DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 10. december 2017

Kursus: Matematik 2 01034/01035

Navn:

Studienummer:

Del A: Multiple-choice

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.
Denne papir version skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.
Vægtning for del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Et homogent og lineært differentialligningssystem er givet ved:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\,, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Systemet er:

☐ a) asymptotisk stabilt.

☐ b) stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

☐ c) ustabilt.

(ii) Det er givet, at det karakteristiske polynomium for en 4. ordens homogen differentialligning med konstante koefficienter er:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 1).$$

Den fuldstændige reelle løsning er:

☐ a) $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

☐ b) $y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t}$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

☐ c) $y(t) = c_1 + c_2t + c_3\cos(t) + c_4\sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

☐ d) $y(t) = (c_1 + c_2t)\cos(t) + (c_3 + c_4t)\sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

☐ e) $y(t) = c_1 + c_2\cos(t) + c_3\sin(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

(iii) Konvergensradius ρ for potensrækken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} x^n$ er:

☐ a) $\rho = 0$.
☐ b) $\rho = \frac{1}{3}$.
☐ c) $\rho = 1$.
☐ d) $\rho = 3$.
☐ e) $\rho = \infty$.

(iv) Lad $\omega \in \mathbb{R}$. Differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = \sin(\omega t)\,,$$

har en partikulær løsning:
☐ a) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.
☐ b) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.
☐ c) $\mathrm{Re}\left((-\omega^2+2i\omega+1) e^{i\omega t}\right)$.
☐ d) $\mathrm{Im}\left((\omega^2+2\omega+1) e^{i\omega t}\right)$.
☐ e) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.

(v) Antag at differentialligningen

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = 0\,,$$

har en løsning på potensrækkeform: $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Det fører til rekursionsformlen:
☐ a) $c_0 = 1$, og $c_n = \frac{1}{2} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
☐ b) $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, og $c_n = \frac{1}{2n} c_{n-1}$ for $n = 2, 3, \ldots$.
☐ c) $c_n = \frac{2}{n} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
☐ d) $c_n = 2n c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
☐ e) $c_n = \frac{1}{2n} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(vi) Fourierrækken $3 + \cos(2x)$ har de komplekse Fourierkoefficienter:
☐ a) $c_0 = 6$, $c_2 = 1$, $c_{-2} = -1$ og $c_n = 0$ for resten af n.
☐ b) $c_0 = 3$, $c_2 = 1$, $c_{-2} = -1$ og $c_n = 0$ for resten af n.
☐ c) $c_0 = 3$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_{-2} = \frac{1}{2}$ og $c_n = 0$ for resten af n.
☐ d) $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_1 = 2$, $c_{-1} = -2$ og $c_n = 0$ for resten af n.
☐ e) $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_{-2} = -\frac{1}{2}$ og $c_n = 0$ for resten af n.

———————oooOooo———————

Del A er slut. Husk, at svare på del B.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 10. december 2017
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 30%, Opgave 1: 25%, Opgave 2: 10%, Opgave 3: 20% og Opgave 4: 15%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt den inhomogene differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = u(t)\,.$$

(i) Vis, for tilfældet $u(t) = t$, ved direkte indsættelse i ligningen, at $y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$ er en løsning.

Det oplyses, at karakterligningen for den tilsvarende homogene ligning har rødderne: $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$.

(ii) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ med $u(t) = e^{st}$.

(iii) Find det stationære svar for $u(t) = e^{2t}$.

(iv) Opskriv den fuldstændige reelle løsning for $u(t) = t + e^{2t}$.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Giv et matematisk argument for, at hver af følgende uendelige rækker er konvergent:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$.

Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og lige. I intervallet $[0, \pi]$ er f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - t & \text{for } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{for } x \in \,]1, \pi]. \end{cases}$$

(i) Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$.

(ii) Argumenter for, at Fourierrækken for f konvergerer mod f for alle x, og for, at konvergensen er uniform.

(iii) Bestem Fourierkoefficienterne for f.

Opgave 4

Betragt den uendelig række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)\,.$$

(i) Vis, at rækken er konvergent for hver $x \in \mathbb{R}$, og at sumfunktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defineret ved $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$, er kontinuert.

(ii) Find et N, så den N'te afsnitssum af rækken approksimerer g med en fejl på højst 0.05.

—————oooOooo—————

Del B er slut. Husk, at svare på del A (Multiple Choice).