Aiwa skriv jeres funktioner ind og om de er AK BK eller D ☺

Hvis i ikke kan edit – så brug det her link: MAT 2.docx

https://discord.gg/KxNaZFX6

HUSK:

$\cos(\pi * n) = (-1)^{n+1}$

An	AK/BK/D	Notes
x/n, x kun positive tal	D	Hotellet
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^K}\right), k \in [2..\infty[$	K	
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(8\cos\left(\pi n\right) + 5\sin\left(\pi n\right)\right)$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(4n\right)}{n^2}$	AK	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\pi n\right)}{n}$	BK	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{1+11^n}$	AK	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n+1}.$	BK	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a + konstant * \ln(n)}$ $A = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1+\sqrt{n}},$	BK	
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}.$	K	
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} * \frac{1}{n}$	BK	

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty} n$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+1}{n^5+\ln(n)}$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+1\right)$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^q}$, $q<1$ $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$	D	
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{\cos(n)}$	D	
$B = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2+1)\frac{2+n^2}{1+n!}$.	AK	
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n^2+3n}{(n+1)^4}$	AK	
$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^3}{4n^3+2n+1}$,	D	

Differentialligning hvor rekursionsformlen skal bestemmes

1) Start med at opskrive alle diff udtryk udfra sætn. 5.17 (lign 5.18)

2) Sæt det ind i den oplyste differentialligning og gang de forskellige faktorer ind

3) Glem lige sumationsindex og fokuser på at få kun x^n for alle sumationstegnene

4) Når alle er x^n, skal sumationsindexet matches ved at bestemme summerne

a) F.eks. hvis du går et sumationsindex op skal første sum adderes til sum udtrykket.

5) Nu sættes x^n udenfor og ifølge Koraller 5.21, skal konstanterne være ligmed 0 og derfor forsvinder ledene ude foran sumtegnet.

6) Der isoleres nu for an+1/an

7) Nemt

eksempler: dag7 opgave A, hjem 7 opgave a)

For typer af formen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

The sum of the series is: $\frac{1}{x-1}$, valid for $|x| > 1.$

Eks:

> $S(a) := \sum_{n=0} \left(a^{-7 \cdot n}\right)$

$$S := a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a^{-7 \cdot n} \tag{1.4.1}$$

Det vides om en geometrisk sum at følgende er gældende: $1 < |a^{-7}|$, da er den konvergent, dette medfører $1 > a^7 \Rightarrow a^7 - 1 > 0$. Dette betyder at den konvergere hvis $a^7 > 1$, det betyder $a > 1$. Summen af en geometrisk funktion kan findes på følgende. $S = \frac{a_0}{1-r}$: Hvilket giver $\frac{1}{1-a^{-7}}$, som er ækvivalent med: $\frac{a^7}{a^7-1}$

B.1 Potensrækker

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1 && (5.3) \\
\frac{x}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \ |x| < 1 \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbb{R} && (5.10) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \ |x| < 1 \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ x \in \mathbb{R} && (5.11) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ |x| < 1$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \ x \in \mathbb{R}$$

B.2 Fourierrækker for 2π-periodiske funktioner

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ hvis } x \in]-\pi, 0[, \\ 0 \text{ hvis } x = 0, x = \pi, \\ 1 \text{ hvis } x \in]0, \pi[, \end{cases} \quad , \quad f \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x) \qquad (6.13)$$

$$f(x) = x, \ x \in]-\pi, \pi[: \quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \qquad (6.15)$$

$$f(x) = |x|, \ x \in]-\pi, \pi[: \quad f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$$

$$f(x) = x^2, \ x \in]-\pi, \pi[: \quad f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx$$

$$f(x) = |\sin x|, \ x \in]-\pi, \pi[: \quad f \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Hvordan påvirker a0, og b0, for ved forskellige værdier Fourierrækken?

When b_0 is > 0: This would result in a phase shift to the left (delay in phase) of the Fourier series.In the context of Fourier series, the terms "a_0" and "b_0" typically refer to the coefficients associated with the DC (Direct Current) component of the signal being represented. The Fourier series is a mathematical representation of a periodic function as an infinite sum of sines and cosines. The terms "a_0" and "b_0" play a specific role in this representation.

