MAT 2 01037

DAG 1 31/7-23

* LEARN OG INSIDE
* HJEMMEOPG. OG LEKTIECAFE
* MÖBIUS, MC. OG EKSAMEN

DAGENS EMNE:

n'TE ORDENS LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER:

$$(D_n y)(t) := a_0 y^{(n)}(t) + \text{———} + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) \overset{(*)}{=} u(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} = y^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

* $y(t)$ UBEKENDT FUNKTION:

$$y : \underset{\in}{\mathbb{R}} \longrightarrow \underset{\in}{\mathbb{R}/\mathbb{C}}$$
$$t \longmapsto y(t)$$

* $u(t)$ KENDT FUNKTION

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$$
$$t \longmapsto u(t)$$

u ER EN KONTINUERT FUNKTION

* $a_0, \dots, a_n$ KENDTE KOEFFICIENTER (2)

KONSTANTE OG REELLE I DAG.

$a_0 \neq 0$.

EKSEMPEL

$$y''' + 2y'' + 2y' = t$$

TREDJE ORDENS $n = 3$.

$a_0 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 0.$

$u(t) = t.$

PROBLEM:

BESTEM SAMTLIGE LØSNINGER TIL (*).

TO TILFÆLDE

1/ $u = 0$: HOMOGENE LIGNING:

KORT SKRIVEMÅDE $D_n y = 0.$

2/ $u \neq 0$: INHOMOGENE LIGNING:

KORT SKRIVEMÅDE $D_n y = u.$

FOKUS PÅ 1/ FØRST. DERNÆST 2.

DEFINITION EN n-GANGE KONTINUERT DIFFERENTIABEL FUNKTION $(y \in C^n)$

$y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ER EN LØSNING TIL (*) SÅFREMT $(D_n y)(t) = u(t)$ FOR ALLE t.

MÆNGDEN AF LØSNINGER FOR $D_n y = 0$ KALDES L.

1/ SÆTNING 1.5: GIVET $D_n y = 0$. DA ER L ET n-DIM UNDERRUM AF C^n: FINDES n LINEÆRT UAFHÆNGIGE LØSNINGER $y_1, y_2, \text{—}, y_n$:

$$y \in L \iff y(t) = c_1 y_1(t) + \text{——} + c_n y_n(t)$$

(**)

FOR $c_1, \text{—}, c_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

OBS! $y(t) = c_1 y_1(t) + \text{——} + c_n y_n(t)$, $c_1 \text{—}, c_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ KALDES FULDSTÆNDIG (REELLE/KOMPLEKS) LØSNING TIL $D_n y = 0$.

BEMÆRKNINGER:

1/ ANTAG AT y_1 OG y_2 ER LØSNINGER

$D_n y_1 = 0$

$D_n y_2 = 0$

SÅ ER $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ OGSÅ EN LØSNING.

BEVIS: $D_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$

$c_1 D_n y_1 + c_2 D_n y_2 = 0 + 0$

2/ GIVET $y^0, y^1, \text{—}, y^{(n-1)}$

$y(0) = y^0, \; y'(0) = y^1, \text{———}, y^{(n-1)}(0) = y^{(n-1)}$

DA ER $y^{(n)}(0)$ BESTEMT AF $D_n y = 0$.

LINEÆRT UAFHÆNGIGHED

EKSEMPEL FRA LINEÆR ALGEBRA

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0} \quad , \; \underline{x} \in \mathbb{R}^3$

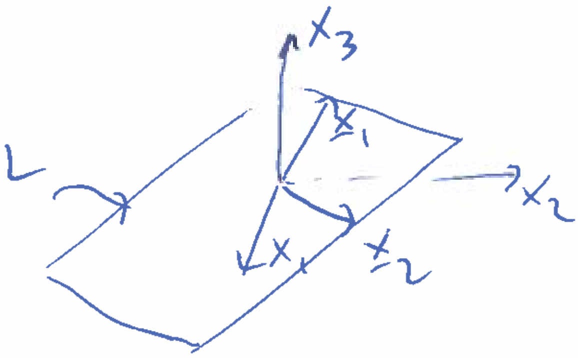
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\ t,s \in \mathbb{R}.$$

LØSNINGSMÆNGDEN L ER ET 2-DIM UNDERRUM AF $\mathbb{R}^3$ UDSPÆNDT AF VEKTORERNE $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\underline{x}_1$ OG $\underline{x}_2$ ER LINEÆRT UAFHÆNGIGE

$$c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$



GENERELT (DEFINITION)

$y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ER LINEÆRT UAFHÆNGIGE SÅFREMT

$$\boxed{c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0 \quad \text{FOR ALLE } t}$$

$$\Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

EKSEMPEL

PÅSTAND:

A/ $y_1(t)=1$, $y_2(t)=t$ ER LINEÆRT UAFHÆNGIGE

BEVIS:

$c_1 * 1 + c_2 \cdot t = 0$ FOR ALLE $t=0$

$t=0$: $c_1 = 0$. $\Rightarrow$

$c_2 t = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

$c_1 = c_2 = 0$.

PÅSTAND:

B/ $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ LIN UAFH FOR $\lambda_1 \neq \lambda_2$

BEVIS:

(1) $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0$ FOR ALLE t.

VHA DIFFERENTIATION MHT t PÅ BEGGE SIDER:

~~$t=0$: $c_1 + c_2 = 0$~~

(2) $c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_1 t} = 0$ FOR ALLE t

$t=0$ I (1): $c_1 + c_2 = 0$

$t=0$ I (2): $c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 0$

7

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$c_1 = c_2 = 0.$$

c/ <u>PÅSTAND</u>:

$y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \sin(t)$, $y_3(t) = \cos(t)$

ER LINEÆRT UAVH.

<u>BEVIS</u>

$c_1 + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(t) = 0$ FOR ALLE t.

$$\left.\begin{aligned} t=0: &\quad c_1 + c_3 = 0 \\ t=\pi: &\quad c_1 - c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_3 = 0$$

$\Rightarrow c_2 \sin(t) = 0$ FOR ALLE t.

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

D/ ~~PÅ~~ $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos^2(t)$, $y_3(t) = \sin^2 t$

ER <u>IKKE</u> LIN UAVH $\underline{-y_1 + y_2 + y_3 = 0}$

$\cancel{y_2 + y_3 = y_1}$

OPSUMMERING $D_n y = 0$ (8)

FULDSTÆNDIGE LØSNING: FIND n

LINEÆRT VÆFH LØSNINGER

$y_1, \text{—}, y_n$ OG OPSKRIV (**)

HVORDAN FINDER VI $y_1, \text{—}, y_n$?

DET KARAKTERISTISKE POL.

$y(t) = e^{\lambda t}$ LØSNING $\Leftrightarrow$

$$\left[a_0 \lambda^n + \text{———} + a_{n-1} \lambda + a_n\right] e^{\lambda t} = 0$$

FOR ALLE t.

$\Leftrightarrow$

λ ER EN ROD I DET KARAKTERISTISKE

POL

$P(\lambda) := [\dots]$

(9)

$P(\lambda)=0$ KALDES KARAKTER-LIGNINGEN. HØRENDE TIL $D_n y = 0$.

ALGEBRAENS FUNDAMENTALSETNING

P HAR n KOMPLEKSE RØDDER

$\lambda_1, \_\_\_\_, \lambda_n$

LØSNINGER $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \_\_\_, e^{\lambda_n t}$

ABER DER BEI: MULTIPLICITET

GENERELT HVIS $\lambda=\lambda_0$ ER ROD FOR P, DA GJELDER

$$P(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^{k} Q(\lambda)$$

HVOR $Q(\lambda_0)\neq 0$ OG $k = am(\lambda_0)\in\mathbb{N}$ KALDES RODENS ALGEBRAISKE MULTIPLICITET.

~~deg~~ grad Q = grad $P - k$.

EKSEMPEL $P(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0$

$\lambda^3-3\lambda^2+4=$

$\lambda=2$ ELLER $\lambda=-1$ $\quad -1,2,2$

$am=2$ $\quad am=1$.

SETNING:

HVIS P HAR n FORSKJELLIGE RØTTER

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: $am(\lambda_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$

SÅ ER DEN FUNDAMENTALE KOMPLEKSE LØSNING

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$$

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$$

VIP

EKSEMPEL 1

$$y''' - 3y'' + 4y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 0 + 4 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

$$= 0 \iff \lambda = 2 \text{ ELLER } \lambda = -1$$

$am = 2$ $\qquad$ $am = 1$

$$y_1(t) = e^{-t}$$

$$y_2(t) = e^{2t}$$

MANGLER ÉN

SÆTNING 1.14

BETRAGT $D_n y = 0$ OG ANTAG

$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, $Q(\lambda_0) \neq 0$,

$k = am(\lambda_0) \geq 2$.

DA GÆLDER AT

$y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$

$y_2(t) = t e^{\lambda_0 t}$

$\vdots$

$y_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$

ALLE ER ~~LØSNINGER.~~ K LIN UAFH LØSNINGER.

EKSEMPEL 1 IGEN:

$y_3(t) = t e^{2t}$

FULDSTÆNDIGE REELLE LØSNING:

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

EKSEMPEL 2

$$y''' + 2y'' + 2y' = 0$$

K-LIGNINGEN

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 0 = 0 \iff$$

$\lambda = 0$ ELLER $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \iff$
$\lambda = -1 \pm i.$

DEN FULDSTÆNDIGE KOMPLEKSE LØSNING

$$y(t) = c_1 \cancel{e^{0t}}^{=1} + c_2 e^{(-1-i)t} + c_3 e^{(-1+i)t}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

HVAD MED DEN FULDSTÆNDIGE REELLE LØSNING?

HVIS $a_i \in \mathbb{R}$ FOR ALLE $i = 0, \ldots, n$

SÅ GÆLDER $\lambda = \alpha + i\beta$ ROD $\Rightarrow$
$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ OGSÅ ROD

$\alpha = \operatorname{Re}\lambda$, $\beta = \operatorname{Im}(\lambda)$.

BEVIS: $\overline{a_0 \lambda^n + \cdots + a_n} = \bar{0} \Rightarrow$

SÅLEDES 2 LINEÆRT UAVH LØSN.

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right)$$

$$+\quad e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\right)$$

$$2e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{NY LØSNING}$$

$$= 2\mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_1(t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$$

$$y_2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

TO REELLE LØSNINGER ~~OG OF~~ ~~ER LINEÆRT UAVH.~~ SE SETNING 1.15

ALGORITME:

BETRAKT $D_n y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$.
VHA SETNING 1.14

$y_1, \_\_\_\_\_\_, y_n$ n LIN UAVH LØSN

$y_k, y_{k+1} = \bar{y}_k$ ERSTATT MED $\begin{cases} \mathrm{Re}\, y_k \\ \mathrm{Im}\, y_k \end{cases}$

GIVER NY LISTE MED n
REELLE LØSNINGER, SOM ER
LIN UAFH JVF SÆTNING 1.15

EKSEMPEL 2 IGEN

$y_1(t) = 1$, $y_2(t) = e^{(-1+i)t}$, $\cancel{y_3(t) = e^{(-1}}$

$y_3(t) = e^{(-1-i)t} = \overline{y_2}(t)$

$\tilde{y}_2(t) := \mathrm{Re}(y_2(t))$

$= e^{-t}\cos(t)$

$\tilde{y}_3(t) = \mathrm{Im}(y_2(t)) = e^{-t}\sin(t)$.

FULDSTÆNDIGE REELLE LØSNING

$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos(t) + c_3 e^{-t}\sin(t)$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

2/ $D_n y = u$ HVOR $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

KENDT KONTINUERT FUNKTION

SÆTNING 1.20

LAD y_0 VÆRE EN PARTIKULÆR LØSNING TIL $D_n y = u$.

DER GÆLDER DA, AT ENHVER LØSNING y TIL $D_n y = u$ HAR FORMEN

$$y = y_{hom} + y_0$$

HVOR y_{hom} ER LØSNING TIL

$D_n y = 0$

BEVIS: $D_n y = u$

$$\frac{D_n y_0 = u}{D_n(\underbrace{y - y_0}_{y_{hom}}) = 0}$$

16

DVS FULDSTÆNDIGE LØSNING TIL

$D_n y = u$ ER

$$y(t) = c_1 y_1(t) + \text{———} + c_n y_n(t) + y_0$$

$y_1, \text{———}, y_n$ n LIN UAFH

LØSNINGER TIL $D_n y = 0$.

HVORDAN FINDER VI y_0?

GÆT

A/ $u(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$

GÆT $y(t) = H e^{st}$

INDSÆT OG LØS FOR H!

[MERE HEROM SENERE I KURSET]

B/ $u(t) = \cos(\omega t)$

LIN UAFH FUNKT

GÆT: $y(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

INDSÆTTER $\{\ldots\}\cos(\omega t) + [\ ]\sin(\omega t) = 0$

FOR ALLE t

LØSER $\{\ldots\} = 0$ $[\ ] = 0$ FOR A OG B.

(17)

c/ $u(t) = B_0 t^l + \text{——} + B_l$

GÆT: $y(t) = A_0 t^l + \text{——} + A_l$

$A_0, \text{——}, A_l$ UBEKENDTE

$(B_0, \text{——}, B_l$ KENDTE$)$

INDSÆTTELSE $t^l, t^{l-1}, \text{——}, 1$ ER LIN UAFH

$K_0 t^l + \text{——} + K_l = 0$ FOR ALLE t

LØSER $K_0 = 0, \text{——}, K_l = 0$

FOR $A_0, \text{——}, A_l$.

EKSEMPEL

$y' + y = t^2$

$\lambda + 1 = 0 \qquad y_{hom}(t) = C e^{-t},$

y_0 PARTIKULÆR LØSNING.

$y_0(t) = A_0 t^2 + A_1 t + A_2$

$VS = 2A_0 t + A_1 + A_0 t^2 + A_1 t + A_2$

$= A_0 t^2 + (2A_0 + A_1) t + A_1 + A_2$

$HS = t^2$ FOR ALLE

$A_0 = 1$

$A_1 = -2A_0 = -2$

$A_2 = -A_1 = 2.$ //

FULLSTENDIGE REELLE LØSNING

$y(t) = C_1 e^{-t} + t^2 - 2t + 2$

$C_1 \in \mathbb{R}.$

DAG 2

DAGENS EMNE: TALFØLGER OG UENDELIGE RÆKKER

1/ INHOMOGENE LIGNING $D_n y = u$

2/ MOTIVATION VIA DIFF-LIGN

3/ EKSEMPLER PÅ TALFØLGER OG UENDELIGE RÆKKER

4/ UEGENTLIGE INTEGRALER

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

1/ $(D_n y)(t) := a_0 y^{(n)}(t) + \cdots + a_n y(t) \overset{\circledast}{=} u(t)$

D_n LINEÆR: $D_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 D_n y_1 + c_2 D_n y_2$

SE SÆTNING 1.4.

