> restart

Matematik 2 (01037) Summer Eksamen

Af: (s224044)

Dato: 18-08-2023

Del B:

Opgave 2

> $restart : with(LinearAlgebra) : with(plots) :$

Opgave 2

For ethvert $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$, definerer vi en lige og 2π-periodiske funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vha forskriften

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{2k-x}{k} & x \in [0, 2k[, \\ 0 & x \in [2k, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

Vi betragter først den lige og 2π-periodiske funktion f_1 med $k = 1$, som specifikt er givet ved følgende forskrift

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0, 2[, \\ 0 & x \in [2, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

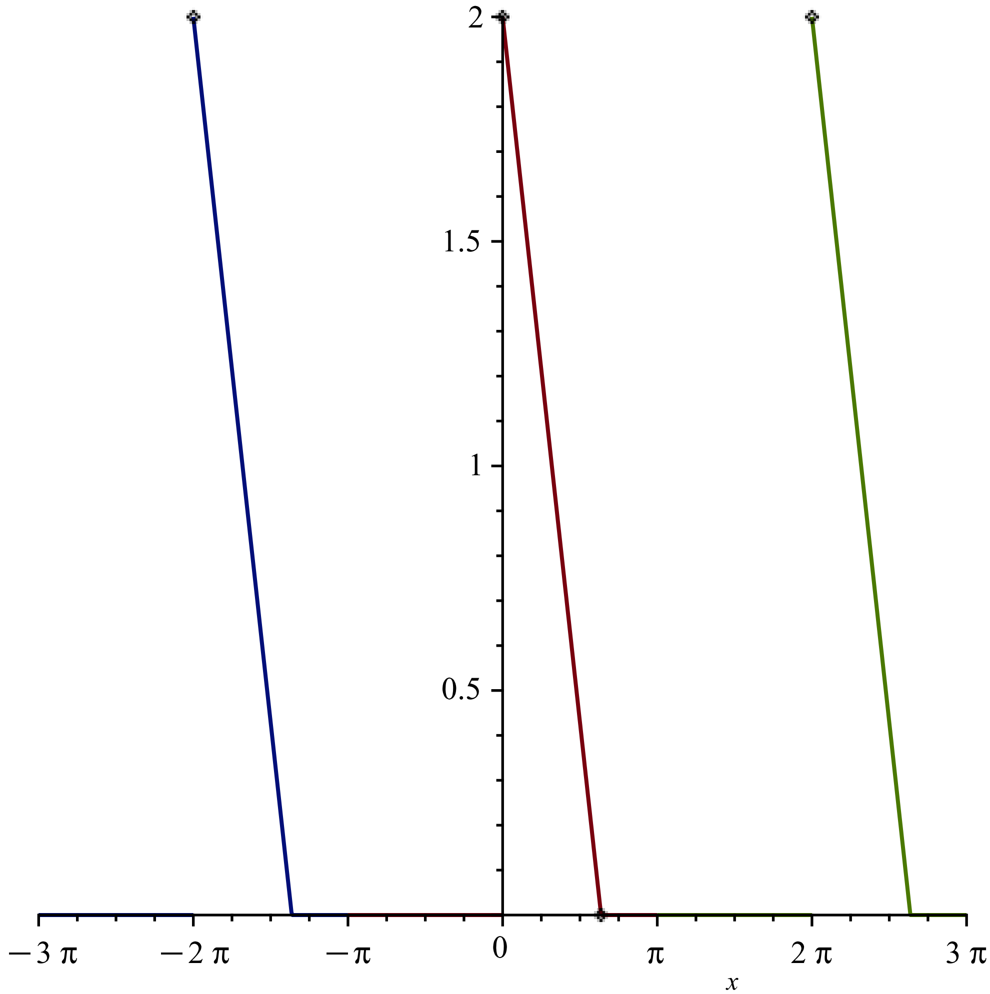
1. Skitser grafen for f_1 på intervallet $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

> $f_1(x) := piecewise(0 \leq x < 2, 2 - x, 2 \leq x \leq \pi, 0)$

$$f_1 := x \mapsto \begin{cases} 2 - x & 0 \leq x < 2 \\ 0 & 2 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Grafen vil starte i (0,2) og gå skråt ned til (2,0) hvor efter den fortsætter konstant til (Pi,0), dette vil gentage sig 2pi periodisk som vist forneden:

> $p1 := plot(f_1(x), x = -\pi..\pi, discont = true) :$
> $p2 := plot(f_1(x + 2\pi), x = -3\cdot\pi..-\pi, discont = true) :$
> $p3 := plot(f_1(x - 2\cdot\pi), x = \pi..3\cdot\pi, discont = true) :$
> $display(p1, p2, p3); p$



2. Konvergerer Fourierrækken for f_1 uniformt?

Den er ikke uniform konvergnet da i punktet (0,0) er der 2 værdier som tilnærmes, nemlig 0 og 2, jvf definition 5.28

>

Vi betragter nu f_k i det generelle tilfælde med Fourierrækken

$$f_k \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

3. Bestem a_0, a_1 og alle b_n, $n \in \mathbb{N}$.

> $f[k](x) := piecewise\left(0 \leq x < 2\,k, \frac{2\,k - x}{k}, 2\,k \leq x \leq \pi, 0\right)$ assuming $1 \leq k$ **and** $k \leq \frac{\pi}{2}$

(1.2)

$$f_k := x \mapsto \left(\begin{cases} \frac{2 \cdot k - x}{k} & 0 \le x < 2 \cdot k \\ 0 & 2 \cdot k \le x \le \pi \end{cases} \textbf{ assuming } 1 \le k \le \frac{\pi}{2} \right) \qquad \textbf{(1.2)}$$