Let's break down how the values of "a_0" and "b_0" for different cases (<0, =0, >0) affect the Fourier series:

a_0 (DC Component):

When a_0 is < 0: This would result in a negative offset or displacement of the Fourier series from the x-axis. The signal would have a downward shift.

When a_0 is = 0: In this case, there is no DC component, and the signal is centered around the x-axis. The Fourier series starts from the origin.

When a_0 is > 0: This would result in a positive offset or displacement of the Fourier series from the x-axis. The signal would have an upward shift.

b_0 (DC Component for Imaginary Part, typically zero for real-valued signals):

When b_0 is < 0: This would lead to a phase shift of the Fourier series, causing it to be shifted to the right (advance in phase).

When b_0 is = 0: There is no imaginary part (phase shift) in the DC component of the Fourier series.

TL;DR:

a_0 (DC Component):

When a_0 is < 0: The entire square wave would be shifted downward.

When a_0 is = 0: The Fourier series starts from the origin, and the square wave is centered around the x-axis.

When a_0 is > 0: The entire square wave would be shifted upward.

b_0 (DC Component for Imaginary Part):

When b_0 is < 0: The square wave would be phase-shifted to the right.

When b_0 is = 0: No phase shift occurs.

When b_0 is > 0: The square wave would be phase-shifted to the left.

SÆTNINGER, LEMMA'ER, DEFINITION mm.

Sætning 1.5

Sætning 1.5 *Løsningerne til* (1.6) *udgør et n-dimensionalt vektorrum. Samtlige løsninger til* (1.6) *kan altså skrives på formen*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

hvor c'erne er vilkårlige konstanter og $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *er n vilkårlige lineært uafhængige løsninger.*

Formålet med dette afsnit er at beskrive, hvordan man kan bestemme n lineært uafhængige løsninger til den homogene ligning $D_n(y) = 0$. Til det formål betragtes *karakterligningen*, der er givet ved

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.7}$$

Lineært Uafhængighed

Sætning 1.14

Sætning 1.14 *Antag at* λ *er rod i karakterligningen med algebraisk multiplicitet p. Så har differentialligningen* $D_n(y) = 0$ *de lineært uafhængige løsninger*

$$y_1(t) = e^{\lambda t},\ y_2(t) = te^{\lambda t},\ \cdots, y_p(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}. \tag{1.13}$$

sætning 1.15

Sætning 1.15 (Fuldstændige løsning til (1.6)) *Den fuldstændige løsning til den homogene differentialligning $D_n(y) = 0$ bestemmes på følgende måde:*

(i) (komplekse løsninger) For hver rod λ i karakterligningen opskrives løsningen $y(t) = e^{\lambda t}$, samt, hvis λ har algebraisk multiplicitet $p > 1$, løsningerne

$$y(t) = te^{\lambda t}, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{\lambda t}.$$

Den fuldstændige komplekse løsning fås ved at danne linearkombinationer af disse n løsninger, med komplekse koefficienter.

(ii) (reelle løsninger) For hver reel rod λ i karakterligningen opskrives løsningerne nævnt under (i). For hvert par af komplekst konjugerede rødder $a \pm i\omega$ opskrives endvidere løsningerne

$$y(t) = e^{at}\cos\omega t \quad og \quad y(t) = e^{at}\sin\omega t,$$

samt, hvis $a \pm i\omega$ har multiplicitet $p > 1$, løsningerne

$$y(t) = te^{at}\cos\omega t, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{at}\cos\omega t$$

og

$$y(t) = te^{at}\sin\omega t, \cdots, y(t) = t^{p-1}e^{at}\sin\omega t.$$

Den fuldstændige reelle løsning fås ved at danne linearkombinationer af disse n løsninger, med reelle koefficienter.

Sætning 1.20

Sætning 1.20 *Lad y_0 betegne en løsning til ligningen* (1.14), $D_n(y) = u$, *og lad y_{HOM} betegne samtlige løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Da er*

$$y = y_0 + y_{HOM}$$

samtlige løsninger til (1.14).

