Matematik 2 E22

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Givet differentialligningen:

$$x'''(t) + x''(t) = 6t$$

Hvilken af følgende funktioner er løsning til differentialligningen?

Vælg en svarmulighed

- $x(t) = t^3 - 3t^2 + \exp(t) + 5t - 1$
- $x(t) = t^3 - 3t^2 + \exp(-t) + 5t^2 + 6t - 1$
- $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + \exp(-t)$
- $x(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 1$
- $x(t) = t^3 + t^2 + t + 1$
- $x(t) = -t^3 - 3t^2 + 6t$

Givet differentialligningen:

$$x''(t) + (1 - 2a)x'(t) - 2ax(t) = 2u''(t) - 6u'(t) - 8u(t)$$

hvor $u(t)$ betegner påvirkningen.

Overføringsfunktionen hørende til differentialligningen er givet ved:

$$H(s) = 2 \ , \ \ s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 4\}$$

Hvad er værdien af a?

Vælg en svarmulighed

- $a = 1$
- $a = 2$
- $a = 3$
- $a = -1$
- $a = 0$
- $a = 4$

Givet rækken:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 \exp(-n)$$

Hvilken oplysning giver integralkriteriet om rækken:

Vælg en svarmulighed

- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[\exp(-1), 1+\exp(-1)]$
- Rækken er divergent.
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[4, 5]$
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[1+10\exp(-1), 1+14\exp(-1)]$
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[10\exp(-1), 14\exp(-1)]$

Givet potensrækken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}} x^n$$

hvor $a > 2$ er en konstant.
Lad ρ betegne konvergensradius.
Hvilket af følgende udsagn er sandt?

Vælg en svarmulighed

- $\rho = \frac{1}{a}$, rækken er absolut konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = 1$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = a$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = a$, rækken er divergent i $x = -\rho$
- $\rho = \frac{1}{a}$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = 1$, rækken er absolut konvergent i $x = -\rho$

Det oplyses at Fourierrækken for en reel funktion f er givet ved:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx)$$

hvor det oplyses at:

$$c_0 = 0 \text{ og } c_n = \frac{2}{\pi n^3} \;, \; n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Lad a_n og b_n betegne koefficienterne i den tilsvarende Fourierrække på reel form.
Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt (Vink: f er reel):

Vælg en svarmulighed

- ○ $c_{-1} = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = \frac{4}{\pi}$ og $b_1 = 0$
- ○ $c_{-1} = -\frac{2}{\pi}$, $a_1 = 0$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$
- ○ $c_{-1} = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = 0$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$
- ○ $c_{-1} = -\frac{2}{\pi}$, $a_1 = \frac{4}{\pi}$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$

Betragt den inhomogene differentialligning

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 8t + 6$$

Antag at differentialligningen har en løsning, der kan skrives som en potensrække,
$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ med konvergensradius $\rho > 0$.

Hvilket sæt af betingelser skal koefficienterne opfylde?

Vælg en svarmulighed

- $c_0 = -3,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n+1}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_1 = 8,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n(n+1)}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n}$ for $n > 1$
- $c_0 = -3,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n(n+1)}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_1 = 8,\ c_n = 0$ for $n > 1$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 6. december 2022

Kursus: Matematik 2 01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 50%, Opgave 1: 10%, Opgave 2: 20%, og Opgave 3: 20%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Givet 2 rækker:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$$

1. Redegør for hver af rækkerne S og T om rækken er divergent, betinget konvergent eller absolut konvergent.

Opgave 2

Betragt differentialligningsystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Afgør om differentialligningssystemet (1) er asymptotisk stabilt.
3. Vis at (1) har en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = te^{-t}\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v}$ er en vektor.
4. Angiv den fuldstændige reelle løsning til (1).

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \text{ for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^{\pi} \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)} \cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

—————oooOooo—————