DTU INSIDE

Eksamen del A maj 2018 på dansk

Side 1

Der er 8 spørgsmål i alt, på 2 sider. Side 1:

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

- ☐ Både R og S er betinget konvergent.
- ☐ Både R og S er absolut konvergent.
- ☐ R er absolut konvergent og S er divergent.
- ☑ R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.
- ☐ R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- ☐ R er betinget konvergent og S er divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}\right|$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ som er konvergent. Derfor er R absolut konvergent. S er konvergent ifølge Leibniz kriteriet. Men S er kun betinget konvergent, fordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ er divergent.

Spørgsmål 2

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]. \end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

- ☑ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma}\cos(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\cos(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi x}\cos(\pi\gamma x)$

f er en lige funktion, så

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\gamma) &= 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(2\pi x\gamma)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2\pi}} \cos(2\pi x\gamma)\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{1}{2\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)\Big|_0^{1/2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma). \end{aligned}$$

Spørgsmål 3

Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen A har det karakteristiske polynomium

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☑ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

Egenværdierne for A er $\lambda = \pm 1$, så en basis for løsningsrummet skal være $\phi_1 = e^t\mathbf{v}_1$, $\phi_2 = e^{-t}\mathbf{v}_2$, hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er de (ukendt) tilsvarende egenvektorer. D.v.s, fundamentalmatricen er

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t\mathbf{v}_1 & e^{-t}\mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\mathbf{v}_2 & e^t\mathbf{v}_1 \end{pmatrix}.$$

Det er også nødventigt at $\det(\Phi(t)) \neq 0$, so den eneste mulighed blandt de givne svare er $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

Spørgsmål 4

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2 + 2n + 1} x^n$$

er:

- ☐ $\rho = 0$
- ☐ $\rho = \frac{1}{4}$
- ☐ $\rho = 1$
- ☐ $\rho = 4$
- ☐ $\rho = \infty$
- ☑ $\rho = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{4(n+1)^2 + 2(n+1) + 1} \frac{4n^2 + 2n + 1}{2^n} |x| \quad \to \quad 2|x|,$$

og $2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$, så $\rho = \frac{1}{2}$.

Side 2

Side 2.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = t^2e^t.$$

Ved at sætte :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

kan differentialligningen omskrives som:

- [x] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$

Vi bruger $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!$, så differentialligningen er

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + t\sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n &= t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n) t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}
\end{aligned}$$

Spørgsmål 6

Fourierrækken

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$$

har reel form:

- [ ] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [x] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\sin(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1}\cos(nt) - \frac{2}{n^4+1}\sin(nt)\right)$

Fra formlerne

$$\begin{aligned}
a_0 = 2c_0 = 2\cdot 2 &= 4 \\
a_n = c_n + c_{-n} &= \frac{4}{n^4+1}, \quad n > 0, \\
b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{n^4+1} - \frac{2}{n^4+1} &= 0,
\end{aligned}$$

har vi $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\cos nt$.

Spørgsmål 7

Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialligningen omskrives som et 1.~ordens system, så er systemmatricen:

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fra karakterligningen ved vi at differentialligning er faktisk

$$y''' - y' = 0.$$

Hvis vi sætter $x_1 = y$, $x_2 = y'$ og $x_3 = y''$ vi har systemet:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = x_2,$$

som svarer til systemmatricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Bemærk at egenværdierne til systemmatricen skal være det samme som rødderne til karakterligningen, d.v.s. 0, 1 og -1. Derfor er det umuligt at få en af de andre givne matricer, fordi man kan check at de har de forkerte egenværdi).

Spørgsmål 8

Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 x$$

er:

- ☐ $\frac{\pi^2}{9}$
- ☐ $\frac{\pi^3}{3}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☑ $\frac{9}{8}$
- ☐ $\frac{1}{2}$

Fra Parseval har vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Løsning: Mat 2 Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018, Del B

Opgave 1

(a) Uegentligt integrallet er definiret som:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right),$$

hvis grænseværdien eksister. Vi ved at $\lim_{t\to\infty} 1/t^2 = 0$, så det følge fra regneregler for grænseværdier at integrallet er konvergent og er lig med $\frac{1}{2}$. (Maple kunne også bruges på talfølgen $-(\frac{1}{t^2}-1)/2$.)

