DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 8. december 2019
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 65%, Opgave 1: 15%, Opgave 2: 20%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = u(t), \tag{1}$$

hvor $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ antages at være en kontinuert funktion.

1. Opskriv det karakteristiske polynomium for ligningen (1) og bestem dernæst både den fuldstændige komplekse og den fuldstændige reelle løsning til den tilhørende homogene differentialligning.

2. Betragt nu $u(t) = t$ og vis, at $y_p(t) = \frac{1+t}{2}$ er en partikulær løsning til ligningen (1).

3. Betragt dernæst $u(t) = e^{st}$ og opskriv overføringsfunktionen. Anvend resultatet til at opskrive en partikulær løsning til (1) for tilfældet $u(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, hvor N er et postivt heltal. (Vink: Det er lettere at beholde de komplekse eksponentialfunktioner i stedet for at anvende cosinus og sinus.)

4. Opskriv nu den fuldstændige komplekse løsning til ligningnen (1) for tilfældet

$$u(t) = t + \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en ulige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{for } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{for } x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

1. Bestem alle reelle Fourierkoefficienter a_n og b_n i Fourierrækken

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{2}$$

hørende til funktionen f og vis, at der findes kun et $m \in \mathbb{N}$ således at $b_{2m} \neq 0$.

Lad $S_N(x)$ være den N'te afsnitssum hørende til Fourierrækken (2) for f:

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

hvor $N \in \mathbb{N}$. Det oplyses, at (skal ikke vises)

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

for alle $N \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Find et N således, at $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Konvergerer Fourierrækken uniformt? Forklar.

—————oooOooo—————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).