DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2019
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 30 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 25%; Opgave 4: 30%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives elektronisk eller på papirform. Hvis løsningen til multiple-choice opgaven afleveres på papir, skal det foregå ved angivelse af svaret på et rent stykke papir, uden udregninger. Der er kun en korrekt svarmulighed per spørgsmål. Man kan vælge mere end en svarmulighed, hvilket giver delvise point. Hvis man svarer forkert, giver det negative point. Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

Opgave 1

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Svaret er:

a) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 t \cos t + c_4 \sin t,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Opgaven fortsætter - Vend!

(ii) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^2y}{dt^2} = e^t$$

Svaret er:

a) $y(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$.

b) $y(t) = \frac{1}{2}e^{t}$.

c) $y(t) = \sin t$

(iii) Undersøg om talfølgen givet ved

$$x_n = \frac{1+e^n}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

er konvergent, og bestem i bekræftende fald grænseværdien. Svaret er:

a) Talfølgen er divergent.

b) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 0.

c) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1.

(iv) Vi benytter $n$te-ledskriteriet til at undersøge konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

Svaret er:

a) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken konvergent

b) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken divergent

c) Brug af $n$te-ledskriteriet leder ikke til nogen konklusion for rækken.

Opgaven fortsætter - Vend!

(v) Betragt den 2π-periodiske funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{for } x \in [0, \pi[\\ 3\pi - x & \text{for } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \tag{1}$$

Vi undersøger om funktionen f er lige eller ulige. Svaret er:

a) Funktionen f er lige.

b) Funktionen f er ulige.

c) Funktionen f er hverken lige eller ulige

(vi) Bestem summen af Fourierrækken i $x = 2\pi$ for funktionen f i (1). Svaret er:

a) Summen er ikke konvergent

b) Summen er 2π.

c) Summen er π.

Opgave 2

Betragt for $x \in \mathbb{R}$ den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^n \,. \tag{2}$$

(i) Bestem mængden af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken (2) er konvergent.

(ii) Bestem summen af rækken (2) for mængden af $x \in \mathbb{R}$ som blev fundet i (i).

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 3

Vi betragter et homogent differentialligningssystem af formen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Vi antager at matricen $\mathbf{A}$ har formen

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -2a \\ a-1 & -2 & 2-2a \\ a & 0 & -2a-1 \end{pmatrix},$$

hvor a er en reel parameter. Det oplyses (skal **IKKE** vises) at det karakteristiske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 - (5+3a)\lambda - 2 - 2a.$$

(i) Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke differentialligningssystemet er asymptotisk stabilt.

(ii) Bestem for $a = 0$ en partikulær løsning til det inhomogene system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{3}$$

(iii) For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ har systemet (3) en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t}$ for en vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$?

Opgave 4

Vi betragter differentialligningen

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

og søger en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{5}$$

(i) Vis at hvis en funktion y på formen (5) er løsning til (4), så er

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad c_{n+1} = \frac{-1}{n} c_n,\ n \geq 1. \tag{6}$$

(ii) Benyt (6) til at vise at enhver potensrækkeløsning til (4) har konvergensradius $\rho = \infty$.

(iii) Sæt $c_1 = 1$ og benyt (6) til at finde koefficienter c_n, $n \geq 2$, således at funktionen y i (5) er løsning til (4).

(iv) Find et funktionsudtryk for funktionen y i (iii) på formen $y(t) = t^{\alpha}e^{\beta t}$ for passende reelle tal α, β.

Opgavesættet slut.