>

Da det vides den er lige, det vidst jvf korollar 6.7, at b=0

> $a[k][0] := simplify\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} subs(n = 0, f[k](x) \cdot \cos(n \cdot x))\, \mathrm{d}x \right) : a[k][0]$ assuming $1 \le k$ **and** $k \le \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \frac{4\,k}{\pi} & k < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\pi + 4\,k}{k} & \frac{\pi}{2} \le k \end{cases} \qquad \textbf{(1.3)}$$

> $a[k][1] := simplify\left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} subs(n = 1, f[k](x) \cdot \cos(n \cdot x))\, \mathrm{d}x \right) : a[k][1]$assuming $1 \le k$ **and** $k \le \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2 \left(\begin{cases} 1 - \cos(2\,k) & k < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} \le k \end{cases} \right)}{\pi\,k} \qquad \textbf{(1.4)}$$

Det ses altså at $a[k][0] \in \left[\frac{4}{\pi}, 4 \right]$ og $a[k][1] \in \left[2 - 2\cos(2), \frac{8}{\pi} \right]$

>

Lad

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $N \in \mathbb{N}$ være afsnitssummen hørende til Fourierrækken for f_k, $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Det oplyses (skal ikke vises), at der gælder

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{kn^2},$$

for alle $N \in \mathbb{N}$, alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

4. Bestem et heltal $N \in \mathbb{N}$, således at følgende ulighed gælder for alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$ og alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{10}.$$

først vælges et g(n), hvor om det gælder at $g'(n) < 0$, for alle x

>

> $g(n) := \frac{2}{k \cdot n^2}$

$$g := n \mapsto \frac{2}{k \cdot n^2} \quad \textbf{(1.5)}$$

> $g'(n)$

$$-\frac{4}{k\, n^3} \quad \textbf{(1.6)}$$

Herfra kan $g(x)$ så anvender, og følgende integralle opstilles:

> $\int_N^{\infty} \frac{2}{k \cdot x^2} \, \mathrm{d}x :$

Anvender hjælpe integrallet:

> $\lim_{t \to \infty} \left(\int_N^t \frac{2}{k \cdot x^2} \, \mathrm{d}x \right) :$

> $\int \frac{2}{k \cdot x^2} \, \mathrm{d}x :$

Dette medfører:

> $\lim_{t \to \infty} \left(-\frac{2}{k\, t} \right) - \left(-\frac{2}{k \cdot N} \right)$

Hvilket vil når t går mod 0 giver:

> $S(N) := \frac{2}{k \cdot N}$

$$S := N \mapsto \frac{2}{k \cdot N} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Der undersøges for ekstrmerne:

Herfra løses for uligheden:

> $\frac{2}{k \cdot N} \le \frac{1}{10}$:

> $\frac{20}{k} \le N$

Det ses at for k= 1, fåes det værste senerie. Det ses altså at $N \ge 20$ opfylder betingelserne

Opgave 3

> *restart* : *with*(*LinearAlgebra*) : *with*(*plots*) :

Opgave 3

Vi betragter differentialligningssystemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

med $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vis, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

er en løsning til det homogene system.

Dette undersøges vha, indsættelses metoden:

> $A := \langle -1, 2; 0, -1 \rangle$

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1)}$$

> $x(t) := \langle 2 \cdot t, 1 \rangle \cdot \mathrm{e}^{-t}$

$$x := t \mapsto \langle 2 \cdot t, 1 \rangle \cdot \mathrm{e}^{-t} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Opskriver HS:

> $HS := diff(x(t), t)$

$$HS := \begin{bmatrix} -2\,e^{-t}\,t + 2\,e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Opskriver VS:

> $VS := A \cdot x(t)$

$$VS := \begin{bmatrix} -2\,e^{-t}\,t + 2\,e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

> $HS = VS$

$$\begin{bmatrix} -2\,e^{-t}\,t + 2\,e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,e^{-t}\,t + 2\,e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Det kan ses et det er enløsning til systemet også pga, eigenvektorene

> $Eigenvectors(A, output = list)$

$$\left[\left[-1, 2, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right]\right] \tag{2.6}$$

Her kan det ses at en ikke lineært afhængig vektor skal bruges for at løses systemet, hvilket løsningen også giver:

Det oplyses nu, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

er en partikulær løsning til det inhomogene system (2).

2. Bestem a og b.

Opskriver højre og venstre siden

> $VS := \langle 1, 0 \rangle \cdot e^{-t} + \langle 1, 2 \rangle$

$$VS := \begin{bmatrix} e^{-t} + 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

> $HS := A.\langle 1, 0 \rangle \cdot e^{-t} + \langle a, b \rangle$

$$HS := \begin{bmatrix} -e^{-t} + a \\ b \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Det kan direkte aflæses at $a = 2, b = 1$

3. Opskriv den fuldstændige løsning til det inhomogene system (2).

> $a := 2; b = 1$

$$a := 2$$

$$b = 1 \tag{2.9}$$

Den fuldstændige reelle løsning opskrives som, hvor c1,c2 er kompleksekoefficenter

> $c[1] \cdot v[1] \cdot \mathrm{e}^{-t} + c[2] \cdot v[2] \cdot \mathrm{e}^{-t} + \langle a, b \rangle \cdot \mathrm{e}^{-t}$

$$c_1\, v_1\, \mathrm{e}^{-t} + c_2\, v_2\, \mathrm{e}^{-t} + \begin{bmatrix} 2\, \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t}\, b \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

>

>