<u>SÆTNING 1.20</u> (STRUKTURSÆTNINGEN)

~~LAD y_0 VÆRE EN (PARTIKULÆR) LØSNING TIL $\circledast$. DA OM ENHVER ANDEN~~

LAD y_0 OG y VÆRE TO LØSNINGER TIL $\circledast$. DA GÆLDER

$y_{HOM} = y - y_0$ ER LØSNING TIL $D_n y = 0$

GIVET y_0.

$y = y_{hom} + y_0$

$\overset{(**)}{=} c_1 y_1 + \text{———} + c_n y_n + y_0, \quad c_1, \text{—}, c_n \in \mathbb{R}$

(2)

FULDSTÆNDIGE LØSNING TIL $(*)$, HVOR

$y_1, \text{———}, y_n$ ER n LIN UAFH LØSNINGER

TIL $D_n y = 0$.

<u>EKSEMPEL</u>

$y' + y = t^2$

$\lambda + 1 = 0, \quad y_{hom}(t) = c_1 e^{-t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$

GÆT PÅ PARTIKULÆR LØSNING:

$y_0 = A_0 t^2 + A_1 t + A_2$ LØSNING $\Leftrightarrow$

~~INDSÆT~~

$\underbrace{2A_0 t + A_1}_{y_0'} + \underbrace{A_0 t^2 + A_1 t + A_2}_{y_0} = t^2$ <u>FOR ALLE t</u>

$1, t, t^2$ LINEÆRT UAFH FUNKTIONER

$(A_0 - 1)t^2 + (2A_0 + A_1)t + (A_1 + A_2) \cdot 1 = 0$ FOR ALLE t

$\Leftrightarrow$

$A_0 = 1, \quad \cancel{2A_0 = 1} \quad A_1 = -2A_0 = -2$ OG $A_2 = -A_1 = 2$

ALTERNATIVT (***): ~~POL1 = P~~ POL1 = POL2 $\Leftrightarrow$ ~~PL~~ (3)

KOEFFICIENTERNE ER IDENTISKE.

2/ MOTIVATION

HVIS a_i IKKE KONSTANTE?

(**) GÆLDER STADIG MEN $e^{\lambda t}$ ER IKKE LÆNGERE LØSNING (GENERELT)

EKSEMPEL

$$y' = 2ty \quad , \quad y \neq e^{\lambda t}$$

[PANSER FORMEL: $y(t) = e^{t^2} c_1$]

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \text{——} + c_{n-2} t^{n-2} + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n + \text{——}$$

LØSNING?

$$VS = y' = c_1 + 2c_2 t + \text{——} + c_n n t^{n-1} + \text{—}$$

$\uparrow$ ANTAGER AT VI KAN DIFF LEDVIS

$$HS = 2ty = 0 + 2c_0 t + \text{——} + 2c_{n-2} t^{n-1} + \text{—}$$

$\uparrow$ ANTAGER AT VI KAN GANGE IND LEDVIS

~~t=0~~ BRUGER (***)

$c_1 = 0, \quad c_2 = c_0, \quad \cdots, \quad c_n = \frac{2c_{n-2}}{n}, \quad \cdots$

$n \geq 2.$

$\underline{n=3}: \quad c_3 = \frac{2c_1}{3} = 0$

$c_n = 0$ NÅR n ULIGE

MAN KAN VISE AT $c_n = \frac{c_0}{(n/2)!}$ n LIGE

$m! = m \cdot (m-1)(m-2) \cdots 2 \cdot 1$

$0! = 1$

$1! = 1$

$$y(t) = c_0 \left[1 + t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} t^{2n} + \cdots \right]$$

$$= c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{2n}$$

$$\exp(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n$$

BEMÆRK SKRIVEMÅDE:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

UENDELIG SUM / RÆKKE

5

ENDELIGE SUMMER

$$\sum_{n=0}^{2} a_n = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + \text{———} + a_N, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=k}^{N} a_n = a_k + \text{———} + a_N, \quad k \in \mathbb{N},\ N \in \mathbb{N},\ k < N$$

OVERVEJELSER:

1/ HVORDAN FORSTÅS UR?

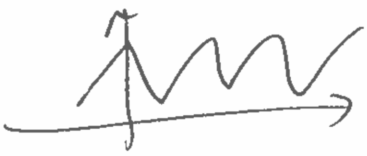
IDAG: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a_n KONST.

SENERE

2/ DIFF UR AF VARIABLE LED?

3/ GANGE IND I UENDELIG RÆKKE!

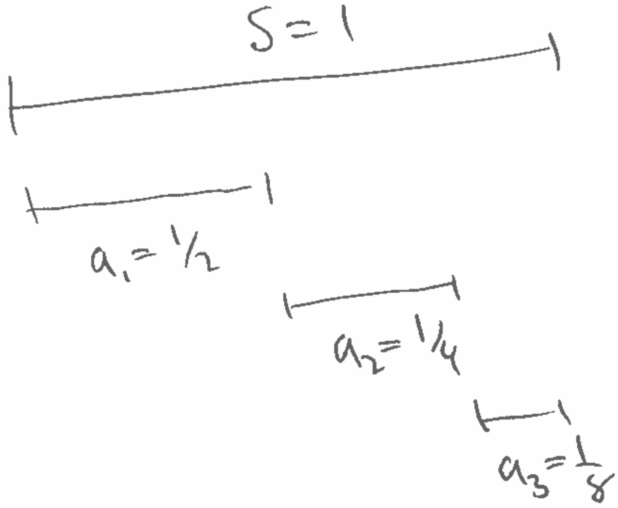
KULMINATION: FOURIERRÆKKEMETODEN



$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t)$$

LØSNING $\quad y_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y_n(t).$

3/ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?



$\vdots$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \simeq 1$ NÄR N FÖR STOR

N	S_N	$F_N = \lvert 1 - S_N \rvert$ FEJL
1	$1/2$	$1/2$
2	$1/2 + 1/4$	$1/4$
3	$1/2 + 1/4 + 1/8$	$1/8$
$\vert$		
N	$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N}$	$1/2^N$

$S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$ IDET

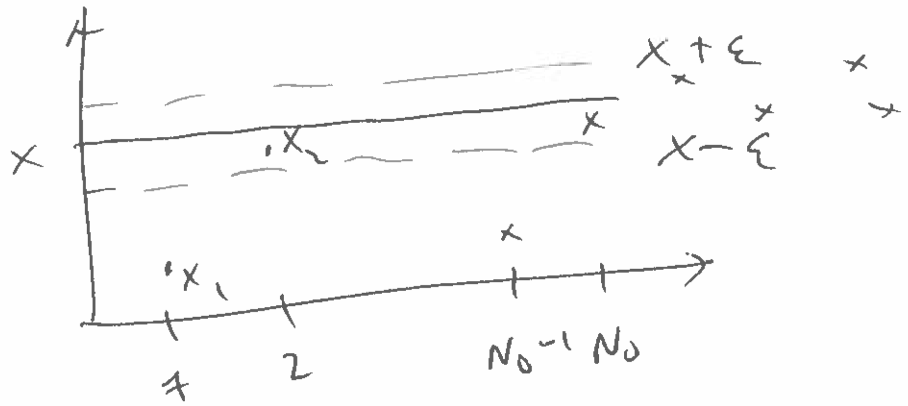
$F_N = 1 - S_N = \frac{1}{2^N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

1 ER GRÆNSEVÆRDIEN FOR TAL-FØLGEN $S_1, S_2, \text{——}, S_N, \text{——}$

(KOMPAKT $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ ELLER OFTE BLOT S_N)

<u>GENERELT</u>: DEFINITION 4.5

EN TALFØLGE $x_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ER KONVERGENT ($\underline{K}$) MED GRÆNSE-VÆRDI (GV) x SÅFREMT: FOR ALLE $\varepsilon > 0$ FINDES ET $N_0 \in \mathbb{N}$:



MODULUS HVIS $x \in \mathbb{C}$

$|x - x_n| \le \varepsilon$ FOR ALLE $n \ge N_0$

KORT SKRIVEMÅDE: $\cancel{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$\lim x_n = x.$

HVIS X IKKE FINNES, SÅ (8)

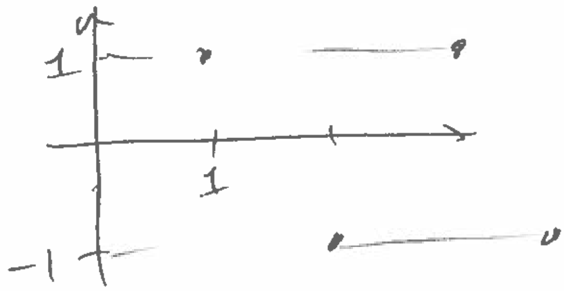
ER x_n DIVERGENT (D)

EKSEMPEL: x_n UBEGRENSET (BLIVER VILKÅRLIG STOR)

EKSEMPLER

1/ $x_n = (-1)^{n+1}$ BEGRENSET $|x_n| = 1$

MEN D



2/ $x_n = q^n = \underbrace{q \cdots\cdots q}_{n \text{ GANGER}}$, $q \in \mathbb{C}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{?} \begin{cases} D & \text{FOR } |q| > 1 \\ K & \text{FOR } |q| < 1 \\ & \text{MED GV} = 0 \end{cases}$

$|q| < 1$: FORMELT

$|0 - q^n| = |q|^n \leq \varepsilon \iff$

$n \log |q| \leq \log \varepsilon \iff$

$n \geq \left| \dfrac{\log \varepsilon}{\log |q|} \right|$ //

9

3/ $S_N = 1 + q + \text{———} + q^N$

$= \sum_{n=0}^{N} q^n$

$q S_N = q + \text{———} + q^N + q^{N+1}$

$S_N(1-q) = \cancel{1} \cancel{-} q^{N+1} \iff$

$S_N = \dfrac{1 - q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[N\to\infty]{}$ $\begin{cases} \underline{P} & \text{NÅR } |q| \\ \underline{K} & \text{NÅR } |q| \end{cases}$

~~MED~~ MED $GV = \frac{1}{1-q}$

~~q=2~~ $q = \frac{1}{2}$: $S_N \to 2$.

BEMÆRKNING : DEFINITION : 4.15

$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DEFINERES SOM GV AF

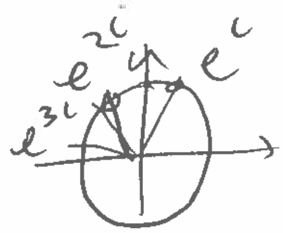
AFSNITSSUMMEN $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$:

$S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} S$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n := \dfrac{1}{1-q}$ SÅFREMT $|q| < 1$.

D KLLERS

4/ $x_n = e^{in} \in \mathbb{C}$ (10)



$e^{in} = \cos(n) + i\sin(n)$

e^{in} $\underline{D}$

GÆLDER $x_n \in \mathbb{C}$ $\underline{K}$ $\Leftrightarrow$

$Re(x_n)$ $\underline{K}$ OG $Im(x_n)$ $\underline{K}$

$\Rightarrow$ $\cos(n)$ OG $\sin(n)$ $\underline{D}$

REGNEREGLER FOR GRÆNSEVÆRDIER

LEMMA 4.10 ANTAG AT

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_1$

$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L_2$

1/ $\lim_{n\to\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 L_1 + c_2 L_2$

2/ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = L_1 L_2$

3/ HVIS $L_2 \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$

4/ HVIS $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ER KONT (11)

SÅ ER $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L_1)$

5/ $\frac{n^a}{b^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ FOR $a \geq 0$, $b > 1$

6/ $\frac{\ln(n)}{n^c} \longrightarrow 0$ FOR $c > 0$.

EKSEMPEL

5/ $a_n = \frac{n^{90} + n + 1}{e^n + \ln(n)}$

$$= \frac{n^{90}\left[1 + n^{-89} + n^{-90}\right]}{e^n\left(1 + \frac{\ln(n)}{e^n}\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{1/+2/+5/} 0 \cdot 1 = 0$$

6/ $a_n = \frac{e^{-n}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{e^{-n} + e^{-2n}}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + e^{-n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(12)

7/ $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

$$x_n = \log a_n = \frac{1}{n} \log n \xrightarrow[n\to\infty]{3/} 0.$$

$$a_n = e^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{4/} e^0 = 1$$

IDET e^x ER KONT FUNKTION!

4/ <u>UEGENTLIGE INTEGRALER</u>

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

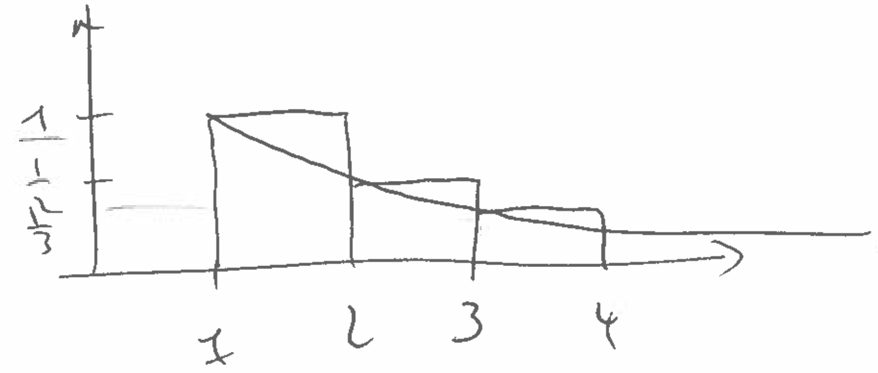
$\updownarrow$ RELATION

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$ UEGENTLIG INTEGRALER

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ HARMONISK RÆKKE

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{———} + \frac{1}{n}$$

$+$ ———



GRAF FOR $f(x) = \frac{1}{x}$

S_N = AREAL AF N KASSER

$$\geq \int_1^N f(x)\,dx = [\ln x]_{x=1}^{N}$$

$$= \ln N \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

S_N UBEGRÆNSET $\Rightarrow$ S $\underline{\underline{D}}$

<u>DEFINITION</u> f KONT OG LAD

$I(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ (HJÆLPEINTEGRAL

HVIS $I(t)$ ER $\underline{K}$ FOR $t \to \infty$

SÅ SÆTTES $\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty} I(t)$.

TILSVARENDE DEFINITION AF $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$

VHA $J(t) = \int_t^a f(x)\,dx$ FOR $t \to -\infty$.

DAG 3 : UENDELIGE RÆKKER

DEFINITION 4.15

GIVET
* a_n TALFØLGE
* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ UENDELIG RÆKKE
* $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \text{—} + a_N$ N'TE AFSNITSSUM

NY TALFØLGE !

$S_N \backslash a_n$	a_1	a_2	a_3	—	a_N
S_1	a_1				
S_2	$a_1 + a_2$				
S_3	$a_1 + a_2 + a_3$				
$\vert$					
S_N	$a_1 + a_2 + \text{—} + a_N$				

1/ SÅFREMT S_N ER K:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N \text{ VÆRDIEN}$$

KALDES RÆKKENS SUM

2/ SÅFREMT S_N ER D:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ER } \underline{D} \text{ (INGEN SUM)}$$

OBS TO TALFØLGER a_n OG S_N

PROBLEM: KAN K AF S_N (OG UR) AFGØRES UDFRA a_n? UDEN AT KENDE/ BESTEMME GV?

