DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timers prøve, 8. december 2011
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Sættet består af 14 spørgsmål, der vægtes ens. Hvert spørgsmål tæller således med ca. ca. 7% af den samlede besvarelse.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0 %, ved korrekt svar gives +7%, og ved et forkert svar gives -3.5 %.

Opgave 1

(i) Vi betragter differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Bestem egenværdierne. Svaret er:

a) $\lambda = 3$ er dobbelt egenværdi.

b) $\lambda = 0$ er dobbelt egenværdi.

c) Egenværdierne er $\lambda = \pm 3$.

d) ved ikke.

(ii) Vi betragter igen systemet (1), og vil undersøge stabilitetsforholdene. Svaret er:

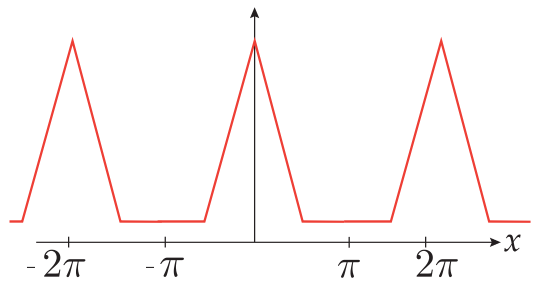
a) Systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

b) Systemet er asymptotisk stabilt.

c) Systemet er ustabilt.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!



(iii) Figuren viser et stykke af grafen for en 2π-periodisk funktion f. Afgør om Fourierrækken for f er konvergent for alle x, om den er uniformt konvergent, eller divergent for visse x. Svaret er:

a) Fourierrækken er konvergent for alle x, men ikke uniformt konvergent

b) Fourierrækken er uniformt konvergent

c) Fourierrækken er divergent for visse x

d) ved ikke.

(iv) Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n^2}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er:

a) absolut konvergent

b) betinget konvergent

c) divergent

d) ved ikke.

(v) En 2. ordens differentialligning har overføringsfunktion $H(s) = \frac{1}{2s^2-s+2}$. Det stationære svar $y(t)$ på påvirkningen $u(t) = \exp(3t)$ er:

a) $y(t) = \frac{1}{8}e^{3t} + \frac{1}{17}e^{-3t}$

b) $y(t) = \frac{1}{17}e^{3t}$

c) $y(t) = \frac{1}{8}\cos(3t) - \frac{1}{17}\sin(3t)$

d) ved ikke.

Opgave 2

Et ulineært system er givet ved følgende 2 koblede differentialligninger:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & -(x_1-2)x_2 \\ \dot{x_2} = & x_1 \sin(3-x_2) \end{cases} \tag{2}$$

(a) Vis at punktet $(x_1, x_2) = (2, 3)$ er et stationært punkt.

(b) Vis at systemets funktionalmatrix i punktet $(x_1, x_2) = (2, 3)$ er

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Angiv om det stationære punkt $(2, 3)$ er asymptotisk stabilt. Begrund svaret.

Opgave 3

Vi betragter differentialligningen

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (2+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y(x) = 0,$$

og søger en løsning på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{3}$$

Ved indsættelse af udtrykket (3) i differentialligningens venstre side kan det vises (skal **ikke** gøres) at

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (2+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)c_n + (n+1)(n+2)c_{n+1}]x^n \ .$$

(i) Gør rede for at hvis en potensrække på formen (3) opfylder differentialligningen, så gælder at

$$c_{n+1} = -\frac{1}{(n+2)}c_n \text{ for } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

(ii) Bestem ved brug af (4) konvergensradius for en vilkårlig potensrækkeløsning til differentialligningen.

Vink: benyt kvotientkriteriet til at undersøge $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ for $n \to \infty$. Det er ikke nødvendigt at beregne koefficienterne c_n.

Opgave 4

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved rækkefremstillingen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos(nx), \; x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

(a) Undersøg om rækken i (5) har en konvergent majorantrække.

(b) Beregn integralet

$$\int_0^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

(c) Er funktionen f i (5) differentiabel? Svaret skal begrundes.

Betragt nu den N'te afsnitssum af rækken i (5),

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4} \cos(nx), \; x \in \mathbb{R}.$$

(d) Bestem N således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Opgavesættet slut.