DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 13. maj 2017
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30%, Opgave 2: 25%, Opgave 3: 25% og Opgave 4: 20%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgaverne 2, 3 og 4 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgaverne 2, 3 og 4 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke"gives 0%, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2,5%.

Opgave 1

(i) Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2n^2+n}$ er:

a) divergent.
b) betinget konvergent.
c) absolut konvergent.
d) ved ikke.

(ii) Konvergenradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{n!}\right) x^n$ er:

a) $\rho = 0$.
b) $\rho = 1$.
c) $\rho = \infty$.
d) ved ikke.

(iii) Det karakteristiske polynomium for differentialligningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0\,,$$

er $P(\lambda) = (\lambda + 2)^2$. Den fuldstændige reelle løsning er:

a) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
b) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
d) ved ikke.

(iv) Et homgent lineært differentialligningssystem har det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + (2-c)\lambda + 2c$, hvor $c \in \mathbb{R}$. Systemet er asymptotisk stabilt for:

a) $0 < c < 1$.
b) $0 < c < 2$.
c) $1 < c < 2$.
d) ved ikke.

(v) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n$ er konvergent for:

a) $x < 1$.
b) $1 < x < 3$.
c) $x > 3$.
d) ved ikke.

(vi) Funktionen $f(x) = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ har Fourierkoefficienterne:

a) $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$ og $a_n, b_n = 0$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$.
b) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ og $a_n, b_n = 0$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$.
c) $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ og $a_n, b_n = 0$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$.
d) ved ikke.

Opgave 2

Betragt den inhomogene differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = u(t)\,.$$

Det oplyses at karakterligningen for den tilsvarende homogene ligning er $(\lambda^2+1)(\lambda+1) = 0$.

(i) Opskriv den fuldstændige reelle løsning til den homogene ligning.

(ii) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ med $u(t) = e^{st}$.

(iii) Find det stationære svar for $u(t) = \cos(2t)$.

(iv) Bestem en partikulær løsning for $u(t) = e^{-t}$.

(v) Opskriv den fuldstændige reelle løsning for $u(t) = e^{-t} + \cos(2t)$.

Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og er i intervallet $[-\pi,\pi]$ givet ved

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x)-1 & \text{for } x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\\ 0 & \text{for } x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right],\end{cases}$$

(i) Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi,\pi]$.

(ii) Find summen af Fourierrækken for f i punkterne $x=-\pi$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ og $x=\pi$.

(iii) Bestem Fourierkoefficienterne for f.

Opgave 4

Betragt differentialligningen

$$t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=t^2\,.$$

(i) Bestem en partikulær løsning $y_p(t)$ ved, at gætte på et polynomium af passende grad.

(ii) Antag at en løsning $y(t)$ til den tilsvarende homogene ligning $t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$ kan skrives som en potensrække:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\,.$$

Bestem, ved indsættelse i den homogene ligning, en rekursionsformel for a_n.

————oooOooo————

Opgavesættet slut.

Løsning til eksamen i Matematik 2, 01035, Maj 2017

Jens Gravesen

5. maj 2017

Opgave 1

(i) Da

$$\left|(-1)^n \frac{3}{2n^2+n}\right| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{n^2}\,, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ er konvergent,}$$

giver sammenlignings kriteriet, at den givne række er absolut konvergent.

(ii)

$$\left| \frac{\left((-1)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right)x^{n+1}}{\left((-1)^n + \frac{1}{n!}\right)x^n} \right| = \left| \frac{\left(-1 + (-1)^n \frac{1}{(n+1)!}\right)x}{1 + (-1)^n \frac{1}{n!}} \right| \to |-x| = |x| \text{ for } n \to \infty\,,$$

ser vi, at konvergensradius er $\rho = 1$.

(iii) Det karakteristiske polynomium har dobbeltroden -2. så den fuldstændige løsning er $y(t) = c_1\,e^{-2t} + t\,e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iv) Routh-Hurwittz kriterium giver følgendebetingelser for asymptotisk stabilitet:

$$2 > 0\,, \quad 2 - c > 0\,, \quad 2c > 0\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2c \\ 1 & 2-c \end{vmatrix} = 4 - 2c - 2c = 4\,(1-c) > 0\,.$$

Dvs. $c < 2$, $c > 0$ og $c < 1$ eller $0 < c < 1$.

(v) Vi har $\left|\frac{(2-x)^{n+1}}{(2-x)^n}\right| = |2-x|$, så kvotient kriteriet giver vi har konvergens af rækken hvis og kun hvis $|2-x| < 1$, dvs. $-1 < 2-x < 1 \iff -3 < -x < -1 \iff 1 < x < 3$.

(vi) Da $1 - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}$ og $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ har vi

$$f(x) = 1 - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\,.$$

Opgave 2

(i) Karakterligningen har løsningerne $-1, \pm i$, så den fuldstændige løsning til den homogene ligning er

$$y_{\text{hom}}(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, \cos t + c_3\, \sin t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(ii)

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)}$$

(iii) Hivis $u(t) = e^{2it}$ fås det stationære svar

$$y_c(t) = H(2i)\, e^{2it} = \frac{e^{2it}}{(-4+1)(2i+1)} = \frac{(\cos(2t) + i\sin(2t))(1-2i)}{-3(1+2i)(1-2i)}$$
$$= \frac{\cos(2t) + 2\sin(2t) + i(-2\cos(2t) + i\sin(2t))}{-15}\,.$$

hvis $u(t) = \cos(2t) = \Re(e^{2it})$ fås så det stationære svar

$$y_1(t) = \Re(y_c(t)) = -\frac{\cos(2t) + 2\sin(2t)}{15}\,.$$

(iv) Da $u(t) = e^{-t}$ er en løsning til den homogene ligning har vi en løsning på formen $y(t) = a\,t\,e^{-t}$. Vi har

$$y'(t) = a\,(-t+1)e^{-t}\,, \quad y''(t) = a\,(t-2)e^{-t}\,, \quad y'''(t) = a\,(-t+3)e^{-t}\,,$$

og dermed

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) + y(t) = a\,(1-2+3)\,e^{-t} = 2a\,e^{-t}\,.$$

Vi ser, at hvis $a = \cancel{12}$ får vi en partikulær løsning
$1/2$

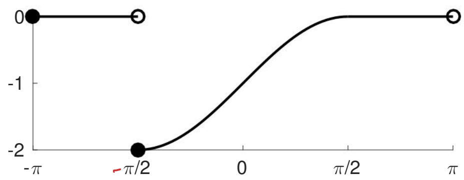
$$y_2(t) = \frac{t\,e^{-t}}{2}\,.$$

(v) Den fuldstændige løsning for $u(t) = e^{-t} + \cos(2t)$ er nu givet ved

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_{\text{hom}}(t)$$
$$= \frac{t\,e^{-t}}{2} - \frac{\cos(2t) + 2\sin(2t)}{15} + c_1\, e^{-t} + c_2\, \cos t + c_3\, \sin t\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Opgave 3

(i)



(ii) Hvis

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \,,$$

så har vi

$$S(-\pi) = 0\,, \quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\,, \quad S(0) = \overset{-1}{\cancel{0}}\,, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \quad S(\pi) = 0\,.$$

(iii) Vi har

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[-\cos x - x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -1\,.$$

Da $\sin x \, \cos nx$ er ulige har vi for $n \in \mathbb{N}$, at

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x) - 1)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{-n\pi}{2}}{n}\right) = \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er lige,} \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{hvis } n = 1 + 4m,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{hvis } n = 3 + 4m,\ m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \end{aligned}$$

Mangler at udregne b_n

Opgave 4

(i) Hvis $y(t) = a_0\, t^2 + a_1\, t + a_2$ fås

$$t\, y''(t) + y(t) = 2a_0\, t + a_0\, t^2 + a_1\, t + a_2 = a_0\, t^2 + (2a_0 + a_1)\, t + a_2\,.$$

Dette giver t^2 hvis og kun hvis

$$a_0 = 1\,, \quad 2a_0 + a1 = 0\,, \quad \text{og} \quad a_2 = 0\,.$$

Vi ser at $a_1 = -2a_0 = -2$ og vi har altså løsningen

$$y_p(t) = t^2 - 2\,t\,.$$

(ii) Ved indsættelse af en potensrække $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$ fås

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1}\,, \\
y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-2}\,, \\
t\, y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1}\, t^n\,.
\end{aligned}$$

Så

$$t\, y''(t) + y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)\, n\, a_{n+1} + a_n)\, t^n\,.$$

Hvis potensrækken er en løsning til den homogene ligning, har vi altså

$$a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{n\,(n+1)}\,, \ \text{for } n = \cancel{0}, 1, 2, \ldots\,.$$

a_1 er en arbitrær konstant

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 27. august 2017
Kursus: Matematik 2 01037 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30% , opgave 2: 20% , opgave 3: 15% og opgave 4: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgaverne 2, 3 og 4 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgaverne 2, 3 og 4 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0%, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2,5%.

Opgave 1

(i) Den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n}$ er:

a) divergent.

b) absolut konvergent.

c) betinget konvergent.

d) ved ikke.

(ii) For potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ er konvergensradius ρ:

a) $\rho = \frac{1}{3}$.

b) $\rho = 3$.

c) $\rho = \infty$.

d) ved ikke.

(iii) Summen af rækken $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1/2)\omega\pi}$ med $\omega > 0$ er:

a) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1+e^{-(1/2)\omega\pi}}$.

b) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1+e^{-\omega\pi}}$.

c) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1-e^{-\omega\pi}}$.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!

(iv) Vi betragter differentialligningen $y^{(4)}(t) + 5y^{(3)}(t) + 10y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 4y(t) = 0$ med det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$. For de arbitrære konstanter $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, er den fuldstændige reelle løsning:

a) $y(t) = c_1 \exp(-t)\sin(t) + c_2 \exp(-t)\cos(t) + c_3 \exp(-t) + c_4 \exp(-2t)$.

b) $y(t) = c_1 \exp(t)\sin(t) + c_2 \exp(t)\cos(t) + c_3 \exp(t) + c_4 \exp(2t)$.

c) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-2t) + c_3 \exp(t)\sin(t) + c_4 \exp(t)\cos(t)$.

d) ved ikke.

(v) Den inhomogene differentialligning $2y'(t) + ay(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} e^{int}$, hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $N \in \mathbb{N}$, har den stationære løsning:

a) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(a^2-4n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

b) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-in}{(a^2+n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

c) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(a^2+4n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

d) ved ikke.

(vi) Differentialligningen $y^{(4)}(t)+8y^{(2)}(t)+16y(t) = 0$ har den fuldstændige løsning ($c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$):

a) $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 t \sin(2t) + c_3 \cos(2t) + c_4 t \cos(2t)$.

b) $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(4t) + c_4 \cos(4t)$.

c) $y(t) = c_1 \sin(4t) + c_2 t \sin(4t) + c_3 \cos(4t) + c_4 t \cos(4t)$.

d) ved ikke.

Opgave 2

Følgende differentialligning med en variabel koefficient ønskes løst med potensrækkemetoden.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ty = 0 \; , \tag{1}$$

hvor $y = y(t)$ og $t \in \mathbb{R}$.

(i) Indsæt en potensrække af formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i ligning (1) og bestem en rekursionsformel for a_n, $n = 0, 1, 2, ...$ Angiv hvilke koefficienter a_n, der er arbitrære.

(ii) Opskriv eksplicit afsnitssummen $S_5(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n t^n$ udtrykt ved de arbitrære koefficienter.

Opgave 3

Et homogent differentialligningssystem er givet ved

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \; , \quad \text{hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \; . \tag{2}$$

Den afhængige variabel $\mathbf{x}$ er en tredimensional vektorfunktion af tiden $t \in \mathbb{R}$.

(i) For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er systemet i (2) asymptotisk stabilt? Determinanter må bestemmes med brug af Maple.

Opgave 4

En 2π-periodisk funktion f er i intervallet $[-\pi, \pi[$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \ , \\ -(x+\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) & \text{for} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ , \\ 0 & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \ . \end{cases} \tag{3}$$

(i) Skitser grafen for f, hvor $x \in [-\pi, \pi]$.

(ii) Find Fourierrækken for f. Du må bruge Maple til at bestemme integraler.

(iii) Vis, at Fourierkoefficienterne a_n, $n \geq 1$, opfylder uligheden $|a_n| < 4/n^2$.

(iv) Er Fourierrækken uniform konvergent?

(v) Den N'te afsnitsum af Fourierrækken for f betegnes $S_N(x)$. Bestem N således at $|S(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 10^{-2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hvor $S(x)$ er Fourierrækkens sum.

Opgavesættet slut.

Løsninger til eksamensopgaverne i matematik 2, kursus 01037 / 01035 august 2017

Opgave 1(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{1+n}$

Vi betragter leddet

$$\frac{2^n}{1+n} = \frac{2^n}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \infty \quad \text{for } n \to \infty$$

idet $\frac{2^n}{n} \to \infty$ for $n \to \infty$. Jvf. lærebogens bageste omslag vedrørende

$$\frac{x^\alpha}{b^x} \to 0 \quad \text{for } x \to \infty \quad \text{for alle } a > 0,\ b > 1$$

I denne opgave er $x \to n$, $\alpha \to 1$, $b \to 2$

Heraf fås at $(-1)^n \frac{2^n}{1+n}$ ikke går mod 0 for $n \to \infty$.

Af n'te leds kriteriet er rækken derfor divergent.

