DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 11. maj 2023
Kursus: Matematik 2

01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 3 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 60 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 25%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. For at opnå fuldt point i opgave 2 og 3 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven afleveres elektronisk ved indtastning på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2 og 3 kan enten afleveres i papirform eller ved oploadning.

Opgave 1

MC-spørgsmål 1 Bestem den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} = 0.$$

Svaret er:

A: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

B: $y(t) = c_1e^{-3it} + c_2e^{3it}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

C: $y(t) = c_1 + c_2e^{3it} + c_3te^{3it}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

D: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3t} + c_3te^{-3t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

E: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3it} + c_3te^{-3it}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

F: $y(t) = c_1 + c_2e^{3t} + c_3te^{3t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 2 Betragt et differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en 2×2 matrix.

Antag nu at systemet (1) er asymptotisk stabilt. Er funktionen

$$\mathbf{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

løsning til systemet?

Svaret er:

A: Ja **B:** Nej **C:** Kan ikke afgøres ud fra de givne oplysninger

Antag nu omvendt at funktionen

$$\mathbf{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er løsning til systemet. Er systemet stabilt?

1: Ja; **2:** Nej

Det samlede svar er hermed:

A1

A2

B1

B2

C1

C2

MC-spørgsmål 3 Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = u' + u,$$

Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

Svaret er:

D: $H(s) = \frac{s^3+3s^2+2s}{s+1}$; **E:** $H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)}$; **F:** $H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

Bestem nu de værdier for $s \in \mathbb{C}$ for hvilke overforingsfunktionen er defineret.
Svaret er:

1: $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$; **2:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2\}$; **3:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$;

Det samlede svar er hermed

D1

D2

D3

E1

E2

E3

F1

F2

F3

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 4 Betragt potensrækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^3\, 2^n x^n.$$

Bestem konvergensradius ρ. Svaret er:

G: $\rho = 2$; **H:** $\rho = 1$; **I:** $\rho = \frac{1}{2}$.

Sæt nu

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^3\, 2^n x^n,\ x \in]-\rho, \rho[,$$

og beregn tallet $f'(0)$. Svaret er:

1: $f'(0) = 0$; **2:** $f'(0) = 2$.

Det samlede svar er dermed

G1

G2

H1

H2

I1

I2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 5 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)^3}{2^n}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er

J: betinget konvergent; **K:** absolut konvergent; **L:** divergent

Undersøg nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^n$$

konvergerer uniformt på det åbne interval $]0,1[$. Svaret er:

1: Ja **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

J1

J2

K1

K2

L1

L2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 6 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln(x^n), \; x \in [1, \infty[\tag{2}$$

har en majorantrække - og i givet fald om der findes en konvergent majorantrække.

Svaret er:

M: Rækken (2) har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække;
N: Rækken (2) har ikke en majorantrække;
P: Rækken (2) har en konvergent majorantrække.

Vi undersøger nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln(x^n), \; x \in [1, 10] \tag{3}$$

har en majorantrække - og i givet fald om der findes en konvergent majorantrække.

Svaret er:

1: Rækken (3) har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække;
2: Rækken (3) har ikke en majorantrække;
3: Rækken (3) har en konvergent majorantrække.

Det samlede svar er hermed

M1
M2
M3
N1
N2
N3
P1
P2
P3

MC-spørgsmål 7 Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at Fourierrækken på reel form er

$$f \sim 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cos(nx).$$

Bestem koefficienten c_0 i Fourierrækken på kompleks form. Svaret er

Q: $c_0 = 6$; **R:** $c_0 = 3/2$; **S:** $c_0 = 3$.

Bestem koefficienten c_{-2} i Fourierrækken på kompleks form. Svaret er

1: $c_{-2} = \frac{-i}{6}$; **2:** $c_{-2} = \frac{i}{6}$; **3:** $c_{-2} = \frac{1}{6}$;

Det samlede svar er hermed

Q1

Q2

Q3

R1

R2

R3

S1

S2

S3

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 8 Om en differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0 \tag{4}$$

vides, at indsættelse af en potensrække

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

leder til rekursionsformlen

$$(n+1)c_{n+1} - c_n = 0, \; n = 0, 1, 2 \ldots .$$

Hvad er konvergensradius ρ for potensrækkeløsningerne til differentialligningen? Svaret er

T: $\rho = 0$; **U:** $\rho = 1$; **V:** $\rho = \infty$.

Undersøg nu om funktionen $y(t) = t^2$ er løsning til differentialligningen. Svaret er

1: Ja **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

T1

T2

U1

U2

V1

V2

Opgave 2 Det oplyses (skal IKKE vises), at en differentialligning på formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0, \ t \in]0, \infty[,$$

har løsningen

$$y(t) = t^2.$$

(i) Bestem funktionen $a(t)$.

(ii) Bestem nu den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.

Opgave 3 Betragt den 2π-periodiske funktion f, der er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{for } x \in [-\pi, 0] \\ x^{1.1}, & \text{for } x \in]0, \pi[\end{cases}.$$

(i) Skitser grafen for funktionen f på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Er funktionen f lige?

(iii) Beregn Fourierkoefficienten a_0 i Fourierrækken for f på reel form.

(iv) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \frac{\pi}{2}$?

(v) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \pi$?

(vi) Konvergerer Fourierrækken uniformt?

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) aflevere eller oploade løsningen til opgave 2 & 3.