SVAR: DELVIST JA! KONVERGENSKRITERIER.

(3)

OVERBLIK

a/ DIVERGENS-KRITERIE (n'TE LEDS KRIT)

SÆTN 4.19

b/ INTEGRALKRIT SÆTNING 4.33

c/ HJÆLPESÆTNING 4.27

d/ SAMMENLIGNINGSKRIT SÆTNING 4.26

~~d~~e/ ÆKVIVALENSKRIT 4.24

~~f~~f/ KVOTIENTKRIT 4.30

---

a/ DIVERGENSTEST SÆTNING 4.19

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{K} \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

BEVIS

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_N = a_1 + \text{—} + a_{N-1} + a_N$$

$$- \quad S_{N-1} = a_1 + \text{—} + a_{N-1} + 0$$

$$S - S \longleftarrow S_N - S_{N-1} = \underline{\underline{a_N}}$$

OFTE BRUGER VI SÆTNINGEN PÅ FØLGENDE FORM:

$$a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{D}$$

EKSEMPEL 1/ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)$ $\underline{D}$

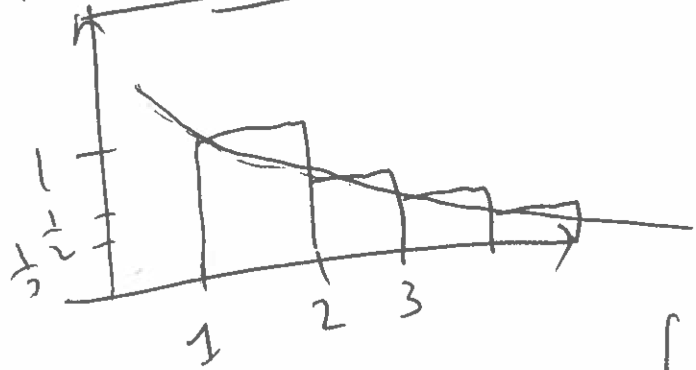
2/ $\sum_{n=1}^{\infty} n$ $\underline{D}$ 3/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

KAN IKKE SLUTTE $\underline{K}$ / $\underline{D}$.

b/ INTEGRALKRIT

$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$

= AREAL AF KASSER



$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \int_1^3 f(x)\,dx$$

$$S_N \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$$

S_N UBEGRÆNSET OG $\underline{\underline{D}}$

SÆTNING 4.33 (5)

LAD $f: [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$

VÆRE C^1 $f'(x) < 0$ FOR ALLE x

(AFTAGENDE). DA ER

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \underline{K} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

ER $\underline{K}$

BEVIS NÆSTE UGE

EKSEMPEL

$a_n = \frac{1}{n^k}$, $k > 0$, $k \neq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? $f(x) = \frac{1}{x^k}$. $f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}} <$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^k}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{1-k} t^{1-k} - \frac{1}{1-k}\right)$$

5

~~AT~~

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \begin{cases} \underline{D} & \text{FOR } 0<k\leq 1 \\ \underline{K} & \text{FOR } k>1. \end{cases}$$

BEMÆRKNING: $a_n > 0$!

c/ HJÆLPESÆTNING 4.27

ANTAG $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ ER $\underline{K}$ $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^\infty a_n$ ER $\underline{K}$

(GÆLDER OGSÅ FOR $a_n \in \mathbb{C}$)

~~SÆTNING A~~

LEMMA A.3 (S. 198)

ENHVER FØLGE x_n DER ER

VOKSENDE $x_{n+1} \geq x_n$ FOR ALLE n

OG BEGRÆNSET $|x_n| \leq C$ FOR ALLE n.

DA FØR ~~Σ~~ x_n $\underline{K}$ ~~(6)~~ 7

BEVIS FOR 4.27 $c_n = a_n + |a_n| > 0$

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n + |a_n|)}_{c_n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$$ BEGRÆNSET OG VOKSENDE

$$\tilde{S}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \tilde{S}.$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} |a_n| \right) = \tilde{S}$$

$\underline{K}$

$$S_N = \cancel{\sum_{n=1}^{N} a_n} + \sum_{n=1}^{N} \left(c_n - \cancel{\sum} |a_n| \right)$$

$$\longrightarrow \tilde{S} - \sum^{\infty} |a_n| \;//$$

d/ SAMMENLIGNINGSKRIT 4.20

8

ANTAG $0 \leq a_n \leq b_n$

HVIS i/ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underline{K} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underline{K}$

HVIS ii/ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underline{D} \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underline{D}$

<u>EKSEMPEL</u>

A/ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1+\cos(n)}{n^2}$$

$$0 \leq a_n \leq \frac{2}{n^2} = b_n$$

(9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \underline{K}$$

~~EKSEMPEL~~

B/ $a_n = \frac{2\cos(n)}{n^2}$ IKKE POSITIV

$$|a_n| = \frac{2|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2} = b_n$$

$\xrightarrow{\text{SÆTN 4.2}} \sum |a_n| \ \underline{K} \xrightarrow{\text{SÆTN 4.27}}$

C/ $a_n = \frac{1+\cos(n)}{n}$?

e/ ÆKVIVALENSKRIT SÆTNING 4.24

ANTAG $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ OG AT

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} c \in]0, \infty[$$

[VI SIGER AT $\sum a_n$ OG $\sum b_n$ ER ÆKVIVALENTE]

DA GÆLDER AT

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{K} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \underline{K}$$

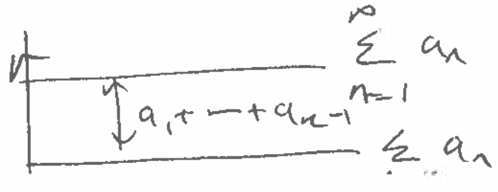
<u>EKSEMPEL</u>

$$\sum_{n=60}^{\infty} \frac{n^4+1}{n^7+15}$$

<u>SÆTNING B</u> $\underline{K}$ AF UR AFHÆN-GER <u>IKKE</u> AF VÆRDIEN AF ENDELIGT MANGE LED

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + \cdots + a_{k-1}}_{\text{ENDELIG SUM}} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

$$\underline{K} \iff \underline{K}$$



11

$$a_n = \frac{n^4+1}{n^7+15} = \frac{1+n^{-4}}{n^3(1+15n^{-7})}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n} \cdot \frac{1+n^{-4}}{1+15n^{-7}}$$

$$\frac{1+n^{-4}}{1+15n^{-7}} \to 1$$

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \underline{K} \ \overset{\text{SÆTNING 4.24}}{\Longrightarrow} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{K}.$$

$$\overset{\text{SÆTNING B}}{\Longrightarrow} \ \sum_{n=60}^{\infty} a_n \ \underline{K}$$

f/ KVOTIENT KRIT ~~SÆTNING 4.30~~

~~ANTAG a_n~~

KVOTIENTRÆKKER DEFINITION 5.1

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, q KVOTIENT

<u>OBS</u> $a_n = q^n$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ KONST.

SÆTNING 5.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \ \underline{K} \iff |q|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{FOR } |q|<1$$

<u>SÆTNING</u> 4.30 (KVOTIENTKRIT)

ANTAG $a_n > 0$ OG AT

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \geq 0.$$

SÅ GÆLDER

i/ HVIS $c \in [0,1[\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{K}$$

ii/ HVIS $c > 1$ (INKL $c=\infty$) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{D}$$

<u>OBS</u> INGEN INFO OM $c=1$!

EKSEMPEL

$$a_n = \frac{1+n}{2^n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2+n}{2^{n+1}+1} \cdot \frac{2^n+1}{1+n}$$

$$= \frac{2+n}{1+n} \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \qquad \to \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} = q \qquad \underline{K}$$

~~OBS~~

DAG 4 : ALTERNERENDE RÆKKER $\sum (-1)^{n-1}$ ①

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{DEFINITION 4.15}}{=} \lim_{N\to\infty} S_N$$ OG VURDERING AF SUMMER

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$ AFSNITSSUM

a/ DIVERGENSKRIT SÆTNING 4.19
b/ INTEGRALKRIT SÆTNING 4.33
c/ HJÆLPESÆTNING 4.27
d/ SAMMENLIGNINGSKRIT SÆTN 4.20
e/ ÆKVIVALENSKRIT SÆTN 4.24
f/ KVOTIENTKRIT SÆTN 4.30

---

c/ HJÆLPESÆTN 4.27 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ $\underline{K}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\underline{K}$

DEFINITION 4.26 : HVIS $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ER $\underline{K}$ SÅ SIGES $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ AT VÆRE ABSOLUT $\underline{K}$ (AK)

DEFINITION 4.28 HVIS $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ER $\underline{K}$ MEN $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ $\underline{D}$ SÅ SIGES $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ AT VÆRE BETINGET K (BK)

EKSEMPEL 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{n^2} \quad \text{ER } \underline{\text{AK}}$$

$$|a_n| \leq \frac{2}{n^2}.$$

EKSEMPEL 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{---}$$

ER <u>IKKE</u> <u>AK</u> $\quad \sum \frac{1}{n}$ <u>D</u>

ER DEN BK?

EKSEMPEL 2 ER ET EKSEMPEL PÅ EN ALTERNERENDE RÆKKE:

DEFINITION 4.37

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \text{---}$$

MED $b_n > 0$ ER <u>EN</u> ALTERNERENDE RÆKKE (AR)

$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad |a_n| = b_n$

3

SÆTNING 4.38 (LEIBNIZ'S KRIT)

BETRAGT $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ AR OG

ANTAG AT

b_n AFTAGER MONOTONT MOD 0:

$\cancel{b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n+1} \geq}$

$$\begin{cases} b_{n+1} \leq b_n & \text{FOR ALLE } n \\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{cases}$$

KORT SKRIVEMÅDE: $b_n \searrow_{n\to\infty} 0.$

DA GÆLDER ~~DET~~ DER AT $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ ER

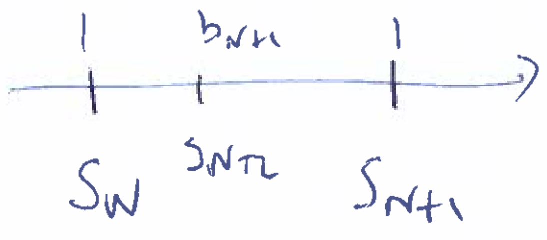
K

OBS: EKSTREM MILD BETINGELSE!

1

BEVIS N LIGE

$S_N = b_1 - b_2 + \cdots + \underbrace{(-1)^{N-1}}_{=-1} b_N$ (4)



$S_{N+1} = S_N + b_{N+1}$

$S_{N+2} = S_{N+1} - b_{N+2}$

$\Longrightarrow$

$S_{N+k} \in [S_N, S_{N+1}]$ FOR ALLE k.

$S_N \le S_{N+2} \le \cdots \le S_{N+2k} \le S_{N+1}$

VOKSENDE OG BEGRÆNSET LEMMA A.3

$S_{N\,k} \to S = \lim_{N\to\infty} S_N$

SÆTNING A $\quad |S - S_N| \le b_{N+1}$

DVS HVIS $b_{N+1} \le \varepsilon \quad \overset{\text{SÆTNING A}}{\Longrightarrow}$

$F_N = |S - S_N| \le \varepsilon$

VURDERING AF SUM!

EKSEMPEL 2 IGEN

AR MED $b_n = \frac{1}{n}$

BESTEM N: S_N AFVIGER FRA S

MED FEJL F_N HØJST $\varepsilon = 10^{-2}$.

LØSNING: $b_{N+1} = \frac{1}{N+1} \leq 10^{-2}$

GIVER $N = 99$ DVS FOR

$N = 99$ ER $S = S_{99} \pm 10^{-2}$

HVAD MED $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

KAN VI APPROXIMERE S VHA

AFSNITSUM S_N ?

KOROLLAR 4.35 BETRAGTER $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

HVOR $f: [1, \infty[\to [0, \infty[$ ER

C^1, $f'(x) \leq 0$ (AFTAGENDE)

OG $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ER $\underline{K}$

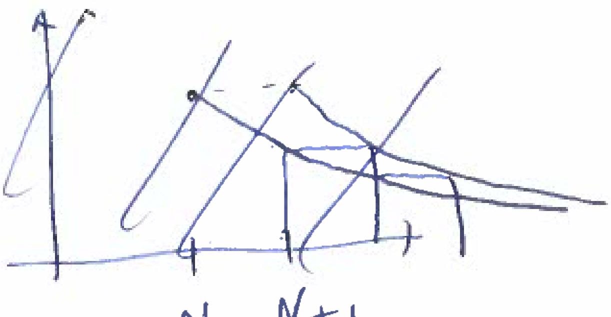
DA GÆLDER

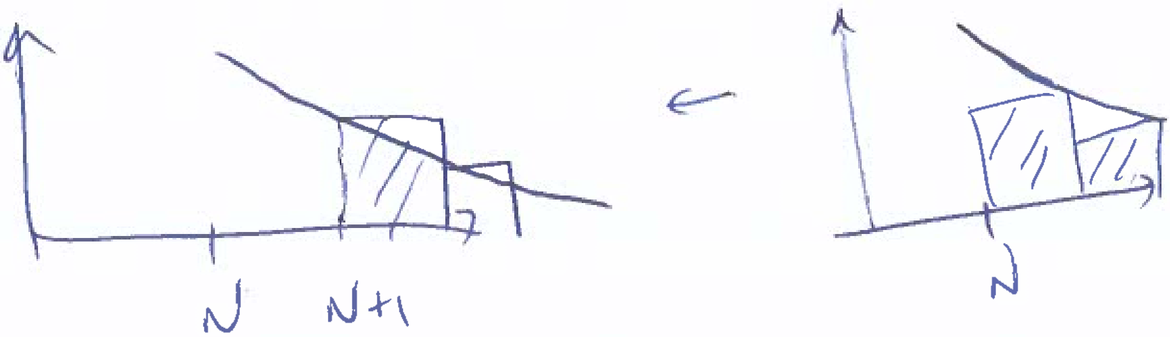
$$\boxed{\int_{N+1}^\infty f(x)\,dx \le F_N = |S - S_N| \le \int_N^\infty f(x)\,dx} \quad (*)$$

BEVIS

$$F_N = S - S_N = \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^N a_n$$

$$= \sum_{n=N+1}^\infty a_n \le \int_N^\infty f(x)\,dx$$





EKSEMPEL ~~[illegible]~~ 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \underline{K}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f'(x) < 0.$$

<u>OPG</u>: BESTEM N_a: S_N AFVIGER FRA S MED EN FEJL F_N PÅ HØJST 10^{-2}

$$F_N = |S_{\cancel{a}} - S_N| \leq \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_N^t \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{N} \leq 10^{-2}.$$

GIVER $N \geq 100$.