Svaret er (a)

Opgave 1 (ii)

Konvergensradius for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$

bestemmes med $a_n = \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ af

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{1}{n^2 3^n} x^n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{3^n}{3^{n+1}} |x| =$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \frac{1}{3} |x| \to \frac{1}{3}|x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Fra kvotientkriteriet er rækken konvergent for

$$\frac{1}{3}|x| < 1 \iff |x| < 3 = \rho$$

Rækkens konvergensradius er $\rho = 3$.

Svaret er (b)

Opgave 1 (iii)

Vi betragter $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})\omega\pi}$ $\qquad \omega > 0$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} (-1)^n e^{-n\omega\pi} = e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-\omega\pi}\right)^n$$

Da $|-e^{-\omega\pi}| < 1$ har vi ifølge sætning 5.2

$$S = e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} \frac{1}{1-(-e^{-\omega\pi})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega\pi}}{1+e^{-\omega\pi}}$$

svaret er (b)

Bemærk den uendelige række er en kvotientrække i forklædning.

Opgave 1(iv)

For differentialligningen

$$y^{(4)} + 5y^{(3)} + 10y^{(2)} + 10y^{(1)} + 4y = 0$$

er det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$$

med rødderne $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$,

$\lambda_3 = -1+i$, $\lambda_4 = -1-i$

Ifølge sætning 1.9 er den fuldstændige reelle løsning:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t}\cos(t) + c_4 e^{-t}\sin(t)$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Svaret er (a)

Opgave 1 (v)

Vi betragter differentialligningen

$$2y' + ay = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} e^{int} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Det karakteristiske polynomium for det homogene problem er $P(\lambda) = 2\lambda + a$

Af formel (1.20) side 18 i lærebogen er overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{2s+a}$$

Ifølge superpositionsprincippet har vi den stationære løsning med $s = in$

$$y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} \frac{1}{2in+a} e^{int} =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(3+n^2)(a+2in)(a-2in)} e^{int} =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(3+n^2)(a^2+4n^2)} e^{int}$$

Svaret er (c)

Opgave 1(vi)

Vi betragter $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16$$ med rødderne

$$\lambda^2 = -\frac{8}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8^2 - 4\cdot 16} = -4$$

$\Updownarrow$

$\lambda = \pm i2$ er begge dobbelt rødder, dvs

$$P(\lambda) = (\lambda - i2)^2 (\lambda + i2)^2$$

Den algebraiske multiplicitet er 2 for de 2 rødder.

Ifølge sætning 1.15 er den fuldstændige reelle løsning

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 t\cos(2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 t \sin(2t)$$

Svaret er (a)

Opgave 2

Vi betragter differentialligningen

$$y'' + ty = 0 \quad , \quad y = y(t) \qquad (1)$$

(i) Indsæt potensrække løsningen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{i} \quad (1)$$

Vi udregner

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} , \qquad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

og får ved indsættelse i (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-1}\right) t^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker får vi rekursionsformlen

$\boxed{a_2 = 0}$ og $(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + a_{n-1} = 0$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

eller $$a_{n+2} = \frac{-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

eller $$\boxed{a_{n+3} = \frac{-a_n}{(n+3)(n+2)} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots}$$

a_0 og a_1 er arbitrære konstanter

2(ii) Vi opskriver $S_5(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n t^n$

$$a_3 = \frac{-a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{-a_1}{4 \cdot 3} = \frac{-a_1}{12}, \quad a_5 = 0$$

Vi har

$$\boxed{S_5(t) = a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{6} t^3 - \frac{a_1}{12} t^4}$$

Opgave 3

Et homogent differentialligningssystem har formen

$$\frac{dx}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(i) For at bestemme systemets stabilitet udregnes det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(a-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-2 & 1 \\ 2 & -\lambda-2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$(a-\lambda)\left((\lambda+2)^2 - 2\right) + 2(\lambda+2) =$$

$$(a-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) + 2\lambda + 4 =$$

$$-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + a\lambda^2 + 4a\lambda + 2a + 2\lambda + 4 =$$

$$-\lambda^3 + (a-4)\lambda^2 + 4a\lambda + 4 + 2a$$

Vi ganger nu med -1 og betragter

$$-P(\lambda) = \lambda^3 + (4-a)\lambda^2 - 4a\lambda - (2a+4)$$

10

Fra Routh-Hurwitz' kriterium korollar 2.41 er betingelsen for at systemet i (2) er asymptotisk stabilt at

$$a_1 = 4-a > 0 \iff a < 4$$
$$a_2 = -4a > 0 \iff a < 0$$
$$a_3 = -2a-4 > 0 \iff -a > 2 \iff a < -2$$

Derudover kræves

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-a & -(2a+4) \\ 1 & -4a \end{vmatrix} = 4a(a-4) + 2a+4 =$$

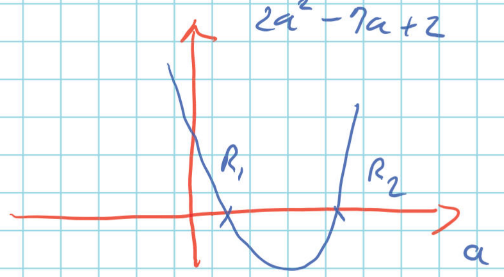
$$4a^2 - 16a + 2a + 4 = 4a^2 - 14a + 4 > 0 \iff$$
$$2a^2 - 7a + 2 > 0$$

Rødderne i dette polynomium i a er

$$a = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{7^2 - 4\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{49-16} =$$

$$\frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{33} = \begin{cases} 3,186 = R_2 \\ 0,314 = R_1 \end{cases}$$

Med skitsen nedenfor af $2a^2 - 7a + 2$ har vi nu betingelsen



$$a < \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \quad \vee \quad a > \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Herav fås at systemet i (2) er asymptotisk stabilt for $\boxed{a < -2}$

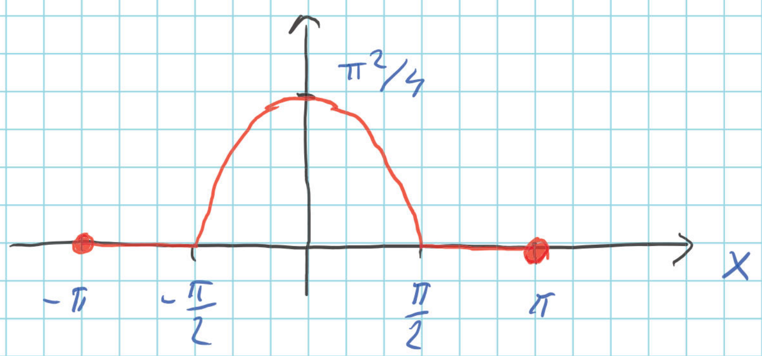
Opgave 4

En 2π-periodisk funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ -(x+\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) & \text{for } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

i intervallet $[-\pi ; \pi[$

4(i) En skitse af f er



4(ii) Da f er kontinuert er Fourierrækken for f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

f er en lige funktion og derfor er Fourierkoefficienterne $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ifølge sætning 6.3, side 135 i lærebogen, er Fourierkoefficienterne a_n givet ved

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad \text{for} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Vi har med brug af Maple

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3} \qquad \text{for } n = 1,2,3,\ldots$$

og

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{for } n=0$$

Fourierrækken for f er

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3}\cos(nx)}$$

4(iii) For Fourierkoefficienterne a_n, $n = 1,2,\ldots$ har vi vurderingen

4 (iii)

$$|a_n| = \left| \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3} \right| \le$$

$$\frac{\left|4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| + \left|2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{\pi n^3} \le \frac{4 + 2n\pi}{\pi n^3} \le$$

$$\frac{2n\pi + 2n\pi}{\pi n^3} = \frac{4n\pi}{\pi n^3} = \frac{4}{n^2}$$

Her har vi brugt at $4 < 2n\pi$ for $n = 1, 2, \ldots$

Vi har hermed vurderingen

$$\boxed{|a_n| \le \frac{4}{n^2} \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Da vi har at $|a_n \cos(nx)| = |a_n|\,|\cos(nx)| \le |a_n| \le 4/n^3$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$, har Fourierrækken følgende majorantrække

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

4 (iv)

Da f er differentiabel i hvert af de lukkede intervaller $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ og $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ er f stykkevis differentiabel. Tillige er f kontinuert og 2π-periodisk. Ifølge korollar 6.13 er Fourierrækken uniform konvergent. Svaret er ja.

4(v) Vi skal bestemme den N'te afsnitssum

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \quad \text{således at}$$

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 10^{-2}$$

Fra spørgsmål 4(iii) har vi

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

Fra ulighed 4.32 har vi nu vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{4}{x^2}\,dx + \frac{4}{(N+1)^2} = \left[-4x^{-1}\right]_{N+1}^{\infty} +$$

$$\frac{4}{(N+1)^2} = \frac{4}{N+1} + \frac{4}{(N+1)^2} = 4\,\frac{N+1+1}{(N+1)^2} = 4\,\frac{N+2}{N^2+1+2N} =$$

$$4\,\frac{N+2}{N(N+2)+1} \leq 4\,\frac{N+2}{N(N+2)} = \frac{4}{N} \leq \varepsilon \iff N \geq \frac{4}{\varepsilon} = 400$$

$$\text{for } \varepsilon = 10^{-2}$$

Vi vælger $N = 400$ og for denne værdi approksimerer den N'te afsnitssum S_{400} funktionen f med en fejl mindre end $\varepsilon = 0{,}01$.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 10. december 2017
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Navn:

Studienummer:

Del A: Multiple-choice

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.
Denne papir version skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.
Vægtning for del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Et homogent og lineært differentialligningssystem er givet ved:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)\,, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Systemet er:
☐ a) asymptotisk stabilt.
☐ b) stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.
☐ c) ustabilt.

(ii) Det er givet, at det karakteristiske polynomium for en 4. ordens homogen differentialligning med konstante koefficienter er:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 1).$$

Den fuldstændige reelle løsning er:
☐ a) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
☐ b) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t}$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
☐ c) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
☐ d) $y(t) = (c_1 + c_2 t)\cos(t) + (c_3 + c_4 t)\sin(t)$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.
☐ e) $y(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(iii) Konvergensradius ρ for potensrækken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} x^n$ er:

- ☐ a) $\rho = 0$.
- ☐ b) $\rho = \frac{1}{3}$.
- ☐ c) $\rho = 1$.
- ☐ d) $\rho = 3$.
- ☐ e) $\rho = \infty$.

(iv) Lad $\omega \in \mathbb{R}$. Differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = \sin(\omega t)\,,$$

har en partikulær løsning:

- ☐ a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.
- ☐ b) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.
- ☐ c) $\operatorname{Re}\left((-\omega^2+2i\omega+1) e^{i\omega t}\right)$.
- ☐ d) $\operatorname{Im}\left((\omega^2+2\omega+1) e^{i\omega t}\right)$.
- ☐ e) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega^2+2i\omega+1} e^{i\omega t}\right)$.

(v) Antag at differentialligningen

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = 0\,,$$

har en løsning på potensrækkeform: $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Det fører til rekursionsformlen:

- ☐ a) $c_0 = 1$, og $c_n = \frac{1}{2} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- ☐ b) $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, og $c_n = \frac{1}{2n} c_{n-1}$ for $n = 2, 3, \ldots$.
- ☐ c) $c_n = \frac{2}{n} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- ☐ d) $c_n = 2n c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
- ☐ e) $c_n = \frac{1}{2n} c_{n-1}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(vi) Fourierrækken $3 + \cos(2x)$ har de komplekse Fourierkoefficienter:

- ☐ a) $c_0 = 6$, $c_2 = 1$, $c_{-2} = -1$ og $c_n = 0$ for resten af n.
- ☐ b) $c_0 = 3$, $c_2 = 1$, $c_{-2} = -1$ og $c_n = 0$ for resten af n.
- ☐ c) $c_0 = 3$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_{-2} = \frac{1}{2}$ og $c_n = 0$ for resten af n.
- ☐ d) $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_1 = 2$, $c_{-1} = -2$ og $c_n = 0$ for resten af n.
- ☐ e) $c_0 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_{-2} = -\frac{1}{2}$ og $c_n = 0$ for resten af n.

———————oooOooo———————

Del A er slut. Husk, at svare på del B.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 10. december 2017
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 30%, Opgave 1: 25%, Opgave 2: 10%, Opgave 3: 20% og Opgave 4: 15%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt den inhomogene differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = u(t)\,.$$

(i) Vis, for tilfældet $u(t) = t$, ved direkte indsættelse i ligningen, at $y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}$ er en løsning.

Det oplyses, at karakterligningen for den tilsvarende homogene ligning har rødderne: $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$.

(ii) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ med $u(t) = e^{st}$.

(iii) Find det stationære svar for $u(t) = e^{2t}$.

(iv) Opskriv den fuldstændige reelle løsning for $u(t) = t + e^{2t}$.

Opgave 2

Giv et matematisk argument for, at hver af følgende uendelige rækker er konvergent:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$.

Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og lige. I intervallet $[0, \pi]$ er f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 - t & \text{for } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{for } x \in \,]1, \pi]. \end{cases}$$

(i) Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$.

(ii) Argumenter for, at Fourierrækken for f konvergerer mod f for alle x, og for, at konvergensen er uniform.

(iii) Bestem Fourierkoefficienterne for f.

Opgave 4

Betragt den uendelig række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)\,.$$

(i) Vis, at rækken er konvergent for hver $x \in \mathbb{R}$, og at sumfunktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defineret ved $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$, er kontinuert.

(ii) Find et N, så den N'te afsnitssum af rækken approksimerer g med en fejl på højst 0.05.

——————oooOooo——————

Del B er slut. Husk, at svare på del A (Multiple Choice).

