Eksamen i matematik 2, kurserne, 01037, 01035, 01034, fredag d. 23/8, 2019. (Dansk version).

- (x) Vis rigtige svar
- ( ) Skjul rigtige svar

Side 1

Spørgsmålgruppe 1

Der er 18 multiple choice spørgsmål i alt.

Vejledning til opgavesættet:

- Der er kun en korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end en svarmulighed, hvilket giver delvise point, såfremt et rigtigt svar afkrydses.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

Spørgsmål 1

Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Bestem rækkens sum. Svaret er

- [x] $\frac{3}{5}$.
- [ ] $-\frac{3}{5}$.
- [ ] 3 .
- [ ] -3 .
- [ ] $-\frac{2}{5}$.
- [ ] $\frac{5}{3}$.

Spørgsmål 2

Bestem konvergensforholdene for den uendelig række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+3)^2} .$$

Svaret er

- [ ] Rækken er divergent.
- [ ] Rækken er absolut konvergent.
- [x] Rækken er betinget konvergent.

Spørgsmål 3

Den uendelige række

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(n-|\sin(n)|)^2}$$

er

- [x] divergent.
- [ ] absolut konvergent.
- [ ] betinget konvergent.
- [ ] konvergent.

Spørgsmål 4

En uendelig række er givet ved

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{a^n} \,,$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rækken er konvergent for

- [ ] $a \geq e^{-2}$.
- [ ] $|a| \geq e^{-2}$.
- [x] $|a| > e^{-2}$.
- [ ] $|a| > e^{2}$.
- [ ] $a < e^{-2}$.

Spørgsmål 5

For de a hvor rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{a^n}$$

fra spørgsmål 4 er konvergent, er rækkens sum S lig med

- [ ] $S = \dfrac{a}{a - e^{-2}}$.
- [x] $S = \dfrac{e^{-4}}{a(a - e^{-2})}$.
- [ ] $S = \dfrac{1}{ae^{4} - e^{2}}$.
- [ ] $S = \dfrac{e^{-4}}{a(a - e^{2})}$.
- [ ] $S = \dfrac{e^{-2}}{a - e^{-2}}$.

Side 2

Spørgsmålgruppe 2

Spørgsmål 6

Bestem konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n + n^2} x^n \ .$$

Konvergensradius er

- [ ] $\rho = 1/2\ .$
- [ ] $\rho = 1\ .$
- [ ] $\rho = \infty\ .$
- [x] $\rho = 2\ .$
- [ ] $\rho = 0\ .$

Spørgsmål 7

En homogen lineær differentialligning har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3 + i)(\lambda + 3 - i)\ .$$

Den fuldstændige reelle løsning er

- [ ] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 t e^{-3t}\cos(t)\ ,\ \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$
- [ ] $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos(t) + c_3 e^{3t}\sin(t)\ ,\ \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$
- [x] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 e^{-3t}\sin(t)\ ,\ \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$
- [ ] $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 e^{-3t}\sin(t)\ ,\ \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$
- [ ] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}\cos(3t) + c_3 e^{-t}\sin(3t)\ ,\ \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$

Spørgsmål 8

Vi betragter den inhomogene differentialligning

$$y'' + ay' + \omega^2 y = 3\cos(t) + 2\sin(4t)\ ,$$

hvor y er en funktion af $t \in \mathbb{R}$. Den stationære løsning er

- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2 + 1 + ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2 + 16 + i4a}\right)\ .$
- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{t}}{\omega^2 - 1 + ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{4t}}{\omega^2 - 16 + i4a}\right)\ .$
- [ ] $y(t) = 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2 - 1 + ia}\right) + 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2 - 16 + i4a}\right)\ .$
- [x] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2 - 1 + ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2 - 16 + i4a}\right)\ .$
- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2 - 16 + i4a}\right) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2 - 1 + ia}\right)\ .$

Spørgsmål 9

Et differentialligningssystem

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix} ,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Systemet er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

- ☐ $ab > 14$.
- ☐ $b > 8/a$, for $a > 0$.
- ☐ $8 < ab < 15$.
- ☐ $b > \dfrac{15}{a}$, for $a \neq 0$.
- ☑ $ab < 8$.

Spørgsmål 10

Et 3×3 differentialligningssystem

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet er

- ☐ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- ☐ $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- ☑ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- ☐ $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Side 3

Spørgsmålgruppe 3

Spørgsmål 11

Fourierkoefficienterne for en Fourierrække på reel form er

$$a_n = 0\,, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$
$$b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, ...\,.$$

Den tilhørende Fourierrække på kompleks form er

- [x] $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx}\,.$
- [ ] $\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx}\,.$
- [ ] $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}e^{inx}\,.$
- [ ] $\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}e^{inx}\,.$

Spørgsmål 12

Et inhomogent differentialligningssystem

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \quad y(t) = \mathbf{d}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{2}{s^2+s+4}\,, \quad \text{hvor} \quad s \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}\,.$$

Bestem den stationære løsning for påvirkningen

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{n^2+1}e^{int}\,.$$

Svaret er

- [ ] $\displaystyle y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2+in)}{(n^2+1)(n^4+16-7n^2)}e^{int}\,.$
- [x] $\displaystyle y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2-in)}{(n^2+1)((4-n^2)^2+n^2)}e^{int}\,.$
- [ ] $\displaystyle y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2-in)}{(n^2+1)(n^4+16-9n^2)}e^{int}\,.$
- [ ] $\displaystyle y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(n^2-4-in)}{(n^2+1)((n^2-4)^2+n^2)}e^{int}\,.$
- [ ] $\displaystyle y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6}{n^2+1}\frac{1}{s^2+s+4}e^{st}\,.$

Spørgsmål 13

En uendelig række R med varierende led er givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(nt) - \sin(2nt)}{n^2+1} .$$

Hvilket af følgende udsagn er korrekt?

- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$, R er uniform konvergent og sumfunktionen er kontinuert.
- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+1}$, R er punktvis konvergent men ikke uniform konvergent.
- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, R er punktvis konvergent og sumfunktionen har diskontinuitetspunkter.
- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ og R er divergent.
- [x] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, R er uniform konvergent og sumfunktionen er kontinuert.

Spørgsmål 14

En lige og 2π-periodisk funktion f er i intervallet $[0;\pi]$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4x) & \text{for} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{4} , \\ 0 & \text{for} \quad \frac{\pi}{4} \le x \le \pi . \end{cases}$$

Bestem Fourierkoefficienterne på reel form i Fourierrækken for f . Svaret er

- [ ] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi)-1)}{\pi(n^2-16)}$ for $n = 1,2,3,5,6\ldots$, $a_4 = 0$ og $b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\ldots$.
- [ ] $a_n = 0$ for $n = 0,1,2,3,4\ldots$ og $b_n = \frac{-8\sin(n\pi/4)}{\pi(n^2-16)}$ for $n = 1,2,3,4\ldots$.
- [x] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi/4)+1)}{\pi(16-n^2)}$ for $n = 1,2,3,5,6\ldots$, $a_4 = 0$ og $b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\ldots$.
- [ ] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi/4)+1)}{\pi(16-n^2)}$ for $n = 1,2,3,4\ldots$ og $b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\ldots$.

Spørgsmål 15

En differentialligning med variable koefficienter er givet ved

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)y = 0 \ ,$$

hvor $x \in \mathbb{R}$. Vi betragter en potensrækkeløsning til differentialligningen på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Bestem en rekursionsformel for a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Svaret er

- [ ] $a_{n+2} = \dfrac{-2a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+1)}$ for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,
  hvor a_0 og a_1 er arbitrære konstanter.

- [ ] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ for $n = 1, 2, 3, 4 \dots$,
  med $a_0 = 0$ og hvor a_1 er en arbitrær konstant.

- [x] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+1)n}$ for $n = 1, 2, 3, \dots$,
  med $a_0 = 0$ og hvor a_1 er en arbitrær konstant.

- [ ] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+1)n}$ for $n = 1, 2, 3, \dots$,
  hvor a_0 er en arbitrær konstant og
  $a_1 = -(3/2)a_0$.

Side 4

Spørgsmålgruppe 4

Spørgsmål 16

Vi betragter den konvergente uendelige række med variable led

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^3+n}$$

med sumfunktion S og hvor $t \in \mathbb{R}$. Vi ønsker at bestemme en afsnitssum S_N, der approksimerer S med en fejl mindre end eller lig med $\varepsilon = 10^{-2}$.
Bestem det mindste N_0 blandt tallene

$$\{4, 9, 21, 99, 999\}$$

der fører til at

$$|S(t) - S_N(t)| \leq 10^{-2}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og for alle $N \geq N_0$. N_0 er

- [ ] $N_0 = 4$.
- [x] $N_0 = 9$.
- [ ] $N_0 = 21$.
- [ ] $N_0 = 99$.
- [ ] $N_0 = 999$.

Spørgsmål 17

En lineær 6. ordens differentialligning for $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 25)^3 .$$

Den fuldstændige reelle løsning er

- [ ] $y(t) = c_1e^{-5t} + c_2te^{-5t} + c_3t^2e^{-5t} + c_4e^{5t} + c_5te^{5t} + c_6t^2e^{5t}$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.
- [ ] $y(t) = c_1e^{-t} \cos(5t) + c_2te^{-t} \cos(5t) + c_3t^2e^{-t} \cos(5t) + c_4e^{-t} \sin(5t) + c_5te^{-t} \sin(5t) + c_6t^2e^{-t} \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1e^{-5t} \cos(t) + c_2te^{-5t} \cos(t) + c_3t^2e^{-5t} \cos(t) + c_4e^{-5t} \sin(t) + c_5te^{-5t} \sin(t) + c_6t^2e^{-5t} \sin(t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2t \cos(5t) + c_3 \sin(5t) + c_4t \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- [x] $y(t) = c_1 \sin(5t) + c_2t \sin(5t) + c_3t^2 \sin(5t) + c_4 \cos(5t) + c_5t \cos(5t) + c_6t^2 \cos(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Spørgsmål 18

En inhomogen differentialligning med en variabel koefficient er givet ved

$$t\frac{dy}{dt} + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1-(-1)^{n+1})\frac{1}{n!}t^{n+1} .$$

Vi søger en potensrækkeløsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n .$$

Bestem a_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$. Den 4. afsnitssum

$$S_4(t) = \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$$

for potensrækken for y er

- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{30}t^4 .$
- [x] $S_4(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^3 .$
- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t^3 .$
- [ ] $S_4(t) = a_0 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^3$, $\text{hvor } a_0 \text{ er en arbitrær konstant.}$
- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}t^3 .$
- [ ] $S_4(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{30}t^4 .$