(b) Rækken er givet som $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hvor $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ er kontinuert og aftagende, og $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ er konvergent. Ved Korollar 4.35 er der så to mulige løsninger:

Brug Korollar 4.35 (i): Hvis vi approksimere summen af S_N er fejlen givet ved

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{n^3} &\le \int_{N+1}^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x + \frac{2}{(N+1)^3}\\ &= \frac{1}{(N+1)^2}+\frac{2}{(N+1)^3}\\ &= \frac{1}{(N+1)^2}\left(1+\frac{2}{(N+1)}\right)\\ &\le \frac{2}{(N+1)^2},\end{aligned}$$

så det er nok at løse $\frac{2}{(N+1)^2} \le \frac{2}{100}$, som har løsning $N \ge 9$, og:

$$S_9 = \sum_{n=1}^{9}\frac{2}{n^3} = 2.39$$

er en tilnærmelse med en fejl højst 0.02. Vi kunne også har brugt Maple til at løse uligheden $\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{2}{(N+1)^3} < 2/100$, som giver $N \ge 7$, og en vurdering $S_7 = 2.386$.

Brug Korollar 4.35 (ii): Vi vurderer summen som $S_N + \int_{N+1}^\infty f(x)\mathrm{d}x$, og fejlen er begrænset af $f(N+1) = 2/(N+1)^3$. Så vi først løser $2/(N+1)^3 \le 2/100$, som giver $N \ge 4$, og en approximation for summen er $S_4 + \int_5^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = 2.395$.

Opgave 2

(a) Systemmatricen A har (fra Maple) egenværdi $\lambda = -1 \pm i$. Begge har negative realdel, og dette betyder at systemet er asymptotisk stabilt (ifølge Sætning 2.36).

(b) Overføringsfunktionen findes som:

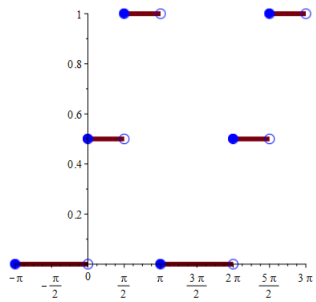
$$\begin{aligned}H(s) = \mathbf{d}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{s+1}{s^2+2s+2}, \quad s\notin\{-1\pm i\}.\end{aligned}$$

(c) Af Fourierrækkemetoden er en løsning givet ved:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{n^4+1}H(in)e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{n^4+1}\frac{in+1}{(-n^2+2in+2)}e^{int}.$$

Opgave 3

(a) Se Figur 1.



FIGUR 1. Opgave 3 (a)

(b) f er stykkevis differentiabel, så, ifølge Fouriers sætning, konvergere f i punktet $x = 0$ mod $(f(0^+) + f(0^-))/2 = (0.5+0)/2 = 0.25$.

(c) Koeffiecenter a_n er regnet som:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}(0 + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{d}x) \\ &= \frac{-\sin(n\pi/2) + 2\sin(\pi n)}{2n\pi}, \quad \text{hvis } n > 0, \end{aligned}$$

og $a_0 = (1/\pi)(3/2)(\pi/2) = 3/4$. Vi kan også skriver dette som

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 0 \\ \frac{(-1)^m}{2(2m-1)\pi}, & n = 2m-1, \quad m = 1, 2, ... \\ 0 & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

(d) Nej. Der er mindst to muligheder som begrundning:

Argument 1: Hvis rækken har en konvergent majorantrække vil sumfunktionen være kontinuert (ifølge Sætning 5.33). Men dette er umuligt, fordi sumfunktionen skal være enig med f på alle punkt hvor f er kontinuert. Derfor er det klart at sumfunktionen kan ikke være kontinuert i, f.eks., punktet $x = 0$.

Argument 2: Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ er en majorantrække, har vi, til hver n:

$$k_n \geq |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|, \quad \text{for alle } x.$$

Hvis vi vælge $x = 0$ har vi

$$k_n \geq |a_n \cos(0)| = |a_n|.$$

Men $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \geq \frac{3}{4}\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ er divergent. Ved sammenligningskriteriet er $\sum k_n$ også divergent.