Løsninger til eksamensopgaverne i matematik 2, 10. december, 2017.

Kursus 01035.

Del A mc opgaver

(i) Vi betragter det homogene system

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ bestemmes af

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4 = 0 \iff$$

$$\lambda+1 = \pm 2 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = -3$$

Ifølge korollar 2.35 er systemet ustabilt, idet egenværdien $\lambda = 1$ er positiv.

$\boxed{\text{Svaret er C}}$

Opgave (ii) En 4. ordens differentialligning har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+1)$$

Rødderne for $P(\lambda)$ er

$\lambda^2 = 0 \quad \vee \quad \lambda^2+1=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{(dobbelt rod)} \\ \lambda = \pm i & \text{(2 enkelt rødder)} \end{cases}$$

Ifølge sætning 1.15 er den fuldstændige løsning

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{svaret er c}}$

Opgave (iii) Vi betragter potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} x^n$$

Konvergensradius bestemmes af kvotient-kriteriet.

Kvotient: $a_n = \dfrac{n+2}{3^n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+3}{3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n+2}{3^n} x^n}\right| = \frac{n+3}{n+2} \frac{3^n}{3^n \cdot 3} |x| =$$

$$\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \frac{1}{3} |x| \to \frac{1}{3}|x| \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Konvergens radius ρ bestemmes af uligheden for konvergens af rækken

$$\frac{1}{3}|x| < 1 \iff |x| < 3 = \rho$$

$\boxed{\text{svaret er d}}$

Opgave (iv) Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \sin(\omega t)$$

hvor $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\omega \in \mathbb{R}$

Det stationære svar findes af sætning 1.27 med brug af overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \qquad s = i\omega$$

og fra ligning (1.26) som følger

$$x(t) = \mathrm{Im}\left(H(i\omega)e^{i\omega t}\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2+2i\omega+1}e^{i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\text{svaret er } b}$$

Opgave (V) Vi betragter differentialligningen

$$2\frac{dy}{dt} - y = 0, \qquad y = y(t)$$

Antag potensrække løsningen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Vi bestemmer en rekursions formel for c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ved indsættelse

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}$$

Indsættelse:

$$2y' - y = \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) c_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2(n+1) c_{n+1} - c_n\right) t^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker har vi at

$$2(n+1)c_{n+1} - c_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

heraf fås rekursionsformlen

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2(n+1)} \quad \text{for} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

og c_0 er en arbitrær konstant.

Alternativt formuleret

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{2n} \quad \text{for} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$\boxed{\text{Svaret er } e}$

Opgave (vi) Vi betragter Fourierrækken

$$f(x) = 3 + \cos(2x) = 3 + \tfrac{1}{2}\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-i2x} + 3 + \tfrac{1}{2}e^{i2x}$$

Heraf ses at de komplekse Fourier-koefficienter er

$$c_{-2} = \tfrac{1}{2} \qquad c_0 = 3 \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$c_n = 0 \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2,0,2\}$$

$\boxed{\text{Svaret er } c}$

Eksamens opgavesæt matematik 2, kursus 01035, 10. december 2017.

Løsninger til del B

Opgave 1

Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$$

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Opgave 1(i) $u(t) = t$

Løsningsantagelse: $y(t) = at + b, \quad y' = a, \quad y'' = 0$

Indsat giver

$$3a + 2at + 2b = t \Rightarrow 2a = 1 \wedge 3a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \tfrac{1}{2} \wedge 2b = -3a = -\tfrac{3}{2} \Leftrightarrow a = \tfrac{1}{2} \wedge b = -\tfrac{3}{4}$$

Den partikulære løsning er $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$

1(ii) Det karakteristiske polynomium P har rødderne $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$, dvs.

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Med $u(t) = e^{st}$ er overføringsfunktionen

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}}$$

Opgave 1 (iii) For $u(t) = e^{2t}$ er det stationære svar ifølge sætning 1.24

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{3 \cdot 4} e^{2t} = \frac{1}{12} e^{2t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{12} e^{2t}}$$

Opgave 1 (iv) For $u(t) = t + e^{2t}$ er den fuldstændige løsning med brug af superpositionsprincippet

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \frac{1}{12} e^{2t}}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Opgave 2 (i)

$$R_1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} \qquad a_n = \frac{1}{(3n)!}$$

Rækken R_1's konvergens kan bestemmes v. hj. a kvotientkriteriet

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}} = \frac{(3n)!}{(3n+3)!} =$$

$$\frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to$$

0 for $n \to \infty$

Ifølge kvotientkriteriet er rækken konvergent.

Opgave 2(ii)

$$R_2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$$

R_1 er en alternerende række med $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$

Vi har

(i) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}} > 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$ er en aftagende funktion af n

(iii) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0$ for $n \to \infty$

Ifølge Leibniz' kriterium er R_2 konvergent.

Opgave 3

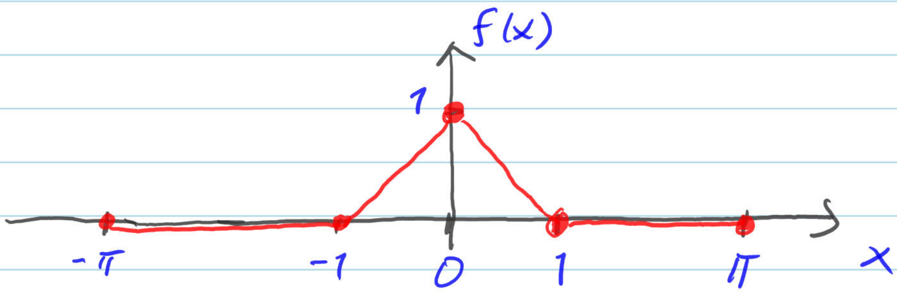
Funktionen f er 2π-periodisk og lige.

I intervallet $[0;\pi]$ er f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{for} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{for} \quad 1 < x \le \pi \end{cases}$$

Opgave 3(i)

I intervallet $[-\pi;\pi]$ er grafen for f



Opgave 3(ii)

Ifølge korollar 6.13 konvergerer Fourier-rækken for f punktvis og tillige uniformt mod f, idet f er kontinuert og stykkevis differentiabel. Det sidste skyldes at $1-x$ er differentiabel i $[0;1]$ og at 0 er differentiabel i $[1;\pi]$.

Opgave 3 (iii) Fourier koefficienterne for f bestemmes af sætning 6.3 som følger

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad \text{for } n = 0,1,2,\ldots$$

Vi har

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}}$$

For $n = 1,2,3,\ldots$ har vi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^1$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{n}\sin(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin(n) - \frac{2}{n\pi}\sin(n) + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n) - 1\right) = \frac{2\left(1-\cos(n)\right)}{n^2\pi}, \quad n = 1,2,\ldots}$$

Da f er lige er $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Opgave 4. Vi har den uendelige række

$$R_3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

Opgave 4(i) Vi vil tage udgangspunkt i sætning 5.33 vedrørende kontinuitet af en sumfunktion. Vi bestemmer først en majorantrække for R_3, jvf definition 5.31. Vi betragter for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right| =$$

$$\frac{|\sin(n) - n\cos(n)|}{n^3} |\cos(nx)| \leq$$

$$\frac{|\sin(n)| + n|\cos(n)|}{n^3} \cdot 1 \leq \frac{1 + n \cdot 1}{n^3} = \frac{1+n}{n^3} \leq$$

$$\frac{n+n}{n^3} = \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} = k_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Heraf fås majorantrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

for R_3. Ifølge eksempel 4.34 er denne række konvergent $(\alpha = 2)$. Vi har at forudsætning (ii) i sætning 5.33 er opfyldt. Da $\cos(nx)$ er en kontinuert funktion af x i hele $\mathbb{R}$, er betingelse (i) i 5.33 også opfyldt. Heraf følge nu af sætning 5.33, at R_3 konvergerer uniformt mod sin sumfunktion g, og at sumfunktionen er kontinuert.

Opgave 4 (ii)

Vi skal bestemme N i afsnitsummen

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

således at

$$|g(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 0{,}05$$

hvor $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

Vi har at

$$|g(x) - S_N(x)| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

Af uligheden (4.32) har vi vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx + \frac{2}{(N+1)^2} =$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[-2x^{-1} \right]_{N+1}^{t} + \frac{2}{(N+1)^2} = \frac{2}{N+1} + \frac{2}{(N+1)^2} =$$

$$\frac{2(N+1)}{(N+1)^2} + \frac{2}{(N+1)^2} = \frac{2N+4}{N^2+2N+1} = \frac{2(N+2)}{N(N+2)+1} \leq$$

$$\frac{2(N+2)}{N(N+2)} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N \geq \frac{2}{\varepsilon} = 40$$

med $\varepsilon = 0{,}05$. $\boxed{\text{Vi vælger } N = 40}$

Vi har hermed vist at afsnitssummen $S_{40}(x)$ approksimerer $g(x)$ med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 0{,}05$.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Navn:

Studienummer:

Del A: Multiple-choice

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.
Denne papirversion skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.
Vejledning til del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Betragt de to uendelige rækker:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

☐ a) Både R og S er betinget konvergent.

☐ b) Både R og S er absolut konvergent.

☐ c) R er absolut konvergent og S er divergent.

☐ d) R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

☐ e) R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.

☐ f) R er betinget konvergent og S er divergent.

(ii) En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]. \end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

☐ a) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma)$. ☐ b) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma}\cos(\gamma)$.

☐ c) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\gamma)$. ☐ d) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\cos(\gamma)$.

☐ e) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)$. ☐ f) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi x}\cos(\pi\gamma x)$.

(iii) Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen A har det karakteristiske polynomium:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

☐ a) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

☐ b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}$.

☐ c) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

☐ d) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$.

☐ e) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$.

☐ f) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

(iv) Konvergenradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2+2n+1} x^n$ er:

☐ a) $\rho = 0$.
☐ b) $\rho = \frac{1}{4}$.
☐ c) $\rho = 1$.
☐ d) $\rho = 4$.
☐ e) $\rho = \infty$.
☐ f) $\rho = \frac{1}{2}$.

(v) Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 e^t\,.$$

Ved at sætte : $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, kan differentialligningen omskrives som:

☐ a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ c) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ d) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$.

☐ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$.

(vi) Fourierrækken $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$ har reel form:

- ☐ a) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ b) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ c) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ d) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ e) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \sin(nt)$.
- ☐ f) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1} \cos(nt) - \frac{2}{n^4+1} \sin(nt)\right)$.

(vii) Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialigningen omksrives som et 1. ordens system, så er systemmatricen:

- ☐ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(viii) Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ er:

- ☐ a) $\frac{\pi^2}{9}$.
- ☐ b) $\frac{\pi^3}{3}$.
- ☐ c) 2.
- ☐ d) $\frac{1}{3}$.
- ☐ e) $\frac{9}{8}$.
- ☐ f) $\frac{1}{2}$.

————oooOooo————

Del A er slut. Husk, at svare på del B

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018

Kursus: Matematik 2 01034/01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Multiple-choice (stilles elektronisk): 40%, Opgave 1: 20%, Opgave 2: 16%, Opgave 3: 24%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

(a) Vis ved at anvende definitionen af uegentligt integral, at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

er konvergent.

(b) Bestem en tilnærmet værdi for summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$$

med en fejl på højst 0.02.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{d}^T\mathbf{x}, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

hvor y er svaret og u er påvirkningen.

(a) Undersøg om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

(b) Find overføringsfunktionen for systemet (1).

(c) Opskriv Fourierrækken på kompleks form for en løsning y til differentialligningssystemet (1) med påvirkningen

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}.$$

Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og i intervallet $[-\pi, \pi[$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -\pi \le x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{for } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{for } \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$$

(a) Skitser grafen for f i intervallet $[-\pi, 3\pi]$.

(b) Hvilken værdi konvergerer Fourierrækken for f mod i punktet $x = 0$?

(c) Det oplyses, at Fourierrækken for f på reel form er givet ved

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + \frac{1}{2\pi(1-2n)} \left(\sin(2(2n-1)x) - 3\sin((2n-1)x)\right) \right).$$

Bestem Fourierkoefficienterne a_n for $n = 0, 1, 2, 3, ...$

(d) Har Fourierrækken en konvergent majorantrække? (Begrund svaret.)

—————oooOooo—————

Del B er slut. Husk at svare på Del A (Multiple Choice).

DTU INSIDE

CampusNet / 01035 Matematik 2 F18 / Opgaver

Eksamen del A maj 2018 på dansk

Side 1

Der er 8 spørgsmål i alt, på 2 sider. Side 1:

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker:

$$R=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

- ☐ Både R og S er betinget konvergent.
- ☐ Både R og S er absolut konvergent.
- ☐ R er absolut konvergent og S er divergent.
- ☑ R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.
- ☐ R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- ☐ R er betinget konvergent og S er divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1+n}{n^4+2n+1}\right|$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ som er konvergent. Derfor er R absolut konvergent. S er konvergent ifølge Leibniz kriteriet. Men S er kun betinget konvergent, fordi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ er divergent.