Definition 4.15

Definition 4.15 **(Konvergens af uendelig række)** *Lad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *være en uendelig række med afsnitssummer* S_N, $N \in \mathbb{N}$. *Hvis talfølgen* S_N *er konvergent, dvs. hvis der findes et tal* S *således at*

$$S_N \to S \text{ for } N \to \infty, \tag{4.21}$$

så siges den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være konvergent med sum* S. *Dette skrives kort*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Hvis talfølgen S_N, $N \in \mathbb{N}$, *er divergent, så siges* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *at være divergent. Til en divergent række knyttes ingen sum.*

Definition 5.1

Definition 5.1 **(Kvotientrække)** *En kvotientrække er en række på formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \tag{5.2}$$

hvor $x \in \mathbb{R}$ *(eller* $x \in \mathbb{C}$*). Tallet* x *kaldes kvotienten.*

Vi benytter også navnet *kvotientrække* for rækker af formen (5.2), hvor summen blot starter med et vilkårligt positivt heltal $n = N$ istedet for $n = 0$; se korollar 5.5. Vi viser nu at en kvotientrække er konvergent hvis og kun hvis $|x| < 1$:

Sætning 5.2

Sætning 5.2 **(Kvotientrække)** *En kvotientrække* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *er konvergent hvis og kun hvis* $|x| < 1$. *For* $|x| < 1$ *er summen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{5.3}$$

Definition 5.12

Definition 5.12 **(Potensrække)** *En række på formen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{5.13}$$

kaldes en potensrække. En funktion $f : I \to \mathbb{R}$, *der kan skrives på formen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

for passende koefficienter c_n, *siges at have en potensrækkefremstilling.*

Sætning 5.17

Sætning 5.17 (Differentiation af potensrække) *Antag at potensrækken* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *har konvergensradius* $\rho > 0$*, og definér funktionen* f *ved*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in]-\rho, \rho[. \tag{5.17}$$

Så er f *uendeligt ofte differentiabel. Endvidere er*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad x \in]-\rho, \rho[; \tag{5.18}$$

mere generelt gælder for ethvert $k \in \mathbb{N}$ *at*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad x \in]-\rho, \rho[. \tag{5.19}$$

Bemærk de ændringer i summationsindexet som optræder i sætning 5.17. De forklares nærmere i det følgende eksempel.

Korollar 5.21

Korollar 5.21 (Identitetssætningen for potensrækker) *Hvis koefficienterne* c_n *for et passende* $\rho > 0$ *opfylder at*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0, \quad x \in]-\rho, \rho[,$$

så er $c_n = 0$ *for alle* n.

Som lovet vil vi nu vise at der findes uendeligt ofte differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ikke har potensrækkefremstillinger.

Lemma 4.10

Lemma 4.10 *Antag at talfølgen* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *er konvergent med grænseværdi* x*, og at talfølgen* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *er konvergent med grænseværdi* y*. Så gælder følgende:*

(i) For vilkårlige tal $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *er talfølgen* $\{\alpha x_n + \beta y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergent med grænseværdi* $\alpha x + \beta y$.

(ii) Talfølgen $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *er konvergent med grænseværdi* xy.

(iii) Hvis $y \neq 0$*, så er* $y_n \neq 0$ *for* $n \geq N$ *for en tilstrækkelig stor værdi af* N*. Talfølgen* $\{\frac{x_n}{y_n}\}_{n=N}^{\infty}$ *er da konvergent med grænseværdi* $\frac{x}{y}$.

(iv) Hvis talfølgerne $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *og* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *består af reelle tal og* $x_n \leq y_n$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$*, så er* $x \leq y$.

Konvergenskriteriet (N'te ledskriteriet) / divergenskriteriet) sætning 4.19

Sætning 4.19 (n'te ledskriteriet) *Hvis* $a_n \nrightarrow 0$ *for* $n \to \infty$*, så er* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Intergralkriteriet sætning 4.33

Sætning 4.33 (Integralkriteriet) *Antag at funktionen*

$$f : [1, \infty[\to [0, \infty[$$

er kontinuert og aftagende. Så gælder følgende:

(i) Hvis det uegentlige integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *er konvergent, så er rækken* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *konvergent, og*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^\infty f(n) \le \int_1^\infty f(x)\,dx + f(1). \tag{4.30}$$

(ii) Hvis $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *er divergent, så er* $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ *divergent.*

Sætning 4.33 bevises i appendiks A.8. I det følgende eksempel bruges integralkriteriet til at undersøge konvergensforholdende for en vigtig klasse af rækker:

Hjælpesætning 4.27

Sætning 4.27 *Hvis* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *er absolut konvergent, så er* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konvergent; endvidere er*

$$\left|\sum_{n=1}^\infty a_n\right| \le \sum_{n=1}^\infty |a_n|. \tag{4.27}$$

Man kan vise, at hvis $\sum_{n=1}^\infty a_n$ er absolut konvergent, så leder enhver omordning af leddene til en konvergent række med den samme sum.

