01035 - Matematik 2

Løsningsforslag
Eksamen Maj 2019

Udarbejdet af
Phillip B. Vetter

Opgave 1

(i)

Differentialligningen har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

Rødderne aflæses direkte som $\lambda = 0$ (med algebraisk multiplicitet 2) og $\lambda = \pm\, i$. Løsningen fås da via Sætning 1.15 som

$$\boxed{y(t) = c_1 + c_2 t + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)\,, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}}$$

(ii)

Vi gætter på en løsning af formen $y(t) = Ae^t$. Indsættelse i differentialligningen giver

$$Ae^t + Ae^t = 2Ae^t = e^t \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \frac{1}{2}$$

Løsningen er dermed

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t}$$

(iii)

Generelt vides at en eksponentialfunktion vokser meget hurtigere end et polynomium. Her vokser e^n altså meget hurtigere end n. Dermed divergerer talfølgen x_n.

Alternativt kan man ved L'Hôpitals regel vise at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+e^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial n}(1+e^n)}{\frac{\partial}{\partial n}(n)} = \lim_{n\to\infty} e^n$$

hvorved det klart ses at x_n divergerer.

(iv)

Funktionerne n og $\ln(n)$ er begge monotont voksende for $n \to \infty$. Vi ser altså at

$$\lim_{n\to\infty} n + \ln(n) \to \infty$$

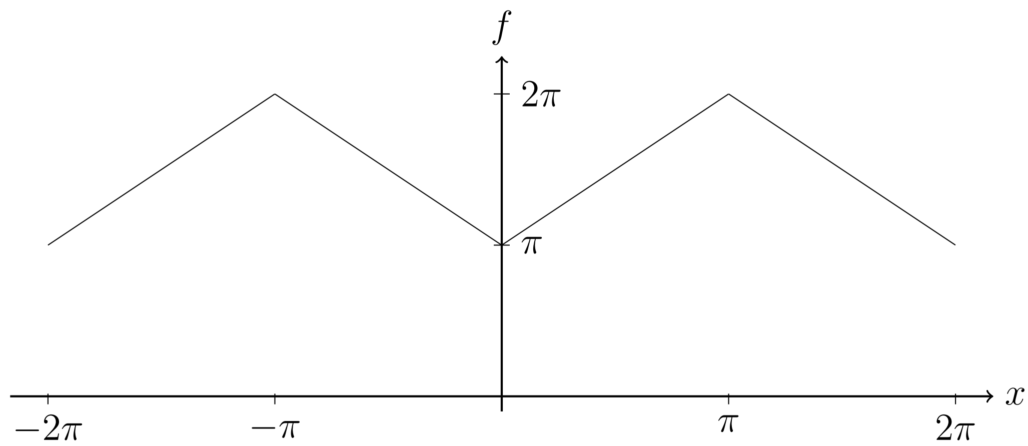
Hvorfor det sluttes at grænseværdien for leddene i rækken er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln(n)} = 0$$

Vi kan altså ikke konkludere noget ved brug af n'te-ledskriteriet

(v)

Vi tegner først f for at få et overblik over funktionen.



Vi kan betragte f i intervallet $x \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]$. Det fås umiddelbart at

$$\lim_{x^{\pm}} f(0) = \pi \qquad \text{og} \qquad \lim_{x^{\pm}} f(-\pi) = \lim_{x^{\pm}} f(\pi) = 2\pi$$

Desuden er f i intervallerne $x \in I_1 = [\,-\pi\,,\,0\,[$ og $x \in I_2 = [\,0\,,\,\pi\,[$ givet ved henholdsvis

$$f_{I_1}(x) = -x + \pi \qquad\qquad f_{I_2}(x) = x + \pi$$

Dermed fås direkte at

$$f_{I_1}(x) = f_{I_2}(-x)$$

Da f er 2π periodisk kan vi derfor slutte at f er en lige funktion.

(vi)

f er stykkevis differentiabel og kontinuert i hele sit domæne, specifikt også i $x = 2\pi$. Derfor konvergerer Fourierrækken for f uniformt mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ via Sætning 6.12 og Korollar 6.13. Summen af Fourierrækken i $x = 2\pi$ er derfor givet ved

$$\boxed{f(2\pi) = f(0) = 0 + \pi = \pi}$$

Opgave 2

(i)

Indføres $y = \cos(x)$ fås rækken på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

Kvotientrækken konvergerer ifølge Sætning 5.2 for all $|y| = |\cos(x)| < 1$. Denne ulighed er overholdt når $x \notin \{p\pi\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Rækken konvergerer altså for alle $x \in \mathbb{R}/\{p\pi\}_{p\in\mathbb{Z}}$