Spørgsmål 2

En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er givet ved:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]\\ 0, & x\notin[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}].\end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

- ☑ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{2\pi\gamma}\cos(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\gamma}\cos(\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)$
- ☐ $\hat{f}(\gamma)=\frac{1}{\pi x}\cos(\pi\gamma x)$

f er en lige funktion, så

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\gamma) &= 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(2\pi x\gamma)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2\pi}}\cos(2\pi x\gamma)\mathrm{d}x\\ &= 2\frac{1}{2\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)\Big|_0^{1/2\pi}\\ &= \frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma).\end{aligned}$$

Spørgsmål 3

Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen A har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☑ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- ☐ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

Egenværdierne for A er $\lambda = \pm 1$, så en basis for løsningsrummet skal være $\phi_1 = e^t\mathbf{v}_1$, $\phi_2 = e^{-t}\mathbf{v}_2$, hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er de (ukendt) tilsvarende egenvektorer. D.v.s, fundamentalmatricen er

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t\mathbf{v}_1 & e^{-t}\mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\mathbf{v}_2 & e^t\mathbf{v}_1 \end{pmatrix}.$$

Det er også nødventigt at $\det(\Phi(t)) \neq 0$, so den eneste mulighed blandt de givne svare er $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

Spørgsmål 4

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2 + 2n + 1} x^n$$

er:

- ☐ $\rho = 0$
- ☐ $\rho = \frac{1}{4}$
- ☐ $\rho = 1$
- ☐ $\rho = 4$
- ☐ $\rho = \infty$
- ☑ $\rho = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{4(n+1)^2 + 2(n+1) + 1} \frac{4n^2 + 2n + 1}{2^n} |x| \quad \to \quad 2|x|,$$

og $2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$, så $\rho = \frac{1}{2}$.

Side 2

Side 2.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = t^2 e^t.$$

Ved at sætte :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

kan differentialligningen omskrives som:

- [x] $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n)\, t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n)\, t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n)\, t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n)\, t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$

Vi bruger $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!$, så differentialligningen er

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + t\sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n &= t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \\
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!} \\
\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n) t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}
\end{aligned}$$

Spørgsmål 6

Fourierrækken

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$$

har reel form:

- [ ] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [x] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\sin(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1}\cos(nt) - \frac{2}{n^4+1}\sin(nt)\right)$

Fra formlerne

$$\begin{aligned}
a_0 = 2c_0 = 2\cdot 2 &= 4 \\
a_n = c_n + c_{-n} &= \frac{4}{n^4+1}, \quad n > 0, \\
b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{n^4+1} - \frac{2}{n^4+1} &= 0,
\end{aligned}$$

har vi $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \cos nt$.

Spørgsmål 7

Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialligningen omskrives som et 1.~ordens system, så er systemmatricen:

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fra karakterligningen ved vi at differentialligning er faktisk

$$y''' - y' = 0.$$

Hvis vi sætter $x_1 = y$, $x_2 = y'$ og $x_3 = y''$ vi har systemet:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = x_2,$$

som svarer til systemmatricen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Bemærk at egenværdierne til systemmatricen skal være det samme som rødderne til karakterligningen, d.v.s. 0, 1 og -1. Derfor er det umuligt at få en af de andre givne matricer, fordi man kan check at de har de forkerte egenværdi).

Spørgsmål 8

Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 x$$

er:

- ☐ $\frac{\pi^2}{9}$
- ☐ $\frac{\pi^3}{3}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☑ $\frac{9}{8}$
- ☐ $\frac{1}{2}$

Fra Parseval har vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Løsning: Mat 2 Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018, Del B

Opgave 1

(a) Uengentligt integrallet er definiret som:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right),$$

hvis grænseværdien eksister. Vi ved at $\lim_{t\to\infty} 1/t^2 = 0$, så det følge fra regneregler for grænseværdier at integrallet er konvergent og er lig med $\frac{1}{2}$. (Maple kunne også bruges på talfølgen $-(\frac{1}{t^2}-1)/2$.)

(b) Rækken er givet som $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hvor $f:[1,\infty[\to[0,\infty[$ er kontinuert og aftagende, og $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ er konvergent. Ved Korollar 4.35 er der så to mulige løsninger:

Brug Korollar 4.35 (i): Hvis vi approksimere summen af S_N er fejlen givet ved

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^\infty \frac{2}{n^3} &\le \int_{N+1}^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x + \frac{2}{(N+1)^3}\\ &= \frac{1}{(N+1)^2}+\frac{2}{(N+1)^3}\\ &= \frac{1}{(N+1)^2}\left(1+\frac{2}{(N+1)}\right)\\ &\le \frac{2}{(N+1)^2},\end{aligned}$$

så det er nok at løse $\frac{2}{(N+1)^2}\le\frac{2}{100}$, som har løsning $N\ge 9$, og:

$$S_9 = \sum_{n=1}^9 \frac{2}{n^3} = 2.39$$

er en tilnærmelse med en fejl højst 0.02. Vi kunne også har brugt Maple til at løse uligheden $\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{2}{(N+1)^3} < 2/100$, som giver $N\ge 7$, og en vurdering $S_7 = 2.386$.

Brug Korollar 4.35 (ii): Vi vurderer summen som $S_N + \int_{N+1}^\infty f(x)\mathrm{d}x$, og fejlen er begrænset af $f(N+1) = 2/(N+1)^3$. Så vi først løser $2/(N+1)^3 \le 2/100$, som giver $N\ge 4$, og en approximation for summen er $S_4 + \int_5^\infty \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x = 2.395$.

Opgave 2

(a) Systemmatricen A har (fra Maple) egenværdi $\lambda = -1\pm i$. Begge har negative realdel, og dette betyder at systemet er asymptotisk stabilt (ifølge Sætning 2.36).

(b) Overføringsfunktionen findes som:

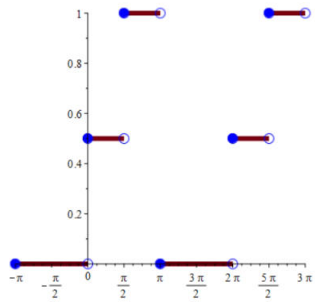
$$\begin{aligned}H(s) = \mathbf{d}^T(sI-A)^{-1}\mathbf{b} &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{s+1}{s^2+2s+2}, \quad s\notin\{-1\pm i\}.\end{aligned}$$

(c) Af Fourierrækkemetoden er en løsning givet ved:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{2}{n^4+1}H(in)e^{int} = \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{2}{n^4+1}\frac{in+1}{(-n^2+2in+2)}e^{int}.$$

Opgave 3

(a) Se Figur 1.



FIGUR 1. Opgave 3 (a)

(b) f er stykkevis differentiabel, så, ifølge Fouriers sætning, konvergere f i punktet $x = 0$ mod $(f(0^+) + f(0^-))/2 = (0.5+0)/2 = 0.25$.

(c) Koeffiecenter a_n er regnet som:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}(0 + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{d}x) \\ &= \frac{-\sin(n\pi/2) + 2\sin(\pi n)}{2n\pi}, \quad \text{hvis } n > 0, \end{aligned}$$

og $a_0 = (1/\pi)(3/2)(\pi/2) = 3/4$. Vi kan også skriver dette som

$$a_n = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 0 \\ \frac{(-1)^m}{2(2m-1)\pi}, & n = 2m-1, \quad m = 1,2,... \\ 0 & n = 2,4,\dots \end{cases}$$

(d) Nej. Der er mindst to muligheder som begrundning:

Argument 1: Hvis rækken har en konvergent majorantrække vil sumfunktionen være kontinuert (ifølge Sætning 5.33). Men dette er umuligt, fordi sumfunktionen skal være enig med f på alle punkt hvor f er kontinuert. Derfor er det klart at sumfunktionen kan ikke være kontinuert i, f.eks., punktet $x = 0$.

Argument 2: Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} k_n$ er en majorantrække, har vi, til hver n:

$$k_n \geq |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)|, \quad \text{for alle } x.$$

Hvis vi vælge $x = 0$ har vi

$$k_n \geq |a_n\cos(0)| = |a_n|.$$

Men $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \geq \frac{3}{4}\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m}$ er divergent. Ved sammenligningskriteriet er $\sum k_n$ også divergent.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 24. august 2018
Kursus: Matematik 2 01037 / 01034 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Navn:
Studienummer:

Del A: Multiple choice opgaver

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.

Denne papirversion skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.

Vejledning til del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{n+1} x^n$ er:

☐ a) $\rho = \infty$.

☐ b) $\rho = \frac{1}{4}$.

☐ c) $\rho = 1$.

☐ d) $\rho = 0$.

☐ e) $\rho = 4$.

(ii) Den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^n}{1+n^2}$ er:

☐ a) divergent.

☐ b) absolut konvergent.

☐ c) betinget konvergent.

(iii) Summen af rækken $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \, (2+x)^n}{5^{n-1}}$ er lig:

☐ a) $\frac{25}{7+x}$ for $-7 < x < 3$.

☐ b) $\frac{(2+x)^2}{7+x}$ for $-3 < x < -1$.

☐ c) $\frac{(2+x)^2}{5(7+x)}$ for $-3 < x < -1$.

☐ d) $\frac{(2+x)^2}{3-x}$ for $-7 < x < 3$.

☐ e) $\frac{(2+x)^2}{7+x}$ for $-7 < x < 3$.

(iv) Differentialligningen $y^{(3)}(t) - 5y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 13y(t) = 0$ har det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3 - i2)(\lambda - 3 + i2)$. Med de arbitrære konstanter $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, er den fuldstændige reelle løsning:

☐ a) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-3t)\cos(2t) + c_3 \exp(-3t)\sin(2t)$.

☐ b) $y(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-3t)\cos(2t) + c_3 \exp(-3t)\sin(2t)$.

☐ c) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(3t)\cos(2t) + c_3 \exp(3t)\sin(2t)$.

☐ d) $y(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(3t)\cos(2t) + c_3 \exp(3t)\sin(2t)$.

(v) Et system af 3 koblede første ordens differentialligninger $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ har systemmatricen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Det oplyses at $\mathbf{A}$ har følgende egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda_1 = 0\,, \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \lambda_2 = -2\,, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{og} \quad \lambda_3 = -3\,, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En fundamentalmatrix er:

☐ a)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -4e^{-3t} & 5e^{-2t} & 2 \\ 4e^{-3t} & 0 & 4 \\ -4e^{-3t} & -5e^{-2t} & 2 \end{pmatrix} .$$

☐ b)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 10 & -e^{-2t} & e^{-3t} \\ 21 & 0 & -e^{-3t} \\ 10 & e^{-2t} & e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

☐ c)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & 7 & -3e^{-3t} \\ 0 & 14 & 3e^{-3t} \\ 2e^{-2t} & 7 & 3e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

(vi) Vi betragter differentialligningen

$$(1+t)\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0\ , \tag{1}$$

med en variabel koefficient $1+t$, hvor $t \in \mathbb{R}$. Den afhængige variabel er $y = y(t)$. De første 4 led i en potensrækkeløsning til (1) på formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ er:

☐ a) $y(t) = a_1 t - a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_1 t^3 - \frac{1}{18} a_1 t^4 \ldots$, hvor a_1 er en arbitrær reel konstant.

☐ b) $y(t) = a_1 t - \frac{a_1}{3} t^3 + \frac{a_1}{6} t^4 - \frac{a_1}{15} t^5 \ldots$, hvor a_1 er en arbitrær reel konstant.

☐ c) $y(t) = a_0 + a_1 t - a_0 t^2 + \frac{a_0 + a_1}{3} t^3 + \ldots$, hvor a_0 og a_1 er arbitrære reelle konstanter.

☐ d) $y(t) = a_0 + a_1 t - a_0 t^2 + \frac{a_0 - a_1}{3} t^3 + \ldots$, hvor a_0 og a_1 er arbitrære reelle konstanter.

(vii) Et differentialligningssystem $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}\ , \tag{2}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Systemet er asymptotisk stabilt for:

☐ a) $-\sqrt{15} < a < \sqrt{15}$.

☐ b) $0 < a < \sqrt{\frac{95}{4}}$.

☐ c) $-\sqrt{\frac{10}{3}} < a < \sqrt{\frac{10}{3}}$.

☐ d) $0 < a < \sqrt{\frac{10}{3}}$.

☐ e) $a < -\sqrt{\frac{10}{3}}$ eller $\sqrt{\frac{10}{3}} < a$.

Del A er slut. Husk, at svare på del B.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 24. august 2018
Kursus: Matematik 2 01037 / 01034 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice (stilles elektronisk): 50%, opgave 1: 20% opgave 2: 15% og opgave 3: 15%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen. Mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (Del A) og denne (Del B).

Del A stilles og besvares elektronisk. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.

Del B stilles nedenfor, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

En 2π-periodisk funktion f er ulige og stykkevis differentiabel. I intervallet $[0, \pi]$ er f givet ved et 3. grads polynomium

$$f(x) = -x^3 + \pi^2 x \ . \tag{1}$$

(i) Skitser grafen for f i intervallet $[-\pi; \pi]$.

(ii) Bestem Fourierrækken for f. Integraler må udregnes med Maple.

(iii) Er Fourierrækken uniform konvergent? Svaret skal begrundes.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

En Fourierrække med sumfunktionen S er givet ved

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \ . \tag{2}$$

(i) Vis, at $S(x)$ er kontinuert.

(ii) Bestem en $N'te$ afsnitssum S_N, således at $S_N(x)$ approksimerer Fourierrækkens sumfunktion $S(x)$ med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 10^{-4}$.

Opgave 3

Vi betragter følgende system af 3 koblede første ordens differentialligninger

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \quad \text{hvor} \ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Det oplyses at $\mathbf{A}$ har følgende egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \lambda_2 = -2 \ , \ \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = -3 \ , \ \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

(i) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (3).

(ii) Er differentialligningssystemet stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt? Begrund svaret.

(iii) Er det inhomogene system $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$, hvor $\mathbf{u}$ er en begrænset påvirkning, BIBO stabilt? Begrund svaret.

Del B er slut. Husk at svare på Del A (Multiple Choice).