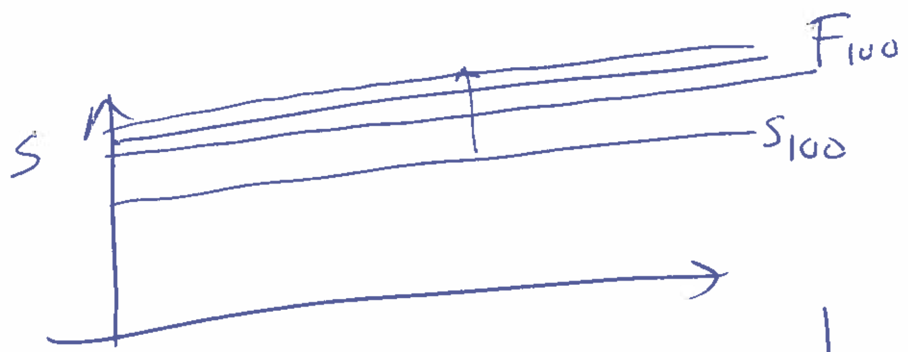
ALTSÅ ~~S_N AFVIGER FRA S~~

$S = S_N \pm 10^{-2}$ NÅR $N \geq 100$

N=100 i (*) : ← BAGGRUND

(8)

$$\frac{1}{101} \le F_{100} \le \frac{1}{100}$$



F_{100} MEGET NØJAGTIG!

$$S \approx S_{100} + \frac{1}{101}$$

FEJL 10^{-4} (METODE ii)

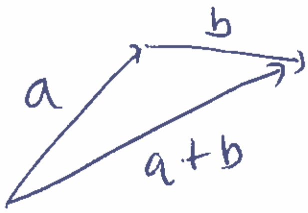
HVAD MED $a_n \gtrless 0$?

$$F_N = |S - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{N+1}\right| \quad (**)$$

TREKANTSULIGHEDEN SÆTNING 4.27

ANTAG AK : $\left|\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=k}^{\infty} |a_n|$

BEVIS $\quad |a+b| \le |a| + |b|$



$$\cancel{|a+b| = \begin{cases} a+b \\ -a-b \end{cases} \le |a|+b \le |a|+|b|, \quad \le |a|-b \le |a|+|b|}$$

** FORTSÄTT

$$F_N \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{N+1}|$$

EXEMPEL $\quad a_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$

$$F_N \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n)}{n^2} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

SATS 4.20

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_{100} \pm 10^{-2}$$

①

DAG 5: POTENSRÆKKER $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$

EKSEMPEL PÅ RÆKKER MHP VARIABLE LED.

ANTAG AT $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ER K FOR ALLE $x \in I$, SÅ SIGES RÆKKEN AF VARIABLE LED AT VÆRE PKTVIS K!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in I.$$

~~OPGAVER~~

PROBLEM

1/ HVAD KAN VI SIGE OM I?

2/ ER f KONT FKT? DIFF? DIFF LEDVIS

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} ?$$

AUSK PÅ $y' = 2ty$ FRA DAG 1 2

$$y(t) = c_0 \left[1 + t^2 + \text{———} + \frac{t^{2n}}{n!} + \text{—} \right]$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$$

I) KVOTIENTKRIT SÄTNING 4.30:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \longrightarrow c_1 \in [0, \infty]$$

i) $c_1 \in [0,1[\Rightarrow$ AK

ii) $c_1 > 1$ (INKL ∞) $\Rightarrow$ D

$x \neq 0$, $a_n = c_n x^n$. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x|$

DVS SÅFREMT $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} K \in [0, \infty[$

OBS!

SÅ ER $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ AK SÅFREMT

$c_1 = K|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{K}$

HVIS $K=\infty$ SÅ ER $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ KUN ③

K FOR $x=0$

$\rho = \frac{1}{K}$ KALDES RÆKKENS KONVERGENS-RADIUS.

OBS

GENERELT (SE S. 117) $\rho \in [0,\infty]$ ER DEN VÆRDI AF $|x|$ ~~HVOR~~ SOM PRÆCIS ANGIVER GR~~ÆE~~NSEN MELLEM D OG AK:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \begin{cases} \text{AK FOR ALLE } |x|<\rho \\ \text{D FOR ALLE } |x|>\rho. \end{cases}$$

VELDEFINERET JVF SÆTNING 5.13 (NÅR VI TILLADER $\rho=\infty$ NÅR $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ER AK FOR ALLE $x\in\mathbb{R}$)

OBS 1 ρ ER EN RADIUS
I DEN KOMPLEKSE PLAN.

OBS 2 SÆTNING 5.13 ANTAGER IKKE
AT $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} K$

OBS 3 $\underline{K}$ FOR $x = \pm\rho$ ~~KRÆVER~~ ~~[illegible]~~
KRÆVER SÆRUNDERSØGELSE

EKSEMPEL 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

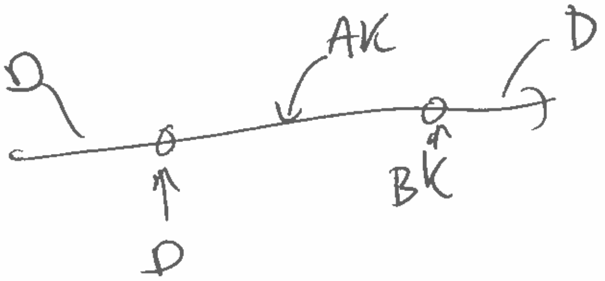
$$\Rightarrow \rho = 1 \begin{cases} \underline{AK} \text{ FOR } |x|<1 \\ \underline{D} \text{ FOR } |x|>1 \end{cases}$$

~~HVAD MED $x=\pm 1$~~

HVAD MED $x = \pm 1$?

$x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ER $\underline{\text{BK}}$

$x=-1$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\underline{\text{D}}$



EKSEMPEL 2 : $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

POTENSRÆKKE MED $c_n = \begin{cases} 0 & n\text{-ULIGE} \\ \frac{1}{k!} & n=2k \text{ LIGE} \end{cases}$

$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ~~IKKE~~ $\underline{\text{D}}$!

$a_k = \frac{x^{2k}}{k!}$ $\quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1}|x|^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\rho = \infty}}$ $\underline{\text{AK}}$ FOR ALLE $\underline{x} \in \mathbb{R}$.

EKSEMPEL 3 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^{3n}$

$a_n = \frac{1}{n^2} x^{3n}$. $\quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} |x|^3$

$\longrightarrow |x|^3 \Rightarrow$

$\rho = 1 \quad \begin{cases} \text{AK FOR } |x| < 1 \\ \underline{\text{D}} \text{ FOR } |x| > 1 \end{cases}$

$x = \pm 1$?

$x = -1$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n$ $\quad \underline{\text{AK}}$

DVS RÆKKEN ER AK $\Leftrightarrow$ $|x| \leq 1$

D ELLERS

2/ SÆTNING 5.17

BETRAGT $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ OG ANTAG AT $\rho > 0$

DEFINER

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad I =]-\rho, \rho[$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

DA GÆLDER AT $f \in C^\infty(I)$

OG f KAN DIFF LEDVIS:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k}$$

FOR ALLE $k \in \mathbb{N}$ OG ALLE $x \in I$

~~HAR ALLE KONV RADIUS LIG ρ~~

HAR ALLE ρ SOM KONV-RADIUS

(8)

OBS

$$\boxed{\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f'(0) &= c_1 \\ &\;\vdots \\ f^{(k)}(0) &= k!\, c_k \end{aligned}}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \,]-1,1[$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

KENDTE FUNKTIONER PÅ POTENSRÆKKE-FORM!

KOROLLAR 5.36 SAMME ANTAGELSE

SOM FØR

KAN BYTTE PLADS

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

KAN INTEGRERE ~~[illegible]~~ LEDVIS

EKSEMPEL

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in]-1,1]$$

BM

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$x \in]-1,1[$.

VHA SETNING 5.17.

DERFOR

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+x)$$

GJELDER FAKTISK FOR $x \in]-1,1]$

(VHA ABEL'S SETNING)

DVS $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$ (10)

BK

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) \quad !!!$$

KAN IKKE ÆNDRE RÆKKEFØLGEN

I BK FOR AK RÆKKE ER

RÆKKEFØLGEN LIGEGYLDIG!

DAG 6: UENDELIG RÆKKER AF (1)

VARIABLE LED $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

f_n DIFF FUNKTIONER

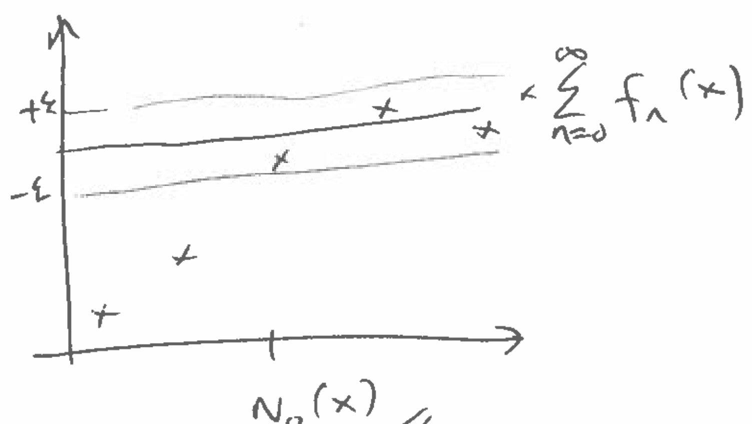
$f_n(x) = a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$ FR

$f_n(x) = c_n x^n$ POTENSRÆKKER

$f_n(x) = x(1-x^2)^n$

OBS HVIS $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ER K FOR ALLE $x \in I$, I INTERVAL, SÅ SIGES RÆKKEN AF VARIABLE LED AT VÆRE PUNKTVIS K PÅ INTERVALLET I. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$

SUMFUNKTION



$x \in I$

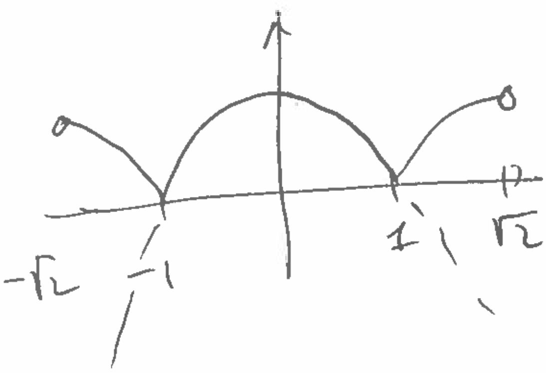
//

EKSEMPEL 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n, \quad a_n = x(1-x^2)^n,$$

$\underline{x \neq 0}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1-x^2|$ KONST KVOTIENTREKKE

$\underline{AK} \iff |1-x^2| < 1$



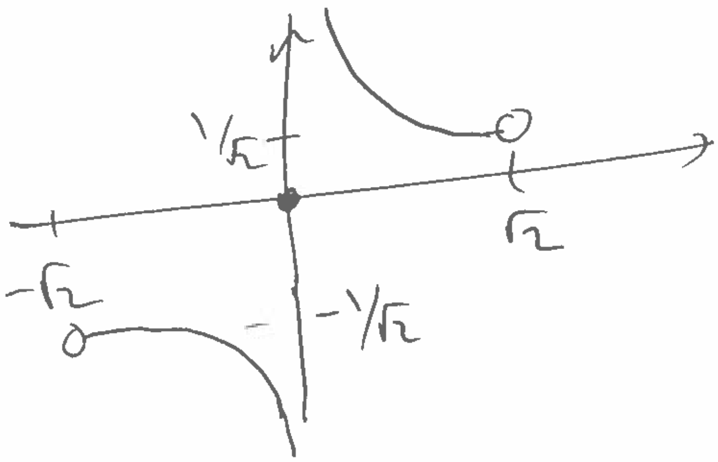
$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$ AK FOR ALLE $\underline{\underline{|x| < \sqrt{2}}}$

$\underline{D}$ ELLERS

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n = \begin{cases} 0 & \text{FOR } x=0 \\ x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x^2)^n = x\frac{1}{(1-(1-x^2))} = \frac{1}{x} & \text{FOR } 0 < |x| < \sqrt{2} \end{cases}$$

SUMFUNKTION ER DISKONT!

③



$\boxed{\text{MAPLE}}$

SPM: ~~H~~ HVORNÅR ER SUMFUNKTION KONTINUERT? DIFF?

SVAR: ~~KRIT~~

SÆTNING A HVIS $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ K UNIFORM PÅ I $\longrightarrow$ SUMFUNKTIONEN $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ KONT.

DEFINITION AF UNIFORM K:

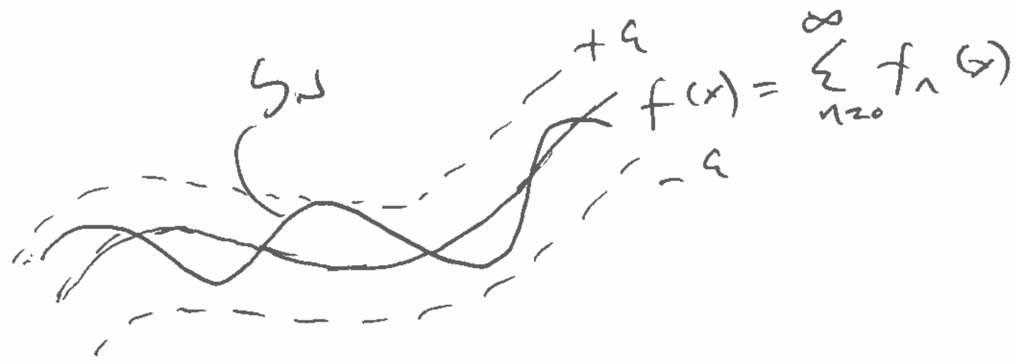
$\cancel{f(x)=}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ER UNIFORM K PÅ INTERVALLET I SÅFREMT

$N_0(x)$ KAN VÆLGES UAFHÆNGIGT AF x FOR ALLE $\varepsilon>0$:

DVS FOR $\varepsilon>0$ FINDES N_0:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)-\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right|\leq\varepsilon \quad \forall x\in I \quad \forall N\geq N_0$$

BEVIS SÆTNING A



$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{f(x)-S_N(x)}+\underbrace{S_N(x)-S_N(x_0)}+\underbrace{S_N(x_0)-f}$$

SPM: (5)

HVORNÅR ER UR MED VARIABLE

LED UNIFORM $\underline{k}$?

SVAR: MAJORANTRÆKKER!

DEFINITION 5.31 ANTAG $|f_n(x)| \leq k_n$

FOR ALLE $x \in I$, $n \in \mathbb{N}_0$. DA SIGES

$\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ AT VÆRE MAJORANTRÆKKE

FOR $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$.