Der findes rækker, som er konvergente, men ikke absolut konvergente: sådanne rækker siges at være *betinget konvergente.*

Lemma A.3’

Lemma A.3 *Lad* $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ *være en voksende og begrænset følge af reelle tal, dvs. de følgende to betingelser er opfyldt:*

(i) $k_1 \le k_2 \le k_3 \le \cdots \le k_n \le \cdots;$

(ii) der findes et tal k således at

$$k_n \le k, \ \forall n.$$

Så er talfølgen $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ *konvergent, og*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \sup\{k_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tilsvarende er en aftagende og nedadtil begrænset følge $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ *af reelle tal konvergent, og*

$$\lim_{n\to\infty} k_n = \inf\{k_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sammenligningskriteriet 4.20

Sætning 4.20 (Sammenligningskriteriet) *Antag at a_n og b_n er reelle tal og at $0 \le a_n \le b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Så gælder følgende:*

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Ækvivalens Kritiseret 4.24

Sætning 4.24 (Ækvivalentskriteriet) *Antag at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente. Så er begge rækker konvergente, eller begge rækker er divergente.*

Bevis: Betingelsen (4.26) implicerer at

$$\frac{1}{C}\frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ for } n \to \infty.$$

Vi kan derfor finde et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{C}\frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2} \text{ for alle } n \ge N,$$

dvs. så

$$\frac{C}{2}b_n \le a_n \le \frac{3C}{2}b_n \text{ for alle } n \ge N.$$

Sammenligningskriteriet viser nu, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent; og hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. □

Kvotientkriteriet 4.30

Sætning 4.30 (Kvotientkriteriet) *Antag at $a_n \neq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at der findes et tal $C \ge 0$ således at*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to C \quad \text{for} \quad n \to \infty. \tag{4.29}$$

Så gælder følgende

(i) Hvis $C < 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Hvis $C > 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Absolutkriteriet 4.26

Definition 4.26 (Absolut konvergens) *En uendelig række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siges at være absolut konvergent hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.*

Definition 4.28

Definition 4.28 (Betinget konvergens) *En uendelig række* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *siges at være betinget konvergent hvis* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *er konvergent og* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *er divergent.*

I eksempel 4.39 studeres en række som er konvergent, men ikke absolut konvergent.

Definition 4.37

Definition 4.37 (Alternerende rækker) *En alternerende række er en uendelig række, der for en passende følge af positive tal* b_n *kan skrives på formen*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1}b_n + \cdots , \qquad (4.40)$$

eller som

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + \cdots + (-1)^{n}b_n + \cdots \qquad (4.41)$$

Leibniz's Kriteriet (4.38)

Sætning 4.38 (Leibniz' kriterium) *Betragt en række på formen* (4.40) *eller* (4.41), *og antag følgende:*

(i) *Tallene* b_n *er positive, dvs.* $b_n > 0$ *for alle* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *Tallene* b_n *aftager monotont, dvs.,*

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots .$$

(iii) *Tallene* b_n *konvergerer mod* 0 *for* $n \to \infty$.

Så er rækkerne (4.40) *og* (4.41) *konvergente. Endvidere gælder for alle* $N \in \mathbb{N}$ *at*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}b_n\right| \leq b_{N+1} \qquad (4.42)$$

og

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n}b_n\right| \leq b_{N+1}. \qquad (4.43)$$

Korollar 4.35

Korollar 4.35 *Antag at funktionen* $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *er kontinuert og aftagende, ihvertfald for* $x \geq N$ *for et passende* $N \in \mathbb{N}$. *Antag endvidere at* $\int_N^\infty f(x)\,dx$ *er konvergent. Så gælder følgende:*

(i) *For det givne* N *er*

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx \tag{4.33}$$

(ii) *For det givne* N *er*

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx + f(N+1). \tag{4.34}$$

Trekantsuligheden

Konvergensradius

Korollar 5.38

Korollar 5.38 (Integration af potensrække) *Lad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *være en potensrække med konvergensradius* $\rho > 0$. *Så gælder for ethvert* $b \in]-\rho, \rho[$ *at*

$$\int_0^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} b^{n+1}.$$

Uniform Konvergens

Sætning 5.35

Sætning 5.35 (Kontinuitet af sumfunktion) *Antag at*

(i) *Funktionerne* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *er definerede og kontinuerte på et interval* I;

(ii) *Rækken* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *har en konvergent majorantrække på* I *(eller, mere generelt, rækken konvergerer uniformt).*

Så er sumfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I \tag{5.32}$$

kontinuert.

