01035 MAT-eksamen, forår 2022

MC-Spørgsmål 1:

Det stationære svar hørende til

$u(t) = e^{it}$ er

$$H(i)e^{it} = \frac{1}{i+2} e^{it} = \frac{2-i}{5}(\cos t + i\sin t)$$

$$= \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + i\left(\frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t\right).$$

Så for $u(t) = \cos t$ fås løsningen

$$\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t,$$

og for $u(t) = \sin t$ løsningen

$$\frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t.$$

For $u(t) = \cos t + \sin t$ fås løsningen

$$y(t) = \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

$$= \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t.$$

Svaret er $\underline{\underline{D}}$

MC-Spørgsmål 2:

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = (a-\lambda)(1-\lambda) - (a-2)$$
$$= \lambda^2 + (-a-1)\lambda + 2.$$

Så systemet er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

$$\begin{cases} -a-1 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases},$$ dvs. hvis og

kun hvis $a < -1$. Svaret er $\underline{\underline{B}}$.

For $a = 1$ fås $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$,

med rødderne $\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$.

Systemet er ustabilt, svaret er 2.

Det totale svar er $\underline{\underline{B2}}$

MC- Spørgsmål 3:

$$H(s) = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-s & 0 \\ 3 & 2-s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{(1-s)(2-s)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-s & 0 \\ -3 & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(1-s)(2-s)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cdot(2-s) \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-4(2-s)}{(1-s)(2-s)} = \frac{4}{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}.$$

Svaret er $\underline{\underline{F2}}$

MC- Spørgsmål 4:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+3)^2}}{\dfrac{3^n x^n}{(n+2)^2}}\right| = 3|x|\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2$$

$$\longrightarrow 3|x| \quad \text{for } n \to \infty.$$

Konvergensradius er $\rho = \frac{1}{3}$,

Svaret er H.

For $x = -\rho = -\frac{1}{3}$ fås række

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n+2)^2},$$ som er konvergent.

Svaret er I.

Det totale svar er $\underline{\underline{\text{HI}}}$.

MC-Spørgsmål 5:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2} x^n$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x + \frac{9}{16}x^2 + \cdots$$

Så

$f(0) = \frac{1}{4}$, svaret er J

Og

$f'(0) = \frac{1}{3}$, svaret er 2.

Det totale svar er $\underline{\underline{J2}}$

MC- Spørgsmål 6:

Svaret er P, funktionen er hverken lige eller ulige.

Funktionen er positiv, så

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx > 0.$$

Svaret er 1,

Det totale svar er $\underline{\underline{P1}}$

MC-Spørgsmål 7:

For $x = \pi$ konvergerer

Fourierrækken mod $\frac{3+2}{2} = 2\frac{1}{2}$,

Svaret er Q.

For $x = 6\pi$ konvergerer

Fourierrækken mod det samme

som for $x = 0$, dvs. 1.

Svaret er 1.

Det totale svar er Q 1

MC-Spørgsmål 8:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{4}$$

for $n \to \infty$.

Rækken er absolut konvergent,

svaret er U.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{4^n} x^n$, $x \in [-1,1]$

har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$,

som er konvergent.

Svaret er 2.

Det totale svar er hermed

U2

Opgave 2:

(i) Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

med rødderne $\frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$. (dobbeltrod)

Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er dermed

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) Nej, for te^{2t} er en løsning til den homogene ligning.

(iii) Med

$$y(t) = c\,t^2 e^{2t}$$

er

$$y'(t) = c\left(2t\,e^{2t} + 2t^2 e^{2t}\right)$$

og

$$y''(t) = c\left(2e^{2t} + 4t\,e^{2t} + 4t\,e^{2t} + 4t^2 e^{2t}\right)$$

$$= c\left(2e^{2t} + 8t\,e^{2t} + 4t^2 e^{2t}\right)$$

Ved indsættelse fås

ligningen

$$C\left[2e^{2t} + 8t\,e^{2t} + 4t^2e^{2t} - 4\left(e^{2t}\,2t + 2t^2e^{2t}\right) + 4t^2e^{2t}\right] = e^{2t},$$

dvs.

$$C\left[2 + t\,(8-8) + t^2\,(4-8+4)\right] = 1,$$

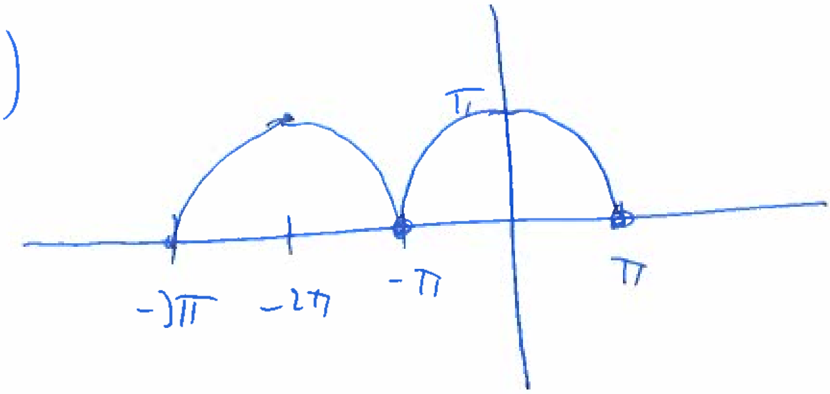
dvs. $2C = 1$, med lösningen $C = \frac{1}{2}$.

Så (1) har lösningen

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t}}}$$

Opgave 3

(i)



(ii) Fra eks. 6.8:

Funktionen t^2 har Fourier koefficienterne

$$a_0' = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n' = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n' = 0.$$

Så funktionen f har Fourierkoefficienterne

$$\begin{cases} a_0 = 2\pi - \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^2}{3} = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \\ a_n = -\frac{1}{\pi}4\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

(iii) Ja, funktionen er 2π- periodisk, stykkevis differentiabel, og kontinuert

(iv)

$$|f(x) - S_N(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{4}{\pi} \frac{1}{N}.$$

Så $|f(x) - S_N(x)| \le 10^{-5}$

er opfyldt når

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{N} \le 10^{-5},$$

dvs. når $N \ge \frac{400.000}{\pi}$

dvs. for $N \ge 127.324$

Opgave 4: Vi benytter Sætn. 1.31. Vi har

$$a_1(t) = -\frac{1}{t},$$

så $A_1(t) = \int a_1(t)\,dt = -\ln t$

og

$$\Omega(t) = e^{A_1(t)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}.$$

Dermed er

$$\int y_1(t)\,\Omega(t)\,u(t)\,dt = \int \frac{1}{2}t^2 \frac{1}{t} t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3 = \frac{1}{8}t^4.$$

Sætn. 1.31(iii) giver nu løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 \int \frac{1}{\frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{t}} \frac{1}{8}t^4\,dt = \frac{1}{4}t^2 \int t$$

$$= \frac{1}{8}t^4$$