SÆTNING 5.35:

BETRAGT $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, f_n KONT, $x \in I$

OG ANTAG AT $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ ER $\underline{K}$ MAJO-

RANTRÆKKE. DA ER $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$

UNIFORM $\underline{K}$ $\xRightarrow{\text{SÆTNING A}}$ SUMFUNKTION

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ER KONTINUERT.

BEVIS

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|$$

TREKANTSULIGHED SÆTN 4.37

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} k_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} k_n - \sum_{n=0}^{N} k_n$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

IDET $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ ER K.

OBS SÆTNING A KAN OGSÅ BRUGES PÅ FØLGENDE FORM

f ER DISKONT $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in I$ IKKE UNIFORM K

OBS HVIS $K_n = g(n)$, $g : [1, \infty[\to [0, \infty[$ (7)

$g'(x) < 0$:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} K_n \le \int_N^{\infty} g(x)\,dx$$

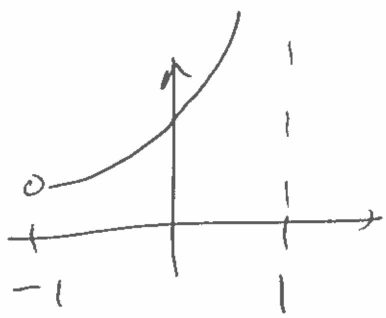
SE KOROLLAR 4.35

KAN VURDERE SUMFUNKTION UNIFORMT

I X.

EKSEMPEL 2

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{FOR } |x| < 1$$



PÅSTAND: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ UNIFORM $\underline{K}$ PÅ ETHVERT INTERVAL

$I = [-r, r]$, $0 < r < 1$.

BEVIS: $|x^n| \le \underbrace{\underline{\underline{r^n}}}_{K_n}$ FOR ALLE $x \in I$.

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ER $\underline{K}$ MAJORANTRÆKKE (8)

$\Rightarrow$ UNIFORM $\underline{K}$

<u>IKKE</u> UNIFORM PÅ $[-1,1]$

ELLER $]-1,1[$!

<u>EKSEMPEL 3</u>

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{n^3}\sin(nx)}_{f_n(x)} \quad , x \in \mathbb{R}$$

KONT? ~~SVAR UK~~

$|f_n(x)| \leq \frac{2}{n^3} = k_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} k_n$ $\underline{K}$ MAJORANT

$\overset{\text{SETN 5.35}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ER UNIFORM K $x \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{SETNING A}}{\Rightarrow}$ f ER KONT

9

FIND N: $\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \le 0.01$

FOR ALLE $x \in \mathbb{R}$.

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \le \int_N^{\infty} \frac{2}{x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{N^2} \le 0.01$$

SETTER

GIVER $N \ge 10$.

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{10} f_n(x) \right| \le 0.01$$

3/ HVAD MED LEDVIS ~~DIF~~ INTEGRATION (10)
OG DIFF AF $\sum f_n(x)$?

INTEGRATION SÆTNING 5.36

ANTAG $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ UNIFORM K
PÅ I. DA GÆLDER

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int f_n(x)\, dx \right)$$

DIFF SÆTNING 5.37

ANTAG 1/ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ UNIFORM K

2/ $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ UNIFORM K.

DA ER $f \in C^1(I)$ OG

$$f'(x) = f_1(x).$$

EKSEMPEL 4 (11)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \sin(nx) \qquad \underline{\text{UK}}$$

$f'(x)$?

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cos(nx)$$

$$\left| \frac{2}{n^2} \cos(nx) \right| \le \frac{2}{n^2} = k_n'$$

$\sum k_n'$ $\underline{\text{K}}$ MAJORANTRÆKKE FOR f_1

SÆTNING 5.37 $\Rightarrow$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \cos(nx)$$

DAG 7 DIFF-LIGN IGEN

1/ POTENSRÆKKEMETODEN

2/ SYSTEMER AF 1. ORDENS DIFF-LIGN

1/ $y'' + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = 0$

FULDSTÆNDIGE LØSNING:

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

y_1 OG y_2 LINEÆRT UAFH LØSN.

SÆTNING ~~ÆØ~~ ANTAG AT f OG g ER POTENSRÆKKER MED $\rho > 0$. DA ER ENHVER LØSNING OGSÅ POTENSRÆKKE $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ MED $\rho > 0$.

2

POTENSRÆKKEMETODEN BESTÅR

I AT INDSÆTTE $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

I DIFF-LIGNINGEN OG LØSE

FOR DE UBEKENDTE c_n (SOM PÅ

DAG 2 FOR $y' = 2 * y$)

VÆRKTØJSKASSE:

1/ SÆTNING 5.37: DIFFERENTIERE

LEDVIS

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

FOR ALLE $x \in]-\rho, \rho[$

2/ KOROLLAR 5.21 (IDENTITETSSÆTN FOR

POTENSRÆKKER)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad \text{FOR ALLE } \forall x \in]-\rho, \rho[, \ \rho > 0 \iff$$

3/ "KIG OP KIG NED" STRATEGI

③

a/ KIG OP

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} x^n$$

b/ KIG NED

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} e_n x^n$$

$$\parallel$$

$$d_1 + d_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} d_n x^n$$

4/ $n \in \mathbb{N}_0$ LIGE $\Leftrightarrow$ $n = 2k, \ k \in \mathbb{N}_0$

$n \in \mathbb{N}$ ULIGE $\Leftrightarrow$ $n = 2k+1, \ k \in \mathbb{N}_0$

(ALTERNATIV $n = 2j-1, \ j \in \mathbb{N}$)

EKSEMPEL 1 ~~BEGYNDT~~

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

BEGYNDELSESVÆRDIPROBLEM.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \cdots$$

$$y(0) = c_0 = 1$$

$$y'(0) = c_1 = 0.$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$x y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

3) "KIG OP KIG NEO" (5)

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$= \cancel{\sum_{n=} } c_2 \cdot 2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

DERMED

$$2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0 \Leftrightarrow$$

FOR ALLE $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cancel{c_0 = 2c_2} \quad 2c_2 + c_0 = 0 \\ \left[c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n n + c_n\right] = \end{cases}$$

$$\left(c_{n+2}(n+2) + c_n\right)(n+1) = 0$$

FOR ALLE $n \in \mathbb{N}$

6

$$C_2 = -\frac{1}{2} C_0$$

$$C_{n+2} = -\frac{C_n}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

REKURSIONSFORMEL!

HUSK PÅ $C_0 = 1$, $C_1 = 1$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$C_3 = -\frac{C_1}{3} = 0 \quad \text{~~ALLE ULIKE C~~}$$

$$\ldots \Rightarrow C_n = 0 \quad \text{NÅR } n \text{ ULIKE}$$

$$\Rightarrow C_{2k+1} = 0 \quad \text{FOR ALLE } k \in \mathbb{N}_0$$

4/

$$C_4 = -\frac{C_2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1}$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{6} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot}$$

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \quad \text{FOR ALLE } k \in \mathbb{N}_0$$

KORREKT? INDSÆT I LIGNINGEN!

7

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n k!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad //$$

IDÉ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = e^x}$

EKSEMPEL 2

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

$\uparrow$ BVDR "SINGULÆR" : $x = 0$: $2y'(0) = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \; x \in \,]-\rho, \rho[$$

ρ UBEKENDT.

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$2y' = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_{n+1}(n+1)x^n$$

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-1}$$

$$\cancel{= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1) n x^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1) n x^n$$

$$2c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1}(n+1)(n+2) + c_{n-1} \right] x^n = 0$$ 9

FOR ALLE x $\Leftrightarrow$ $c_1 = 0$

OG $$c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$ FOR ALLE $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $c_{2k+1} = 0$ OG

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k+1)!}$$ FOR ALLE $k \in \mathbb{N}_0$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_0}{(2k+1)} x^{2k} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

K-RADIUS?

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|^2 \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Rightarrow \rho = \infty.$$

2/ DIFF-LIGNINGSSYSTEM AF 1. ORDEN

LINEÆR OG HOMOGEN

$\dot{X} = AX$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$,

$n = 2$ ELLER 3 TYPISK.

(INHOMOGEN:

$\dot{X} = AX + u$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ KENDT KONTINUERT FKT.)

<u>SÆTNING A</u> FULDSTÆNDIGE LØSNING

$x(t) = c_1 x_1(t) + \text{——} + c_n x_n(t)$

HVOR x_1 —— x_n ER n LINEÆRT UAFH LØSN. DVS

$c_1 x_1(t) + \text{——} + c_n x_n(t) = 0$ FOR ALLE t

$\Longrightarrow$

$c_1 = \text{——} = c_n = 0$

PÅ MATRIX-FORM

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}}_{\Phi(t)\ :\ \text{FUNDAMENTAL MATRIX}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$\Phi(t)$ REGULÆR MATRIX

<u>SATNING</u> B GIVET $\Phi(t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

LØSNING $x(t)$ MED $x(0) = x_0$ ER

$$x(t) = \cancel{\Phi(t)\, x_0}$$

$$\Phi(t)\, \Phi(0)^{-1} x_0$$

<u>BEVIS</u>: ALLE LØSNINGER

$x(t) = \Phi(t)\underline{c}$. $x(0) = \Phi(0)c = x_0 \Leftrightarrow$

$c = \Phi(0)^{-1} x_0$ $\quad\boxtimes$

HVORDAN FINDER VI $x_1 - x_n$? (12)

$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} v$, $v \neq 0$ LØSNING $\Leftrightarrow$

$VS = \lambda \cancel{e^{\lambda t}} v$

FOR ALLE t

$HS = A \cancel{e^{\lambda t}} v$

$Av = \lambda v$ $\begin{cases} \lambda \text{ EGENVÆRDI} \\ v \text{ EGENVEKTOR} \end{cases}$

$(A - \lambda I)v = 0$, $v \neq 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$

HVOR $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ KARAKTE-RISTISKE POL AF GRAD n.

$\lambda_1, \text{---}, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$am(\lambda_i)$ = ALGEBRAISK MULTIPLICITET

$gm(\lambda_i)$ = GEOMETRISKE — // —

= ANTAL LINEÆRT UAFH EGENVEKTORER HØRENDE TIL λ_i

GÆLDER AT $1 \leq gm(\lambda_i) \leq am(\lambda_i)$

PROBLEMSTILLING:

a/ $gm(\lambda_i) < am(\lambda_i)$ MANGLER LIN UAF LØSNINGER

$\boxed{\text{VIS SETN 2.11}}$

b/ ~~HL~~ / H

$\lambda_i \in \mathbb{C}$, $v_i \in \mathbb{C}$

HVIS $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

BEGGE LØSNINGER $\left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i \\ \overline{x_i}(t) = e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{v_i} \end{array} \right. \Rightarrow$

$Re(x_i)$, $Im(x_i)$ OGSÅ LØSNINGER, MEN REELLE.

EKSEMPEL

(14)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2 = 0 \iff \lambda = -1$$
$am = 2.$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

"EIGENVECTORS"

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ ~~MANGLER LØSNINGER~~

MANGLER LIN UAFH LØSNING

SÆTNING 2.10

$$x_2(t) = u e^{-t} + w e^{-t} t$$

$$VS = -u e^{-t} - w e^{-t} t + w e^{-t}$$

$$= (w-u)\cancel{e^{-t}} - w \cancel{e^{-t}} t$$

$$HS = A u \cancel{e^{-t}} + A w \cancel{e^{-t}} t$$ FOR ALLE t

(1) $Aw = -w$, $w = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

(2) $Au = w - u$

$(A+I)u = w \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ "LINEARSOLVE"

$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}u = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

DVS $x_2(t) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{-t} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{-t}t$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}t \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

FULLSTENDIG LØSN

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

DAG 8

1/ STABILITET $\quad \dot{x} = Ax \quad (*)$

2/ INHOM $\quad \dot{x} = Ax + u$, u KENDT.

DEFINITION 2.28

a/ $(*)$ ER STABILT HVIS ~~ALLE~~ ENHVER LØSNING~~ER~~ ER BEGRÆNSET FOR $t \geq 0$:

$x(t)$ LØSNING $\Rightarrow$ $|x(t)| \leq C$ FOR ALLE $t \geq 0$

b/ USTABILT ELLERS (DVS $|x(t)| \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$ FOR MINDST EN LØSNING)

c/ SYSTEM $(*)$ ER A-STABILT HVIS (DET ER STABILT OG) ~~ALLE~~ ENHVER LØSNING GÅR MOD 0 NÅR $t \to \infty$:

OBS

$x(t)$ LØSNING $\Rightarrow$ $|x(t)| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

OBS A-STABILT $\Rightarrow$ STABILT

SÆTNING 2.11 VISER AT ENHVER LØSNING ER EN LINEÆR KOMBINATION AF LØSNINGER PÅ FORMEN

$$p(t)e^{\lambda t} = p(t)e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right]$$

HVOR P ER POL (AF GRAD $\leq gm(\lambda)-1$)

OG HVOR $\lambda = \alpha + i\beta$ ER EGENVÆRDI FOR MATRICEN A.

DERMED

SÆTNING 2.38

(*) ER A-STABILT $\Leftrightarrow$ $Re(\lambda) < 0$ FOR ~~ALLE~~ ENHVER EGENVÆRDI

SÆTNING 2.36

(*) ER STABILT $\Leftrightarrow$ DER GÆLDER FØLGENDE FOR ENHVER EGENVÆRDI λ:

i/ $Re\,\lambda \leq 0$

ii/ $Re\,\lambda = 0 \Rightarrow gm(\lambda) = am(\lambda)$

EKSEMPEL 1 $\quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1 \Rightarrow$ A-STABILT.

EKSEMPEL 2 $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 0$, $am = 2$, $gm = 1$ USTABILT!

$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

EKSEMPEL 3

$$\dot{\underline{x}} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & -b & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad b \in \mathbb{R}$$

OPG: FOR HVILKE VÆRDIER AF $b \in \mathbb{R}$ ER (*) A-STABILT?

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + (b+1)\lambda^3 + (b+1)\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 \ldots$$

SÆTN 2.41 VIS EJ

KOR 2.42 $n=2$

KOR 2.43 $n=3$

KOR 2.44 $n=4$

FOKUS.

OBS $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + \ldots$

$\boxed{\text{SE OPG 422 iii}}$

④

KOR 2.44 ALLE RØDDER I

$P(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$

HAR NEGATIV REALDEL $\Longleftrightarrow$

i/ $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0$

og

ii/ $D_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0$

og

iii/ $D_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0$

EKSEMPEL 3 IGEN

$a_1 = b+1,\ a_2 = b+1,\ a_3 = 2b,\ a_4 = b^2$

DVS (*) A-STABILT $\Leftrightarrow$ (5)

i/ $\underline{\underline{b>0}}$

og

ii/ D_2 $\det\begin{pmatrix} b+1 & 2b \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} = b^2+1>0$

og

iii/ $D_3 = \det\begin{pmatrix} b+1 & 2b & 0 \\ 1 & b+1 & b^2 \\ 0 & b+1 & 2b \end{pmatrix} =$

$\cancel{b}$ $b(1-b)(b^2+b+1)>0$

GIVET $b>0$, $D_3>0 \Leftrightarrow \underline{\underline{b\in\,]0,1[}}$

SAMLET A-STABILT $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{b\in\,]0,1[}}$

$b=0$? $\underline{\text{STABILT}}$

$\boxed{\text{MAPLE}}$

2/ $\dot{x} = Ax + u$, u KENDT

SÆTNING 2.20*

FULDSTÆNDIGE LØSNING

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_0(t)$$

HVOR ~~x_0~~ x_0 ER EN PARTIKULÆR LØSNING.

