Forelæsning 8, Matematik 2, kursus 01035

Agenda

1) Generelle uendelige rækker af funktioner
2) Punktvis konvergens
3) Uniform konvergens
4) Majorant rækker
5) Integration og differentiation af sumfunktioner

Generelle uendelige rækker af funktioner

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

Eksempel: Potens rækker $\qquad f_n(x) = c_n x^n$

N'te afsnitssum: $\qquad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$

Eksempel 5.25

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n \qquad f_n(x) = x(1-x^2)^n$$

Formuleret som en kvotientrække

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n \quad \text{med kvotienten} \quad q = 1-x^2$$

Bemærk at $\quad f(0) = 0$

Kvotientrækken er konvergent for

$|q| < 1 \iff |1-x^2| < 1 \iff -1 < 1-x^2 < 1 \iff$
$-2 < -x^2 < 0 \iff 0 < x^2 < 2 \iff 0 < |x| < \sqrt{2}$

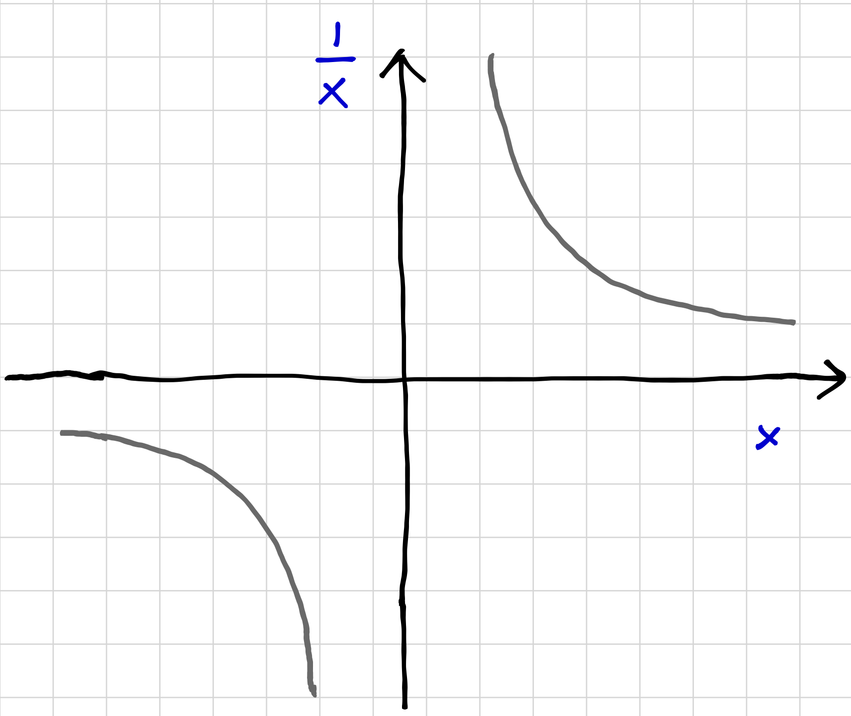
I dette tilfælde

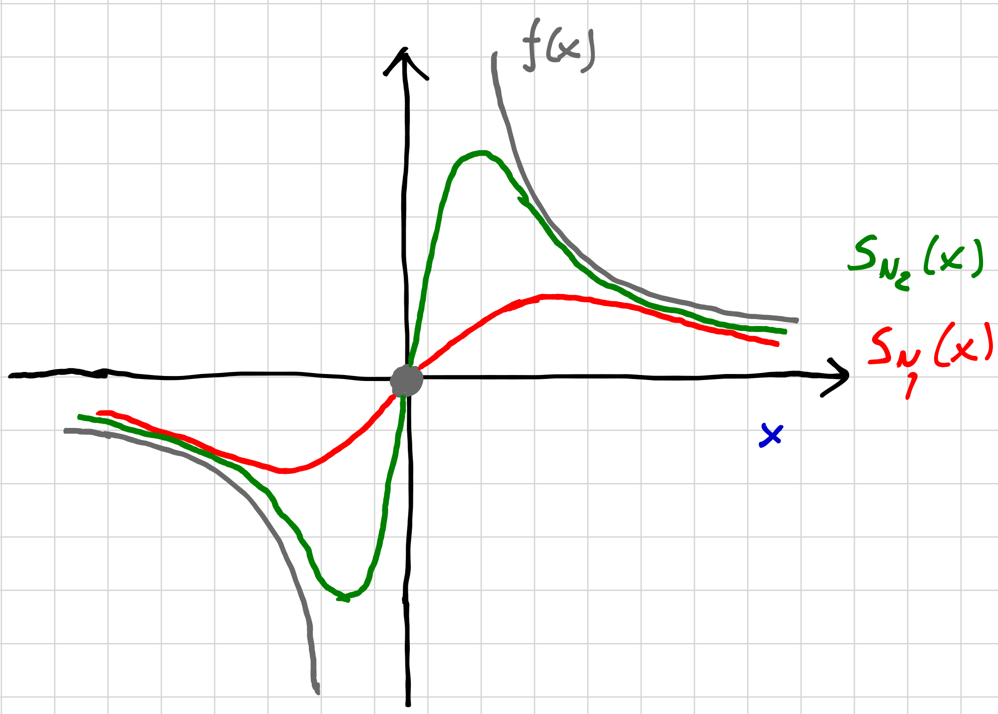
$$f(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} q^n = x \frac{1}{1-q} = \frac{x}{1-(1-x^2)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Summen er

