Løsning til eksamenssæt i matematik 2, kursus 01037, august 2018

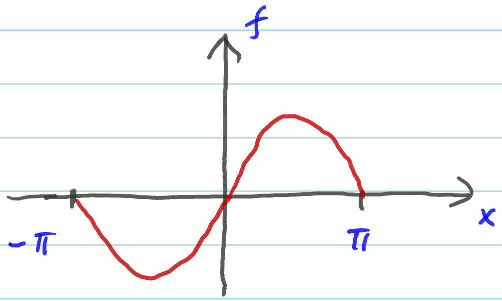
Del B

Opgave 1

En 2π-periodisk og ulige funktion f er i intervallet $[0;\pi]$ givet ved

$$f(x) = -x^3 + \pi^2 x$$

1(i) Skitse af grafen for f



$$f'(x) = -3x^2 + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi^3}{\sqrt{3}} = +\frac{2\pi^3}{3\sqrt{3}}$$

1(ii) Fourierrækken for f er

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

Da f er ulige følger det af sætning 6.3 at

$$a_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

1(ii) Ifølge sætning 6.3 er

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 x - x^3)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{-12}{n^3}\cos(\pi n) = \frac{-12}{n^3}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Integralet er udregnet med brug af Wolfram Alpha.

Fourierrækken er:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}\sin(nx)$$

1(iii)

Fra definitionen af f ses at denne funktion er kontinuert i $\mathbb{R}$. Desuden er f stykkevis differentiabel og 2π-periodisk. Ifølge korollar 6.13 konvergerer Fourierrækken uniformt og vi har

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}\sin(nx)$$

Opgave 2 En Fourierrække er givet ved

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$$

2(i) En majorantrække bestemmes som følger

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^3} = k_n \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ og } n = 1, 2, \ldots$$

En majorantrække er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Ifølge eksempel 4.34 med $\alpha = 3 > 1$ er denne majorantrække konvergent. Alle funktioner $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ er kontinuerter fordi $\sin(nx)$ er kontinuert. Ifølge sætning 5.33 er sumfunktionen kontinuert og den uendelig række er uniform konvergent.

2(ii) Vi bestemmer nu en N'te afsnitssum S_N som approksimerer den uendelige række med en fejl $\leq \varepsilon$.

2 (ii) Vi betragter

$$|S(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| =$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

I følge ulighed (4.32) har vi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx + \frac{1}{(N+1)^3} =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) \leq$$

$$\frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(N+1)^2} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N+1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \Leftrightarrow$$

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

Med $\varepsilon = 10^{-4}$ får vi $N = 99$

Opgave 3 Vi betragter differentialligningssystemet

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne og de tilhørende egenvektorer er

$$\lambda_1 = 0 \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = -3 \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3(i) Den fuldstændige løsning er ifølge sætning (2.6)

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

3(ii) Da ingen egenværdi har realdel større end 0 ($\lambda_i \leq 0$ for $i = 1, 2, 3$) er systemet stabilt ifølge sætning 2.34, men ikke asymptotisk stabilt fordi $\lambda_1 = 0$.

3(iii) Det homogene system $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t)$, hvor påvirkningen u er begrenset, er ikke BIBO stabilt fordi det homogene system ikke er asymptotisk stabilt. Jvf. sætning 2.47.