Løsning til eksamenssæt i matematik 2,
kursus 01037, august 2018

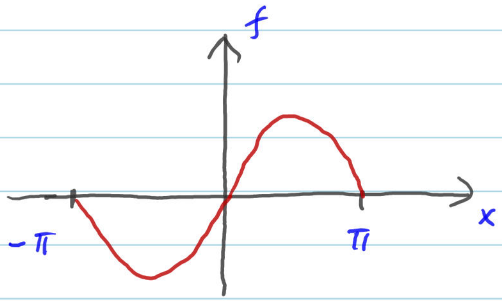
Del B

Opgave 1

En 2π-periodisk og ulige funktion f er i intervallet $[0;\pi]$ givet ved

$$f(x) = -x^3 + \pi^2 x$$

1(i) Skitse af grafen for f



$$f'(x) = -3x^2 + \pi^2 = 0 \iff x = \pm \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi^3}{\sqrt{3}} = +\frac{2\pi^3}{3\sqrt{3}}$$

1(ii) Fourierrækken for f er

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Da f er ulige følger det af sætning 6.3 at

$$a_n = 0 \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

②

1 (ii) Ifølge sætning 6.3 er

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2x - x^3)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{-12}{n^3}\cos(\pi n) = \frac{-12}{n^3}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Integralet er udregnet med brug af Wolfram Alpha.

Fourierrækken er:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}\sin(nx)$$

1 (iii)

Fra definitionen af f ses at denne funktion er kontinuert i $\mathbb{R}$. Desuden er f stykkevis differentiabel og 2π-periodisk. Ifølge korollar 6.13 konvergerer Fourierrækken uniformt og vi har

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{12}{n^3}\sin(nx)$$

Opgave 2 En Fourierrække er givet ved

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$$

2 (i) En majorantrække bestemmes som følger

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^3} = k_n \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ og } n = 1, 2, \ldots$$

En majorantrække er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Ifølge eksempel 4.34 med $\alpha = 3 > 1$ er denne majorantrække konvergent. Alle funktioner $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ er kontinuerter fordi $\sin(nx)$ er kontinuert. Ifølge sætning 5.33 er sumfunktionen kontinuert og den uendelig række er uniform konvergent.

2 (ii) Vi bestemmer nu en N'te afsnitssum S_N som approksimerer den uendelige række med en fejl $\leq \varepsilon$.

2 (ii) Vi betragter

$$|S(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| =$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

I følge ulighed (4.32) har vi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx + \frac{1}{(N+1)^3} =$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) \leq$$

$$\frac{1}{(N+1)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(N+1)^2} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N+1 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \Leftrightarrow$$

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$$

Med $\varepsilon = 10^{-4}$ får vi $N = 99$

Opgave 3 Vi betragter differentialligningssystemet

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne og de tilhørende egenvektorer er

$$\lambda_1 = 0 \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3 = -3 \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3(i) Den fuldstændige løsning er ifølge sætning (2.6)

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

3(ii) Da ingen egenværdi har realdel større end 0 ($\lambda_i \leq 0$ for $i = 1,2,3$) er systemet stabilt ifølge sætning 2.34, men ikke asymptotisk stabilt fordi $\lambda_1 = 0$.

3(iii) Det homogene system $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{u}(t)$, hvor påvirkningen u er begrenset, er ikke BIBO stabilt fordi det homogene system ikke er asymptotisk stabilt. Jvf. sætning 2.47.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2019
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 30 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 25%; Opgave 4: 30%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives elektronisk eller på papirform. Hvis løsningen til multiple-choice opgaven afleveres på papir, skal det foregå ved angivelse af svaret på et rent stykke papir, uden udregninger. Der er kun en korrekt svarmulighed per spørgsmål. Man kan vælge mere end en svarmulighed, hvilket giver delvise point. Hvis man svarer forkert, giver det negative point. Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

Opgave 1

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Svaret er:

a) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 t \cos t + c_4 \sin t,\ c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

Opgaven fortsætter - Vend!

(ii) Find en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d^4y}{dt^4} + \frac{d^2y}{dt^2} = e^t$$

Svaret er:

a) $y(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$.

b) $y(t) = \frac{1}{2}e^t$.

c) $y(t) = \sin t$

(iii) Undersøg om talfølgen givet ved

$$x_n = \frac{1+e^n}{n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

er konvergent, og bestem i bekræftende fald grænseværdien. Svaret er:

a) Talfølgen er divergent.

b) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 0.

c) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1.

(iv) Vi benytter $n$te-ledskriteriet til at undersøge konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$$

Svaret er:

a) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken konvergent

b) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken divergent

c) Brug af $n$te-ledskriteriet leder ikke til nogen konklusion for rækken.

Opgaven fortsætter - Vend!

(v) Betragt den 2π-periodiske funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{for } x \in [0, \pi[\\ 3\pi - x & \text{for } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases} \tag{1}$$

Vi undersøger om funktionen f er lige eller ulige. Svaret er:

a) Funktionen f er lige.

b) Funktionen f er ulige.

c) Funktionen f er hverken lige eller ulige

(vi) Bestem summen af Fourierrækken i $x = 2\pi$ for funktionen f i (1). Svaret er:

a) Summen er ikke konvergent

b) Summen er 2π.

c) Summen er π.

Opgave 2

Betragt for $x \in \mathbb{R}$ den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(x))^n . \tag{2}$$

(i) Bestem mængden af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken (2) er konvergent.

(ii) Bestem summen af rækken (2) for mængden af $x \in \mathbb{R}$ som blev fundet i (i).

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 3 Vi betragter et homogent differentialligningssystem af formen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Vi antager at matricen $\mathbf{A}$ har formen

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & -2a \\ a-1 & -2 & 2-2a \\ a & 0 & -2a-1 \end{pmatrix},$$

hvor a er en reel parameter. Det oplyses (skal **IKKE** vises) at det karakteristiske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 - (5+3a)\lambda - 2 - 2a.$$

(i) Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke differentialligningssystemet er asymptotisk stabilt.

(ii) Bestem for $a = 0$ en partikulær løsning til det inhomogene system

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{3}$$

(iii) For hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ har systemet (3) en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t}$ for en vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$?

Opgave 4 Vi betragter differentialligningen

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2} + t\,\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

og søger en løsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{5}$$

(i) Vis at hvis en funktion y på formen (5) er løsning til (4), så er

$$c_0 = 0 \;\text{ og }\; c_{n+1} = \frac{-1}{n} c_n,\; n \geq 1. \tag{6}$$

(ii) Benyt (6) til at vise at enhver potensrækkeløsning til (4) har konvergensradius $\rho = \infty$.

(iii) Sæt $c_1 = 1$ og benyt (6) til at finde koefficienter c_n, $n \geq 2$, således at funktionen y i (5) er løsning til (4).

(iv) Find et funktionsudtryk for funktionen y i (iii) på formen $y(t) = t^\alpha e^{\beta t}$ for passende reelle tal α, β.

Opgavesættet slut.

01035 - Matematik 2

Løsningsforslag
Eksamen Maj 2019

Udarbejdet af
Phillip B. Vetter

Opgave 1

(i)

Differentialligningen har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2 \left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

Rødderne aflæses direkte som $\lambda = 0$ (med algebraisk multiplicitet 2) og $\lambda = \pm i$. Løsningen fås da via Sætning 1.15 som

$$\boxed{y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t)\,, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}}$$

(ii)

Vi gætter på en løsning af formen $y(t) = Ae^t$. Indsættelse i differentialligningen giver

$$Ae^t + Ae^t = 2Ae^t = e^t \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \frac{1}{2}$$

Løsningen er dermed

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t}$$

(iii)

Generelt vides at en eksponentialfunktion vokser meget hurtigere end et polynomium. Her vokser e^n altså meget hurtigere end n. Dermed divergerer talfølgen x_n.

Alternativt kan man ved L'Hôpitals regel vise at

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+e^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial n}(1+e^n)}{\frac{\partial}{\partial n}(n)} = \lim_{n\to\infty} e^n$$

hvorved det klart ses at x_n divergerer.

(iv)

Funktionerne n og $\ln(n)$ er begge monotont voksende for $n \to \infty$. Vi ser altså at

$$\lim_{n\to\infty} n + \ln(n) \to \infty$$

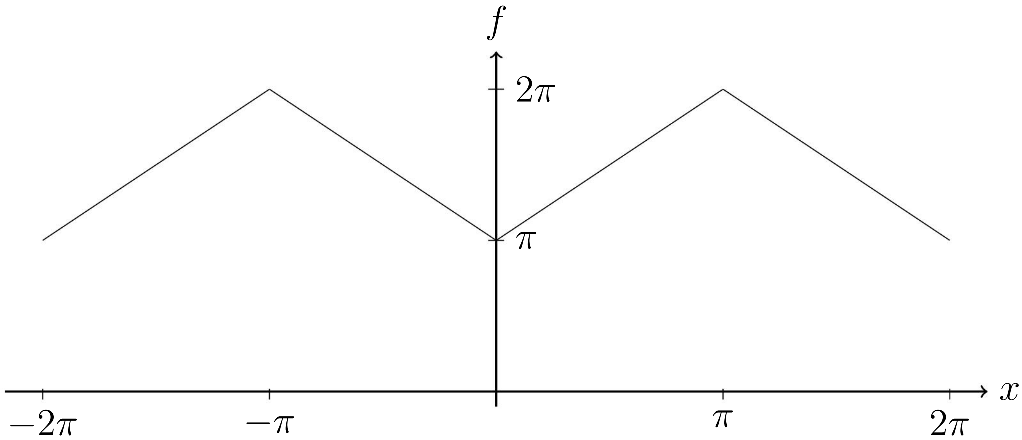
Hvorfor det sluttes at grænseværdien for leddene i rækken er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln(n)} = 0$$

Vi kan altså ikke konkludere noget ved brug af n'te-ledskriteriet

(v)

Vi tegner først f for at få et overblik over funktionen.



Vi kan betragte f i intervallet $x \in [\,-\pi\,,\,\pi\,]$. Det fås umiddelbart at

$$\lim_{x^{\pm}} f(0) = \pi \qquad \text{og} \qquad \lim_{x^{\pm}} f(-\pi) = \lim_{x^{\pm}} f(\pi) = 2\pi$$

Desuden er f i intervallerne $x \in I_1 = [\,-\pi\,,\,0\,[$ og $x \in I_2 = [\,0\,,\,\pi\,[$ givet ved henholdsvis

$$f_{I_1}(x) = -x + \pi \qquad\qquad f_{I_2}(x) = x + \pi$$

Dermed fås direkte at

$$f_{I_1}(x) = f_{I_2}(-x)$$

Da f er 2π periodisk kan vi derfor slutte at f er en lige funktion.

(vi)

f er stykkevis differentiabel og kontinuert i hele sit domæne, specifikt også i $x = 2\pi$. Derfor konvergerer Fourierrækken for f uniformt mod $f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ via Sætning 6.12 og Korollar 6.13. Summen af Fourierrækken i $x = 2\pi$ er derfor givet ved

$$\boxed{f(2\pi) = f(0) = 0 + \pi = \pi}$$

Opgave 2

(i)

Indføres $y = \cos(x)$ fås rækken på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^n$$

Kvotientrækken konvergerer ifølge Sætning 5.2 for all $|y| = |\cos(x)| < 1$. Denne ulighed er overholdt når $x \notin \{p\pi\}_{p\in\mathbb{Z}}$. Rækken konvergerer altså for alle $x \in \mathbb{R}/\{p\pi\}_{p\in\mathbb{Z}}$

(ii)

Ifølge Korollar 5.5 fås rækkens sum til

$$\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y} = \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$$

Opgave 3

(i)

Det karakteriske polynomium skrives på formen som angivet i Sætning 2.39

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 - (5+3a)\lambda - 2 - 2a = -\left(\lambda^3 + (4+a)\lambda^2 + (5+3a)\lambda + 2 + 2a\right)$$

Dermed ses altså at alle rødder har negativ realdel hvis

$$\begin{aligned}
&4+a>0 && \Leftrightarrow && a>-4\\
&5+3a>0 && \Leftrightarrow && a>-\frac{5}{3}\\
&2+2a>0 && \Leftrightarrow && a>-1\\
&\det\begin{pmatrix}4+a & 2+2a\\ 1 & 5+3a\end{pmatrix} = 3a^2+15a+18>0 && \Leftrightarrow && a\in\mathbb{R}/[-3;-2]
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Alle uligheder er opfyldt hvis } a>-1\text{, og systemet er da asymptotisk stabilt}}}$

(ii)

Vi gætter på en løsning af formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{k}e^{3t}$. Indsættelse i systemet giver da

$$3\mathbf{k}e^{3t} = \mathbf{A}\mathbf{k}e^{3t} + \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} e^{3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mathbf{A}-3\mathbf{I})\,\mathbf{k} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \tag{1}$$

Systemet har den unikke løsning

$$\mathbf{k} = (\mathbf{A}-3\mathbf{I})^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

En partikulær løsning til differentialligningssystemet er derfor

$$\boxed{\mathbf{x}_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} e^{3t}}$$

(iii)

Systemet har med sikkerhed en løsning af formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t}$ såfremt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Dette krav brydes netop når $\lambda = 3$ er en egenværdi for $\mathbf{A}$. Indsættelse af λ i det karakteristiske polynomium for systemet giver

$$P(3) = 3^3 + 3^2(4+a) + 3(5+3a) + 2 + 2a = 20a + 80 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a \neq -\frac{-80}{20} = -4$$

I tilfældet $a = -4$ fås som vist $\det(\mathbf{A}) = 0$, hvormed systemet enten har ingen løsning, eller uendelige mange løsninger. Vi viser her at der ikke findes nogle løsninger. Ved indsættelse fås helt identisk med (1):

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\,\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 \\ -5 & -5 & 10 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det ses ved at betragte første og sidste række at systemet er inkonsistent.