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for} \quad 0 < |x| < \sqrt{2} \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x(1-x^2)^n$$





$N_1 < N_2$

Bemærk: $f(x)$ divergerer for $x \to 0$

$S_N(x)$ er næsten lig med $f(x)$ for N stor og $|x| > 0$.

Men for x meget tæt på 0 må $S_N(x)$ afvige fra $f(x)$ for at gå gennem $S_N(0) = f(0) = 0$.

Afsnit 5.4 Uniform konvergens

Punktvis konvergens af $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad x \in I$

for fastholdt $x \in I$, det vil sige for et givet $x \in I$, som kan vælges frit, har vi

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N_0 \in \mathbb{N} \text{ således at } |f(x) - S_N(x)| \le \varepsilon \quad \forall\ N \ge N_0 \tag{5.24}$$

Bemærk at vi først vælger x og derefter vælger et tilstrækkeligt stort N således at uligheden (5.24) holder.

For forskellige x kan vi blive nødsaget til at vælge forskellige N.

Eksempel 5.27

Vi betragter funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1 \qquad x \in \,]-1;1[$$

Denne række er punktvis konvergent

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n \to \frac{1}{1-x} \quad \text{for } N \to \infty \text{ for ethvert } x \in \,]-1;1[$$

Vælg nu N og hold N fast. Vi varierer $x \in \,]-1;1[$.
I dette tilfælde observerer vi at

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n\right| = \left|\frac{x^{N+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \le \varepsilon \qquad (*)$$

$x \to 1_-$ ups!

Her kan vi vælge x så tæt på 1 at

$$\frac{|x|^{N+1}}{1-x} > \varepsilon$$

Vi introducerer r således at $0 < r < 1$. For $x \in [-r; r]$ er ovenstående problem elimineret.

Fra $(*)$ har vi for alle $x \in [-r; r]$

$$|f(x) - S_N(x)| = \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq \frac{r^{N+1}}{1-r} \to 0 \quad \text{for } N \to \infty$$

Det vil sige at $S_N(x) \to f(x)$ for $N \to \infty$.

Vi bliver nødt til at vælge N således at $\frac{r^{N+1}}{1-r} \leq \varepsilon$ og for dette N vil $(*)$ være opfyldt for alle $x \in [-r; r]$.

Dette definérer **uniform konvergens**

Definition 5.28 Uniform konvergens.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R}$$

antages punktvis konvergent. Vi siger at $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergerer uniformt mod $f(x)$ på I såfremt

