Forelæsning 3

1) Overføringsfunktioner for systemer
2) Stabilitet.

①

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \qquad \underline{x} = \underline{x}(t), \quad u = u(t)$$

$\underline{\underline{A}}$ er en $n \times n$ matrice

$$y(t) = \underline{d}^T \underline{x}$$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{d}$, $\underline{b}$ har reelle komponenter

Påvirkning: $u(t) = e^{st}$ $\qquad s \in \mathbb{C}$

Løsningsantagelse $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{st}$ $\qquad$ Indsæt

$$s\underline{x}_0 e^{st} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_0 e^{st} + \underline{b}\,e^{st} \iff \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_0 - s\underline{\underline{I}}\,\underline{x}_0 + \underline{b} = \underline{0}$$

$\Updownarrow$

$$(\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{I}})\,\underline{x}_0 = -\underline{b} \iff \boxed{\underline{x}_0 = -(\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{b}}$$

Forlang $\det(\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{I}}) \neq 0$ $\qquad$ Løsningen: $\boxed{\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{st}}$

Vi får nu $\quad y(t) = \underline{d}^T \underline{x}(t) = \underline{d}^T \underline{x}_0 e^{st} = H(s) e^{st}$

$$H(s) = \underline{d}^T \underline{x}_0$$

Overføringsfunktionen $\quad \boxed{H(s) = -\underline{d}^T (\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{I}})^{-1} \underline{b}} \quad y(t) = H(s) e^{st}$

Typisk $\quad H(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)} \quad P(s) \neq 0 \quad$ Se sætn. 2.21

Eksempel 2.23

Betragt: $\quad u(s) = e^{int} \quad s = in \quad n \in \mathbb{Z}$

Antag: $\quad \det(\underline{\underline{A}} - in\underline{\underline{I}}) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Løsning: $\quad \boxed{y(t) = H(in) e^{int}}$

Betragt: $\quad u(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$

Superpositionsprincippet giver løsningen

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in) e^{int}}$$

③

$$\mathrm{Re}\left[\frac{d\underline{x}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}[\underline{x}] = \mathrm{Re}[\underline{\underline{A}}\,\underline{x}] + \mathrm{Re}[\underline{b}\,u(t)] =$$

$$\underline{\underline{A}}\,\mathrm{Re}[\underline{x}] + \underline{b}\,\mathrm{Re}[u]$$

$$\mathrm{Re}[y] = \mathrm{Re}[\underline{d}^T\underline{x}] = \underline{d}^T\mathrm{Re}[\underline{x}] = \mathrm{Re}[H(s)e^{st}]$$

Eksempel $u(t) = \alpha e^{it}$ $\mathrm{Re}[u] = \alpha \cos t$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Fuldstændig løsning $\underline{x}(t) = \underline{x}_{hom}(t) + \underline{x}_p(t)$ $\underline{x}_p = \underline{x}_0 e^{st}$

$\underline{x}_0 = -(\underline{\underline{A}} - s\underline{\underline{I}})^{-1}\underline{b}$

$$y(t) = \underline{d}^T\underline{x}(t) = \underline{d}^T\underline{x}_{hom}(t) + \underline{d}^T\underline{x}_0 e^{st} =$$

$$\underline{d}^T\underline{x}_{hom}(t) + H(s)e^{st}$$

Jvf sætn 2.34

Stabilitet af homogene systemer

$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ $t \in [t_0; \infty[$

Begrænset vektorfunktion $I \subseteq \mathbb{R}$ $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\underline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

$\underline{x}(t)$ er begrænset hvis hver koordinatfunktion $x_i(t)$ er begrænset

Er ensbetydende med

$$\exists\, K > 0 \mid \|\underline{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \le K \quad \forall t \in I$$

sådan at

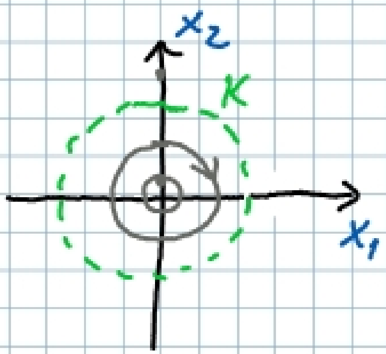
<u>Definition 2.26</u>

(i) $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er stabilt, hvis enhver løsning $\underline{x}(t)$, $t \in [t_0 ; \infty[$, er begrænset (marginalt stabilt)