Vi slutter dermed at der findes en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{3t}$ for alle $a \in \mathbb{R}/[-4]$

Opgave 4

(i)

Vi indsætter den angivne løsningsform i differentialligningen og får

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Rækkerne manipuleres nu på følgende måde: For rækken længst til venstre ændres summationsindexet så summen starter ved $n = 1$. Midterste rækken forbliver uændret. For rækken længst til højre trækkes leddet hørende til $n = 0$ ud af summen. Dermed fås

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} n(n+1)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n + c_0 \\ = \quad & c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n+1} n(n+1) + c_n(n+1)\right] t^n = 0 \end{aligned}$$

Via Korollar 5.21 sluttes nu at

$$\boxed{c_0 = 0} \qquad \text{og} \qquad c_{n+1} n(n+1) + c_n(n+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_{n+1} = -\frac{n+1}{(n+1)n} c_n = -\frac{1}{n} c_n\,, \qquad n \geq 1}$$

(ii)

Ved at anvende Sætning 4.30 med rekursionen fundet i (i) fås

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-\frac{1}{n}c_n}{c_n} \right| |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|x| = 0 < 1$$

Dermed sluttes via 4.30 at potensrækken konvergerer absolut for alle $x \in \mathbb{R}$.
Rækkens konvergensradius er derfor $\rho = \infty$

(iii)

Gentagende anvendelse af rekursionen fra (i) $n-1$ gange viser at c_n kan skrives som

$$\begin{aligned} c_n = (-1)\frac{c_{n-1}}{n-1} &= (-1)^2\frac{c_{n-2}}{(n-1)(n-2)} \\ &= (-1)^3\frac{c_{n-3}}{(n-1)(n-2)(n-3)} = ... = (-1)^{n-1}\frac{c_1}{(n-1)(n-2)...\cdot 2\cdot 1} \end{aligned}$$

Vælges $c_1 = 1$ kan koefficienterne c_n altså skrives som

$$\boxed{c_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}}$$

(iv)

Ved at skrive c_n i løsningen $y(t)$ som fundet i (iii) tager $y(t)$ formen

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}t^n$$

Hvis vi ændrer summationsindex til $n = 0$ og flytter en faktor t udenfor summen fås

$$y(t) = t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}t^n = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-t)^n = te^{-t}$$

Det ses derfor at løsningen tager formen $y(t) = t^{\alpha}e^{\beta t}$ med $\alpha = 1$ og $\beta = -1$

Mat2 Exam E19 Part A English

Side 1

- [x] Vis rigtige svar
- [ ] Skjul rigtige svar

There are 10 questions in total.

Spørgsmål 1

Consider the two infinite series:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^3}{4n^3+2n+1}\,, \qquad \text{and} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+1}\,.$$

Which statement is true?

- [ ] Both R and S are convergent.
- [ ] Both R and S are divergent.
- [x] R is divergent and S is conditionally convergent.
- [ ] R is divergent and S is absolutely convergent.
- [ ] R is conditionally convergent and S is divergent.

Spørgsmål 2

The radius of convergence ρ for the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\ln(n)}{3^n} x^n$$

is:

- [ ] $\rho = \frac{1}{3}$
- [x] $\rho = 3$
- [ ] $\rho = 1$
- [ ] $\rho = \infty$
- [ ] $\rho = \frac{1}{2}$
- [ ] $\rho = 2$
- [ ] $\rho = 0$

Spørgsmål 3

It is given that the characteristic polynomial for a 4th order homogeneous differential equation with constant coefficients is:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1).$$

The general real solution is:

- [ ] $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- [x] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t$

Spørgsmål 4

Consider a pair of infinite series with positive terms,

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

and

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

where $a_n > 0,\ b_n > 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$, and the sequence

$$c_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}.$$

It is given that $\sqrt{a_n} \leq b_n$ for all n, and that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Choose the statement that is correct:

- [ ] R and S are both divergent.
- [x] S is divergent and R is convergent.
- [ ] Both series are convergent.
- [ ] R is divergent and S is convergent.

Spørgsmål 5

Consider the differential equation

$y'(t) - t^3 y(t) = 0$

By setting:

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

we can rewrite the differential equation as one of the following equations. Choose the correct one:

- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t + \sum_{n=-3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [x] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n-1}(n-1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n-1}(n-1) - c_{n-3})\, t^n = 0$

Side 2

Spørgsmål 6

Consider the series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$$

On which of the following x-intervals is the series uniformly convergent?

- [ ] $-3/4 \leq x \leq -1/4$
- [ ] $-3 \leq x \leq 3$
- [ ] $-1 \leq x \leq 1$
- [ ] $-1/2 < x < 1/2$
- [x] $1/4 \leq x \leq 3/4$
- [ ] $0 < x < 1$

Spørgsmål 7

For the first order system of differential equations

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

it is given that the matrix

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

has the eigenvalues:

$$\lambda_1 = -1 - a, \quad \lambda_2 = a$$

where the number $a \in \mathbb{R}$ is a real parameter.

For $a \neq -1/2$ it is also given that: λ_1 has algebraic multiplicity 1, while λ_2 has algebraic multiplicity 2 and geometric multiplicity 1.

For which values of the parameter a is the system stable?

- [ ] $-1 \leq a \leq 0$
- [x] $-1 \leq a < 0$
- [ ] $a < 0$
- [ ] $a > 1$
- [ ] $-\infty < a < \infty$
- [ ] There are no values of a for which the system is stable.

Spørgsmål 8

Let

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

be an even and 2π-periodic function, given on the interval $[0, \pi]$ by the formula:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1[, \\ 3/2 & \text{for } x = 1, \\ 2 & \text{for } x \in]1, \pi]. \end{cases}$$

Which of the following statements about the Fourier series of f is valid?

- [x] The Fourier series converges pointwise, but not uniformly, to f.
- [ ] The Fourier series converges uniformly to f.
- [ ] The Fourier series converges pointwise, but not to f.
- [ ] The Fourier series converges uniformly, but not to f.
- [ ] There is at least one point x at which the Fourier series is divergent.

Spørgsmål 9

Consider the pair of infinite series R and S with non-constant terms given by:

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{and} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Select the statement that is valid:

- [ ] Both series have convergent majorant series.
- [ ] Both series have majorant series, but neither has a convergent majorant.
- [x] Both series have majorant series, but only S has a convergent majorant.
- [ ] Neither series has a majorant series.
- [ ] Both series have majorant series, but only R has a convergent majorant.

Spørgsmål 10

For a third order homogeneous differential equation with initial conditions:

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,$

it is given that the power series method leads to the recursion formula:

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

for the power series solution

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

The 6th partial sum of y(x),

$$S_6(x) = \sum_{n=0}^{6} c_n x^n$$

is then given by:

- [x] $S_6(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- [ ] $S_6(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- [ ] $S_6(x) = x + \frac{1}{12}x^4$
- [ ] $S_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^5$
- [ ] $S_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6$

Facit for MAT 2 01035 E19 del B

Problem 1:
(1) $y(t) = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
(2) —
(3) $H(s) = \frac{1}{s^2-2s+2}$, $s \neq 1 \pm i$. $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{-n^2-2in+2} e^{int}$.
(4) $y(t) = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t} + \frac{1+t}{2} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{-n^2-2in+2} e^{int}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Problem 2:
(i) Funktionen er ulige så alle $a_n = 0$. $b_2 = \frac{1}{2}$ og for alle andre n: $b_n = -\frac{4}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n^2-4}$. Specielt, for alle $n = 2m \neq 2$: $b_{2m} = 0$.
(ii) $N \geq 255$.
(iii) Ja. F.eks. vha korollar 6.13.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 8. december 2019
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 65%, Opgave 1: 15%, Opgave 2: 20%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = u(t), \tag{1}$$

hvor $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ antages at være en kontinuert funktion.

1. Opskriv det karakteristiske polynomium for ligningen (1) og bestem dernæst både den fuldstændige komplekse og den fuldstændige reelle løsning til den tilhørende homogene differentialligning.
2. Betragt nu $u(t) = t$ og vis, at $y_p(t) = \frac{1+t}{2}$ er en partikulær løsning til ligningen (1).
3. Betragt dernæst $u(t) = e^{st}$ og opskriv overføringsfunktionen. Anvend resultatet til at opskrive en partikulær løsning til (1) for tilfældet $u(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$, hvor N er et postivt heltal. (Vink: Det er lettere at beholde de komplekse eksponentialfunktioner i stedet for at anvende cosinus og sinus.)
4. Opskriv nu den fuldstændige komplekse løsning til ligningnen (1) for tilfældet

$$u(t) = t + \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en ulige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{for } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{for } x \in]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

1. Bestem alle reelle Fourierkoefficienter a_n og b_n i Fourierrækken

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{2}$$

   hørende til funktionen f og vis, at der findes kun et $m \in \mathbb{N}$ således at $b_{2m} \neq 0$.

Lad $S_N(x)$ være den N'te afsnitssum hørende til Fourierrækken (2) for f:

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

hvor $N \in \mathbb{N}$. Det oplyses, at (skal ikke vises)

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{8}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

for alle $N \in \mathbb{N}$ og alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Find et N således, at $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Konvergerer Fourierrækken uniformt? Forklar.

——————oooOooo——————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).

Opgaver E21 Mat 2 del A

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Betragt potensrækken

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n.$

Hvad er det størst mulige interval, for hvilket rækken er konvergent:

Choose one answer

- $\mathbb{R}$
- $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $]-2, 2[$
- $[-2, 2[$
- $[-2, 2]$
- $x = 0$

Funktionen f er 2π periodisk og på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ givet ved $f(x) = x\sin(x)$.
Hvilket udsagn er sandt:

Choose one answer

- f er lige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er lige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.
- f er ulige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er ulige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.
- f er hverken lige eller ulige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er hverken lige eller ulige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.

Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

som afhænger af en reel parameter a.
Det oplyses at det karakteristiske polynomium for systemet er givet ved

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + a, \quad \text{hvor} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hvilket af nedenstående intervaller sikrer at systemet er asymptotisk stabilt:

Choose one answer

- $a \in [0, 6]$
- $a \in]-1, 7]$
- $a \in]0, 6[$
- $a \in [-1, 7]$
- $a \in [-6, 0]$
- $a \in]-6, 0[$
- Det rigtige svar er ikke vist her.

Vi betragter en inhomogen andenordens lineær differentialligning med konstante koefficienter, med tilhørende overføringsfunktion $H(s)$.

Overføringsfunktionen $H(s)$ er givet ved

$$H(s) = \frac{3}{s^2+s-2}\ ,\ s \neq \{-2, 1\}.$$

Hvilken af nedenstående funktioner y kan være en løsning til differentialligningen?

Choose one answer

- $y(t) = 3e^{t}$
- $y(t) = \frac{1}{6}e^{4t}$
- $y(t) = \frac{1}{10}e^{3t}$
- $y(t) = 3e^{4t}$
- $y(t) = \frac{-3}{10}e^{3t}$
- $y(t) = 3e^{-t}$
- Ingen af de mulige svar kan være en løsning til differentialligningen.

Betragt de to uendelige rækker

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n^2+3n}{(n+1)^4} \quad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{\sqrt{n}+1}.$$

Angiv det korrekte udsagn vedrørende de to rækker:

Choose one answer

- R er absolut konvergent og S er divergent.
- R er divergent og S er betinget konvergent.
- R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.
- R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- R er divergent og S er divergent.
- R er absolut konvergent og S er absolut konvergent.
- Ingen af de nævnte udsagn er korrekte.

Fourierrækken for en funktion f er på reel form givet ved

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \right).$$

Vi betragter nu Fourierrækken for f givet på kompleks form

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Hvilket sæt af Fourierkoefficienter er korrekt:

Choose one answer

- $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = -2 - 2i$, $c_2 = \frac{1}{4} + i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- Ingen af de viste sæt er korrekte.

Betragt en 3-ordens lineær homogen differentialligning med konstante koefficienter
$\frac{d^3x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3 x = 0.$

Det oplyses at nedenstående funktion er løsning til differentialligningen

$x(t) = e^{2t} + e^{-t} + 1.$

Hvilket af nedenstående sæt af værdier for koefficienterne $a_1,\ a_2$ og a_3 er det rigtige?

Choose one answer

- $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0$

Vi betragter en 2π periodisk funktion f, som i intervallet $[-\pi, \pi[$ er givet ved forskriften

$$f(t) = \begin{cases} \pi & -\pi \leq t < 0 \\ t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Fourierrækken hørende til funktionen f er givet ved:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Hvilke af nedenstående værdier er de korrekte Fourierkoefficienter for f:

Choose one answer

- $a_2 = 0,\ b_1 = -1,\ b_3 = -\frac{1}{3}$
- $a_2 = 0,\ b_1 = 1,\ b_3 = \frac{1}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = -1,\ b_3 = -\frac{1}{3}$
- $a_2 = 0,\ b_1 = -\pi,\ b_3 = -\frac{\pi}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = -\pi,\ b_3 = -\frac{\pi}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = \pi,\ b_3 = \frac{\pi}{3}$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 5. december 2021
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 60%, Opgave 1: 15%, Opgave 2: 15%, og Opgave 3: 10%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$x''(t) + 4\,x'(t) + 3\,x(t) = u'(t)\,. \tag{1}$$

1. Find rødderne i det karakteristiske polynomium hørende til (1), og opskriv ved hjælp af disse rødder den fuldstændige reelle løsning til den homogene del af (1).
2. Bestem overføringsfunktionen for differentialligningen (1).
3. Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{4t}$.
4. Bestem en partikulær løsning til (1) når $u(t) = e^{-3t}$, ved at gætte på en løsning af formen $x(t) = Ate^{-3t}$ hvor A er en reel konstant.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningsystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Vis at $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ er en løsning til (2) og angiv den fuldstændige reelle løsning til (2).
3. Afgør om differentialligningsystemet (2) er asymptotisk stabilt.

