Løsninger til eksamensopgaverne
7. december 2015.

Opg. 1 (i)

Betragt $y'' + 3y' + 2y = 0$

Det karakteristiske polynomium er
$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-8} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$$\lambda = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Den fuldstændige reelle løsning er

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg. 1 (ii)

Betragt: $y'' + 3y' + 2y = u(t)$
$u(t) = e^t$

Det stationære svar findes af sætn. 1.24
med $s = 1$.

$$y(t) = H(s) e^{st} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} e^{st}$$

For $s = 1$ fås $y(t) = \frac{1}{6} e^t$

$\boxed{\text{svaret er c}}$

Opg 1 (iii)

Vi betragter $y'' + 3y' + 2y = u(t) = e^{-t}$

$s = -1$. Vi kan ikke bruge overføringsfunktionen

Løsningsantagelse $y(t) = ce^{-t}$ $c \in \mathbb{R}$

Indsat

$$ce^{-t} - 3ce^{-t} + 2ce^{-t} = e^{-t}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 = 1 \quad \text{falsk}$$

$\boxed{\text{svaret er b}}$

Opg. 1 (iv)

Vi betragter rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$

Da $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \to 1 \neq 0$ for $n \to 0$ følger det af n'te leddskriteriet at rækken er divergent

$\boxed{\text{Svaret er c}}$

Opg 1 (v)

Vi betragter $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Da $\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ har vi ifølge sammenlignings kriteriet at rækken er absolut konvergent, fordi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

er konvergent. Det sidste følger af Eksempel 4.34, side 99 i lærebogen.

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg 1 (vi)

Vi betragter potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$

Konvergensradius bestemmes af kvotient-kriteriet

Indfør $a_n = \frac{n}{3^n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n}{3^n} x^n}\right| = \frac{n+1}{n} \frac{3^n}{3^{n+1}} |x| =$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{3}|x| \to \frac{1}{3}|x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Potensrækken er konvergent ifølge kvotient-kriteriet såfremt

$$\frac{1}{3}|x| < 1 \iff |x| < 3 = \rho$$

Dvs at konvergensradius er $\rho = 3$

$$\boxed{\text{Svaret er b}}$$

Opg. 2

Vi betragter differentialligningssystemet

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\,, \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-a & a-2 \end{bmatrix}$$

2i) $a = 2 \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4$$

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda = \pm i2$$

Egenvektoren $\underline{v}$ til $\lambda = i2$ bestemmes af

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = i2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} v_2 = i2 v_1 \\ -4v_1 = i2 v_2 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} v_2 = i2 v_1 \\ v_2 = i2 v_1 \end{matrix} \right.$$

Vælg $v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = i2$

Egenvektoren til $\lambda^{(1)} = i2$ er $\underline{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i2 \end{bmatrix}$

⑥

2 b) Egenvektoren til $\lambda^{(2)} = -i2$ er

$$\underline{v}^{(2)} = \underline{v}^{(1)*} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i2 \end{bmatrix}$$

Dog ikke nødvendig at udregne

Den fuldstændige reelle løsning er

$$\underline{x}(t) = c_1 \, Re\left(e^{i2t}\begin{bmatrix} 1 \\ i2 \end{bmatrix}\right) + c_2 \, Im\left(e^{i2t}\begin{bmatrix} 1 \\ i2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$c_1 \, Re\left((\cos 2t + i\sin(2t))\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$+ c_2 \, Im\left((\cos(2t) + i\sin(2t))\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\right) =$$

$$c_1 \left[\cos(2t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(2t)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$+ c_2 \left[\sin(2t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(2t)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right] \iff$$

$$\boxed{\underline{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Opg 2 (ii)

For $a \in \mathbb{R}$ har vi det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2-a & a-2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda(\lambda - (a-2)) + (a+2) = \lambda^2 + (2-a)\lambda + (a+2)$$

Ifølge Routh-Hurwitz kriterium (korollar 2.40) er systemet asymptotisk stabilt hvis

$$2-a > 0 \quad \text{og} \quad a+2 > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 > a \quad \wedge \quad a > -2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-2 < a < 2}$$

Opg 3

Vi har rækken $R_1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{nx}$

Opg 3(i) Der gælder at for alle $x \le 0$ og alle $n \in \mathbb{N}$ er

$$\frac{1}{n^3} e^{nx} \le \frac{1}{n^3} = k_n$$

R_1 har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Ifølge eksempel 4.34 er denne majorantrække konvergent.

