Løsninger til eksamensopgaverne i 01035 Matematik 2, 9/12 2013

Opg. 1)

(i)

$$y''' - 8y = e^{2t} \qquad (1)$$

$y(t) = c e^{2t}$ indsættes i (1) $\Rightarrow$

$2^3 c e^{2t} - 8 c e^{2t} = 0 = e^{2t}$ udsagnet er falsk

$\boxed{\text{svaret er a}}$

(ii)

$$H(s) = \frac{1}{s-1} \qquad s \neq 1$$

Påvirkning $u(t) = e^{3t}$ $\qquad s = 3$

Det stationære svar er

$$y(t) = H(3)e^{3t} = \frac{1}{3-1}e^{3t} = \frac{1}{2}e^{3t}$$

$\boxed{\text{svaret er b}}$

(iii) Påvirkning $u(t) = \cos(3t) = \mathrm{Re}(e^{i3t})$

$s = i3$

Det stationære svar er

$$y(t) = \mathrm{Re}(H(i3)e^{i3t})$$

Opg. 1

(iii) $H(i3) = \frac{1}{i3-1} = \frac{-1-i3}{1^2+3^2} =$

$\frac{-1-i3}{10}$

$y(t) = Re\left[\frac{-1-i3}{10}\left(\cos(3t) + i\sin(3t)\right)\right] =$

$-\frac{1}{10}\cos(3t) + \frac{3}{10}\sin(3t)$

$\boxed{\text{svaret er b}}$

(iv) Talfølge: $x_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$ $n \in \mathbb{N}$

$\frac{\sin(n)}{n^2} \to 0$ for $n \to \infty$

$\boxed{\text{svaret er c}}$

(v) $R_1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^4}$ $a_n = \frac{\cos(n)}{n^4}$

Indfør $b_n = \frac{1}{n^4}$ samt $R_2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Ifølge eksempel 4.34 er R_2 konvergent. Da

$\left|\frac{\cos(n)}{n^4}\right| \leq \left|\frac{1}{n^4}\right|$ er R_1 absolut konvergent

ifølge sammenligningskriteriet

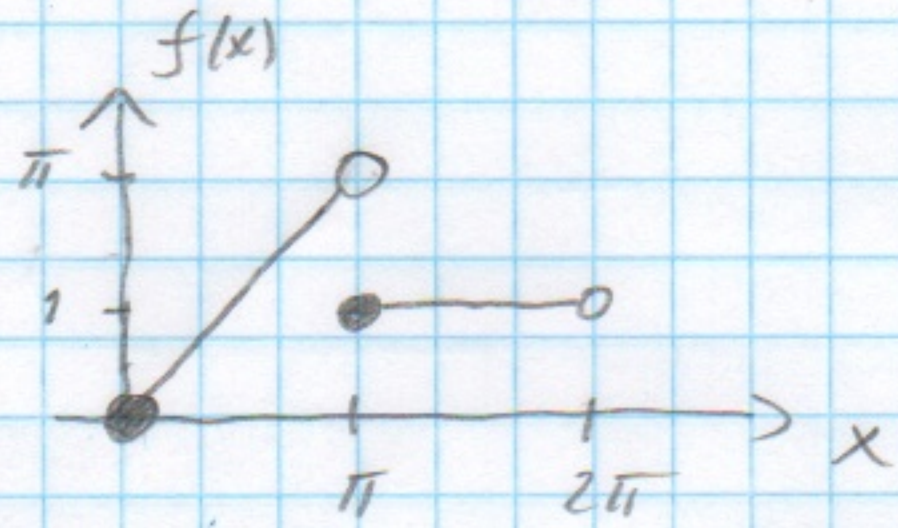
$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg. 1

(vi) f er 2π-periodisk og

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0;\pi[\\ 1 & \text{for } x \in [\pi;2\pi[\end{cases}$$

Skitse



Ifølge Fouriers sætning er Fourierrækken for f punktvis konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$, men ikke uniform konvergent p.gr.a diskontinuiteter i $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg. 2

(i) $$y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 0$$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 16\lambda - 16$$

Fra Maple eller andet matematik program udregnes rødderne

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 2 + i2 \qquad \lambda_3 = 2 - i2$$

Den fuldstændige komplekse løsning er (sætn. 1.6)

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{(2+i2)t} + c_3 e^{(2-i2)t}}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

(ii) Den fuldstændige reelle løsning er (sætn. 1.9)

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}\cos(2t) + c_3 e^{2t}\sin(2t)}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Opg. 3

$$R: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}$$

(i) Indfør $a_n = \frac{2n+2}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}$

Kvotientkriteriet benyttes og vi udregner

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{2(n+1)+2}{(2(n+1)+1)!} (-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{\frac{2n+2}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}} \right| =$$

$$\left| \frac{2n+4}{2n+2} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} x^2 \right| =$$

$$\frac{2+4/n}{2+2/n} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} x^2 \to 0 \quad \text{for } n \to \infty$$
$$\forall x \in \mathbb{R}$$

