Løsninger til Eksamenssættet
i 01035 Matematik 2, maj 2016

Opg 1(i)

$$R: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+3)^2}$$

Vi betragter

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2}{(n+3)^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+3)^2} =$$

$$2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Ifølge eksempel 4.34 i lærebogen er denne række konvergent. Heraf følger at R er absolut konvergent.

$\boxed{\text{svaret er b}}$

Opg 1(ii)

Rødderne for $P(\lambda) = (\lambda+1-2i)(\lambda+1+2i)(\lambda+3)$

er $\lambda_1 = -1+2i \quad \lambda_2 = -1-2i \quad \lambda_3 = -3$

Ifølge sætning 1.15 er svaret c

Opg 1 (iii)

$\boxed{\text{Svaret er a}}$ ses ved identifikation.

Opg 1 (iv)

Vi betragter $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n$

Indfør $a_n = \frac{n+1}{3^n} x^n$ og betragt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+2}{3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n+1}{3^n} x^n}\right| = \frac{n+2}{n+1} \frac{3^n}{3^{n+1}} |x| =$$

$$\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{3} |x| \to \frac{1}{3}|x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Ifølge kvotientkriteriet er rækken konvergent for

$$\frac{1}{3}|x| < 1 \iff |x| < 3 = \rho$$

Konvergens radius er $\boxed{\rho = 3}$

$\boxed{\text{Svaret er a}}$

Opg 1 (v)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Ifølge korollar 5.5 er

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1-\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x^2}{4}}{2-x} = \frac{x^2}{8-4x}$$

for $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$

$\boxed{\text{svaret er } C}$

Opg 1 (vi)

Det karakteristiske polynomium for et lineært differentialligningssystem er

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (3-2a)\lambda^2 + 2\lambda + a$$

Ifølge korollar 2.41 og korollar 2.35 er differentialligningssystemet asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

$a_1 = 3-2a > 0$

$a_2 = 2 > 0$ og samt $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} =$

$a_3 = a > 0$

$$\begin{vmatrix} 3-2a & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

Heraf fås

$$\left.\begin{matrix} 3-2a>0 \\ a>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2a<3 \\ a>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 0<a<\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$$

Vi har tillige

$$(3-2a)2-a>0 \Leftrightarrow 6-4a-a>0 \Leftrightarrow$$

$$6-5a>0 \Leftrightarrow 5a<6 \Leftrightarrow a<\frac{6}{5}$$

$\boxed{\text{svaret er } b}$ idet $\frac{6}{5}<\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Opg. 2

Vi betragter $\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^2 y}{dt^2} + y = u(t)$, $y = y(t)$

2 (i) Ifølge ligning (1.20) er overførings-funktionen

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{s^4 + s^2 + 1}}$$

med $u(t) = e^{st}$
og $s^4 + s^2 + 1 \neq 0$

2 (ii) $u(t) = 5\cos(t) + 2\sin(3t)$

Ifølge superpositionsprincippet er det stationære svar

$$y(t) = 5\,\mathrm{Re}\left(H(i)e^{it}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(H(i3)e^{3it}\right)$$

med brug af sætning 1.26 på de enkelte led i u. Vi har nu

$$y(t) = 5\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-1+1}e^{it}\right)$$

$$+ 2\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{81-9+1}e^{3it}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(t) = 5\cos t + \frac{2}{73}\sin(3t)}$$

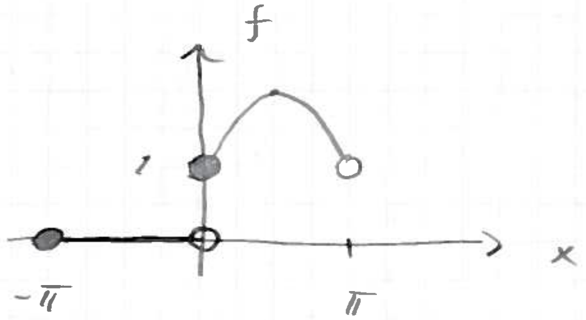
⑥

Opg. 3

f er periodisk med perioden 2π

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi \le x < 0, \\ 1+\sin(x) & \text{for } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Opg 3 (i)



Opg 3 (ii) Ifølge Fouriers sætning konvergerer Fourierrækken mod

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) \right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

i punktet $x = 0$.

Opg 3 (iii)

Fourierkoefficienten a_0 er givet ved (Jvf definition 6.1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\sin(x))\,dx =$$

Opg 3 (iii)

(5)

$$\frac{1}{\pi}\,\pi + \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = 1 + \frac{1}{\pi}(+1+1) = 1 + \frac{2}{\pi}$$

Dvs $\boxed{k_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}}$

Vi udregner nu

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\sin(x))\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(nx)\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos((1-n)x) - \cos((1+n)x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-n}\sin((1-n)x) - \frac{1}{1+n}\sin((1+n)x)\right]_0^{\pi}$$

Her må vi antage at $n \neq 1$ og få

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)\pi)}{1+n}\right]$$

$\Downarrow$

$$\boxed{b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \quad \text{for} \quad n = 2,3,4\ldots}$$

Vi udregner nu b_1 $(n=1)$ separat

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\sin(x))\sin(x)\,dx$$

Opg 3 (iii)

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{b_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}}$$

Integralerne må bestemmes med brug af Maple.

Opgave 4

Vi betragter $$t^2 \frac{d^3y}{dt^3} + 2y = 3t \qquad (5)$$

$$y = y(t)$$

4 (i)

Et gæt på en løsning til (5) er

$$y_p(t) = c_1 t + c_0 \qquad c_1, c_0 \in \mathbb{R}$$

Indsat giver

$$y_p' = c_1 \qquad y_p'' = 0 \qquad y_p''' = 0 \qquad \text{og}$$

heraf fås $\quad 2y_p = 3t \iff 2c_1 t + 2c_0 = 3t \iff$

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad 2c_1 = 3 \iff c_1 = \frac{3}{2}$$

Vi har løsningen $\boxed{y_p(t) = \frac{3}{2} t}$

4 (ii)

Den homogen ligning er

$$t^2 \frac{d^3y}{dt^3} + 2y = 0 \qquad (6)$$

Potensrække løsning : $\quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$

Følgende differentialkvotienter udregnes

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

4 (ii) $$y''' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n\, t^{n-3}$$

Indsat i ligning (6) giver

$$t^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n\, t^{n-3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = 0 \iff$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n\, t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n\, t^n = 0 \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, n\, (n-1)\, a_{n+1}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n\, t^n = 0 \iff$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\, n\, (n+1)\, a_{n+1}\, t^n + 2a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n t^n = 0$$

$\Updownarrow$

$$2a_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n-1)\, n\, (n+1)\, a_{n+1} + 2a_n \right] t^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker fås rekursionsformlerne

$$a_1 = 0 \quad \text{og} \quad (n-1)\, n\, (n+1)\, a_{n+1} + 2a_n = 0$$
$$\text{for } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Dvs

$$\boxed{a_1 = 0 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{-2}{(n-1)\, n\, (n+1)}\, a_n \quad \text{for } n = 2, 3, \ldots}$$

a_2 er en arbitrær konstant.