Ifølge sætning 5.33 er rækken R_1 konvergent for alle $x \le 0$.

Sumfunktionen er tillige kontinuert og R_1 er uniform konvergent.

Opg 3(ii)

Vi sætter $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{nx}$, $x \in]-\infty;0]$

Den N'te afsnitssum er $S_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{nx}$

og vi har

Opg 3 (ii)

$$|f(x) - S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{nx}\right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^3} e^{nx}\right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{nx} \leq \underline{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}}$$

$$\forall \; x \in \left]-\infty; 0\right]$$

Opg 3 (iii)

Bestem N således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 0{,}1 \qquad \forall x \in \left]-\infty; 0\right]$$

Vi har ulighederne

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{(N+1)^3}$$

Sidste ulighed følger af (4.32) side 101 i lærebogen.

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} + \frac{1}{(N+1)^3} = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^3} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) \leq$$

$$\frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(N+1)^2} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

Opg 3 (iii)

$$(N+1)^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff N+1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \iff$$

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}1}} - 1 = 2{,}16$$

$$\boxed{\text{Vælg } \; N = 3}$$

I $]-\infty; 0]$ approksimerer $S_3(x)$ $f(x)$ med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 0.1$.

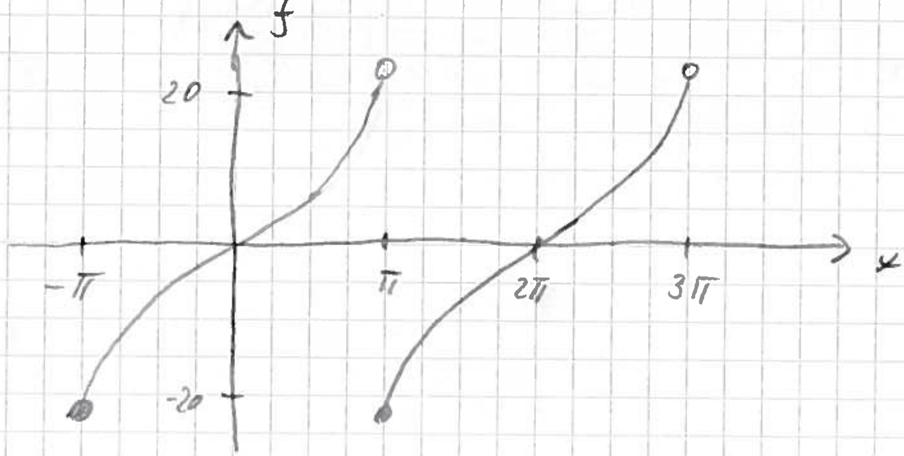
Opg 4

f er 2π periodisk og givet ved

$$f(x) = e^{x} - e^{-x} \quad , \quad \text{for } x \in [-\pi ; \pi[$$

Opg 4 (i).

Bemærk at $f(x) = 2\sinh(x)$. Grafen for denne funktion er i $[-\pi ; 3\pi[$



Opg 4 (ii)

Såfremt Fourierrækken for f har en konvergent majorant række vil Fourierrækken konvergere uniformt mod f og f vil være kontinuert. Jvf sætn. 5.33, side 127 i lærebogen.

Da f ikke er kontinuert kan Fourierrækken for f ikke have en konvergent majorant række.

Opg 4 (iii)

c_n, $n \in \mathbb{Z}$, er Fourierkoefficienterne i Fourierrækken for f.

Ifølge Parsevals sætning 6.25 har vi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4\sinh^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh^2(x)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{4}\left[\sinh(2x)-2x\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\sinh(2\pi)-2\pi-(\sinh(-2\pi)+2\pi)\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[2\sinh(2\pi)-4\pi\right] = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\left[\sinh(2\pi)-2\pi\right] = 83{,}226}}$$