Forelæsning 4

Kapitel 2.9 stabilitet for inhomogene systemer.

Vi betragter det inhomogene system

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t) \qquad t \in [t_0 ; \infty[$$

$$\underline{x} = \underline{x}(t)$$

Asymptotisk stabilitet: (definition 2.44)

For enhver påvirkning $\underline{u}(t)$ skal gælde

$$\underline{x}_1(t) - \underline{x}_2(t) \to \underline{0} \qquad \text{for} \quad t \to \infty$$

hvor $\underline{x}_1(t)$ og $\underline{x}_2(t)$ er vilkårlige løsninger.

Sætning (2.45) om asymptotisk stabilitet.

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t)$ er asymptotisk stabilt	$\Leftrightarrow$	$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er asymptotisk stabilt

BIBO stabilitet definition 2.46

Bounded input — Bounded output

systemet $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t)$ er BIBO stabilt såfremt

$\underline{u}(t)$ er begrænset $\Rightarrow$ $\underline{x}(t)$ er begrænset

sætning 2.47

$$\boxed{\begin{array}{l}\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \text{ er} \\ \text{asymptotisk} \\ \text{stabilt}\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l}\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t) \\ \text{er BIBO} \\ \text{stabilt}\end{array}}$$

Bemærk $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u(t)$ $\underline{x}(t) = \underline{x}_{hom}(t) + \underline{x}_p(t)$

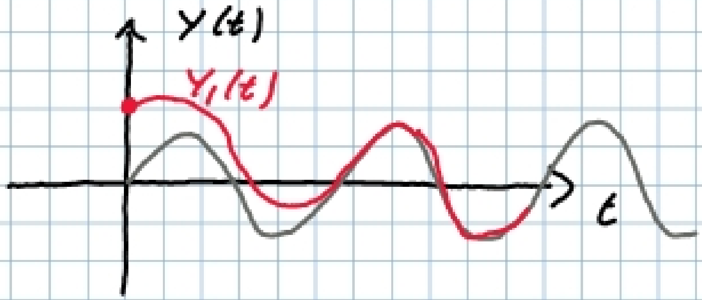
$$y(t) = \underline{d}^T\underline{x} = \underbrace{\underline{d}^T\underline{x}_{hom}}_{=\,y_{hom}} + \underline{d}^T\underline{x}_p = y_{hom}(t) + H(s)e^{st}, \quad u(t) = e^{st}$$

Antag asymptotisk stabilitet $y_{hom}(t) \to 0$ for $t \to \infty$ $\Rightarrow$

$y(t) \to H(s)e^{st}$ for $t \to \infty$

Derfor kaldes $H(s)e^{st}$ for det stationære svar.

Eksempel $H(i\omega)\, e^{i\omega t}$ $u(s) = e^{i\omega t}$



Indsvingnings forløb

Kapitel 4

Uegentlige integraler
Talfølger
Uendelige rækker

Uegentlige integraler. Definition 4.1

f stykkevis kontinuert

$f \quad [a;\infty[\;\to\; \mathbb{C}$

(ii) Såfremt $\int_a^t f(x)\,dx$ har en grænseværdi for $t \to \infty$, siges $\int_a^\infty f(x)\,dx$ at være konvergent og

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

(ii) Såfremt $\int_a^t f(x)\,dx$ ikke har en grænseværdi for $t \to \infty$, siges $\int_a^\infty f(x)\,dx$ at være divergent.

Eksempel $\int_0^\infty e^{bx}\,dx \qquad b \neq 0$

Vi udregner $\int_0^t e^{bx}\,dx = \left[\frac{1}{b}e^{bx}\right]_0^t = \frac{1}{b}\left(e^{bt}-1\right)$

For $b < 0 \qquad \frac{1}{b}\left(e^{bt}-1\right) \to -\frac{1}{b}$ for $t \to \infty$

Integralet er konvergent $\int_0^\infty e^{bx}\,dx = -\frac{1}{b}$

For $b > 0$ $\quad \frac{1}{b}(e^{bt}-1) \to \infty$ for $t \to \infty$

$\int_0^\infty e^{bx}\,dx$ er divergent

Talfølger

Endelig talfølge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\} = \{x_n\}_{n=1}^{N}$

$n, N \in \mathbb{N}$

Uendelig talfølge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$x_n = f(n)$

Konvergens af talfølger

Definition 4.5

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ siges at være konvergent, hvis der eksisterer et $s \in \mathbb{C}$ således at

$x_n \to s$ for $n \to \infty$ $\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = s$

Er talfølgen ikke konvergent, siges den at være divergent

Alternativt udtrykt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow |S_n - S| \leq \varepsilon$$

så ledes at

Kapitel 4.4 Uendelige rækker af tal

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n \in \mathbb{R} \text{ eller } a_n \in \mathbb{C}$$

Afsnitssum $\quad S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

$\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ er en talfølge

Konvergens af en uendelig række

$S_N \to S$ for $N \to \infty$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Rækken er konvergent

Konvergerer S_N ikke, siges $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at være divergent.

linearitet $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Konvergens er ens for

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{og} \quad \sum_{n=K}^{\infty} a_n \qquad K \geq 2$$

De 2 rækker har ikke samme sum

Eksempler

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \ldots$ Rækken er divergent

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \to \infty \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

For (2) har vi $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} =$

$$1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{2^N}$$

lad os tjekke dette $\quad S_{N+1} = S_N + \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} =$

$$1 - \frac{2}{2 \cdot 2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{2}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+1}} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$$

Induktionsbeviset giver at $\quad \boxed{S_N = 1 - \frac{1}{2^N}} \quad \forall N \in \mathbb{N}$

$S_N = 1 - \frac{1}{2^N} \to 1$ for $N \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

er konvergent

(4) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \; \ldots \; - -$

For (4) er $\quad S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{for } N \text{ ulige} \\ 0 & \text{for } N \text{ lige} \end{cases}$ $\quad$ Rækken er divergent n'te leds kriteriet (sætning 4.19)

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent så vil $a_n \to 0$ for $n \to \infty$

Bevis

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_n$$

$$a_n = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

Omvendt følger at hvis $a_n \not\to 0$ for $n \to \infty$ er

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

Vedr projektopgave 1

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + (1+\beta) = 0 \qquad \lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4(1+\beta)} =$$

$$-\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-1)(4(1+\beta)-\alpha^2)} =$$

$$\underbrace{-\frac{\alpha}{2}}_{=a} \pm \underbrace{\frac{i}{2}\sqrt{4(1+\beta)-\alpha^2}}_{=\omega}$$

Regn videre med a og ω