Svar eksamen Mat 2

December 2021

1 Opgaver del 2

Opgave 1
1) Rødderne i det karakteristiske polynomium findes til $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -3$. Den fuldstændige reelle løsning er så

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}\ ,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

2) Ifølge ligning (1.20) findes overførings funktionen til

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}\ ,\ s \neq (-1, -3)$$

3) $x(t) = H(4)e^{4t} = \frac{4}{35}e^{4t}$

4) $x_{par}(t) = A \cdot te^{-3t}$ indsat i differentialligingen giver dette:

$$\begin{aligned}
&\left(A \cdot te^{-3t}\right)'' + 4\left(Ate^{-3t}\right)' + 3Ate^{-3t} = -3e^{-3t} \\
&e^{-3t}(-2A) = -3e^{-3t} \\
&A = \frac{3}{2} \\
&\lambda_{par}(t) = \frac{3}{2}te^{-3t}
\end{aligned}$$

Opgave 2
1) Egenværdierne og egenvektorerne til systemmatricen findes:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -2 + i\sqrt{2}, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\lambda_2 = -2 - i\sqrt{2} \quad , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sætning 2.6 giver nu løsningerne

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-2t}\left(\cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} - \sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix}\\
x_2(t) &= e^{-2t}\left(\sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + \cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right).\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Den fuldstændige reelle løsning er:

$$X_{\text{hom}}\,(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}.$$

2) Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$
\begin{aligned}
&\text{HS: } \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}\\
&VS: \begin{bmatrix}-2 & 1\\-2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3e^t\\2e^t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}\\
&HS = VS
\end{aligned}
$$

Den fuldstændige reelle løsning er nu:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + \begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}$$

3) Da egnværdierne for systemmatricen har negative realdele er systemet ifølge sætning (2.36) asymptotisk stabilt.

Opgave 3

1) Vi indsætter $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i differentialligningen.
De to led giver

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Vi ser at der i andet led med y er et konstantled (a_0) der ikke kan balanceres med noget fra det første led, og derfor må være 0. Dette gør at andet led faktisk starter fra $n = 1$. Med brug af dette, og ved at 'sænke' index i første led med 2, får man at differentialligningen kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}n(n+1)(n+2) + a_n\right] t^n = 0$$

hvoraf fra identitetssætningen (korrolar 5.21) følger at

$$a_{n+2}n(n+1)(n+2) + a_n = 0. \qquad \text{for } n \geq 1$$

2) Fra $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ved vi at:

$$a_0 = y(0) = 0 \text{ og } a_1 = y'(0) = 3$$

Envidere er $2a_2 = y''(0) = 4$ hvoraf $a_2 = 2$.

Endelig bruger vi rekursionsrelationen til at slutte af

$$a_3 \cdot 2 \cdot 3 = -a_1 = -3$$

og derfor er $a_3 = -\frac{1}{2}$

Del A

Opgave 1: [-2,2[

Opgave 2: f er lige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.

Opgave 3: $a \in]0, 6[$

Opgave 4: $\frac{1}{6}e^{4t}$

Opgave 5: R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

Opgave 6: $c_0 = \frac{\pi^2}{3}, c_{-1} = -\frac{1}{2} + i, c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$

Opgave 7: $a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = 0$

Opgave 8: $a_2 = 0, b_1 = -1, b_3 = -\frac{1}{3}$