Opgave 1(i)

Betragt differentialligningen $\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 15\frac{dy}{dt} + 11y = 0$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 15\lambda + 11$$

Rødderne findes med Maple eller et andet CAS værktøj og er

$$x = -1 \qquad x = -2 \pm i\sqrt{7}$$

Den fuldstændige reelle løsning er ifølge sætning 1.9 i lærebogen:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}\cos(\sqrt{7}t) + c_3 e^{-2t}\sin(\sqrt{7}t)$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Opgave 1(ii)

Find konvergensradius for potensrækken $R: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} x^n$

Indfør $a_n = \frac{n+1}{n \cdot 2^n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+2}{(n+1)\,2^{n+1}} \quad x^{n+1}}{\frac{n+1}{n \cdot 2^n} \quad x^n}\right| = \frac{(n+2)\,n\,2^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}\,|x| =$$

$$\frac{(n^2+2n)}{(n+1)^2}\,\frac{1}{2}|x| = \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\,\frac{1}{2}|x| \to \frac{1}{2}|x|$$

for $n \to \infty$

Konvergensradius findes af $\frac{1}{2}|x| < 1 \Rightarrow \boxed{|x| < 2 = \rho}$

Opgave 1(iii)

Vi betragter den uendelige række $R: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+2)^2}$

$b_n = \frac{n}{(n+2)^2}$ er positiv og monotont aftagende for $n \geq 2$
Leipnitz' kriterium vil stadig gælde i dette tilfælde.

Derudover haves $b_n \to 0$ for $n \to \infty$

Ifølge Leipnitz kriterium er rækken konvergent.

Vi undersøger om rækken er absolut konvergent ved at betragte

$R_1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^2}$ $\quad a_n = \frac{n}{(n+2)^2}$

$R_2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n}{(n+2)^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{(n+2)^2} = \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} \to 1 \quad \text{for } n \to \infty$$

Heraf ses at R_1 og R_2 er ækvivalente.

Da R2 er divergent, følger det af ækvivalenskriteriet at R1 er divergent.

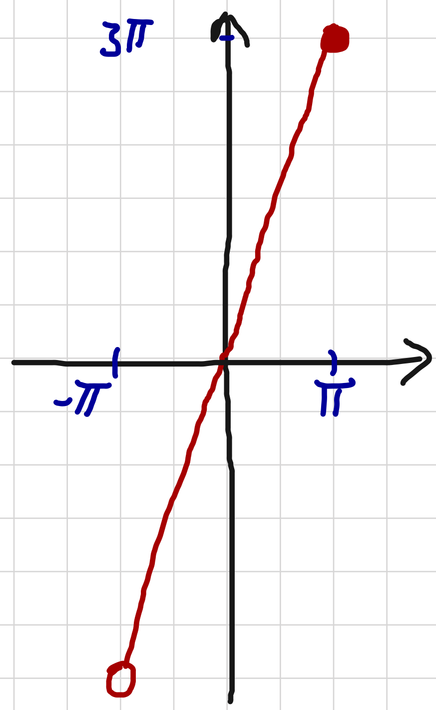
Rækken R er derfor betinget konvergent.

Opgave 2(i)

Find fourierrækken for funktionen, der er 2π periodisk og har forskriften

$$f(x) = 3x \quad \text{for} \quad x \in]-\pi;\pi]$$

Graf



f er ulige og derfor er Fourierkoefficienterne er givet ved

$$a_n = 0 \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3x\,\sin(nx)\,dx = \frac{6}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos(nx)\,dx$$

$$\frac{6}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n}\right) + \frac{6}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{-6(-1)^n}{n}$$

$$\boxed{b_n = (-1)^{n+1}\frac{6}{n}} \qquad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fourierrækken er

$$\boxed{f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6}{n} \sin(nx)}$$

Opgave 2(ii)

Ifølge Fouriers sætning 6.12 i lærebogen har vi at Fourierrækken i π konvergerer mod

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to \pi-} f(x) + \lim_{x \to \pi+} f(x)\right) = \frac{1}{2}(3\pi - 3\pi) = 0$$

Opgave 3(i)

Den reelle 2x2 matrice i ligningssystemet i (1) har en egenværdi samt tilhørende egenvektor givet ved

$$\lambda_1 = -1+3i \qquad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1-3i \\ 10 \end{bmatrix}$$

Da systemmatricen har reelle koefficienter er den anden egenværdi og egenvektor kompleks kunjugeret af den opgivne egenværdi og egenvektor. Dvs

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1-3i \qquad \underline{v}_2 = \bar{\underline{v}}_1 = \begin{bmatrix} -1+3i \\ 10 \end{bmatrix}$$

Opgave 3(ii)

Overføringsfunktionen for det inhomogene system er oplyst til at være:

$$H(s) = \frac{5}{s^2+2s+10} \qquad s \neq -1 \pm 3i$$

Da $\cos(4t) = \mathrm{Re}\left(e^{i4t}\right)$ fås fra sætning 2.24 med $s = i4$ løsningen

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(H(i4)\, e^{i4t}\right)$$

Vi udregner først

$$H(i4) = \frac{5}{-16+i8+10} = \frac{5(-6-i8)}{(-6+i8)(-6-i8)} =$$

$$\frac{-30-i40}{36+64} = \frac{-3-i4}{10}$$

Herefter udregnes

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{-3-i4}{10}\right)\left(\cos(4t) + i\sin(4t)\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{3}{10}\cos(4t) + \frac{2}{5}\sin(4t)}$$