(ii)

Ifølge Korollar 5.5 fås rækkens sum til

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y} = \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

Opgave 3

(i)

Det karakteriske polynomium skrives på formen som angivet i Sætning 2.39

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 - (5+3a)\lambda - 2 - 2a = -\left(\lambda^3 + (4+a)\lambda^2 + (5+3a)\lambda + 2 + 2a\right)$$

Dermed ses altså at alle rødder har negativ realdel hvis

$$\begin{aligned}
&4+a>0 && \Leftrightarrow && a>-4 \\
&5+3a>0 && \Leftrightarrow && a>-\frac{5}{3} \\
&2+2a>0 && \Leftrightarrow && a>-1 \\
&\det\begin{pmatrix} 4+a & 2+2a \\ 1 & 5+3a \end{pmatrix} = 3a^2+15a+18>0 && \Leftrightarrow && a \in \mathbb{R}/[-3;-2]
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Alle uligheder er opfyldt hvis } a>-1\text{, og systemet er da asymptotisk stabilt}}}$

(ii)

Vi gætter på en løsning af formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{k}e^{3t}$. Indsættelse i systemet giver da

$$3\mathbf{k}e^{3t} = \mathbf{A}\mathbf{k}e^{3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Systemet har den unikke løsning

$$\mathbf{k} = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En partikulær løsning til differentialligningssystemet er derfor

$$\boxed{\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}}$$

(iii)

Systemet har med sikkerhed en løsning af formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t}$ såfremt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dette krav brydes netop når $\lambda = 3$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$. Indsættelse af λ i det karakteristiske polynomium for systemet giver

$$P(3) = 3^3 + 3^2(4+a) + 3(5+3a) + 2 + 2a = 20a + 80 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \neq -\frac{-80}{20} = -4$$

I tilfældet $a = -4$ fås som vist $\det(\mathbf{A}) = 0$, hvormed systemet enten har ingen løsning, eller uendelige mange løsninger. Vi viser her at der ikke findes nogle løsninger. Ved indsættelse fås helt identisk med (1):

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -5 & -5 & 10 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det ses ved at betragte første og sidste række at systemet er inkonsistent.

$\underline{\underline{\text{Vi slutter dermed at der findes en løsning på formen } \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t} \text{ for alle } a \in \mathbb{R}/[-4]}}$

Opgave 4

(i)

Vi indsætter den angivne løsningsform i differentialligningen og får

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Rækkerne manipuleres nu på følgende måde: For rækken længst til venstre ændres summationsindexet så summen starter ved $n = 1$. Midterste rækken forbliver uændret. For rækken længst til højre trækkes leddet hørende til $n = 0$ ud af summen. Dermed fås

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} n(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n + c_0 \\ = \quad & c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1} n(n+1) + c_n(n+1)\right] t^n = 0 \end{aligned}$$

Via Korollar 5.21 sluttes nu at

$$\boxed{c_0 = 0} \qquad \text{og} \qquad c_{n+1} n(n+1) + c_n(n+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_{n+1} = -\frac{n+1}{(n+1)n} c_n = -\frac{1}{n} c_n\,, \quad n \geq 1}$$

(ii)

Ved at anvende Sætning 4.30 med rekursionen fundet i (i) fås

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-\frac{1}{n}c_n}{c_n} \right| |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|x| = 0 < 1$$

Dermed sluttes via 4.30 at potensrækken konvergerer absolut for alle $x \in \mathbb{R}$.
Rækkens konvergensradius er derfor $\rho = \infty$

(iii)

Gentagende anvendelse af rekursionen fra (i) $n-1$ gange viser at c_n kan skrives som

$$\begin{aligned} c_n = (-1)\frac{c_{n-1}}{n-1} &= (-1)^2\frac{c_{n-2}}{(n-1)(n-2)} \\ &= (-1)^3\frac{c_{n-3}}{(n-1)(n-2)(n-3)} = ... = (-1)^{n-1}\frac{c_1}{(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1} \end{aligned}$$

Vælges $c_1 = 1$ kan koefficienterne c_n altså skrives som

$$\boxed{c_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}}$$

(iv)

Ved at skrive c_n i løsningen $y(t)$ som fundet i (iii) tager $y(t)$ formen

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}t^n$$

Hvis vi ændrer summationsindex til $n = 0$ og flytter en faktor t udenfor summen fås

$$y(t) = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}t^n = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-t)^n = te^{-t}$$

Det ses derfor at løsningen tager formen $y(t) = t^{\alpha}e^{\beta t}$ med $\alpha = 1$ og $\beta = -1$