# DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET



Skriftlig 2-timers prøve, 21. august 2016
Kursus: Matematik 2 — 01037 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30% , Opgave 2: 20%, Opgave 3: 20% og Opgave 4: 30%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgaverne kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgaverne skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

## Opgave 1

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen:

$$y'''(t) + 5y''(t) + 15y'(t) + 11y(t) = 0 , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(ii) Find konvergensradius $\rho$ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} x^n , \quad x \in \mathbb{R} .$$

(iii) Undersøg, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+2)^2} ,$$

er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

## Opgave 2

Vi betragter funktionen, der er $2\pi$-periodisk og har forskriften $f(x) = 3x$, $x \in ]-\pi; \pi]$.

(i) Find Fourierrækken for $f$.

(ii) Hvilken værdi konvergerer Fourierrækken for $f$ mod i punktet $x = \pi$?

Opgavesættet fortsætter - Vend!

# Opgave 3

Vi betragter det inhomogene differentialligningssystem givet ved

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\cos(4t)\ , \quad \text{hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\ , && (1) \\ y &= \mathbf{d}^T\mathbf{x}\ , \quad \text{hvor } \mathbf{d} = (1,0)^T\ . && (2) \end{aligned}$$

Den afhængige variabel $\mathbf{x}(t)$ er en todimensional vektorfunktion af tiden $t \in \mathbb{R}$ og y=y(t) er en reel skalar. Det oplyses at matricen $\mathbf{A}$ har en egenværdi med tilhørende egenvektor givet ved

$$\lambda_1 = -1 + 3i\ , \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -1-3i \\ 10 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(i) Find den sidste egenværdi og en tilhørende egenvektor ud fra oplysningerne i (3).

(ii) For det inhomogene system kan overføringsfunktionen bestemmes ved hjælp af Maple og man finder

$$H(s) \; = \; -\mathbf{d}^T(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b} \; = \; \frac{5}{s^2+2s+10}\ . \tag{4}$$

Find det stationære svar $y(t)$ for det inhomogene system.

# Opgave 4

Vi betragter den uendelige række med variable led

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^3+5}(\cos(nx) - 3\sin(nx))\ , \quad x \in \mathbb{R}\ . \tag{5}$$

(i) Bestem et $k > 0$ således at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^3}$ er en majorantrække for rækken (5).

(ii) Er den uendelige række uniform konvergent? Begrund svaret.

(iii) Bestem en $N$'te afsnitssum, $S_N(x)$, således at $S_N(x)$ approksimerer den uendelige række med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 10^{-2}$.

Opgavesættet slut.