DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 9. december 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 40%, Opgave 1: 10%, Opgave 2: 25%, Opgave 3: 10% og Opgave 4: 15%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt rækken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n^2x) + \sin(nx^2)}{1+n^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(i) Find et $a > 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2}$ er en majorantrække for (1).

(ii) Bestem et $N \in \mathbb{N}$, så

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n^2x) + \sin(nx^2)}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2\cos(n^2x) + \sin(nx^2)}{1+n^2} \right| < 0.01, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt systemet af førsteordens differentialligninger

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{2}$$

hvor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ og

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+a & a & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & -1 & -2-a \end{pmatrix}.$$

Matricen $\mathbf{A}$ afhænger af en parameter $a \in \mathbb{R}$.

(i) Bestem egenværdierne for $\mathbf{A}$ og de værdier af a for hvilke systemet (2) er asymptotisk stabilt.

(ii) Sæt $a = -1$ i $\mathbf{A}$. Afgør om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

(iii) Sæt $a = -2$ i $\mathbf{A}$. Afgør om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

Sæt nu $a = 0$ og betragt systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(iv) Givet $a = 0$, find en partikulær løsning til ligningssystemet (3).

Opgave 3

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er 2π-periodisk og lige. For en parameter $0 < a < \pi$ er f på intervallet $[0, \pi]$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0, a[, \\ b & \text{for } x = a, \\ 0 & \text{for } x \in\,]a, \pi]. \end{cases}$$

(i) Vis, at f har Fourierrækken

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a\,n)}{n}\cos(n\,x)\,. \tag{4}$$

(ii) Bestem værdien af b således, at Fourierrækken for f konvergerer mod $f(x)$ for alle x. Er konvergensen uniform?

Opgavesættet fortsætter!

Opgave 4

Antag, at den homogene differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2\, y = 0\,. \tag{5}$$

har en løsning, der kan skrives som en potensrække, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, med konvergensradius $\rho > 0$.

(i) Vis, ved indsættelse i differentialligningen, at $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ og bestem en rekursionsformel for a_n, $n \geq 3$.

Det oplyses nu, at

$$a_{3m} = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{3}\right)^m a_0\,, \quad a_{3m+1} = 0\,, \quad a_{3m+2} = 0\,, \quad \text{for } m \geq 0\,. \tag{6}$$

(ii) Givet (6), bestem konvergensradius ρ for rækkeløsningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{3m} x^{3m}\,.$$

——————oooOooo——————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).