Forelæsning 7. Matematik 2, kursus 01035

1) Uendelige rækker med variable led.

2) Potensrækker.

Sætning 5.7 Taylors formel

$f: I \to \mathbb{R}$ $\qquad f \in C^\infty$

Lad $x_0 \in I$ og antag der eksisterer en konstant $C > 0$ således at

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ og } \forall x \in I$$

så har vi den konvergente række

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \qquad \forall x \in I$$

Bevis: Vi bruger kvotientkriteriet på

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{n!}(x-x_0)^n \qquad \text{med} \qquad a_n = \frac{C}{n!}(x-x_0)^n$$

Vi kan vise at ovenstående række er konvergent for alle $x \in I$.

Med brug af sammenligningskriteriet finder vi, at Taylor rækken er konvergent for alle $x \in I$.

Fra lemma 4.12 har vi, at der eksisterer et ξ hvor $x < \xi < x_0$ eller $x_0 < \xi < x$ således at

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1} \right| \leq$$

$$\frac{C}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1}$$

Dette gælder for ethvert $x \in I$. Vi har

$$\frac{C}{(N+1)!} |x-x_0|^{N+1} \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

eller formuleret mere stringent har vi for ethvert fastholdt $x \in I$ at

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \text{således at}$$

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad N \geq N_0$$

og dermed

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \to f(x) \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

Se også appendiks A.7 i lærebogen.

Eksempel 5.8

Taylor rækken for $f(x) = e^x$ med $x_0 = 0$ bestemmes således

$$f'(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = e^0 = 1 \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

Taylor rækken er

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

Eksempel 5.9

Taylor rækken for $f(x) = \cos(x)$ med $x_0 = 0$ bestemmes således

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(3)}(x) = \sin(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$$

Taylor rækken for $\cos(x)$ er

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0) x^4 + \ldots =$$

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = 1 + \frac{(-1)^1}{2}x^2 + \frac{(-1)^2}{4!}x^4 + \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Vi har

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}$$

Taylor rækken for $\sin(x)$ med $x_0 = 0$ er

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

Se sætning 5.11.

Definition 5.12. Potensrækker

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots}$$

En funktion f som kan skrives på formen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

siges at have en potensrækkefremstilling.

Sætning 5.13 Konvergens af potensrækker

For enhver potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gælder ét af følgende

(i) Rækken er kun konvergent for $x = 0$.

(ii) Rækken er absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exists\, \rho > 0$ således at rækken er absolut konvergent for $|x| < \rho$, og divergent for $|x| > \rho$.

Konvergensradius bestemmes med brug af kvotientkriteriet.

ρ kaldes for konvergensradius.

Konvergensforholdene for $x = \pm \rho$ undersøges separat.

(i) $\rho = 0$ (ii) $\rho = \infty$

Hvordan findes ρ? Brug kvotientkriteriet med $a_n = c_n x^n$

Vi har trivielt at

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to C \quad \text{for } n \to \infty, \text{ hvor } C \in [0; \infty]$$

Vi betragter kvotienten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x| \to C|x|$$

for $n \to \infty$

For $c = \infty$ har vi tilfælde (i) $\rho = 0$

For $c = 0$ har vi tilfælde (ii) $\rho = \infty$

For $c \in \,]0;\infty[$ er potensrækken absolut konvergent for

$$c|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{c} = \rho$$

og potensrækken er divergent for $|x| > \rho$.

For $x = \pm\rho$ ved vi ikke om potensrækken er konvergent eller divergent. Vi må foretage en separat undersøgelse i disse tilfælde.

Bemærk ovenstående er bevis for sætning 5.13.

Eksempel

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} g^n c_1 x^n \qquad g > 0$$

Vi bruger kvotientkriteriet

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} g^n c_1 x^n = \frac{(-1)^n}{n+1} c_1 (gx)^n$$

Kvotienten udregnes som følger

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2} c_1 (gx)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{n+1} c_1 (gx)^n}\right| = \frac{n+1}{n+2} g|x|$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} g|x| \to g|x| \quad \text{for} \quad n\to\infty$$

Potensrækken er absolut konvergent for

$$g|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{g} = \rho$$

Konvergensradius er givet ved $\rho = \frac{1}{g}$.

Eksempel

Vi betragter $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

Vi indfører $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ og udregner kvotienten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} x^2 =$$

$$\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} x^2 = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} x^2 \to 0$$

for $n\to\infty$ og for ethvert men fastholdt $x \in \mathbb{R}$

Heraf følger at konvergensradius er $\rho = \infty$.

Rækken er absolut konvergent epsilon x i Reelle tal

Sætning 5.17 Differentiation af potensrækker

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad x \in \,]-\rho; \rho[$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, c_n\, x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)\, c_n\, x^{n-k}$$

Lige en advarsel. Betragt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \left(\text{Not } \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^n\right)$$

Sætning 5.20 Relation mellem potensrækker og Taylor rækker. med x▯= 0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{med} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Sætning 5.21 Identitetssætningen for potensrækker

Huis $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad \forall x \in]-\rho;\rho[$ og $\rho > 0.$

Så gælder $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Der er 2 konvergente rækker
sum C_n x^n og sum a_n x^n

så kan der laves linearkombination

epsilon x i]-p,p[

Bruges til at løse ligninger med potensrækker