α/

SÆTNING 2.20 HAR GENERAL LØSNINGSFORMEL, MEN OFTE LETTERE AT GÆTTE

~~EK~~ EKSEMPEL ~~4~~ 4 ⑦

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x - e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

FULDSTÆNDIGE LØSN?

$x_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ OG $x_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ HOMOGENE

LIN UAFH LØSN TIL

SYSTEM:

$x_{Hom}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

PARTIKULÆR LØSN

$x_0(t) = e^{2t} \underline{H}$, $\underline{H}$ UBEKENDT,

LØSNING $\Leftrightarrow$

$VS = 2\cancel{e^{2t}} \underline{H}$

$HS = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cancel{e^{2t}} \underline{H} - \cancel{e^{2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

(8)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

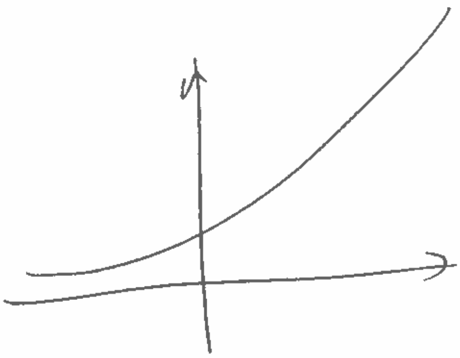
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ FULDSTÆNDIGE REELLE LØSNING

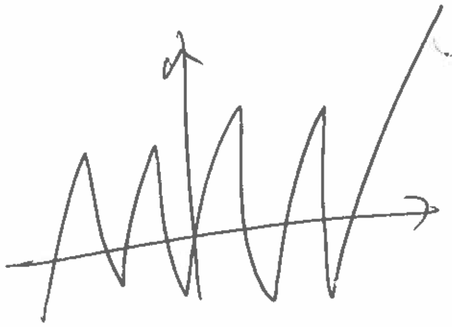
$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

DAG 9 FOURIERRÆKKER



POTENSRÆKKER



IKKE POTENSRÆKKE

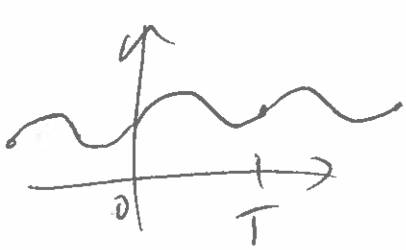
MÅSKE FOURIERRÆKKE

~~DEFINITION 6.1~~

DEFINITION (SE S. 138) EN FUNKTION

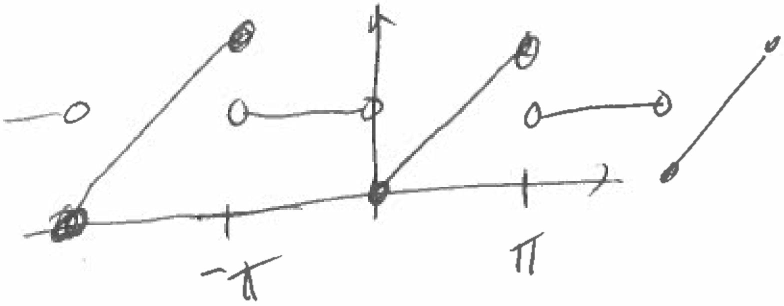
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ER T-PERIODISK FUNKTION MED ~~MED PERIODE~~

$T > 0$ SÅFREMT $f(x+T) = f(x)$ FOR ALLE x



I MAT 2 $T = 2\pi$ ← PERIODEN

EKSEMPLER: $\cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{N}_0$ 　(2)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in]-\pi, 0[\\ x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

FOR $x \in [-\pi, \pi[$

DEFINITION 6.1 LAD $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ VÆRE 2π-PERIODISK. DA DEFINERES FOURIER-RÆKKEN FOR f SOM

$$FR(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

(SKRIVES SOM $f \sim FR$)

HVOR

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx), \quad n = 0, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx), \quad n = 1, \ldots$$

a_n, b_n KALDES FOURIER-KOEFFICIENTERNE

HVORFOR?

(3)

$$f(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$

OG ANTAG AT RÆKKEN FOR

UNIFORM $\underline{K}$ (DERMED KONT f)

VHA SÆTNING 5.36

LAD $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0\cos(nx)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k\cos(nx)\cos(kx) + b_k\cos(nx)\sin(kx)\right)dx$$

KUN BIDRAG FOR $\underline{n=k}$

$$= \pi a_n$$

TILSVARENDE

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \pi b_n \quad \text{FOR ALLE } n \in \mathbb{N}$$

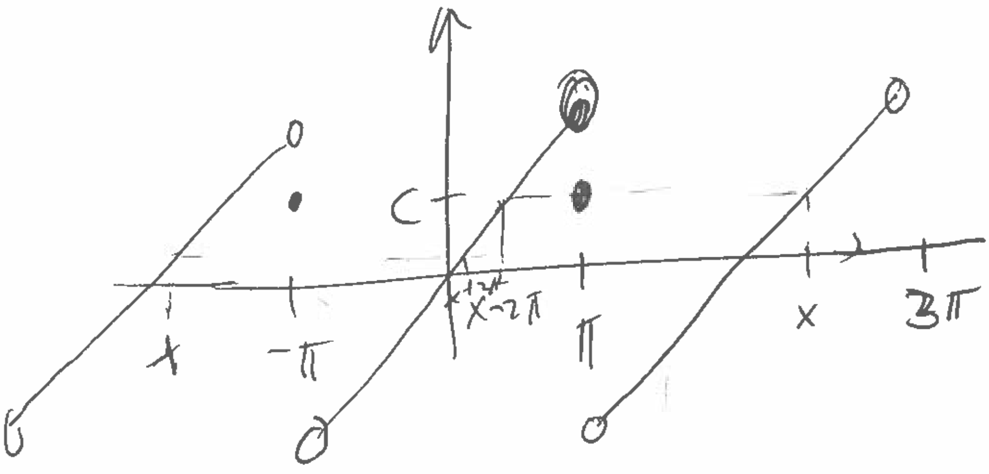
SE OPVARMNINGSOPGAVERNE

EKSEMPEL 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-PERIODISK FUNKTION GIVET VED FORSKRIFTEN

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in]-\pi, \pi[\\ c, & x = \pi \end{cases}$$

I INTERVALLET $]-\pi, \pi]$



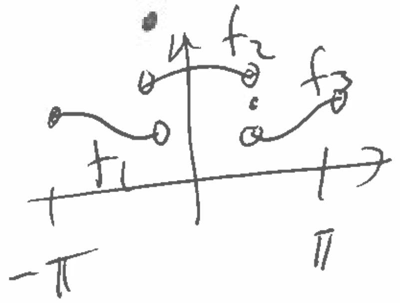
$f(x) = \underline{x - 2\pi}$, $x \in]\pi, 3\pi[$

$f(x) = x + 2\pi$, $x \in]-3\pi, -\pi[$

MAPLE

FOURIER'S SÆTNING 6.16

LAD f VÆRE 2π-PERIODISK OG
STYKKEVIS DIFFERENTIABEL:
(SE DEFINITION 6.13)



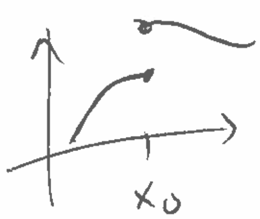
f_1, f_2, f_3 ALLE
DIFFERENTIABLE FUNKTIONER

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \\ f_2(x), & x \in I_2 \\ f_3(x), & x \in I_3 \end{cases}$$

DA GÆLDER FØLGENDE:
F-R ER PUNKTVIS KONVERGENT
OG a/ $f(x_0) = FR(x_0)$ NÅR
f ER KONT I x_0

b/ ~~FR(x_0) =~~ ~~GENNEMSNITSVÆRDI~~
$\cancel{= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)}$

b/ $FR(x_0) = $ GENNEMSNITSVÆRDI



$$= \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right)$$

HVOR $f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

SAMME ANTAGELSER

<u>KOROLLAR</u> 6.17 HVIS f ER KONT $\Rightarrow$

$f(x) = FR(x)$ FOR ALLE x OG

ER <u>K</u> UNIFORMT!

OBS DAG 6 ~~f KONT $\Rightarrow$ UNIFORM K~~

~~f DISKONT $\Rightarrow$ IKKE~~

UNIFORM <u>K</u> $\Rightarrow$ SUMFUNKTION KONT

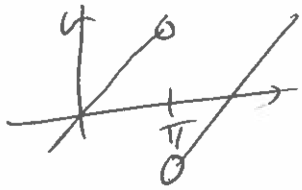
(f DISKONT $\Rightarrow$ <u>IKKE</u> UNIFORM <u>K</u>)

EKSEMPEL 1 IGEN

(7)

$x = n\pi$, $n \in ?$ DISKONTINUITETS PKT

FOR f



$f(x) = FR(x)$ FOR ALLE $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$f(\pi^+) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = -\pi$$

$$f(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi$$

$$FR(\pi) = 0$$

OBS

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = FR\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

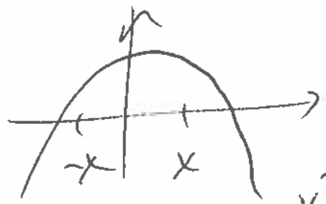
DVS $f(x) = F_R(x)$ FOR ALLE x

$\iff$

~~SÅ FREMT~~ $c = 0$

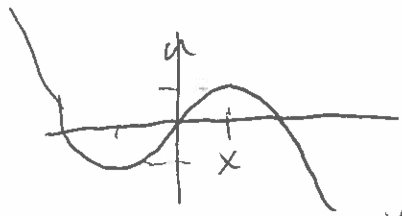
TEKNISKE ASPEKTER

DEFINITION 6.2 EN FUNKTION $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ER LIGE SÅFREMT $f(-x) = f(x)$ FOR ALLE $x \in \mathbb{R}$



$x^2, x^4, \cos(nx)$

DEFINITION 6.3 EN FUNKTION $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ER ULIGE SÅFREMT $f(-x) = -f(x)$ FOR ALLE $x \in \mathbb{R}$.



$x^3, x^5, \sin(nx)$

SÆTNING

1 LIGE FUNKTION × LIGE FUNKTION = LIGE FKT

2 LIGE —"— × ULIGE FUNKTION = ULIGE FKT

3 ULIGE —"— × ULIGE FUNKTION = LIGE FKT

BEVIS FOR 3/

$h(x) = f(x)g(x)$ ⑨

f, g ULIGE

$$h(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = h(x)$$

$\Rightarrow$ <u>h LIGE</u>

<u>SÆTNING</u> 6.6

i/ ANTAG AT ~~EKS~~ f ER EN LIGE FUNKTION $\Rightarrow$

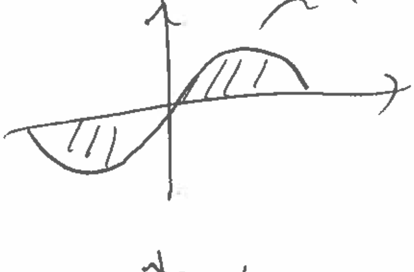
ALLE $b_n = 0$ OG $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

ii/ ANTAG AT ~~EKS~~ f ER ULIGE FUNKTION $\Rightarrow$

ALLE $a_n = 0$ OG $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

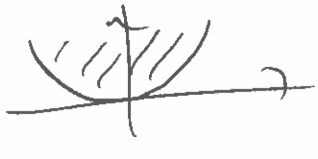
<u>BEVIS</u>

h ULIGE $\Rightarrow$ $\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0$



f

h LIGE $\Rightarrow$ $\int_{-\pi}^{\pi} h(x) = 2\int_0^{\pi} h(x)dx$



MAPLE

DAG 10 (1)

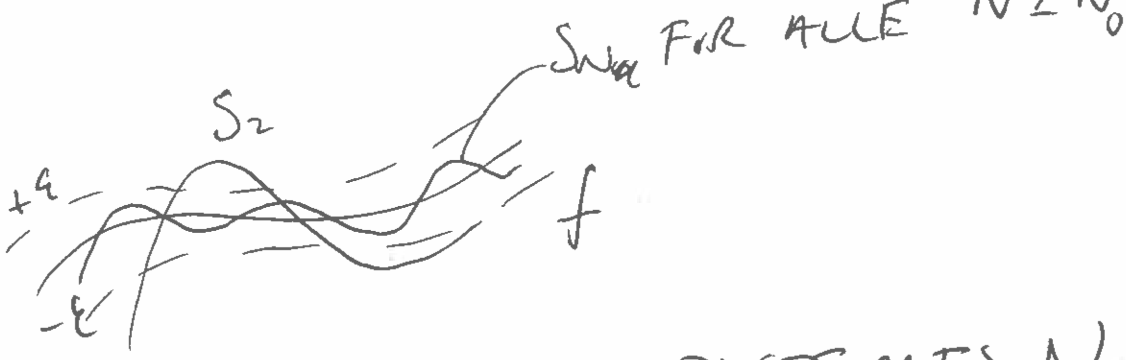
1/ APPROKSIMATION AF FR

2/ FR PÅ KOMPLEKS FORM

1/ KOR 6.17 i/ ANTAG f 2π-PERIODISK, STYKKEVIS DIFF OG KONT. DA GÆLDER AT $f(x) = FR(x)$ FOR ALLE x

OG FR ER UNIFORM K.

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$



GIVET $\varepsilon > 0$ HVORDAN BESTEMMES N:

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon \quad ?$$

KOR 6.17 ii ELLER (BEDRE)

VHA MAJORANTRÆKKER:

ANTAG FOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ (2)

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq K_n = g(n)$$

EKSEMPEL $g(n) = |a_n| + |b_n|$ VHA

TREKANTSULIGHEDEN, HVOR

$g: [1, \infty[\to [0, \infty[$ ~~AFTAG~~

ER DIFF MED $g'(x) \leq 0$

(AFTAGENDE) DA HAR VI VHA

KOROLLAR 4.35

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \int_N^\infty g(x)\,dx.$$

OPG: ~~[illegible]~~

LØS $\int_N^\infty g(x) \leq \varepsilon$ FOR N.

