Eksamen Mat 2 Del A E19 Dansk

Side 1

Vis rigtige svar
Skjul rigtige svar

Der er 10 spørgsmål i alt.

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^3}{4n^3+2n+1}\,, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+1}\,.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- ☐ R og S er begge konvergente.
- ☐ R og S er begge divergente.
- ☐ R er divergent og S er betinget konvergent.
- ☐ R er divergent og S er absolut konvergent.
- ☐ R er betinget konvergent og S er divergent.

Spørgsmål 2

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\ln(n)}{3^n} x^n$$

er:

- ☐ $\rho = \frac{1}{3}$
- ☐ $\rho = 3$
- ☐ $\rho = 1$
- ☐ $\rho = \infty$
- ☐ $\rho = \frac{1}{2}$
- ☐ $\rho = 2$
- ☐ $\rho = 0$

Spørgsmål 3

Det karaktersiske polynomium for en fjerdeordens homogen differentialligning med konstante koefficiente er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1).$$

Den generelle løsning er da.

- ☐ $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

Spørgsmål 4

Betragt to uendelige rækker af positive led

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

og

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hvor $a_n > 0,\, b_n > 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$, og talfølgen

$$c_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Det oplyses, at $\sqrt{a_n} \leq b_n$ for alle n, og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- ☐ R og S er begge divergente.
- ☐ S er divergent og R er konvergent.
- ☐ Begge rækker er konvergente.
- ☐ R er divergent og S er konvergent.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$y'(t) - t^3 y(t) = 0$$

Ved at indsætte

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

kan ligningen omskrives til en af følgende ligninger. Vælg den korrekte ligning.

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n-1}(n-1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n-1}(n-1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$

Spørgsmål 6

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$$

På hvilket af nedenstående x-interval er rækken uniform konvergent?

- ☐ $-3/4 \leq x \leq -1/4$
- ☐ $-3 \leq x \leq 3$
- ☐ $-1 \leq x \leq 1$
- ☐ $-1/2 < x < 1/2$
- ☐ $1/4 \leq x \leq 3/4$
- ☐ $0 < x < 1$

Spørgsmål 7

Om et førsteordens differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

oplyses det, at matricen

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

har egenværdierne:

$$\lambda_1 = -1 - a, \quad \lambda_2 = a$$

hvor tallet $a \in \mathbb{R}$ er en reel parameter.

For $a \neq -1/2$ oplyses desuden: λ_1 har algebraisk multiplicitet 1, mens λ_2 har algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1.

For hvilke værdier af parameteren $a$er systemet stabilt?

- ☐ $-1 \leq a \leq 0$
- ☐ $-1 \leq a < 0$
- ☐ $a < 0$
- ☐ $a > 1$
- ☐ $-\infty < a < \infty$
- ☐ Der findes ingen værdier af a for hvilke systemet er stabilt.

Spørgsmål 8

Lad

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

være en lige og 2π-periodisk funktion, givet i intervallet $[0, \pi]$ ved udtrykket:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1[, \\ 3/2 & \text{for } x = 1, \\ 2 & \text{for } x \in]1,\pi]. \end{cases}$$

Der gælder da følgende:

- ☐ Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke uniformt, mod f.
- ☐ Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.
- ☐ Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke mod f.
- ☐ Fourierækken konvergerer uniformt, men ikke mod f.
- ☐ Fourierrækken er divergent i mindst et punkt.

Spørgsmål 9

To rækker af generelle funktioner er givet ved

$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$ og $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Angiv det korrekte udsagn.

- ☐ Begge rækker har en konvergent majorantrække.
- ☐ Begge rækker har en majorantrække, men ingen har en konvergent majorantrække.
- ☐ Begge har en majorantrække, men kun S har en konvergent majorantrække.
- ☐ Hverken R eller S har en majorantrække.
- ☐ Begge rækker har en majorantrække, men kun R har en konvergent majorantrække

Spørgsmål 10

Om en homogen lineær tredjeordens differentialligning med begyndelsesbetingelserne

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,$

er det givet, at potensrækkemetoden fører til rekursionsformlen:

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

for potensrækkeløsningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Der gælder da følgende om den tilhørende afsnitssum

$$S_6(x) = \sum_{n=0}^{6} c_n x^n$$

- ☐ $S_6(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- ☐ $S_6(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- ☐ $S_6(x) = x + \frac{1}{12}x^4$
- ☐ $S_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^5$
- ☐ $S_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6$