DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Navn:

Studienummer:

Del A: Multiple-choice

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.
Denne papirversion skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.
Vejledning til del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Betragt de to uendelige rækker:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

☐ a) Både R og S er betinget konvergent.

☐ b) Både R og S er absolut konvergent.

☐ c) R er absolut konvergent og S er divergent.

☐ d) R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

☐ e) R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.

☐ f) R er betinget konvergent og S er divergent.

(ii) En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]. \end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

☐ a) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma} \sin(\gamma)$.

☐ b) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma} \cos(\gamma)$.

☐ c) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\gamma)$.

☐ d) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \cos(\gamma)$.

☐ e) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma} \sin(2\pi x\gamma)$.

☐ f) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi x} \cos(\pi\gamma x)$.

(iii) Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen A har det karakteristiske polynomium:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

☐ a) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$. ☐ b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}$.

☐ c) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$. ☐ d) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$.

☐ e) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$. ☐ f) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

(iv) Konvergenradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2+2n+1} x^n$ er:

☐ a) $\rho = 0$.
☐ b) $\rho = \frac{1}{4}$.
☐ c) $\rho = 1$.
☐ d) $\rho = 4$.
☐ e) $\rho = \infty$.
☐ f) $\rho = \frac{1}{2}$.

(v) Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 e^t\,.$$

Ved at sætte : $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, kan differentialligningen omskrives som:

☐ a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ c) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ d) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$.

☐ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$.

Opgavesættet fortsætter!

(vi) Fourierrækken $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$ har reel form:

☐ a) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.

☐ b) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \cos(nt)$.

☐ c) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.

☐ d) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.

☐ e) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \sin(nt)$.

☐ f) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1} \cos(nt) - \frac{2}{n^4+1} \sin(nt)\right)$.

(vii) Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialigningen omksrives som et 1. ordens system, så er systemmatricen:

☐ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(viii) Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ er:

☐ a) $\frac{\pi^2}{9}$.

☐ b) $\frac{\pi^3}{3}$.

☐ c) 2.

☐ d) $\frac{1}{3}$.

☐ e) $\frac{9}{8}$.

☐ f) $\frac{1}{2}$.

————oooOooo————

Del A er slut. Husk, at svare på del B

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice (stilles elektronisk): 40%, Opgave 1: 20%, Opgave 2: 16%, Opgave 3: 24%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

(a) Vis ved at anvende definitionen af uegentligt integral, at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x,$$

er konvergent.

(b) Bestem en tilnærmet værdi for summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$$

med en fejl på højst 0.02.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{d}^T\mathbf{x}, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

hvor y er svaret og u er påvirkningen.

(a) Undersøg om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

(b) Find overføringsfunktionen for systemet (1).

(c) Opskriv Fourierrækken på kompleks form for en løsning y til differentialligningssystemet (1) med påvirkningen

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}.$$

Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og i intervallet $[-\pi, \pi[$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -\pi \le x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{for } \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$$

(a) Skitser grafen for f i intervallet $[-\pi, 3\pi]$.

(b) Hvilken værdi konvergerer Fourierrækken for f mod i punktet $x = 0$?

(c) Det oplyses, at Fourierrækken for f på reel form er givet ved

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + \frac{1}{2\pi(1-2n)} \left(\sin(2(2n-1)x) - 3\sin((2n-1)x)\right) \right).$$

Bestem Fourierkoefficienterne a_n for $n = 0, 1, 2, 3, ...$

(d) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække? (Begrund svaret.)

——————oooOooo——————

Del B er slut. Husk at svare på Del A (Multiple Choice).