EKSEMPEL 1

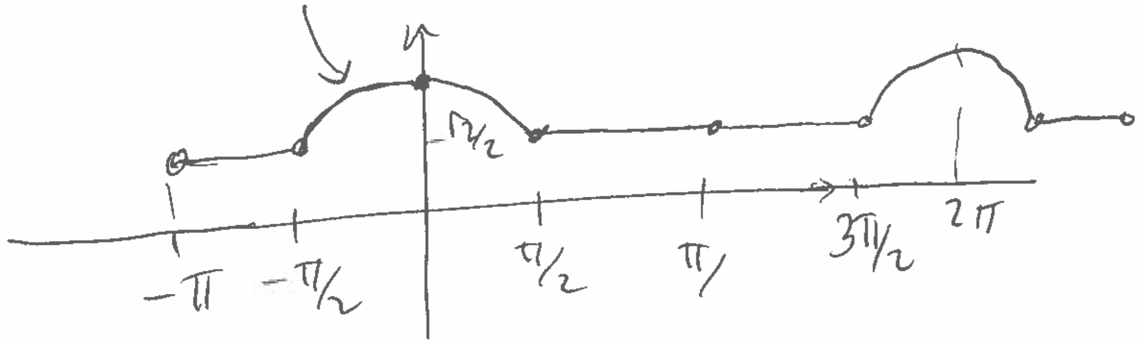
(3)

f ER 2π-PERIODISK, LIGE OG

GIVET VED

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \text{FOR } x \in [0, \pi/2] \\ \sqrt{2}/2 & \text{FOR } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

IDET f ER LIGE



f ER KONT: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}/2$

f ER STK-VIS DIFF IDET $\cos(x/2)$ OG $\sqrt{2}/2$ ER DIFF ~~DIFF~~ FOR ALLE x.

$\Longrightarrow$ $f(x) = FR(x)$ FOR ALLE x

ALLE $b_n = 0$. VHA SÆTN 6.6

FR UNIFORM K

<u>VHA SÆTN 6.6</u>

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cancel{f(x)}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\;\frac{\sin(\pi n/2) - 2n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n\,\underbrace{(4n^2-1)}_{(2n+1)(2n-1)}}$$

$n = 0$ SÆRTILFÆLDE!

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{2\pi}$$

OPG BESTEM N : $|f(x)-S_N(x)| \le \frac{1}{20}$ (5)

FOR ALLE $x \in \mathbb{R}$.

$n \neq 0$, $|a_n| \le \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1+\cancel{2n}}{n\cancel{(2n+1)}(2n-1)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi n(2n-1)}$

$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi x(2x-1)}$ $\boxed{\text{MAPLE}}$

ALTERNATIV: $0 \le n-1$ FOR ALLE $n \ge 1$

$\Rightarrow n \le 2n-1 \Rightarrow \frac{1}{2n-1} \le \frac{1}{n}$

$|a_n| \le \frac{\sqrt{2}}{\pi n^2} := g(n)$, $g'(x) < 0$ FOR $x \ge 1$.

$|f(x)-S_N(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{N}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_N^t = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{N}$

$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{N} \le \frac{1}{20}$ GIVER $N \ge 9.003$

SVAR: $N = \underline{\underline{10}}$

2/ KOMPLEKSE FR

$$f \sim FR(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

HVOR

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad , n = 0, —$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n = 1, —$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x) \Rightarrow$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

TILSVARENDE

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - i e^{-ix}}{2i}$$

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) =$$

$$\underbrace{\left[\frac{a_n}{2} - \frac{i}{2} b_n\right]}_{c_n} e^{inx} + \underbrace{\left[\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2}\right]}_{c_{-n}} e^{-inx}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

SE LEMMA 6.26

c_n, $n \in \mathbb{Z}$ KALDES KOMPLEKSE FOURIERKOEFFICIENTER, SE DEFINITION 6.25

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

KOMPLEKSE FR FOR f.

OBS $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx} \cdot e^{inx} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-n)x}\, dx$

HVIS UNIFORM K

$= $ 2pi c_n

BEMÆRKNING

HVIS $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ SÅ GÆLDER

1) $c_n = \overline{c_{-n}}$

2) $a_n = c_n + c_{-n} = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$

$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

SE LEMMA 6.26.

MOTIVATION

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$$

$\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \iff m>0,\ c>0,$ og $k>0.$

KOR 2.42

$\boxed{\text{MAPLE}}$

DAG 11

1/ PARSEVAL's SÆTN 6.30

2/ OVERFØRINGSFUNKTIONER $H(s)$:

$$(D_n y)(t) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \text{———} + a_n y = u$$

$u(t) = e^{st}, \; s \in \mathbb{C}$

LØSNINGSSÆT $y(t) = e^{st} H(s), \; s \neq \lambda$

SÆTN $\underline{1.25}$

SÆTN $\underline{1.27}$: LØSN TIL $D_n y = \operatorname{Re} u$

$D_n y = \operatorname{Im} u$

3/ FOURIERRÆKKEMETODEN LEMMA 7.7 & SÆTN 7.8

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \Rightarrow$$

LØSNING $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H(in) e^{int}$

$z \in \mathbb{C}, \quad \underbrace{|z|}_{1.1 = \text{MODULUS}}{}^2 = z\bar{z} \geq 0$

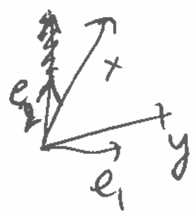
1/ f 2π-PERIODISK, KONT, STK-VIS DIFF FUNKTION ER LIG SIN FR (2)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

KONVERGERER UNIFORMT

KOROLLAR 6.17

PLANE VEKTORER



$x \cdot y = |x||y| \cos\angle x, y$

$x \cdot x = |x|^2 \geq 0$

ORTHONORMAL BASIS

e_1, e_2 :

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2$$

$$x \cdot x = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1^2 + a_2^2$$

PYTHAGORAS

2π-PERIODISKE FKT

DEFINITION:

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x) dx$$

$$f \cdot f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{f}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq 0$$

$$e_n = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$e_n \cdot e_m = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$f \cdot f = \sum c_n e^{inx} \cdot \sum c_n e^{inx} =$$

SÆTNING 6.36 ANTAG AT $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty}$ (3)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

HVIS $a_n, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

~~*BEVIS~~ ~~FOR ENDELIG SUM~~

$$\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\, \overline{e^{-inx}}\, dx =}$$

$$\cancel{\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n}\, 2\pi}$$

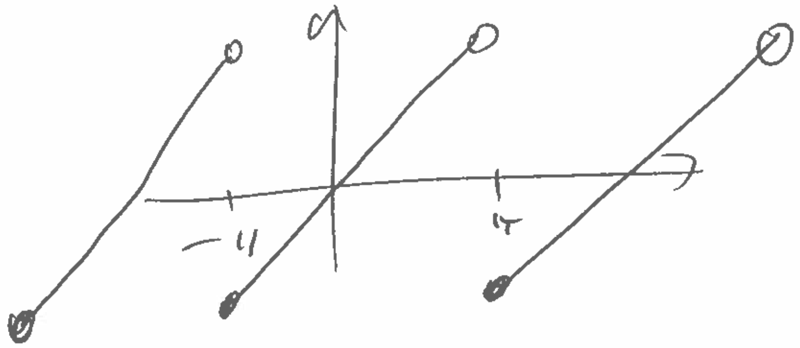
EKSEMPEL FRA DAG 9 (4)

~~f(x)=~~

f 2π - PERIODISK OG GIVET VED

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi[\text{ PÅ}$$

INTERVALLET $[-\pi, \pi[$.



~~BESTEM~~

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx)$$

$$\left(f(x) \neq FR(x) \iff x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \right)$$

ALLE $\underline{\underline{a_n = 0}}$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

PARSEVALS SÆTN

$$VS = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$HS = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

(5)

3/ HJEMMEOPG SPM V : BESTEM $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

OPG B : OVERSE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

2/ $(D_k y)(\cancel{t}) := y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \dots + a_k y$

K'TE GRADS DIFF-LIGN KEN:

$$(D_k y)(t) \overset{*}{=} u(t) \leftarrow \boxed{\text{PÅVIRKNING}}$$

INHOMOGEN

EKSEMPEL

$$my'' + cy' + ky = \cancel{F}(t)$$

$$F(t) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{int}$$

PARTIKULÆR LØSN?

BETRAGT FØRST $u(t) = e^{st}$ FOR (*)

$s \in \mathbb{C}$. SPECIELT $s = in$:

$$u(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

GAT: $y(t) = H(s)\cancel{e}\,e^{st}$ LÖSNING (6)

$$\Uparrow$$

$$H(s)\left[s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n\right]e^{st} = \cancel{e^{st}}$$

$$H(s) = \frac{1}{p(s)}, \quad p \text{ KARAKTERISTISKT POL.}$$

$s \neq \lambda$ ROD I P

<u>SATNING</u> 1.25: ANTAG $s \neq \lambda$

ROD I $p(\lambda)$, $\Rightarrow$

$y(t) = H(s)e^{st}$ PARTIKULÄR LÖSN (STATIONÄRT SVAR)

~~FÖR~~ u

FÖR $u(t) = e^{st}$ (PÅVERKNING)

EKSEMPEL 2 ⑦

BOGEN BETRAGTER OGSÅ DIFF-LIGNINGER PÅ FORMEN

$$\ddot{y} - y = \dot{u} + u$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \iff \lambda = \pm 1$$

$$y_{Hom}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}, \quad \underline{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

OBS

OPG: BESTEM OVERFØRINGSFKT $H(s)$, $s \neq \pm 1$

LØSNING INDSÆT $u(t) = e^{st}$ (PÅVIRKNING) OG $y(t) = H(s)e^{st}$

$$H(s)\left[s^2 - 1\right]e^{st} = (s+1)e^{st}$$

$$H(s) = \frac{1+s}{(1+s)(s-1)} = \frac{1}{s-1}, \quad s \neq \pm 1$$

OPG BESTEM FL NÅR $u(t) = \cos(t)$. (8)

LØSNING: "KOMPLEKSE GÆTTEMETODE"

$\operatorname{Re}(e^{it}) = \cos(t)$, $s = i$.

SÆTNING 1.27 BETRAGT (*) OG ANTAG

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $D_n y = u$.

DA GÆLDER

$$\boxed{\begin{aligned} D_n \operatorname{Re} y &= \operatorname{Re} u \\ D_n \operatorname{Im} y &= \operatorname{Im} u \end{aligned}}$$

~~OBS~~ $\cancel{D_n y = c u}$

$\cancel{D_n y = c u}$ ~~FOR ALLE~~ $\cancel{c \in \mathbb{C}}$

BEVIS

$$D_n y = u$$

$$D_n \bar{y} = \bar{u}$$

$$2 D_n y = D_n y + D_n \bar{y} = u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u$$

EKSEMPEL 2 FORTSAT

$s = i$: $y = H(i)e^{it}$

$= \frac{1}{i-1} e^{it}$ LØSNING TIL $u = e^{it}$

$y(t) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{it}$

$= -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$

$+ i\left[-\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin t\right]$

ALTSÅ FOR $u(t) = \cos(t) \Rightarrow$

$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$

~~EL~~ LØSN (PARTIKULÆR)

FL : $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$ ✓

(DIFF-LIGN ER
$y'' - y = \cos(t) - \sin(t)$)

(10)

HVAD MED $u(t) = 2\cos(t) - \sin(t)$?

se sætning 1.23

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(H(i)e^{it}\right) - \mathrm{Im}\left(H(i)e^{it}\right)$$

3/ FERMATOORN

$$(D_u y)(t) = u(t) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{int}$$

$P(in) \neq 0$ FOR ALLE $n \in \mathbb{Z}$.

u: e^{-iNt} - - e^{int} e^{iNt}

y: $H(-iN)e^{-iNt}$ $H(in)e^{int}$ $H(iN)e^{iNt}$

SÆTNING 1.23*:

1/ $D_u y = u \Rightarrow D_u(cy) = cy$ FOR ALLE $c \in \mathbb{C}$

OG

$u: \quad d_{-N}e^{-iNt} \qquad d_n e^{int} \qquad d_N e^{iNt}$ (11)

$y: \quad d_{-N}H(-iN)e^{-iNt} \quad d_n H(in)e^{int} \quad d_N H(iN)e^{iNt}$

SATNING 1.23*

2/ $\left.\begin{aligned} D_u(y_1) &= u_1 \\ D_u(y_2) &= u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$D_u(y_1+y_2) = u_1+u_2$

$u: \quad d_{-N}e^{-iNt} + \text{---} + d_n e^{int} + \text{---} + d_N e^{iN}$

$y: \quad d_{-N}H(-iN)e^{-iNt} + \text{---} + d_n H(in)e^{int} + \text{---} + d_N H(iN)e^{i}$

$$= \sum_{n=-N}^{N} d_n H(in)e^{int}$$

LEMMA 7.7

HVAD MED $N \to \infty$?

SÆTNING 7.8*

ANTAG $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|$ K MAJORANTRÆKKE

FOR $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$, $d_n \in \mathbb{C}$

(u KONT OG UNIFORM K JVF SÆTNS.)

DA ER $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H(in) e^{int}$

PARTIKULÆR LØSN FOR (*),

OBS ANTAG AT u REEL $\Rightarrow$

$d_n = \overline{d_{-n}}$, SE LEMMA 6.27

$\Rightarrow$ $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H(in) e^{int}$ OGSÅ

REEL: $c_n = d_n H(in)$

$\overline{c_{-n}} = d_n H(in)$

DAG 12 (1)

1/ ÖVERFÖRINGSVEKTOR-FUNKTION

FÖR $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$.

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ KÄNDT ~~FUNKTION~~ KONT FKT.

2/ ÖVERFÖRINGSFUNKTION FÖR

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$$

$$y = \underline{d}^T \underline{x} \quad , \quad \underline{d} \in \mathbb{R}^n$$

3/ F-R-MATRIXEN

1/ KÄNDT: $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$
~~$A \in \mathbb{R}$~~ $u : \mathbb{R} \to \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$ KONT FKT.

UKÄNDT: $\underline{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

ANTAG $u(t) = e^{st}$ (PÅVIRKNINGEN)

PARTIKULÆR LØSN $y(t) = \underline{H}(s)e^{st}$

INDSETTELSE

(2)

$$VS = s\,\underline{H}(s)\,e^{st}$$

$$HS = \left[\underline{A}\,\underline{H}(s) + \underline{b}\right]e^{st}$$

$$\underline{A}\,\underline{H}(s) + \underline{b} = s\,\underline{H}(s)$$

$$(\underline{A} - s\underline{I})\,\underline{H}(s) = -\underline{b}$$

DVS HVIS $s \neq$ EGENVERDI λ

$$\Rightarrow \quad \underline{H}(s) = -(\underline{A} - s\underline{I})^{-1}\underline{b}$$

~~LØSNING~~ $\cancel{\underline{x}(t) = (\underline{A} \quad \underline{H}(s)e^{st}}$

EKSEMPEL

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}u$$

$$\lambda = 8, -4$$

$$\underline{H}(s) = -\left(\begin{bmatrix} 5-s & 3 \\ 9 & -1-s \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad s \neq 8, -4$$

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{s+4}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, \quad s \neq 8, -4$$

3

OPG: BESTEM PARTIKULÆR LØSN TIL $u(t) = 1 + 2\cos(t)$

LØSNING:

I/ FINDER LØSN $\underline{x}_1$ MED $u(t) =$

II/ —||— $\underline{x}_2$ MED $u(t) = \cancel{\cos(t)}$ e^{it}

SAMLET LØSN: $\underline{x} = \underline{x}_1 + 2\,\mathrm{Re}(\underline{x}_2)$.