Opgave 3

Betragt den homogene differentialligning

$$t\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + y = 0\,. \tag{3}$$

Antag at differentialligningen (3) har en løsning, der kan skrives som en potensrække, $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, med konvergensradius $\rho > 0$.

1. Indsæt potensrækken for y i differentialligningen (3) og vis at konstanterne a_n skal opfylde $a_0 = 0$ samt rekursionsformlen
$$a_{n+2}(n+2)(n+1)n + a_n = 0, \text{ for } n \geq 1.$$
2. Bestem a_1, a_2 og a_3 for en potensrækkeløsning $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ med $y'(0) = 3$ og $y''(0) = 4$.

——————oooOooo——————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).

Svar eksamen Mat 2

December 2021

1 Opgaver del 2

Opgave 1
1) Rødderne i det karakteristiske polynomium findes til $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -3$. Den fuldstændige reelle løsning er så

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}\,,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

2) Ifølge ligning (1.20) findes overførings funktionen til

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}\ ,\ s \neq (-1, -3)$$

3) $x(t) = H(4)e^{4t} = \frac{4}{35}e^{4t}$

4) $x_{par}(t) = A \cdot te^{-3t}$ indsat i differentialligingen giver dette:

$$\begin{aligned}
&\left(A \cdot te^{-3t}\right)'' + 4\left(Ate^{-3t}\right)' + 3Ate^{-3t} = -3e^{-3t} \\
&e^{-3t}(-2A) = -3e^{-3t} \\
&A = \frac{3}{2} \\
&\lambda_{par}(t) = \frac{3}{2}te^{-3t}
\end{aligned}$$

Opgave 2
1) Egenværdierne og egenvektorerne til systemmatricen findes:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = -2 + i\sqrt{2}, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&\lambda_2 = -2 - i\sqrt{2} \quad , \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sætning 2.6 giver nu løsningerne

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-2t}\left(\cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} - \sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right)\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix}\\
x_2(t) &= e^{-2t}\left(\sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} + \cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right).\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Den fuldstændige reelle løsning er:

$$X_{\text{hom}}\,(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}.$$

2) Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$\begin{aligned}
&\text{HS: } \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}\\
&VS: \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3e^t\\ 2e^t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}\\
&HS = VS
\end{aligned}$$

Den fuldstændige reelle løsning er nu:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}$$

3) Da egnværdierne for systemmatricen har negative realdele er systemet ifølge sætning (2.36) asymptotisk stabilt.

Opgave 3

1) Vi indsætter $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i differentialligningen.
De to led giver

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Vi ser at der i andet led med y er et konstantled (a_0) der ikke kan balanceres med noget fra det første led, og derfor må være 0. Dette gør at andet led faktisk starter fra $n = 1$. Med brug af dette, og ved at 'sænke' index i første led med 2, får man at differentialligningen kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2} n(n+1)(n+2) + a_n\right] t^n = 0$$

hvoraf fra identitetssætningen (korrolar 5.21) følger at

$$a_{n+2}n(n+1)(n+2)+a_n=0. \qquad \text{for } n \geq 1$$

2) Fra $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ved vi at:

$$a_0=y(0)=0 \text{ og } a_1=y'(0)=3$$

Envidere er $2a_2=y''(0)=4$ hvoraf $a_2=2$.

Endelig bruger vi rekursionsrelationen til at slutte af

$$a_3 \cdot 2 \cdot 3=-a_1=-3$$

og derfor er $a_3=-\frac{1}{2}$

Del A

Opgave 1: [-2,2[

Opgave 2: f er lige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.

Opgave 3: $a \in]0,6[$

Opgave 4: $\frac{1}{6}e^{4t}$

Opgave 5: R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

Opgave 6: $c_0=\frac{\pi^2}{3}, c_{-1}=-\frac{1}{2}+i, c_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}i$

Opgave 7: $a_1=-1, a_2=-2, a_3=0$

Opgave 8: $a_2=0, b_1=-1, b_3=-\frac{1}{3}$

Matematik 2 E22

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Givet differentialligningen:

$$x'''(t) + x''(t) = 6t$$

Hvilken af følgende funktioner er løsning til differentialligningen?

Vælg en svarmulighed

- ○ $x(t) = t^3 - 3t^2 + \exp(t) + 5t - 1$
- ○ $x(t) = t^3 - 3t^2 + \exp(-t) + 5t^2 + 6t - 1$
- ○ $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + \exp(-t)$
- ○ $x(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 1$
- ○ $x(t) = t^3 + t^2 + t + 1$
- ○ $x(t) = -t^3 - 3t^2 + 6t$

Givet differentialligningen:

$$x''(t) + (1 - 2a)x'(t) - 2ax(t) = 2u''(t) - 6u'(t) - 8u(t)$$

hvor $u(t)$ betegner påvirkningen.

Overføringsfunktionen hørende til differentialligningen er givet ved:

$$H(s) = 2 \ , \ \ s \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 4\}$$

Hvad er værdien af a?

Vælg en svarmulighed

- $a = 1$
- $a = 2$
- $a = 3$
- $a = -1$
- $a = 0$
- $a = 4$

Givet rækken:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 \exp(-n)$$

Hvilken oplysning giver integralkriteriet om rækken:

Vælg en svarmulighed

- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[\exp(-1), 1+\exp(-1)]$
- Rækken er divergent.
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[4, 5]$
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[1+10\exp(-1), 1+14\exp(-1)]$
- Rækken er konvergent og dens sum ligger i intervallet $[10\exp(-1), 14\exp(-1)]$

Givet potensrækken:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}} x^n$$

hvor $a > 2$ er en konstant.
Lad ρ betegne konvergensradius.
Hvilket af følgende udsagn er sandt?

Vælg en svarmulighed

- $\rho = \frac{1}{a}$, rækken er absolut konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = 1$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = a$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = a$, rækken er divergent i $x = -\rho$
- $\rho = \frac{1}{a}$, rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$
- $\rho = 1$, rækken er absolut konvergent i $x = -\rho$

Det oplyses at Fourierrækken for en reel funktion f er givet ved:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx)$$

hvor det oplyses at:

$$c_0 = 0 \text{ og } c_n = \frac{2}{\pi n^3} \ , \ n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Lad a_n og b_n betegne koefficienterne i den tilsvarende Fourierrække på reel form.
Hvilket af nedenstående udsagn er korrekt (Vink: f er reel):

Vælg en svarmulighed

- ○ $c_{-1} = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = \frac{4}{\pi}$ og $b_1 = 0$
- ○ $c_{-1} = -\frac{2}{\pi}$, $a_1 = 0$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$
- ○ $c_{-1} = \frac{2}{\pi}$, $a_1 = 0$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$
- ○ $c_{-1} = -\frac{2}{\pi}$, $a_1 = \frac{4}{\pi}$ og $b_1 = \frac{4i}{\pi}$

Betragt den inhomogene differentialligning

$$t\frac{d^2y}{dt^2} - 2y = 8t + 6$$

Antag at differentialligningen har en løsning, der kan skrives som en potensrække,
$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ med konvergensradius $\rho > 0$.

Hvilket sæt af betingelser skal koefficienterne opfylde?

Vælg en svarmulighed

- $c_0 = -3,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n+1}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_1 = 8,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n(n+1)}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n}$ for $n > 1$
- $c_0 = -3,\ c_2 - c_1 = 4,\ c_{n+1} = \frac{2c_n}{n(n+1)}$ for $n > 1$
- $c_0 = 6,\ c_1 = 8,\ c_n = 0$ for $n > 1$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 6. december 2022
Kursus: Matematik 2 01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 50%, Opgave 1: 10%, Opgave 2: 20%, og Opgave 3: 20%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Givet 2 rækker:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}$$

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$$

1. Redegør for hver af rækkerne S og T om rækken er divergent, betinget konvergent eller absolut konvergent.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningsystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Afgør om differentialligningssystemet (1) er asymptotisk stabilt.
3. Vis at (1) har en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = te^{-t}\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{v}$ er en vektor.
4. Angiv den fuldstændige reelle løsning til (1).

Opgave 3

Om funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er følgende givet: f er en lige funktion, f er 2π periodisk, og på intervallet $[0, \pi]$ er funktionen givet ved følgende forskrift:

$$f(t) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right) \quad \text{for } t \in [0, \pi]. \tag{2}$$

Det kan anvendes, at for et heltal n og en ikke heltallig reel parameter a er

$$\int_0^\pi \cos(at)\cos(nt)dt = \frac{a\sin(\pi a)\cos(n\pi)}{a^2 - n^2}.$$

1. Vis at f har Fourierrækken $-\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)} \cos(nt)$.
2. Undersøg om f er kontinuert og om Fourierrækken for f er uniformt konvergent.
3. Har Fourierrækken for f en konvergent majorantrække?
4. Bestem summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9}$. Vink: Indsæt en passende værdi for t i Fourierrækken for f.

————————oooOooo————————

Opg 1 MC

karakter ligningen med tilhørende rødder:

$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, $\lambda = 0 \vee \lambda = -1$

Løsning til homogen ligning:

$$x_{hom} = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$$

Løsnings gæt: $x_{gæt} = at^3 + bt^2$

$\Rightarrow a = 1$, $b = -3$

Fuldstændig løsning:

$$x(t) = x_{hom} + x_{gæt} = t^3 - 3t^2 + c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$$

Eneste mulighed på MC:

$$x(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 1$$

Opg 2 MC.

Overførings funktionen er givet ved:

$$H(s) = \frac{2s^2-6s-8}{s^2+(1-2a)s-2a} = 2 \quad , s \neq \{-1, 4\}$$

$$\Downarrow \quad 2s^2-6s-8 = 2(s^2+(1-2a)s-2a)$$

Indentitetssætningen for polynomier giver

$$-6 = 2(1-2a) \quad \text{og} \quad -8 = 2\cdot(-2a)$$

Kun opfyldt for $a = 2$.

Opg 3 MC

Funktionen $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$, $x > 1$

er ikke negativ, kontinuert, og aftagende i intervallet $x \in [1; \infty[$.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t (x+1)^2 e^{-x}\,dx = 10e^{-1}$$

Integralkriteriet giver nu:

$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 e^{-n}$ er konvergent

og

$$10e^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 e^{-n} \leq 10e^{-1} + 4e^{-1}$$

Rækkens sum ligger i intervallet:

$[10e^{-1}, 14e^{-1}]$

Opg 4 MC.

Kvotient kriteriet giver for denne række:

$$\frac{\left|\frac{a^{(n+1)+1}}{\sqrt{n+1}} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}} x^{n}\right|} = \frac{a|x|\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow a|x|$$

for $n \to \infty$

$$a|x| < 1 \implies -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$$

Konvergensradius er $\rho = \frac{1}{a}$.

For $x = -\frac{1}{a}$ fås:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{a}\right)^n = a\cdot\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Leibniz kriterium giver at rækken er konvergent, men den er ikke absolut konvergent da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ifølge sammenlignings kriteriet.

Rigtigt svar: $\rho = \frac{1}{a}$ og rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$.

Opg 5. MC.

Da f er reel gælder (Lemma 6.27)

$$c_{-n} = \overline{c_n} = c_n \quad , \quad c_{-1} = c_1 = \frac{2}{\pi}$$

Lemma 6.26 giver:

$$a_1 = c_1 + c_{-1} \quad , \quad b_1 = i(c_1 - c_{-1})$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_1 = 0$$

Opg 6 MC

Potensrækken indsættes i differentialligningen:

$$t \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 8t + 6$$

korollar 5.21 giver efter omskrivning:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_{n+1} t^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 8t + 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n \, c_{n+1} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n - 2c_0 = 8t + 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) \cdot n \, c_{n+1} - 2 c_n \right) t^n - 2 c_0 = 8t + 6$$

$$-2c_0 = 6 \implies \underline{c_0 = -3}$$

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2c_1 = 8 \implies \underline{c_2 - c_1 = 4}$$

$$(n+1) \cdot n \, c_{n+1} - 2 c_n = 0$$

$$\Downarrow \quad c_{n+1} = \frac{2}{(n+1) \cdot n} c_n$$

Del B opgave 1

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}$$

Da $0 \leq \frac{\sqrt{n}}{n+3} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[\text{for } n\to\infty]{} 0$

Ses af Leibniz kriterium at rækken er konvergent

Det ses også: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3} \right|$ er divergent

da $\frac{\sqrt{n}}{n+3} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ den harmoniske række er divergent

for $n \geq 3$

S er betinget konvergent.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Rækken er absolut konvergent da

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ er en kvotientrække

Del B opg 2

1) Egenværdier og egenvektorer for systemmatricen:

$$\lambda_1 = -1, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sæt 2.12 giver den fuldstændige løsning til det homogene system:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

2) Sæt 2.47 og sæt 2.38 giver os at systemet er asymptotisk stabilt da begge egenværdier er reelle og negative.