Sætning 5.36

Sætning 5.36 (Ledvis integration af sumfunktion) *Under antagelserne i sætning 5.35 gælder for ethvert valg af $a, b \in I$ at*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Sætning 5.37

Sætning 5.37 (Ledvis differentiation af sumfunktion) *Antag at*

(i) Funktionerne $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ er definerede og differentiable på intervallet I, med kontinuerte afledede;

(ii) Funktionen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er veldefineret på intervallet I;

(iii) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ har en konvergent majorantrække (eller, mere generelt, rækken konvergerer uniformt).

Så er funktionen f differentiabel, og

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \ \ x \in I.$$

Potensrækkemetoden

Korollar 5.21

Korollar 5.21 (Identitetssætningen for potensrækker) *Hvis koefficienterne c_n for et passende $\rho > 0$ opfylder at*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0, \ \ x \in]-\rho, \rho[,$$

så er $c_n = 0$ for alle n.

Som lovet vil vi nu vise at der findes uendeligt ofte differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ikke har potensrækkefremstillinger.

Sætning 2.12

Sætning 2.12 (Fuldstændige reelle løsning til (2.11)) *Den fuldstændige reelle løsning til det homogene differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kan bestemmes på følgende måde:*

(i) For hver reel egenværdi λ opskrives løsningerne i sætning 2.11 (a);

(ii) For hvert par $a \pm i\omega$ af komplekst konjugerede egenværdier opskrives løsningerne i sætning 2.11 (b).

Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet fås ved at danne linearkombinationer af de fundne n løsninger, med reelle koefficienter.

Sætning 2.20 (**)

Sætning 2.20 (Den generelle løsningsformel) *Lad $\mathbf{\Phi}(t)$ være en vilkårlig reel fundamentalmatrix hørende til det homogene differentialligningssystem (2.4) med en reel påvirkning $\mathbf{u}$, og vælg $t_0 \in I$ vilkårligt. Da gælder følgende:*

(i) Samtlige reelle løsninger til det lineære, inhomogene differentialligningssystem (2.22) er givet på formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}[\mathbf{\Phi}(\tau)]^{-1}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in I, \tag{2.28}$$

med $\mathbf{c} = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Den partikulære løsning til (2.22) med $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ er givet ved

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)[\mathbf{\Phi}(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}[\mathbf{\Phi}(\tau)]^{-1}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \in I. \tag{2.29}$$

Sætning 2.17

Sætning 2.17

(i) Enhver fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ for det homogene differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ er en differentiabel matrixfunktion, som opfylder matrixligningen

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t). \tag{2.19}$$

(ii) Den fuldstændige reelle løsning til $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ kan ved hjælp af en vilkårlig reel fundamentalmatrix $\mathbf{\Phi}(t)$ skrives som

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}, \; \mathbf{c} = (c_1 \; c_2 \; \dots \; c_n)^T \in \mathbb{R}^n, \tag{2.20}$$

og den partikulære løsning, for hvilken $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, kan skrives som

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)[\mathbf{\Phi}(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{2.21}$$

Sætning 2.11

Sætning 2.11 (Lineært uafhængige løsninger til $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$)

(a) Antag, at λ er en reel egenværdi for A med algebraisk multiplicitet $p \geq 2$ og geometrisk multiplicitet $q < p$. Da findes vektorer $\mathbf{b}_{jk} \in \mathbb{R}^n$ således at funktionerne