VHA SÆTNING 1.23 og 1.27 i lærebogen

I/: $s = 0$! $\underline{x}_1(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

II/: $s = i$! $u(t) = e^{it} \Rightarrow$

$$\underline{x}_2 = \underline{H}(i)\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}e^{it}$$

④

$$= \frac{1}{i+4}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}e^{it}$$

$$= \frac{-i+4}{17}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}e^{it}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{4}{17}\cos(t)-\frac{1}{17}\sin(t)\\ \frac{12}{17}\cos(t)+\frac{3}{17}\sin(t)\end{bmatrix}$$

$$+\, i\,\{\ \dots\ \}$$

DERMED

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_1(t) + 2\underline{X}_2(t)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-\frac{4}{17}\cos(t)-\frac{1}{17}\sin(t)\\ \frac{12}{17}\cos(t)+\frac{3}{17}\sin(t)\end{bmatrix}$$

PARTIKULÆR LØSN FOR

$$u(t) = 1+2\cos(t)\ !$$

5

2/ $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$

$y = \underline{d}^T \underline{x}$

KENDTR $\left\{ \begin{array}{l} \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \underline{b} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{d} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$

UBEKENDTE: $\underline{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

OBS! KENDTE $\underline{x} \Rightarrow y = \underline{d}^T \underline{x}$

OGSÅ KEND[illegible]

EKSEMPEL 2

$\ddot{y} + \delta \dot{y} + \chi y = u(t)$

$x_1 = y \qquad \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$

$x_2 = \dot{y} \qquad \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\delta \dot{y} - \chi y + u(t)$

$= -\delta x_2 - \chi x_1 + u$

$\Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\chi & \delta \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = x_1$ VIGTIG!

OVERFØRINGSFUNKTION: (6)

$u(t) = e^{st}$, $s \neq \lambda$ $\Rightarrow$

$\underline{x}(t) = \underline{H}(s)\, e^{st}$ LØSNING $\Rightarrow$

$$y(t) = \underbrace{\underline{d}^T \underline{H}(s)}_{\text{OVERFØRINGSFUNKTION! } H(s)} e^{st} \leftarrow \text{"STATIONÆRE SVAR"}$$

$$H(s) = -\underline{d}^T (\underline{A} - s\underline{I})^{-1} \underline{b}$$

s. 48 i LÆREBOGEN.

EKSEMPEL 3

~~FIND STATIONÆRE~~

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \underline{u}$$

$y = \underline{d}^T \underline{x}$ HUSK I/ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II/ $\underline{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

OPG BESTEM STATIONÆRE SVAR ⑦
~~F~~ÆRDINDR TIL PÅVIRK-
NINGEN $u(t) = e^{4t}$.

LØSNING:

$$\underline{H}(4) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}$$ PARTIKULÆR LØSN

I/ $$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$= -\frac{1}{8} e^{4t}$$

II/ $$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$= 0 \;!!$$

3/ F-R-METODEN (8)

LEMMA lemma 7.7! LAD $N \in \mathbb{N}$.

ANTAG $in \neq$ EGENVÆRDI FOR $\underline{A}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

SÅ GÆLDER $u(t) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{int}$

$\Longrightarrow y(t) = \sum_{n=-N}^{N} d_n H(in) e^{int}$ LØSN!

(STATIONÆRT SVAR!)

SÆTNING Sætning 7.8

ANTAG $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n| \leq$ MAJORANT-RÆKKE

$\Rightarrow u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$ KONT

$\Longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H(in) e^{int}$

LØSNING!

y REEL $\Longleftrightarrow d_n = \overline{d_{-n}} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$

EKSEMPEL 4 (9)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

OPG FIND STATIONÆRE SVAR

~~TIL PÅVIRKN~~

HØRENDE TIL PÅVIRKNINGEN

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \cos(nt) + 1$$

DVS $a_0 = 2$. $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

VHA LEMMA 6.22 $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$

$$d_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2(n^2+1)}, \quad n = 1, \ldots$$

$$d_0 = \frac{a_0}{2} = 1.$$

$$d_n = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2(n^2+1)}, \quad n = -1, -2, \ldots$$

DVS $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2(n^2+1)} e^{int} + \underbrace{1}_{n=0}.$

(10)

$$H(s) = -\frac{1}{s+4}$$

$$H(in) = -\frac{1}{in+4} = \frac{in-4}{n^2+16}$$

$n \in \mathbb{R}$.

$$H(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2(n^2+1)} \frac{in-4}{n^2+16}}_{c_n = \overline{c_{-n}}} e^{int} - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{(n^2+1)(n^2+16)} \cos(nt) \right.$$

$$\left. + \frac{n}{(n^2+1)(n^2+16)} \sin(nt) \right)$$

$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$ $\qquad$ $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$

VHA LEMMA 6.2b.

(11)

OPG : LAD

$$S_N(t) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{N} \overbrace{\left(\qquad \right)}^{y_n(t)}$$

BESTEM N : $|y(t) - S_N(t)| \le 0.1 \quad \forall t$

MAJORANT !

$$y_n(t) = \frac{-4}{(n^2+1)(n^2+16)} \cos(nt) + \frac{n}{(n^2+1)(n^2+16)} \sin(nt)$$

$$|y_n(t)| \le \frac{4}{(n^2+1)(n^2+16)} + \frac{n}{(n^2+1)(n^2+16)}$$

$$\le \frac{4+n}{(n^2+1)(n^2+16)} \le \frac{5n}{n^2\, n^2}$$

$$= \frac{5}{n^3}$$ $\underline{K}$ MAJORANT-RÆKKE:

LAD $y(x) = \frac{5}{x^3}$ AFTAGENDE FKT.

DVS

$$|y(t) - S_N(t)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n(t)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{5}{n^3}$$

$$\le \int_{N}^{\infty} \frac{5}{x^3}\, dx = \frac{5}{2N^2}$$

$$\frac{5}{2N^2} \leq 0.1 \Rightarrow N \geq 5$$ 12

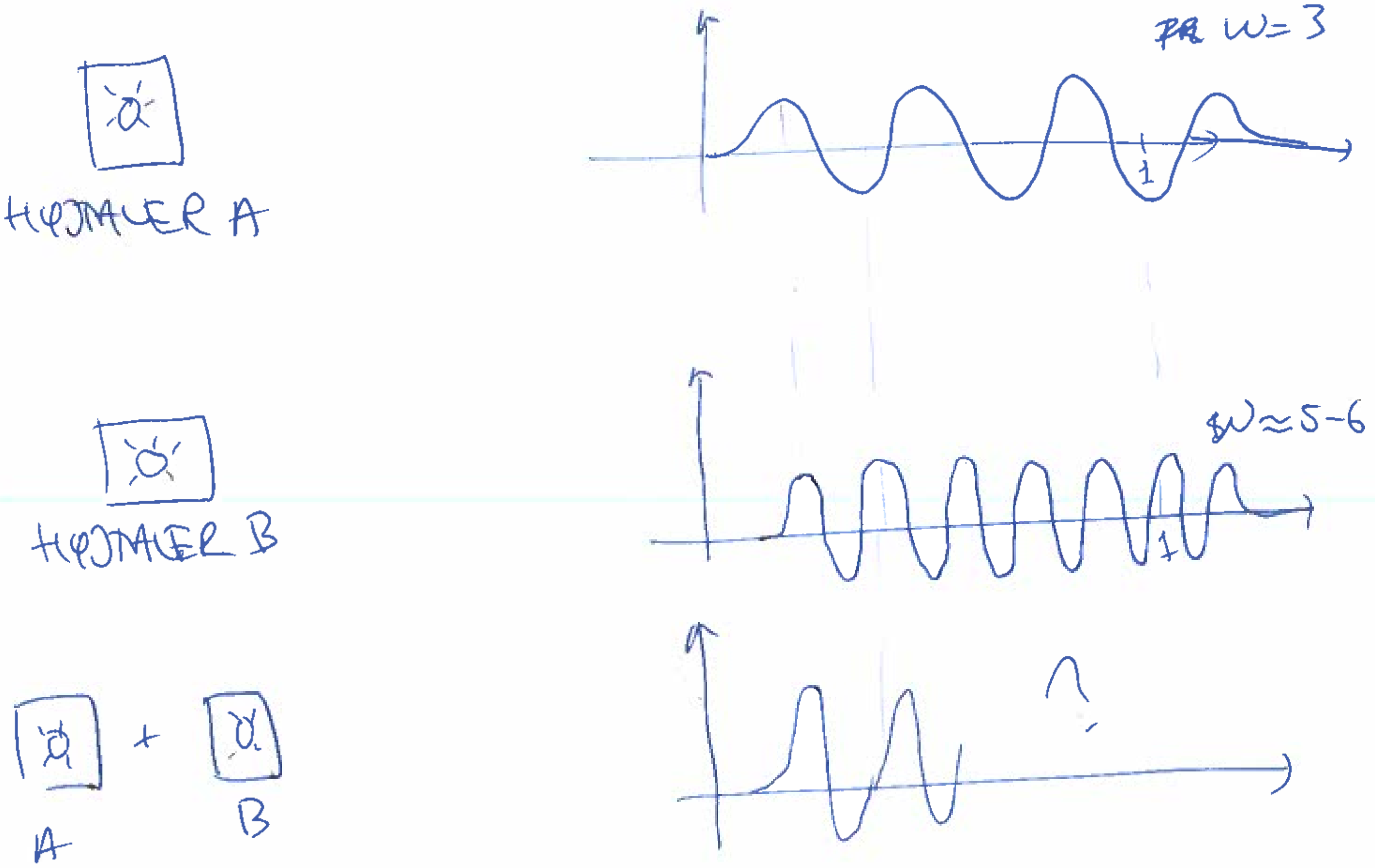
Dvs $\cancel{N \geq 5 \Rightarrow}$

$$|y(t) - S_5(t)| \leq 0.1 \quad \forall t.$$

V FOURIER TRANSFORMATION

(1)

~~2/ E 18~~



PROBLEM: KENDER A+B. KAN JEG BESTEMME A OG B?

(MAPLE)

DEFINITION F. T. AF FUNKTION

2

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ER EN NÆ ~~FUKT~~ FUNKTION

$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ GIVET VED

$$\hat{f}(\omega) = \cancel{\frac{1}{t_2 - t_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega x} f(x)\,dx$$

BETINGELSE PÅ f: f TILHØRER $\mathcal{L}^1$

$$\mathcal{L}^1 = \{ g: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty \}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n}$$

EGENSKABER:

1) $\mathcal{F}: f \to \hat{f}$ ER LINEÆR

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

2) HVIS f ER DIFF og $f^{(j)} \in \mathcal{L}^1$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

SÅ ER $\mathcal{F}(f^{(j)})(\omega) = (2\pi i \omega)^j \mathcal{F}(f)$

$$\widehat{f^{(j)}} = (2\pi i \omega)^j \hat{f}$$ 3

BEVIS

$$\int_a^b g(x) f'(x)\,dx = [g(x) f(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x)\,dx$$

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\omega x} f'(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{\left[e^{-i2\pi\omega t}\, \cancel{g(x)}\, f(x)\right]_{-n}^{n}} = 0.$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} (-i2\pi\omega)\, e^{-i2\pi\omega x} f(x)\,dx$$

$$= (2\pi i \omega)\, \hat{f}$$

3/ PLANCHERAL'S SATNING

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

$$\cancel{\mathcal{F}: L^2 \to L^2 \quad L^2 = \left\{ g: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}}$$

$\Longrightarrow$

(4)

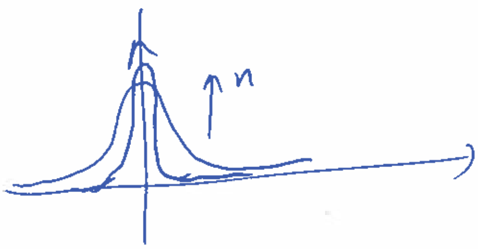
$\mathcal{F}: L^2 \longrightarrow L^2$ ISOMORFI:

BIJECTIV $\mathcal{F}^{-1}: L^2 \longrightarrow L^2$, "LÆNGDE"-BEVARENDE.

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi wx}\hat{f}(w)\,dw$$

~~EKS~~
EKSEMPEL

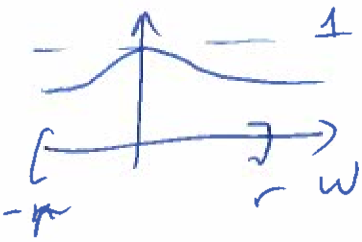
$$y'(x) + y(x) = \left.\frac{n\, e^{-n^2x^2}}{\sqrt{\pi}}\right\} f(x)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \forall n.$$

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi wx}\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}\,dx$$

$$= e^{-\pi^2 w^2/n^2}$$



$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{UNIFORM PÅ } [-r,r].$$

$$\mathcal{F}(VS) = \mathcal{F}(y')(\omega) + \mathcal{F}(y)(\omega)$$

$$= i2\pi\omega\, \hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega)$$

$$= \hat{y}(\omega)\left[i2\pi\omega + 1\right]$$

$$\mathcal{F}(HS) = \hat{f}(\omega)$$

<u>LØSNING</u>

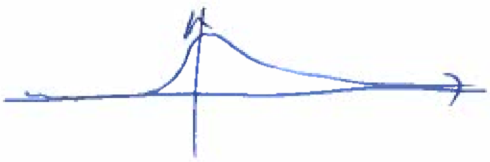
$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{1 + i2\pi\omega} \Rightarrow$$

$$y(x) = \check{\hat{y}}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{1 + 2i\pi(\omega)}\right)(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi\omega x}}{1 + i2\pi\omega}\, \underbrace{e^{-\pi^2\omega^2/n^2}}_{\approx 1}\, d\omega$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\omega i + 1}\, e^{i2\pi\omega x}\, d\omega$$

$$= \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



第一题 ⑥

4/ HVIS $g(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1$

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)\, e^{-2\pi i a \omega}$$

SÅ ER DET MULIGT AT LØSE

$$y'(x) + y(x-1) = f(x)$$

$$\mathcal{F}(VS) = i2\pi\omega\, \hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega)\, e^{-2\pi i \omega}$$

$$= \hat{y}(\omega)\left[\, i2\pi\omega + e^{-2\pi i \omega} \right]$$