Løsning til eksamen i Matematik 2, 01035, Maj 2017

Jens Gravesen

5. maj 2017

Opgave 1

(i) Da

$$\left|(-1)^n \frac{3}{2n^2+n}\right| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{n^2}\,, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ er konvergent,}$$

giver sammenlignings kriteriet, at den givne række er absolut konvergent.

(ii)

$$\left|\frac{\left((-1)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\right)x^{n+1}}{\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)x^n}\right| = \left|\frac{\left(-1+(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}\right)x}{1+(-1)^n\frac{1}{n!}}\right| \to |-x| = |x| \text{ for } n \to \infty\,,$$

ser vi, at konvergensradius er $\rho = 1$.

(iii) Det karakteristiske polynomium har dobbeltroden -2. så den fuldstændige løsning er $y(t) = c_1\,e^{-2t} + t\,e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iv) Routh-Hurwittz kriterium giver følgendebetingelser for asymptotisk stabilitet:

$$2>0\,, \quad 2-c>0\,, \quad 2c>0\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2c \\ 1 & 2-c \end{vmatrix} = 4-2c-2c = 4\,(1-c) > 0\,.$$

Dvs. $c < 2$, $c > 0$ og $c < 1$ eller $0 < c < 1$.

(v) Vi har $\left|\frac{(2-x)^{n+1}}{(2-x)^n}\right| = |2-x|$, så kvotient kriteriet giver vi har konvergens af rækken hvis og kun hvis $|2-x| < 1$, dvs. $-1 < 2-x < 1 \iff -3 < -x < -1 \iff 1 < x < 3$.

(vi) Da $1-\sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$ og $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ har vi

$$f(x) = 1-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1+\cos x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\,.$$

Opgave 2

(i) Karakterligningen har løsningerne $-1, \pm i$, så den fuldstændige løsning til den homogene ligning er

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, \cos t + c_3\, \sin t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii)

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)}$$

(iii) Hivis $u(t) = e^{2it}$ fås det stationære svar

$$y_c(t) = H(2i)\, e^{2it} = \frac{e^{2it}}{(-4+1)(2i+1)} = \frac{(\cos(2t) + i\sin(2t))(1-2i)}{-3(1+2i)(1-2i)}$$
$$= \frac{\cos(2t) + 2\sin(2t) + i(-2\cos(2t) + i\sin(2t))}{-15}\,.$$

hvis $u(t) = \cos(2t) = \Re(e^{2it})$ fås så det stationære svar

$$y_1(t) = \Re(y_c(t)) = -\frac{\cos(2t) + 2\sin(2t)}{15}\,.$$

(iv) Da $u(t) = e^{-t}$ er en løsning til den homogene ligning har vi en løsning på formen $y(t) = a\,t\,e^{-t}$. Vi har

$$y'(t) = a\,(-t+1)e^{-t}\,, \quad y''(t) = a\,(t-2)e^{-t}\,, \quad y'''(t) = a\,(-t+3)e^{-t}\,,$$

og dermed

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = a\,(1-2+3)\,e^{-t} = 2a\,e^{-t}\,.$$

Vi ser, at hvis $a = \cancel{12}$ får vi en partikulær løsning
1/2

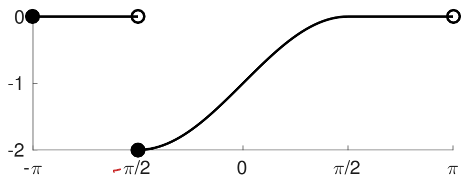
$$y_2(t) = \frac{t\,e^{-t}}{2}\,.$$

(v) Den fuldstændige løsning for $u(t) = e^{-t} + \cos(2t)$ er nu givet ved

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_{\text{hom}}(t)$$
$$= \frac{t\,e^{-t}}{2} - \frac{\cos(2t) + 2\sin(2t)}{15} + c_1\, e^{-t} + c_2\, \cos t + c_3\, \sin t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Opgave 3

(i)



(ii) Hvis

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,,$$

så har vi

$$S(-\pi) = 0\,, \quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,, \quad S(0) = \overset{-1}{\cancel{0}}\,, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \quad S(\pi) = 0\,.$$

(iii) Vi har

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[-\cos x - x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -1\,.$$

Da $\sin x \cos nx$ er ulige har vi for $n \in \mathbb{N}$, at

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x) - 1)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{-n\pi}{2}}{n}\right) = \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{hvis } n = 1 + 4m,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{hvis } n = 3 + 4m,\ m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \end{aligned}$$

Mangler at udregne b_n

Opgave 4

(i) Hvis $y(t) = a_0\,t^2 + a_1\,t + a_2$ fås

$$t\,y''(t) + y(t) = 2a_0\,t + a_0\,t^2 + a_1\,t + a_2 = a_0\,t^2 + (2a_0 + a_1)\,t + a_2\,.$$

Dette giver t^2 hvis og kun hvis

$$a_0 = 1\,, \quad 2a_0 + a1 = 0\,, \quad \text{og} \quad a_2 = 0\,.$$

Vi ser at $a_1 = -2a_0 = -2$ og vi har altså løsningen

$$y_p(t) = t^2 - 2\,t\,.$$

(ii) Ved indsættelse af en potensrække $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n$ fås

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,t^{n-1}\,, \\ y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n\,t^{n-2}\,, \\ t\,y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n\,t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\,n\,a_{n+1}\,t^n\,. \end{aligned}$$

Så

$$t\,y''(t) + y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)\,n\,a_{n+1} + a_n)\,t^n\,.$$

Hvis potensrækken er en løsning til den homogene ligning, har vi altså

$$a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{n\,(n+1)}\,, \ \text{for } n = \cancel{0}, 1, 2, \ldots\,.$$

a_1 er en arbitrær konstant