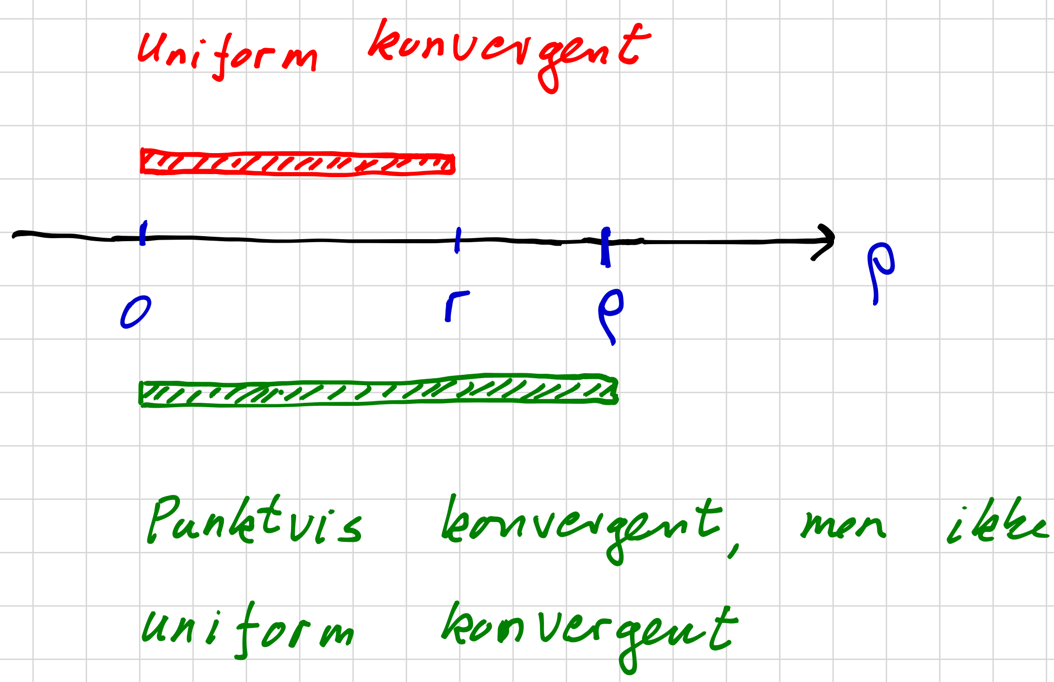
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ således at } |f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon$$
$$\forall x \in I \quad \text{og} \quad \forall N \geq N_0$$

Sætning 5.30

Lad potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ være konvergent med konvergensradius $\rho > 0$. I dette tilfælde er potensrækken uniform konvergent på ethvert interval $[-r\,;\,r]$ hvor $r \in \,]0\,;\,\rho[$ $\;(0 < r < \rho)$.

Bevis:

Se i lærebogen



Definition 5.31 Majorant rækker

Betragt rækken $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad x \in I \qquad (5.28)$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ med konstante led $k_n \geq 0$ er en majorant række for (5.28) på I såfremt

$$|f_n(x)| \leq k_n \qquad \forall x \in I \quad \text{og} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ er konvergent, siges rækken at være en konvergent majorantrække for (5.28).

Eksempel

Vi betragter $S: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (2\cos(nx) - 7\sin(nx))$ for $x \in [-\pi; \pi]$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3} (2\cos(nx) - 7\sin(nx))$$

Vi tjekker punkt (i) ovenfor

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n^3} (2\cos(nx) - 7\sin(nx)) \right| \leq$$

$$\frac{1}{n^3} \left(|2\cos(nx)| + |7\sin(nx)| \right) \leq \frac{1}{n^3} (2+7) = \frac{9}{n^3}$$

$$\forall x \in [-\pi; \pi]$$

Vælg $k_n = \frac{9}{n^3}$ og få majorantrækken

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^3}$ for rækken S.

Ifølge eksempel 4.34 er ovenstående majorantrække konvergent.

Sætning 5.33 Weierstrass' M-test.

Vi betragter rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $x \in I$

(i) Lad $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, være defineret på I.

(ii) Antag $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ har en konvergent majorantrække.

Så er $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniform konvergent.

Sætning 5.35 Kontinuitet af sumfunktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in I$$

(i) Lad $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ være kontinuerte på I.

(ii) Lad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ have en konvergent majorantrække

(eller er uniform konvergent).

Så er sumfunktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ kontinuert.

Sætning 5.36 Ledvis integration af $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Med antagelserne (i) og (ii) i sætning 5.35 har vi

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Sætning 5.37 Ledvis differentiation af $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

(i) $f_n(x)$ er differentiable på I med kontinuerte afledede.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent, det vil sige veldefineret på I.

(iii) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ har en konvergent majorantrække.

Så er $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ differentiabel på I

og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad x \in I$$