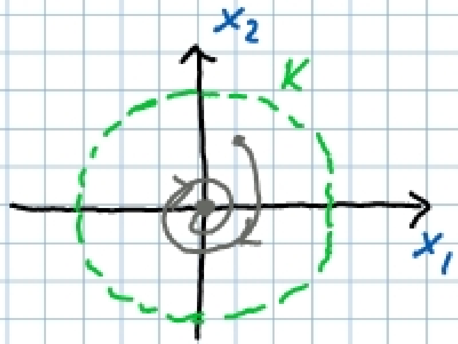
(ii) $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er asymptotisk stabilt, hvis enhver løsning $\underline{x}(t)$ opfylder

$$\underline{x}(t) \to \underline{0} \quad \text{for} \quad t \to \infty$$

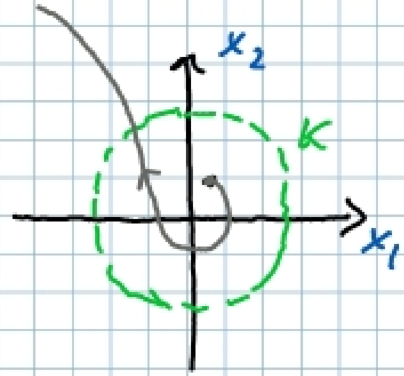
(iii) $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er ustabilt i alle andre tilfælde.



(i) Marginal stabilitet



(ii) Asymptotisk stabilitet



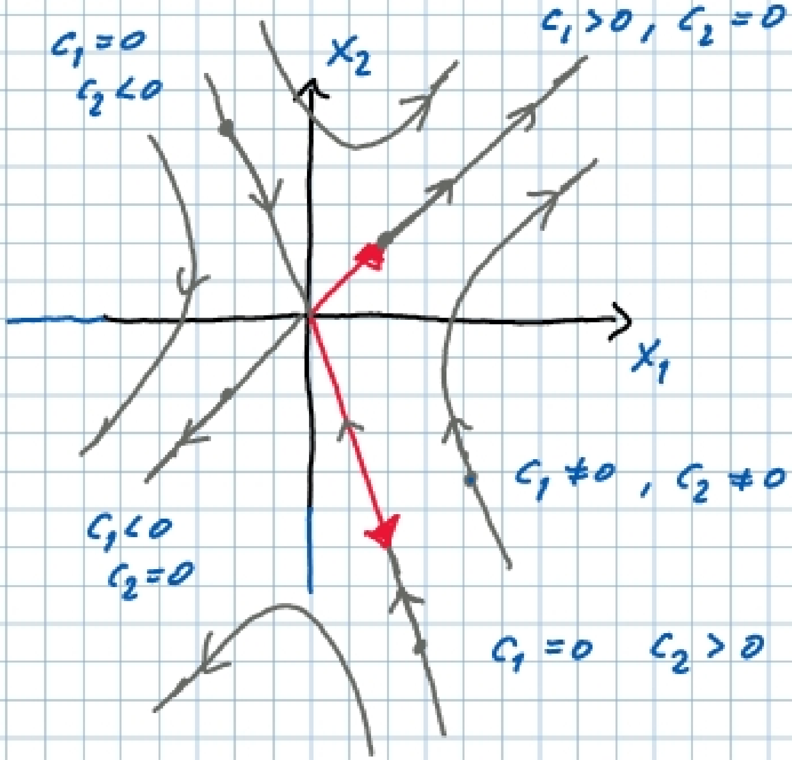
(iii) Ustabilt system

Opg 409

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Fuldstandig løsning $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Fase plans plot



Ustabilt

Hyperbolsk ligevægtspunkt i $\underline{x} = \underline{0}$

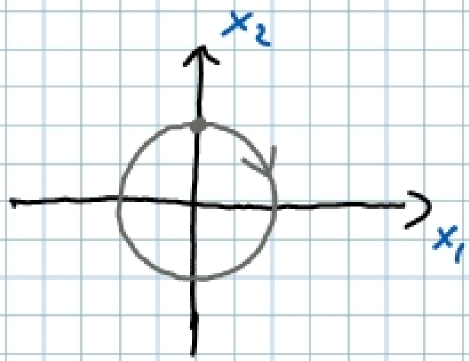
Eksempel 2.8 side 35

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Fuldstændig løsning

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

Faseplans plot



Marginal stabilt

Sætning 2.34 om stabilitet

$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er stabilt $\Leftrightarrow$ 1) Ingen λ for $\underline{\underline{A}}$ har $Re(\lambda) > 0$

2) Enhver λ for $\underline{\underline{A}}$ med $Re(\lambda) = 0$ har geometrisk multiplicitet q lig med algebraisk multiplicitet p

Sætning 2.36 $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis alle λ har $Re(\lambda) < 0$

Sætning 2.39 Routh-Hurwitz' kriterium

Alle rødderne i $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ med reelle koefficienter har $Re(\lambda) < 0$ hvis og kun hvis

1) $a_k > 0$ for $k = 1, 2, \dots n$

2) Alle $k \times k$ determinanter $k = 2, 3, \ldots, n-1$ på formen

$$D_k = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & & a_{2k-4} \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-5} \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & a_k \end{bmatrix}$$

er positive

$(D_k > 0)$

$a_p = 0$ for $p > n$

Hvis eksempelvis $P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 5$

Før brug af Routh Hurwitz gang med (-1)

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 5$$