Forelæsning 10, Matematik 2, kursus 01035

1) Fourierrækker på reel form.

2) Fourierrækker på kompleks form.

Definition 6.1

Sætning 6.16. Fouriers sætning

Fourierrækken for en stykkevis differentiabel og T-periodisk funktion $f \in L^2[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ er givet ved

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$f(t+T) = f(t)$ Periode: T Frekvens: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourier koefficienterne er givet ved

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Se appendiks C side 239 i lærebogen.

Sætning 6.6 og korollar 6.7

f er en lige funktion $\quad f(-t) = f(t)$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{for} \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

f er en ulige funktion $\quad f(-t) = -f(t)$

$$a_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Fourierrækker på kompleks form

Definition 6.25

For f stykkevis differentiabel, T-periodisk og $f \in L^2[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]$ har vi Fourierrækken på kompleks form

$$\boxed{f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}} \qquad c_n \in \mathbb{C}$$

og
$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}} \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Den N'te afsnitssum er (Lemma 6.24)

$$\boxed{S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}}$$

Forbindelse til Fourierrækker på reel form.
(Lemma 6.26).

For $n = 1,2,3,\ldots$ har vi

$$c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} =$$

$$c_n\left(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right) + c_{-n}\left(\cos(-n\omega t) + i\sin(-n\omega t)\right) =$$

$$c_n \cos(n\omega t) + i\,c_n \sin(n\omega t) + c_{-n}\cos(n\omega t) - i\,c_{-n}\sin(n\omega t) =$$

$$(c_n + c_{-n})\cos(n\omega t) + i\,(c_n - c_{-n})\sin(n\omega t)$$

Heraf fås

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i\,(c_n - c_{-n}) \end{aligned}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bemærk $\quad c_0 = \frac{1}{2}a_0 \qquad a_0 = 2c_0$

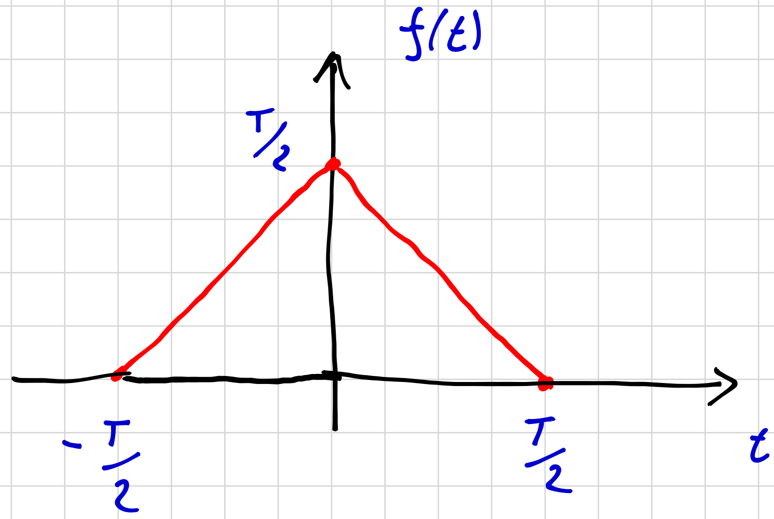
Vi har yderligere

$$\left.\begin{array}{l} a_n - i b_n = 2 c_n \\ a_n + i b_n = 2 c_{-n} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{array}\right.$$

for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

og finder $c_n = \overline{c_{-n}} \Leftrightarrow c_{-n} = \overline{c_n}$

Eksempel



Periode T Frekvens $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{T}{2} & \text{for } -\frac{T}{2} \le t < 0 \\ -t + \frac{T}{2} & \text{for } 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Fourierrækken på kompleks form

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

Indfør $I_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \left(t + \frac{T}{2}\right) e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{2in\omega} - \frac{1}{n^2\omega^2 T}\left(e^{-in\pi} - 1\right), \quad n \neq 0$$

Vi indfører variabel skiftet

$t = -\tau$ i I_n og får med $dt = -d\tau$

$$I_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \left(t+\frac{T}{2}\right) e^{inwt}\,dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} \left(-\tau+\frac{T}{2}\right) e^{-inw\tau}(-d\tau) =$$

$$-\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} \left(-\tau+\frac{T}{2}\right) e^{-inw\tau}\,d\tau = \underline{\frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} \left(-\tau+\frac{T}{2}\right) e^{-inw\tau}\,d\tau}$$

På denne måde har vi anvendt symmetrien af f til at simplificere beregningen af C_n.

$$C_n = I_n + I_{-n} = \frac{1}{2inw} - \frac{1}{n^2w^2T}\left(e^{-in\pi}-1\right)$$
$$+ \frac{1}{2i(-n)w} - \frac{1}{n^2w^2T}\left(e^{in\pi}-1\right) =$$

$$\frac{2-e^{in\pi}-e^{-in\pi}}{n^2\frac{4\pi^2}{T^2}T} = \frac{2-2\cos(n\pi)}{n^2 4\pi^2}T$$

Heraf får vi Fourierkoefficienterne på kompleks form

$$\boxed{C_n = \frac{T}{2n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)}$$

og

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}T\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{4}$$

Fourierrækken for f er på kompleks form

$$\boxed{f(t) = \frac{T}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{T(1-(-1)^n)}{2n^2\pi^2} e^{in\omega t},} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Bemærk for $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{T(1-(-1)^n)}{2n^2\pi^2} + \frac{T(1-(-1)^{-n})}{2(-n)^2\pi^2} =$$

$$\frac{T(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$$

Den N'te afsnitssum er

$$S_N(t) = \frac{T}{4} + \sum_{\substack{n=-N \\ (n\neq 0)}}^{N} \frac{T(1-(-1)^n)}{2n^2\pi^2} e^{in\omega t}$$

Hvert andet led i Fourierrækken er lig 0.

Table

n:	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$1-(-1)^n$:	2	0	2	0	2	0	2	0	2
m	-2		-1		0		1		2
$2m-1$	-5		-3		-1		1		3

Heraf fås

$$c_m = \frac{2T}{2(2m-1)^2\pi^2} = \frac{T}{(2m-1)^2\pi^2}$$

og

$$\boxed{f(t) = \frac{T}{4} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{T}{(2m-1)^2\pi^2} e^{i(2m-1)\omega t}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Sætning 6.30 Parsevals sætning

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Definition 6.32 Effekt

$$P(f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$