Heraf fås at konvergensradius er $\boxed{\rho = \infty}$

(ii) Fra sætn. 5.10 haves

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Vi har $R: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1+1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1} =$

Opg. 3

(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!}(-1)^n x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$x\cos(x) + \sin(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Opg. 4

(i) Vi betragter $\int_1^t \frac{1}{x^5}\,dx =$

$$\left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right]_1^t = -\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} \quad \text{for} \quad t \to \infty$$

Ifølge definition 4.1 er det uegentlige integrale konvergent og

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5}\,dx = \frac{1}{4}$$

(ii) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ er konvergent ifølge eksempel 4.34

Den N'te afsnitssum er $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^5}$ og vi bestemmer N således at

$$|S - S_N| \leq \varepsilon = 0{,}05$$

Opg. 4)

Ifølge ulighed (4.33) side 107

(ii) har vi for $N = 1, 2, 3, \dots$

$$|s - s_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \le$$

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^5} + \frac{1}{(N+1)^5} = \left[-\frac{1}{4} x^{-4} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^5} =$$

$$\frac{1}{4(N+1)^4} + \frac{1}{(N+1)^5} = \frac{1}{(N+1)^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{N+1} \right) \le$$

$$\frac{1}{(N+1)^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \frac{1}{(N+1)^4} \le \varepsilon \iff$$

$$\frac{1}{(N+1)^4} \le \frac{4\varepsilon}{3} \iff (N+1) \ge \sqrt[4]{\frac{3}{4\varepsilon}} = 1,97$$

$$\boxed{\text{Vælg } N \ge 1}$$

Opg. 5)

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1} e^{int}$$

u er 2π-periodisk, stykkevis differentiabel og kontinuert.

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x} + \underline{b}\, u \\ y = \underline{d}^T \underline{x} \end{cases}$$

er asymptotisk stabilt.

Opgave 4(ii) fra matematik 2 eksamen, december, 2013, kan løses på flere forskellige måder. I mine løsninger har jeg brugt metode I, men fik ikke angivet den tilnærmede værdi. Den er:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n^5} = 1$$

Metode II fra lærebogen side 102 kan også bruges og giver en mere nøjagtig værdi for tilnærmelsen. Vælg N således at

$$\frac{1}{(N+1)^5} \leq \varepsilon = 0,05 \Rightarrow (N+1)^5 \geq \frac{1}{0,05} \Rightarrow$$

$$N+1 \geq 1,82 \Rightarrow N \geq 0,82$$

Vælg $N \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ tilnærmes nu med

$$\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n^5} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^5} = 1 + \left[-\frac{1}{4} x^{-4}\right]_2^{\infty} =$$

$$1 + \frac{1}{2^6} = 1 + \frac{1}{64} = \frac{65}{64} = 1,0156$$

Mads

Opg. 5

Overførings funktion: $H(s) = \frac{1}{s+1}$, $s \neq -1$

(i) Fourierrækken for $y(t)$ er ifølge Fourierrække metoden sætn. 7.8 ligning (7.22)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(in) e^{int}$$

hvor $c_n = \frac{1}{n^2+1}$ og $H(in) = \frac{1}{1+in}$

Dvs

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \frac{1}{1+in} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1-in}{(n^2+1)^2} e^{int}}$$

(ii) En majorantrække for Fourierrækken for $y(t)$ er bestemt ved for $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{1}{n^2+1} \frac{1}{1+in} \right| = \frac{1}{n^2+1} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{(1+n^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{(n^2)^{3/2}} = \frac{1}{|n|^3} = k_n$$

For $n = 0$ har vi $\frac{1}{0^2+1} \frac{1}{1+i0} = 1 = k_0$

En majorant række er

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|n|^3} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Ifølge eksempel 4.34 er denne række konvergent

9

Opg. 5)

(ii) Heraf fås med benyttelse af sætn. (5.33) at Fourierrækken for y konvergerer uniformt

(iii) Bestem N således at

$$|y(t) - S_N(t)| \leq \varepsilon = 0{,}1$$

$$\left| y(t) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{1-in}{(n^2+1)^2} e^{int} \right| = \left| \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1-in}{(n^2+1)^2} e^{int} \right| \leq$$

$$\sum_{|n| \geq N+1}^{\infty} \frac{1}{|n|^3} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$$

Ifølge ulighed (4.33) side 101 har vi nu for $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{2}{x^3}\,dx + \frac{2}{(N+1)^3} =$$

$$\left[-x^{-2} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{2}{(N+1)^3} = \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{2}{(N+1)^3} =$$

$$\frac{1}{(N+1)^2}\left(1 + \frac{2}{N+1}\right) \leq \frac{2}{(N+1)^2} \leq \varepsilon \iff$$

$$\frac{(N+1)^2}{2} \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff N+1 \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \iff N \geq \sqrt{20} - 1$$

$N \geq 3{,}47$ $\boxed{\text{Valg } N \geq 4}$