Opgave 4

Vi betragter den uendelige række med variable led

$$R: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^3+5}\left(\cos(nx) - 3\sin(nx)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Opgave 4(i)

Vi kan bestemme en majorantrække til R ved at bettragte uligheden:

$$\left|\frac{\arctan(n)}{n^3+5}\left(\cos(nx) - 3\sin(nx)\right)\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^3}(1+3) = \frac{2\pi}{n^3}$$

$$= k_n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En majorantrække er $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^3}$ med $k = 2\pi$

Opgave 4(ii)

Ifølge eksempel 4.34 i lærbogen er $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent.

Derfor er majorantrækken i spørgsmål 4(i) også konvergent. Da rækken R har en konvergent majorantrække, følger det af sætning 5.33 at R er uniform konvergent og sumfunktionen er kontinuert.

Opgave 4(iii)

Den N'te afsnitsum er

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\arctan(n)}{n^3+5}\left(\cos(nx) - 3\sin(nx)\right)$$

Vi laver nu vurderingen hvor s(x) angiver R's sumfunktion:

$$|s(x) - s_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^3+5}\left(\cos(nx) - 3\sin(nx)\right)\right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{2\pi}{x^3}\,dx + \frac{2\pi}{(N+1)^3}$$

$$\leq 2\pi\left(\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^3}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3}\right) =$$

$$\frac{\pi}{(N+1)^2}\left(1 + \frac{2}{(N+1)}\right) \leq \frac{\pi}{(N+1)^2}(1+1) = 2\pi\frac{1}{(N+1)^2} \leq$$

$$\varepsilon = 0{,}01 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(N+1)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \Leftrightarrow (N+1)^2 \geq \frac{2\pi}{\varepsilon} \Rightarrow N \geq \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} - 1 = 24{,}07$$

Vælg $N \geq 25$

Opgave 1(ii)

Vi betragter den uendelige alternerende række:

$$R_1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

Rækken er konvergent og den N'te afsnitssum er $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{4^n}$

$$|S - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \right| \leq \frac{1}{4^{N+1}} \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4^N} \leq 4\varepsilon \iff 4^N \geq \frac{1}{4\varepsilon} \iff \ln 4^N \geq -\ln 4\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$N \ln 4 \geq -\ln(4\varepsilon) \iff N \geq \frac{-\ln 4\varepsilon}{\ln 4}$$

$\varepsilon = 10^{-4} \Rightarrow N \geq 5{,}64$ Vælg $N = 6$

Opgave 1(i)

Er rækken absolut konvergent? $a_n = \frac{1}{4^n} = \left| \frac{(-1)^n}{4^n} \right|$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1 \quad \text{for } n \to \infty$$

Rækken er absolut konvergent. Det er jo også en konvergent kvotientrække.

Opgave 1(iii)

Vi betragter potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+1}$ $\qquad a_n = \frac{x^n}{2^n+1}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}+1}}{\frac{x^n}{2^n+1}}\right| = \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}|x| =$$

$$\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}|x| \to \frac{1}{2}|x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Konvergens for $\frac{1}{2}|x| < 1 \iff |x| < 2$

Konvergensradius er $\underline{\underline{\rho = 2}}$

Opgave 1(iv)

Vi betragter Fourierrækken (se side 255 i lærebogen, opg 226)

$$R: \quad \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Bestem en majorantrække

$$k_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$n=1 \quad \left| \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2x)}{3} \right| \leq \frac{1}{2}|\sin(x)| + \frac{2}{3\pi}|\cos(2x)|$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi} = k_1$$

$$n = 2, 3, 4, \ldots \quad \left| -\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2nx)}{(2n-1)(2n+1)} \right| \leq$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = k_n$$

Opgave 3

Betragt den uendelige række $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

N'te afsnitssum $$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

Vurdering $$|s(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2N+3)^2} =$$

$$\left[-\frac{1}{2}(2x+1)^{-1} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(2N+3)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2N+3} + \frac{1}{(2N+3)^2} = \frac{1}{2N+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N+3}\right) \leq$$

$$\frac{1}{2N+3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2N+3} \frac{7}{10} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2N+3} \leq \frac{10\varepsilon}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 2N+3 \geq \frac{7}{10\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad 2N \geq \frac{7}{10\varepsilon} - 3$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{N \geq \frac{7}{20\varepsilon} - \frac{3}{2}}$$

$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow N \geq 33{,}5$

Alternativt og enklere

$$|S(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \leq \frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq$$

$$\frac{1}{4} \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{x} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{4} \frac{1}{(N+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} \right) \leq \frac{1}{4(N+1)} \left(1 + \frac{1}{N+1} \right) \leq \frac{1}{4(N+1)} \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4(N+1)} \frac{3}{2} = \frac{3}{8(N+1)} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{N+1} \leq \frac{8\varepsilon}{3} \Leftrightarrow$$

$$N+1 \geq \frac{3}{8\varepsilon} \Leftrightarrow \boxed{N \geq \frac{3}{8\varepsilon} - 1}$$

$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow N \geq 36{,}5$