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1}(t) &= \mathbf{b}_{11}e^{\lambda t} \\ \mathbf{x_2}(t) &= \mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t} \\ &\vdots \\ \mathbf{x_p}(t) &= \mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

er lineært uafhængige reelle løsninger til systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(b) Antag, at $a \pm i\omega$ er et par komplekst konjugerede egenværdier med algebraisk multiplicitet $p \geq 2$ og geometrisk multiplicitet $q < p$. Lad $\lambda := a + i\omega$. Da findes vektorer $\mathbf{b}_{jk} \in \mathbb{C}^n$ således at funktionerne

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{11}e^{\lambda t}) \\ \mathbf{x_2}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t}) \\ &\vdots \\ \mathbf{x_p}(t) &= \mathrm{Re}\,(\mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t}) \\ \mathbf{x_{p+1}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{11}e^{\lambda t}) \\ \mathbf{x_{p+2}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{21}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{22}te^{\lambda t}) \\ &\vdots \\ \mathbf{x_{2p}}(t) &= \mathrm{Im}\,(\mathbf{b}_{p1}e^{\lambda t} + \mathbf{b}_{p2}te^{\lambda t} + \cdots + \mathbf{b}_{pp}t^{p-1}e^{\lambda t}) \end{aligned}$$

er lineært uafhængige reelle løsninger til systemet $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Definition 2.28

Definition 2.28 (Stabilitet og asymptotisk stabilitet)

(i) Det homogene system (2.44) siges at være stabilt, hvis enhver løsning $\mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, \infty[$ er begrænset. I litteraturen bruges undertiden betegnelsen "marginalt stabilt".

(ii) Systemet (2.44) siges at være asymptotisk stabilt, hvis der for enhver løsning $\mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, \infty[$, gælder at

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \text{ for } t \to \infty.$$

I litteraturen bruges undertiden betegnelsen "internt stabilt".

Hvis et system ikke er stabilt, så siges det at være ustabilt (eller instabilt).

Sætning 2.38

Sætning 2.38 (Asymptotisk stabilitet) *Systemet (2.44) er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis alle egenværdier for systemmatricen $\mathbf{A}$ har negativ realdel.*

Sætning 2.36

Sæting 2.41

Sætning 2.41 **(Routh-Hurwitz' kriterium)** *Betragt et polynomium med reelle koefficienter, på formen*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n. \qquad (2.50)$$

Så har alle rødder negativ realdel hvis og kun hvis de følgende to betingelser er opfyldt:

(i) alle koefficienterne er positive, det vil sige $a_k > 0$ for $k = 1, \ldots, n$;

(ii) alle $k \times k$ determinanter, $k = 2, \ldots, n-1$, på formen

$$D_k = det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdot & \cdot & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{pmatrix} \qquad (2.51)$$

er positive, det vil sige $D_k > 0$ (i udtrykket for D_k sættes $a_p = 0$ for $p > n$).

Korollar 2.42

Korollar 2.42 *Alle rødderne i et andengradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$

med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \qquad (2.52)$$

Korollar 2.43

Korollar 2.43 *Alle rødderne i et trediegradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0. \qquad (2.53)$$

Korollar 2.44

Korollar 2.44 *Alle rødderne i et fjerdegradspolynomium*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$$

med reelle koefficienter har negativ realdel, hvis og kun hvis

$$a_1 > 0, \; a_2 > 0, \; a_3 > 0, \; a_4 > 0, \; det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0, \; det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0.$$

Definition 6.1

Definition 6.1 (Fourierrække) *Til en* 2π*-periodisk funktion* $f \in L^2(-\pi, \pi)$ *knyttes formelt (hvilket skrives "$\sim$") rækkefremstillingen*

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{6.2}$$

hvor koefficienterne a_n *og* b_n *defineres ved*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

og

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx,\ \ n = 1, 2, \ldots\ \ . \tag{6.4}$$

Rækken (6.2) kaldes Fourierrækken hørende til f*, og tallene* a_n, b_n *kaldes Fourierkoefficienter.*

Fourriersætning 6.16

Sætning 6.16 (Fouriers sætning) *Antag at* f *er en stykkevis differentiabel og* 2π*-periodisk funktion. Så konvergerer Fourierrækken for* f *punktvis for alle* $x \in \mathbb{R}$*. For summen af Fourierrækken gælder følgende:*

(i) Hvis x *er et punkt hvori* f *er kontinuert, så er*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x). \tag{6.20}$$

(ii) Hvis x *er et punkt hvori* f *er diskontinuert, så er*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Definition 6.13