Eksamen, maj 2023

Opgave 1

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

MC-spørgsmål 1

Choose one answer

- D
- C
- B
- E
- F
- A

MC-spørgsmål 2

Choose one answer

- ◯ A1
- ◯ A2
- ◯ C2
- ◯ B1
- ☒ B2
- ◯ C1

MC-spørgsmål 3

Choose one answer

- D3
- D2
- F1
- E2
- F2
- E3
- E1
- D1
- F3

MC-spørgsmål 4

Choose one answer

- G1
- G2
- H1
- I2
- I1
- H2

MC-spørgsmål 5

Choose one answer

- K2
- K1
- L2
- J2
- L1
- J1

MC-spørgsmål 6

Choose one answer

- P2
- N2
- N1
- N3
- M2
- P1
- P3
- M1
- M3

MC-spørgsmål 7

Choose one answer

- ○ R1
- ○ Q3
- ○ Q2
- ○ R3
- ○ S3
- ○ S2
- ○ S1
- ○ R2
- ○ Q1

MC-spørgsmål 8

Choose one answer

- ○ T1
- ○ T2
- ○ U2
- ○ V1
- ○ U1
- ☒ V2

Opgave 2:

(i) Ved indsættelse af $y(t)=t^2$ i differentialligningen fås ved at isolere $a(t)$ at

$$a(t) = - 4t^{-2}$$

(ii) Ved brug af sætning 1.32 fås

$A_1(t)=\ln(t)$
$\Omega(t)= t$
og dermed

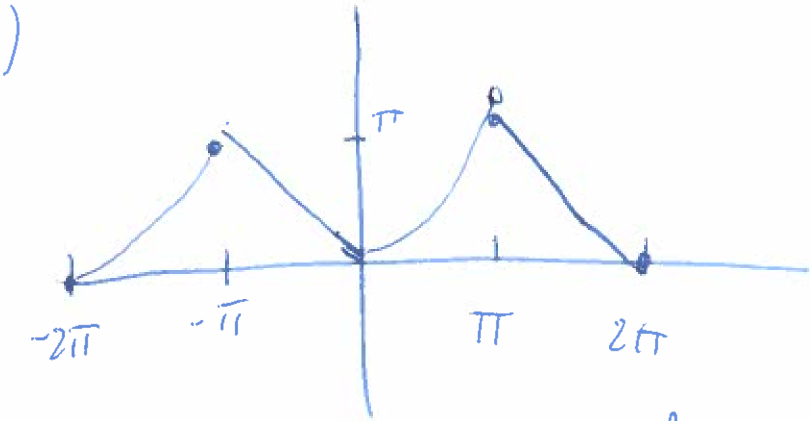
$$y_2(t)= -1/4\, t^{-2}.$$

Den fuldstændige løsning er hermed

$$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^{-2},$$ hvor c_1, c_2 er reelle tal.

Opgave 3

(i)



(ii) Nej, da $f(x) \neq f(-x)$ for $x \in]0,\pi[$

(iii) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x^{1.1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{2.1}x^{2.1}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2.1}\pi^{2.1}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2.1}\pi^{1.1}}}$$

(iv) For $x = \frac{\pi}{2}$ konvergerer Fourierrækken mod $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^{1.1}$, da der er tale om et kontinuitetspunkt. Husk at checke at funktionen er stykkevist differentiabel!

(v) For $x = \pi$ konvergerer Fourierrækken mod

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi + \pi^{1.1}}{2}}}$$

(vi) Nej, sumfunktionen er ikke kontinuert, så Fourierrække konvergerer ikke uniformt.

Eksamen maj 2023

Opgave 1:

MC 1: karakteristisk polynomium:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$$
$$= \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9)$$

Rødder:

$\lambda = 0$, $\lambda = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$ (dobbeltrod)

Fuldstændige komplekse løsning:

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

$\underline{\underline{D}}$

MC2: $\|x(t)\| = |t| \cdot \sqrt{2} \not\to 0$ for $t \to \infty$.

Svaret er B.

$\|x(t)\| = |t| \sqrt{2} \to \infty$ for $t \to \infty$.

Så systemet er ikke stabilt (2).

Svaret er $\underline{\underline{B2}}$

MC3:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{s+1}{s(s^2+3s+2)}$$

$$= \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2$$

Svaret er

$\underline{\underline{F2}}$

MC4 $\quad a_n = n^3(2x)^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^3(2x)^{n+1}}{n^3(2x)^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 + 2|x|$$

$\to 2|x|$ for $n \to \infty$.

$\rho = \frac{1}{2}$ $\quad$ (I)

$$f(x) = 8\cdot(2x)^2 + 27(2x)^3 + \cdots$$

Så $f'(x) = 64x + \cdots$

og $f'(0) = 0$. $\quad$ (I)

Svaret er $\underline{\underline{\text{I}}}$!

MC 5:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+3)^3}{2^{n+1}}}{\frac{(n+2)^3}{2^n}} = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Svaret er K.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n \to \infty \quad \text{for } x \to 1.$$

Så rekka konvergerer ikke uniformt

på $]0,1[$. Svaret er 2.

K2

MC6:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\ln(x^n) = \frac{1}{n}\ln(x$$

$$\to \infty \quad \text{for } x \to \infty$$

Svaret er N.

For $x \in [1, 10]$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n}\ln(x) \leq \frac{1}{n}\ln(10) = k_n$$

- som er den mindste majorantrække,
- og divergent.

Svaret er 1.

Totale svar $\underline{\underline{N1}}$

MC 7: $\frac{1}{2}a_0 = 3$, så $a_0 = 6$

Så $c_0 = 3$, Svaret er S

$a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = 0$

$c_{-2} = \frac{a_2 + ib_2}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$, Svaret er (3)

Totale svar $\underline{\underline{S3}}$

MC 8: $a_n = c_n t^n$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1} t^{n+1}}{c_n t^n}\right| = \frac{1}{n+1}|t| \to 0$ for $n \to \infty$.

Så $\underline{\rho = \infty}$

$y(t) = t^2$ opfylder ikke rekursions-formlen, Svaret er nej.

Svaret er $\underline{\underline{V2}}$