Løsning til Mat eksamen E18 Del B

Opgave 1:
(i) Vi har

$$\left|\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| \leq \frac{2|\cos(n^2x)|+|\sin(nx^2)|}{1+n^2} \leq \frac{3}{1+n^2} \leq \frac{3}{n^2}\,.$$

Så hvis $a \geq 3$ har vi en majorantrække.
(ii) Vi har

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{1+n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{n^2} \leq \int_N^{\infty}\frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{N}\,.$$

Så vi ønsker

$$\frac{a}{N} < 0.01 \iff N > 100a\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > 300$. Hvis vi bruger bogens vurdering, får vi

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < 0.01 \iff 100a(N+2) < (N+1)^2 \iff N > 50a - 1 + 10\sqrt{25a^2+a}\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > 149 + 10\sqrt{228} \approx 299.99$, dvs., $N \geq 300$. Alternativt

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < \frac{2a}{N+1} < 0.01 \iff N+1 > 200a \iff N > 200a - 1\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N \geq 600$. Eller lidt bedre, idet $N \geq 1$:

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < \frac{a}{N+1} + \frac{a}{2(N+1)} < \frac{3a}{2(N+1)} < 0.01 \iff N > 150a - 1\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N \geq 450$. Endelig kan vi bruge vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{1+n^2} \leq \int_N^{\infty}\frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan N\right)\,,$$

og dermed fås vurderingen

$$a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan N\right) < 0.01 \iff a\arctan N > a\frac{\pi}{2} - 0.01 \iff N > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{0.01}{a}\right)\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{0.01}{3}\right) \approx 299.99$, dvs., $N \geq 300$. Hvis bogens vurdering bruges, fås

$$a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(N+1) + \frac{1}{1+(N+1)^2}\right) < 0.01\,.$$

Hvia $a = 3$ ses ved plot af venstresiden $-$ højresiden, at $N \geq 300$. Det kan verificeres ved indsættelse:

$$3\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(301) + \frac{1}{1+(301)^2}\right) \approx 0.009999 < 0.01\,.$$

Opgave 2:
(i) Vi har

$$\det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & a & 0 \\ 0 & 1+a-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -2-a-\lambda \end{pmatrix} = (1+a-\lambda)^2(-2-a-\lambda)\,.$$

Så egenværdierne er $1+a$ (dobbelt) og $-2-a$. Systemet er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis de er negative, vi skal altså have, at $1+a<0 \iff a<-1$ og $-2-a<0 \iff a>-2$, dvs. $a\in]-2,-1[$.
(ii) Hvis $a=-1$, har vi dobbeltroden 0 og systemmatricen er

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

som har rang 2. Den geometriske multiplicitet af 0 er altså kun 1, og systemet er dermed ustabilt.
(iii) hvis $a=-2$, har vi dobbeltroden -1 og den simple rod 0, systemet er dermed stabilt.
(iv) Hvis $a=0$, har vi systemmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\,,$$

med den dobbelte egenværdi 1 og den simple egenværdi -2 Da -1 ikke er en egenværdi, gætter vi på en løsning af formen $\mathbf{x}=\mathbf{v}e^{-t}$. Ved indsættelse fås ligningen

$$-\mathbf{v}e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v}e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

som har løsningen $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$, dvs. differentialligningssystemet har løsningen $\mathbf{x}=e^{-t}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$.

Opgave 3:
(i) Da f er lige, har vi $b_n=0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^a 1\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\,, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^a = \frac{2}{\pi}\frac{\sin an}{n}\,, \quad n\in\mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

og

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin an}{n}\cos nx\,.$$

(ii) Da $(f(a-)+f(a^+))/2 = (1+0)/2 = 1/2$ skal vi have $b=1/2$. Da f ikke er kontinuert, er konvergensen ikke uniform.

Opgave 4:
(i) vi har,

$$x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-1}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,,$$

så

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} (n a_n - a_{n-3}) x^{n-1}\,.$$

Vi får dermed ligningerne

$$a_1 = 0\,, \quad a_2 = 0\,, \quad \text{og} \quad n a_n - a_{n-3} = 0 \iff a_n = \frac{a_{n-3}}{n}\,, \quad n \geq 3\,.$$

Alternative omskrivninger er

$$x^2 y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\,, \qquad x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n\,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) a_{n+3} x^{n+2}\,,$$

som leder til rekursionsformlerne

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}\,, \quad n \geq 2\,, \qquad a_{n+3} = \frac{a_n}{n+3}\,, \quad n \geq 0\,.$$

(ii) Vi har

$$\left| \frac{a_{3(m+1)} x^{3(m+1)}}{a_{3m} x^{3m}} \right| = \frac{1/(m+1)!\,(1/3)^{m+1} |a_0| |x|^3}{1/m!\,(1/3)^m |a_0|} = \frac{|x|^3}{(m+1)3} \to 0\,, \quad \text{for } m \to \infty\,.$$

Kvotientkriteriet giver altså, at rækken konvergerer for alle x og dermed er konvergensradius $\rho = \infty$.