Definition 6.13 (Stykkevis differentiabel funktion) *En* 2π*-periodisk funktion* f *defineret på* $\mathbb{R}$ *siges at være stykkevis differentiabel hvis der findes endeligt mange punkter* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*,*

$$-\pi = x_1 < x_2 < \cdots <_{n-1} < x_n = \pi$$

og differentiable funktioner $f_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{C}$ *således at* f_i' *er kontinuert og*

$$f(x) = f_i(x),\ \ x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Korollar 6.17

Korollar 6.17 *Antag at f er en kontinuert, stykkevis differentiabel, og 2π-periodisk funktion. Så gælder følgende:*

(i) For ethvert $x \in \mathbb{R}$ er

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{6.21}$$

(ii) Fourierrækken konvergerer uniformt mod f, og den maksimale afvigelse mellem $f(x)$ og afsnitssummen $S_N(x)$ kan vurderes ved

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2 dt}. \tag{6.22}$$

Der findes også funktioner der ikke er kontinuerte, og hvor symbolet "$\sim$" alligevel kan erstattes med "$=$":

Definition 6.2

Definition 6.2 *En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ siges at være lige, hvis*

$$f(x) = f(-x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Funktionen siges at være ulige, hvis

$$f(x) = -f(-x), \; x \in \mathbb{R}.$$

sætning 6.6

Sætning 6.6 (Fourierkoefficienter for lige og ulige funktioner)

(i) Hvis f er en lige funktion, så er $b_n = 0$ for alle n, og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots \; . \tag{6.9}$$

(ii) Hvis f er en ulige funktion, så er $a_n = 0$ for alle n, og

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx, \; n = 1, 2, \ldots \; . \tag{6.10}$$

Parsevals sætning 6.30

Sætning 6.30 (Parsevals sætning) *Antag at funktionen $f \in L^2(-\pi, \pi)$ har Fourierkoefficienterne $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, eller, på kompleks form, $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Så er*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{6.40}$$

Sætning 1.27

Sætning 1.27 *Antag at y_0 er en kompleks løsning til $D_n(y) = u$, hvor u er en funktion med komplekse værdier. Da gælder følgende:*

(i) Funktionen $\mathrm{Re}\, y_0$ er løsning til ligningen $D_n(y) = \mathrm{Re}\, u$;

(ii) Funktionen $\mathrm{Im}\, y_0$ er løsning til ligningen $D_n(y) = \mathrm{Im}\, u$.

sætning 1.23

Sætning 1.23 (Superpositionsprincippet) *Lad u_1 og u_2 betegne to givne funktioner. Lad y_1 betegne en løsning til ligningen $D_n(y) = u_1$, og lad y_2 betegne en løsning til ligningen $D_n(y) = u_2$. Da er funtionen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ løsning til ligningen $D_n(y) = c_1u_1 + c_2u_2$.*

Sætning 7.8

Sætning 7.8 (Fourierrækkemetoden) *Lad $H(s)$ betegne overførings-funktionen for det asymptotisk stabile system (7.20). Betragt en 2π-periodisk stykkevis differentiabel og kontinuert påvirkning $u(t)$, givet ved Fourierrækken*

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Så har (7.20) en løsning givet ved Fourierrækken

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.27}$$

Sætning 2.23,

Sætning 2.23 (Stationære svar) *Når man i (2.35) sætter $u(t) = e^{st}$, hvor s ikke er rod i det karakteristiske polynomium for $\mathbf{A}$, da har (2.35) en og kun én løsning af formen*

$$y(t) = H(s)e^{st}. \tag{2.40}$$

Denne løsning fås når

$$H(s) = -\mathbf{d}^\top(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}.$$

Lemma 7.7

Lemma 7.7 *Antag at systemet (7.20) er asymptotisk stabilt. For enhver påvirkning på formen*

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \tag{7.21}$$

fås løsningen

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}. \tag{7.22}$$

Sætning 7.8

Sætning 7.8 (Fourierrækkemetoden) *Lad $H(s)$ betegne overføringsfunktionen for det asymptotisk stabile system* (7.20)*. Betragt en 2π-periodisk stykkevis differentiabel og kontinuert påvirkning $u(t)$, givet ved Fourierrækken*

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Så har (7.20) *en løsning givet ved Fourierrækken*

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7.27}$$