \infty.$$

Vi ved allerede at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent (dette er af type $\sum \frac{1}{n^r}$ hvor $r > 1$). Ved ækvilentskriteriet (Sætning 4.24) konkluderer vi at $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

(2) Vi betragt nu, for $k \in \mathbb{N}$, rækken:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100+n}{2+n^k}.$$

(a) Vi finder den mindste værdi for $k \in \mathbb{N}$, der gør S absolut konvergent: Vi har set at det gælder når $k = 3$. Hvis vi tager nu $k = 2$, har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{100+n}{2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \qquad b_n = \frac{100+n}{2+n^2}.$$

Det er klart at b_n er positivt, monoton aftagende, og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, så rækken er konvergent, ved Leibnitz kriteriet. Men rækken er ikke absolut kovergent, fordi, når vi bruger det samme argument som ovenfor ved ækvivalentskriteriet, få vi at $\sum b_n$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, som er divergent. Vi konkluderer, at $k = 3$ **er det mindste værdi der gør S absolut konvergent**.

(b) Nu finder vi den mindste værdi for $k \in \mathbb{N}$, der gør S konvergent. Vi har set, at S er konvergent når $k = 2$. Hvis vi tager nu $k = 1$, har vi $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hvor $a_n = (-1)^n \frac{100+n}{2+n}$, og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Det betyder at a_n går ikke mod nul, so $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, ved n'te leds kriteriet. Vi kondluderer at $k = 2$ **er det mindste værdi der gør S konvergent**.

Opgave 2

Vi betragter differentialligningen

(1) $$y''''(t) + y'''(t) - 2y''(t) = u(t).$$

(1) Det karakteristiske polynomium for ligningen er
$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + \lambda - 2).$$
Røderne er $\lambda = 0$, med multiplicitet 2, og $\lambda = 1$, $\lambda = -2$. Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning er så:
$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 c_4 \in \mathbb{R}.$$

(2) Det oplyses at $y(t) = t^3$ er en løsning til (1). Den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning er givet ved at lægge sammen en partikulære løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning, så:
$$y(t) = t^3 + c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-2t}, \quad c_1, c_2, c_3 c_4 \in \mathbb{R}.$$

(3) Vi kan bestemme funktionen $u(t)$, ved at sætte $y(t) = t^3$ ind i ligning (1), og vi får på venstre siden:
$$y''''(t) + y'''(t) - 2y''(t) = 0 + 6 - 12t.$$
Dette skal være lige med høre siden, som er $u(t)$, så $u(t) = 6 - 12t$.

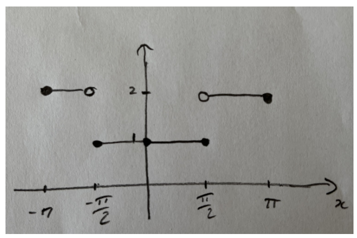
Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet:

f er en lige funktion, f er 2π-periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} x \in [0, \pi/2], \\ 2 & \text{for} x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

(1) Se Figur 1.



FIGUR 1. Grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$

(2) Vil skal bestemme Fourierkoefficienterne for f, som er en lige funktion. Dette betyder at $b_n = 0$ for alle n, og vi kan bruge formlen: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$ for a_n. Dette giver

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}, \qquad \text{når } n > 0, \end{aligned}$$

og

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx \right) = 3.$$

(3) Funktionen er stykkevis differentiabel og 2π-periodiske. Derfor, ifølge Fourierssætning, konvergerer Fourierrækken mod $f(x_0)$ når f er kontinuert i x_0, og gennemsnittsværdien $(f(x^+) + f(x^-))/2$ i et punkt hvor f er diskontinuert. Fra grafen er dette 2, 1.5, 1, 1.5 og 2 i punkterne hendholdsvis $x = -\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, og π.

(4) Hvis en Fourierrækker kovergerer uniformt, så er funktionen $F(x)$, som rækken konvergerer mod, kontinuert. Men vores grænsefunktion $F(x)$ er ikke kontinuert i, f.eks., $x = \pi/2$, fordi $\lim_{x \to x^-} F(x) = 1$, mens $\lim_{x \to x^+} F(x) = 2$. Derfor konverger Fourierrækken *ikke* uniformt. (Bemærk: Hvis man argumenterer at f er selv ikke kontinuert, så er det et forkert argument: der findes funktioner f som er ikke kontinuert, men deres Fourierrækker konverger uniformt mod en kontinuert funktion, f.eks., $f(x) = \begin{cases} 0, & x = m\pi, m \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{ellers} \end{cases}$).