Del A: Mat 2, MC Opgaver, Maj 2024.

1. Det karakteristiske polynomium for en 4. ordens homogen lineær differentialligning med konstante koefficienter er givet som:

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 1).$$

Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen er:

(a) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{2t} + c_3e^t + c_4e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

(b) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^t + c_4te^t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

(c) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

(d) $y(t) = c_1 + c_2e^{2t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

(e) $y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

2. Beregn overføringsfunktionen for differentialligningen

$$y'' + 2y' + y = u'' + 3u.$$

(a) $H(s) = s^2 + 2s + 1, \quad s \neq -1.$

(b) $H(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+3}, \quad s \neq \sqrt{3}.$

(c) $H(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^2+3}, \quad s \neq \sqrt{3}i.$

(d) $H(s) = \frac{s^2+3}{s^2+2s+1}, \quad s \neq -1.$

(e) $H(s) = \frac{s^2+3s}{s^2+2s+1}, \quad s \neq \pm 1$

3. Betragt et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om stabiliteten af systemet, gælder:

(a) Systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

(b) Systemet er asymptotisk stabilt.

(c) Systemet er ustabilt.

(d) Der er ikke tilstrækkelig information til at afgøre stabiliteten.

4. Find konvergensradius ρ for potensrækken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+n}{2^n} x^n.$$

   (a) $\rho = 2$.
   (b) $\rho = \frac{1}{2}$.
   (c) $\rho = \infty$.
   (d) $\rho = 0$.
   (e) $\rho = 4$.

5. Betragt rækkerne

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2+n}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}.$$

   Hvilken udsagn er sandt?

   (a) A er betinget konvergent, og B er absolut konvergent.
   (b) A er absolut konvergent og B er betinget konvergent.
   (c) A er betinget konvergent, og B er divergent.
   (d) Både A og B er betinget konvergent.
   (e) A er absolut konvergent, og B er divergent.

6. En uendelige række af reelle tal $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er givet, og det er givet at $0 < a_n < |b_n|$ for alle n, samt at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er konvergent. Hvilket udsagn er sandt?

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent.
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent.
   (c) Ingen konklusion om konvergens for $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er divergent.

7. Vi betragt den uendelige række af funktioner

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x) + \sin(n^2 x)}{n^2},$$

og de to uendlige rækker af tal:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}, \qquad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}.$$

Vi leder efter en majorantrække for $R(x)$, for $x \in \mathbb{R}$. Hvilken udsagn er sandt?

(a) A er en majorantrække, og B er en konvergent majorantrække.

(b) Både A og B er konvergente majorantrækker.

(c) B er en majorantrække, men A er ikke.

(d) $R(x)$ har ingen majorantrække.

(e) $R(x)$ har en majorantrække, men hverken A eller B er majorantrækker.

8. En 2π-periodisk funktion f har Fourierrækken

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right).$$

Betragt nu Fourierrækken på kompleks form:

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Bestem Fourierkoefficienterne c_n for $n > 0$.

(a) $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} - \frac{i}{n}), \quad n > 0.$

(b) $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{i}{n^2}), \quad n > 0.$

(c) $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + \frac{i}{n}), \quad n > 0.$

(d) $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{-n^2} + \frac{i}{n}), \quad n > 0.$

(e) $c_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{-n} + \frac{i}{n^2}), \quad n > 0.$

9. Vi betragter differentialligningen

$$y''(t) + 2ty(t) = -5.$$

Ved indsættelse af potensrækken $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, fås

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(5 + c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2c_{n-1}))t^n = 0.$

(b) $5 + \sum_{n=0}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2c_{n-1}))t^n = 0.$

(c) $5 + 2c_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2c_{n-1}))t^n = 0.$

(d) $5 + 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n(n+2)(n+1) + 2c_{n-1}))t^n = 0.$

(e) $5 + 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_{n+2}(n+2)(n+1) + 2c_{n-1}))t^n = 0.$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 13. maj 2024

Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 55%, Opgave 1: 15 %, Opgave 2: 10 %. Opgave 3: 20 %

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

1. Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{100+n}{2+n^3}$ er absolut konvergent.
2. Betragt nu, for $k \in \mathbb{N}$, rækken:
$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{100+n}{2+n^k}.$$
   (a) Find den mindste værdi for $k \in \mathbb{N}$, der gør S absolut konvergent.
   (b) Find den mindste værdi for $k \in \mathbb{N}$, der gør S konvergent.

Opgave 2

Betragt differentialligningen

$$y''''(t) + y'''(t) - 2y''(t) = u(t), \tag{1}$$

hvor $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ antages at være en kontinuert funktion.

1. Opskriv det karakteristiske polynomium for ligningen (1) og bestem dernæst den fuldstændige reelle løsning til den tilhørende homogene differentialligning.

2. Det oplyses at $y(t) = t^3$ er en løsning til (1). Opskriv den fuldstændige løsning til den inhomogene differentialligning (1).

3. Brug oplysningen om at $y(t) = t^3$ er en løsning til den inhomogene differentialligning til at bestemme funktionen $u(t)$.

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π-periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0, \pi/2], \\ 2 & \text{for } x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

1. Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$.

2. Bestem alle reelle Fourierkoefficienter a_n og b_n i Fourierrækken

   $$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{2}$$

   hørende til funktionen f.

3. Hvad konverger Fourierrækken mod i punkterne $x = -\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ og π?

4. Konvergerer Fourierrækken uniformt? Forklar.

—————oooOooo—————

[Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).]