DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timers prøve, 18. maj 2015
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30% , Opgave 2: 30%, Opgave 3: 10%, Opgave 4: 10% og Opgave 5: 20%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgaverne 2, 3, 4 og 5 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgaverne 2, 3, 4 og 5 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2,5 %.

Opgave 1

(i) Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$ er:

a) Divergent.

b) Absolut konvergent.

c) Betinget konvergent.

d) ved ikke.

(ii) Summen af $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{n+1}$ er lig med:

a) $\frac{1}{3-x}$ for $|x| < 1$.

b) $\frac{3x}{3-x}$ for $|x| < 3$.

c) $\frac{9}{3-x}$ for $|x| < 3$.

d) ved ikke.

(iii) Bestem konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-n} x^{2n+1}$, hvor $\beta \in \mathbb{R}$ og $\beta > 0$. Svaret er:

a) $\rho = \beta$.

b) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

c) $\rho = \sqrt{\beta}$.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!

(iv) Det karakteristiske polynomium for differentialligningen $y^{(5)}(t) + 2y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ er $P(\lambda) = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2(\lambda + 2)$. Den fuldstændige løsning er:

a) $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 t \cos(t) + c_3 \sin(t) + c_4 t \sin(t) + c_5 e^{-2t}\ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}\quad.$

b) $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \cos^2(t) + c_4 \sin^2(t) + c_5 e^{-2t}\ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}\quad.$

c) $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 t \cos(t) + c_3 \sin(t) + c_4 t \sin(t) + c_5 e^{2t}\ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}\quad.$

d) ved ikke.

(v) Vi betragter et homogent lineært differentialligningssystem med det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = (\lambda - 2i)^2(\lambda + 2i)^2$. Det oplyses at den geometriske multiplicitet er $q = 1$ for alle egenværdier for systemmatricen. Systemet er:

a) Ustabilt.

b) Stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

c) Asymptotisk stabilt.

d) ved ikke.

(vi) Funktionen $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er periodisk med perioden 3π, stykkevis differentiabel og $f \in L^2(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Koefficienterne i Fourierrækken for f kan beregnes af:

a) $a_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\cos(nx)dx$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$ og $b_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\sin(nx)dx$, for $n = 1, 2, \ldots$.

b) $a_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\cos(n\frac{2}{3}x)dx$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$ og $b_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\sin(n\frac{2}{3}x)dx$, for $n = 1, 2, \ldots$.

c) $a_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\cos(n3x)dx$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$ og $b_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\sin(n3x)dx$, for $n = 1, 2, \ldots$.

d) ved ikke.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Vi betragter det inhomogene differentialligningssystem givet ved

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\sin(2t)\ , \quad \text{hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{og } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \tag{1}$$

$$y = \mathbf{d}^T\mathbf{x}\ , \quad \text{hvor } \mathbf{d} = (1,0,0)^T\ . \tag{2}$$

Den afhængige variabel $\mathbf{x}(t)$ er en tredimensional vektorfunktion af tiden $t \in \mathbb{R}$ og y=y(t) er en reel skalar. For matricen $\mathbf{A}$ er 2 af egenværdierne med tilhørende egenvektorer bestemt med brug af Maple

$$\lambda_1 = -1\ , \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \text{og} \quad \lambda_2 = -1 + i\ , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1 - i \\ 2 \end{pmatrix}\ . \tag{3}$$

(i) Find den sidste egenværdi og en tilhørende egenvektor ud fra oplysningerne i (3).

(ii) Bestem den fuldstændige reelle løsning $\mathbf{x}$ til det homogene system $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(iii) For det inhomogene system kan overføringsfunktionen bestemmes ved hjælp af Maple og man finder

$$H(s) = -\mathbf{d}^T(\mathbf{A} - s\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}\ . \tag{4}$$

Find det stationære svar $y(t)$ for det inhomogene system.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 3

Vi betragter differentialligningen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ , \tag{5}$$

hvor $x \in \mathbb{R}$. Antag, at løsningen y kan skrives på potensrækkeformen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og bestem ved indsættelse i ligning (5) en rekursionsformel for c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Opgave 4

Koefficienterne i en potensrække $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er givet ved rekursionsformlen

$$(4n+1)c_{n+1} = nc_n \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ . \tag{6}$$

Bestem konvergensradius ρ for potensrækken.

Opgave 5

Fourierrækken for en 2π-periodisk funktion f er givet ved

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx) \ , \tag{7}$$

hvor $x \in \mathbb{R}$.

(i) Vis at Fourierrækken er uniform konvergent.

(ii) Den N'te afsnitssum for Fourierrækken er

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx) \ .$$

Bestem N således at S_N approksimerer f med en fejl mindre end eller lig med $\varepsilon = 0.01$.

Opgavesættet slut.