Skriftlig 2-timers prøve i Matematik 2, den 08.12.2011

Navn:

Studienummer:

Svar på opgave 1:

Spørgsmål (i)

a) ☐
b) ☐
c) ☒
d) ☐

Spørgsmål (ii)

a) ☐
b) ☐
c) ☒
d) ☐

Spørgsmål (iii)

a) ☐
b) ☒
c) ☐
d) ☐

Spørgsmål (iv)

a) ☒
b) ☐
c) ☐
d) ☐

Spørgsmål (v)

a) ☐
b) ☒
c) ☐
d) ☐

Husk at aflevere dette ark sammen med din besvarelse!

Eksamen 8. december 2011

Opgave 1 Multiple choice opgave.

(i) $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Egenværdierne findes af

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$

$\lambda^2 - 3^2 = 0 \iff \boxed{\lambda = \pm 3}$

Svar: c

(ii) Systemet er ustabilt fordi en af egenværdierne er positiv.

Svar: c

(iii) Da $f(x)$ er kontinuert og stykkevis differentiabel er Fourierrækken for $f(x)$ uniform konvergent ifølge korollar 6.12.

Svar: b

(iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n^2} \qquad (1)$$

Vi har $\left| \frac{\cos(2n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent er rækken (1)

absolut konvergent

$\boxed{\text{svar: a}}$

(v)

En 2. ordens differentialligning har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{2s^2 - s + 2} \qquad 2s^2 - s + 2 \neq 0$$

Det stationære svar $y(t)$ på påvirkningen $u(t) = e^{3t}$ er

$$y(t) = H(3)\,e^{3t} = \frac{1}{2 \cdot 9 - 3 + 2} e^{3t} = \frac{1}{17} e^{3t}$$

$\boxed{\text{svar: b}}$

Opgave 2

Ulineært system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1-2)x_2 & = f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 \sin(3-x_2) & = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

(a) Ved indsættelse ses at $(x_1,x_2) = (2,3)$ er et stationært punkt.

$$f_1(2,3) = -(2-2)3 = 0$$
$$f_2(2,3) = 2\sin(3-3) = 0$$

(b) Funktional matrice

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 & -(x_1-2) \\ \sin(3-x_2) & -x_1\cos(3-x_2) \end{bmatrix}$$

I det stationære punkt $(2,3)$ er

$$\underline{\underline{D}}\,\underline{f} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

(c) Da matricen $\underline{\underline{A}}$ er diagonal aflæses egenværdierne direkte som elementerne i diagonalen. Dvs.

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = -2$$

Da alle egenværdier er negative er det stationære punkt $(2,3)$ asymptotisk stabilt

Opgave 3

$$x\,y'' + (2+x)\,y' + y = 0 \qquad y = y(x) \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Potensrække løsning: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Indsættelse i (2) giver

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\,c_n + (n+1)(n+2)\,c_{n+1} \right] x^n = 0$$

(i) Ifølge identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.19) gælder

$$(n+1)\,c_n + (n+1)(n+2)\,c_{n+1} = 0 \qquad \text{for } n = 0,1,2,\dots$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{c_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\,c_n} \qquad \text{for } n = 0,1,2,3,\dots$$

Opgave 3

(ii) Vi benytter kvotientkriteriet til at afgøre konvergens samt finde konvergens-radius

$$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x| = \frac{\frac{1}{n+2}c_n}{c_n}|x| =$$

$$\frac{1}{n+2}|x| \to 0 \quad \text{for } n \to \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Heraf følger at konvergensradius $\boxed{\rho = \infty}$

Opgave 4

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\cos(nx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Vi bestemmer en majorantrække ved følgende vurdering

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4} = k_n \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ og } \forall n \in \mathbb{N}$$

Majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ er konvergent ifølge eksempel 4.21 side 86 i lærebogen

Opg. 4

(b) $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\cos(nx)\,dx$$

1) På intervallet $x \in [0, \pi]$ er ledene $\frac{\cos(nx)}{n^4}$ kontinuerte for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}$ har en konvergent majorant række

Da disse 2 forudsætninger er opfyldte gælder ifølge sætning 5.33, p113, at

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^4}\,dx =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(nx)}{n^5} \right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \underline{\underline{0}}$$

(c)

1) Vi bemærker at de enkelte led

$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^4}$ er differentiable med kontinuerte afledede. $f_n'(x) = \frac{-\sin(nx)}{n^3}$

(c)

2) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4}$ er konvergent,

dvs veldefineret, fordi den har en majorant række.

3) Vi betragter nu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n^3}$$

Vi foretager vurderingen

$$\left|\frac{-\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ er en konvergent majorant række for $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ har vi ifølge sætning 5.34 om ledvis differentiation at

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(nx)}{n^3}}$$

$f(x)$ er differentiabel

(d) Vi bestemmer N således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vi har vurderingen med brug af integralkriteriet og korollar 4.22, side 87

$$|f(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4} \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx + \frac{1}{(N+1)^4} =$$

$$\left[-\frac{1}{3} x^{-3} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^4} = \frac{1}{3(N+1)^3} + \frac{1}{(N+1)^4} =$$

$$\frac{1}{(N+1)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{N+1}\right) \leq \frac{1}{(N+1)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(N+1)^3}\,\frac{5}{6} \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow \quad (N+1)^3 \geq \frac{600}{5} \quad \Leftrightarrow \quad N+1 \geq 4,93 \quad \Leftrightarrow$$

$$N \geq 3.93$$

Vælg $N \geq 4$

Man kan også checke $N = 3$

$$\frac{1}{(N+1)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^3}\left(\frac{4+3}{3 \cdot 4}\right) =$$

$$\frac{7}{3 \cdot 4^4} = 0.0091 \leq 0.01$$

ok. Vi kan vælge $N \geq 3$

$N=2$: $\frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3^4}=0.0247$

Ikke ok med $N \geq 2$.