3) Vi indsætter løsningen $\underline{x}(t) = t e^{-t} \underline{v}$ ind i differential ligningen:

$$e^{-t}\underline{v} - t e^{-t}\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} t e^{-t}\underline{v} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi bemærker at $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Så $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for system-matricen med tilhørende egenværdi $\lambda = -1$.

Vælg $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = te^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hermed ses at $\underline{x}(t) = te^{-t}\underline{v}$ er en løsning.

4) Den fuldstændige reelle løsning fås via struktursætningen:

$$\underline{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Del B opg 3.

1) Da f er lige, bruges sæt. 6.6.

$b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{3}{2}x\right)\cos(nx)\,dx$$

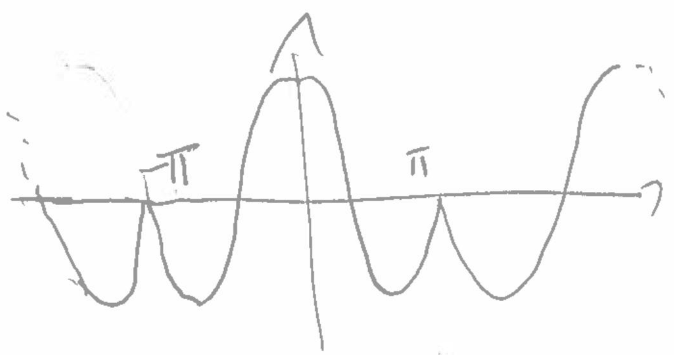
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos(n\pi)}{(3/2)^2 - n^2}$$

$$= \frac{3}{\pi}\,\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{9/4 - n^2} = \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}$$

Specielt $a_0 = -\frac{4}{3\pi}$

Herved fås den ønskede Fourierrække.

2) Skitse af grafen for f.



Korollar 6.17 giver at rækken konvergerer uniformt mod f.

3) Da $\left|\frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)\right| \leq \frac{12}{\pi(4n^2-9)}$, $n \geq 2$

Så rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{12}{\pi(4n^2-9)}$ er en majorant-række for fourierrækken.

Majorantrækken er konvergent da den er ækvivalent med den konvergente række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ da:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{12}{\pi(4n^2-9)}} = \frac{\pi(4n^2-9)}{12n^2} = \frac{\pi}{12}\left(4-\frac{9}{n^2}\right) \to \frac{\pi}{3} = C$$

$n \to \infty$.

4) $$f(x) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)$$

$$0 = f(\pi) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi}\frac{(-1)^n}{(4n^2-9)}\cos(n\pi)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{2}{3\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12((-1)^n)^2}{\pi(4n^2-9)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{18}$$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 18. august 2023

Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Del A: Opgave 1 (Multiple-choice): 65%, Del B: Opgave 2: 21%, Opgave 3: 14%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed.

Del A (Opgave 1) er en multiple-choice opgave med 10 delspørgsmål (kun et korrekt svar pr delspørgsmål), mens Del B (opgaverne 2 og 3) er skriftlige opgaver.

I del B skal alle svar derfor begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang, for at opnå fuldt point.

Alle opgaver (del A og del B) stilles herunder, startende på side 2.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

- **Del A: Opgave 1 (Multiple choice)** ***besvares alene*** **elektronisk i svararket. Alternative skriftlige svar godtages (som udgangspunkt) ikke.**
- **Del B: Opgaverne 2 og 3 afleveres elektronisk eller evt på papirform, hvis din besvarelse er håndskrevet.**

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Del A Opgave 1

1.I.

Betragt nu et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hvorom det gælder, at det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2).$$

Bestem stabiliteten af systemet.

A Stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

B Asymptotisk stabilt.

C Ustabilt.

D Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.II.

Om et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, der afhænger af en parameter $a \in \mathbb{R}$, oplyses det, at det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (a+2)\lambda^2 + (a+2)\lambda + a$$

Bestem værdierne af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

E $a > 2$,

F $a > 4$.

G $a < -4$.

H $a > -2$.

I Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

Opgavesættet fortsætter!

1.III.

Afgør konvergens af den uendelige række $R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^n}$. Svaret er:

J R er divergent.

K R er betinget konvergent.

L R er absolut konvergent.

Lad $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{2x^{\frac{1}{4}}}{1+\sqrt{x}}.$$

Grafen for f (rød) vises i Figur 1 nedenfor. Til sammenligningen vises også grafen for funktionen $\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$, $x > 0$ (blå og stiplet).

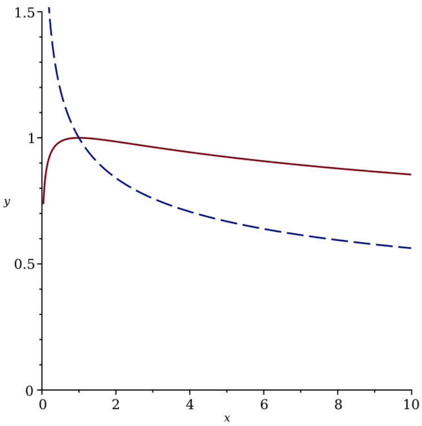
Afgør konvergens af rækken $T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$. Svaret er:

1 T er divergent.

2 T er betinget konvergent.

3 T er absolut konvergent.

Indtast nu dit samlede svar.



Figur 1: Grafen for f (rød). Til sammenligningen vises også grafen for funktionen $\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ (blå og stiplet). (Figuren er kun relevant for opgave 1. III.)

1.IV.

Vi betragter funktionen h givet som en potensrække

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^5 x^n.$$

Bestem en potensrækkeforskrift for en funktion H, hvorom der gælder, at $H'(x) = h(x)$ og $H(0) = 1$.

M $H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$.

N $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 x^n$.

O $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^6 x^{n-1}$.

P $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^4 x^n$.

1.V.

Om en anden-ordens lineær inhomogen differentialligning med konstante koefficienter og påvirkning u, dvs

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1, \tag{1}$$

oplyses det, at overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \quad s \neq \pm 1.$$

Bestem en løsning y til (1) med $u(t) = 35e^{6t}$.

Q $y(t) = e^{-t}$.

R $y(t) = \frac{1}{35}e^{6t}$.

S $y(t) = e^{6t}$.

T $y(t) = \frac{1}{1224}e^{35t}$.

U $y(t) = \frac{1}{3}e^{35t}$.

Indtast dit svar.

1.VI.

Antag igen, at

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \quad s \neq \pm 1.$$

er en overføringsfunktion hørende til ligning (1) i opgave 1.V.

Bestem nu en påvirkning u således, at $y(t) = \cos(t)$ er en løsning til (1).

A $u(t) = -2e^{it}$.

B $u(t) = -\sin(t)$.

C $u(t) = \cos(t)$.

D $u(t) = 2\sin(t)$.

E $u(t) = -2\cos(t)$.

F $u(t) = 1$.

G Informationen er utilstrækkelig.

Indtast nu dit svar.

1.VII.

Om en ukendt n'te-ordens lineær homogen differentialligning for $y(t)$, oplyses det, at potensrækkemetoden, dvs. indsættelse af

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

i ligningen, medfører, at

$$2c_0 + c_1 + c_2 t - c_0 t + \sum_{n=2}^{\infty}((n+1)c_{n+1} - 4c_n - 5c_{n-1})t^n = 0,$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

Idet det yderligere oplyses, at $y'(0) = 1$, bestem da c_0 og c_3.

H $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 2$.

I $c_0 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = 1$.

J $c_0 = 0$, $c_3 = 3$.

K $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$.

L $c_0 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = 2$.

M c_0 og c_3 kan antage arbitrære værdier.

Indtast nu dit svar.

1.VIII.

Vi betragter en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet som en uendelig række af funktioner

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos(x)\cos(nx) - \frac{2(-1)^n}{n^2x^2+1} \right).$$

Afgør hvilken række der er en majorantrække for den uendelige række af funktioner.

N $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2+1} \right)$.

O $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right)$.

P $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2}$.

Q $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n^2x^2+1} \right)$.

R Der findes ingen majorantrække.

Er funktionen f kontinuert?

1: Nej.

2: Ja.

Indtast nu dit samlede svar.

1.IX.

Vi betragter funktionen f, der er ulige og 2π-periodisk, og givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ 0 & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \end{cases}$$

i intervallet $[-\pi, 0]$. Lad

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

være Fourierrækken hørende til f.

Bestem $A = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

S $A = \frac{3\pi}{8}$.

T $A = \frac{3\pi}{4}$.

U $A = \frac{3\pi^2}{8}$.

V $A = \frac{3}{4}$.

Indtast dit svar.

1.X.

Betragt funktionerne $h : I \to \mathbb{R}$ og $g : I \to \mathbb{R}$ givet som potensrækkerne

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + 2 \right) x^n,$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

på intervallet

$$I = [0, 1[.$$

Bestem den korrekte ulighed.

- **W** $h(x) \leq g(x)$ for alle $x \in I$.
- **X** $h(x) \geq g(x)$ for alle $x \in I$.
- **Y** Hverken **W** eller **X** er korrekt.

Afgør konvergens af rækken h på intervallet $I = [0, 1[$.

- **1**: h er uniform konvergent på intervallet I.
- **2**: $h(x)$ er divergent for et $x \in I$.
- **3**: h er punktvis konvergent, men ikke uniform konvergent, på intervallet I.

Indtast nu dit samlede svar.

Slut på del A.

Del B påbegyndes herunder.

Del B

Opgave 2

For ethvert $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$, definerer vi en lige og 2π-periodiske funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vha forskriften

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{2k-x}{k} & x \in [0, 2k[, \\ 0 & x \in [2k, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

Vi betragter først den lige og 2π-periodiske funktion f_1 med $k = 1$, som specifikt er givet ved følgende forskrift

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0, 2[, \\ 0 & x \in [2, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

1. Skitser grafen for f_1 på intervallet $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
2. Konvergerer Fourierrækken for f_1 uniformt?

Vi betragter nu f_k i det generelle tilfælde med Fourierrækken

$$f_k \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

3. Bestem a_0, a_1 og alle b_n, $n \in \mathbb{N}$.

Lad

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $N \in \mathbb{N}$ være afsnitssummen hørende til Fourierrækken for f_k, $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Det oplyses (skal ikke vises), at der gælder

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{kn^2},$$

for alle $N \in \mathbb{N}$, alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

4. Bestem et heltal $N \in \mathbb{N}$, således at følgende ulighed gælder for alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$ og alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{10}.$$

Opgave 3

Vi betragter differentialligningssystemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

med $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vis, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

er en løsning til det homogene system.

Det oplyses nu, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

er en partikulær løsning til det inhomogene system (2).

2. Bestem a og b.
3. Opskriv den fuldstændige løsning til det inhomogene system (2).

—————oooOooo—————

Opgaven er slut. Husk at svare på del A: opgave 1 (Multiple Choice) i det elektroniske svarark.

Løsning til Mat 2 eksamen August 2023

Del A

Opgave 1.I:

Egenværdierne er $\lambda = -1$ og $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. Vi bruger sætning 2.36 og konkluderer at systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

Det samlede svar er derfor **A**.

Opgave 1.II:

Vi bruger korollar 2.43 på:

$$Q(\lambda) = -P(\lambda) = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 - (a+2)\lambda - a.$$

Vi har $a_1 = -(a+2)$, $a_2 = -(a+2)$, $a_3 = -a$.

i $a < -2$ og $a < 0$.

ii $D_2 = a_1 a_2 - a_3 = (a+4)(a+1) > 0 \Leftrightarrow a < -4$ eller $a > -1$.

Samlet konkluderer vi $a < -4$, og svaret er dermed **G**.

Opgave 1.III:
For R bruger vi kvotientkriteriet og får

$$|\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}| \to e^{-1} \in]0,1[,$$

og dermed er R absolut konvergent.

For T indses det (eksempelvis af grafen) at $f(n)$ aftager monotont mod nul og rækken er derfor konvergent pga Leibniz kriteriet. Alternativt, så har vi $f'(n) < 0$ for $n > 1$. Den er ikke absolut konvergent via sammenligningskriteriet idet det ses af grafen at $f(n) \geq g(n)$. Specielt er rækken med ledene $g(n)$ divergent. Alternativt, så er $f(n) \sim g(n)$ og vi kan bruge ækvivalenskriteriet.

Svaret er dermed **L2**.

Opgave 1.IV:

Vi bruger korollar 5.38:

$$\begin{aligned} H(x) &= H(0) + \sum_{n=0} (n+1)^5 \int_0^x t^n dt = 1 + \sum_{n=0} (n+1)^5 \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1} n^4 x^n. \end{aligned}$$

Svaret er derfor **M**.

Opgave 1.V:
Vi har at $y(t) = H(6)e^{6t} = \frac{1}{35}e^{6t}$ er en løsning til $u(t) = e^{6t}$. Pga linearitet så er $y(t) = 35H(6)e^{6t} = e^{6t}$ en løsning til $u(t) = 35e^{6t}$.

Svaret er dermed **S**.

Opgave 1.VI:
Vi har at $y(t) = H(i)e^{it} = -\frac{1}{2}e^{it}$ er en løsning til $u(t) = e^{it}$. Men der gælder så også at $y(t) = \operatorname{Re}\left(H(i)e^{it}\right) = -\frac{1}{2}\cos(t)$ for $u(t) = \cos(t)$. Vha linearitet fås så en løsning $y(t) = -2\operatorname{Re}\left(H(i)e^{it}\right) = \cos(t)$ for $u(t) = -2\cos(t)$.

Svaret er dermed: **E**.

Opgave 1.VII:

Vha identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) indses

$$c_0 = -\frac{1}{2}c_1, \quad c_2 = c_0, \quad (n+1)c_{n+1} - 4c_n - 5c_{n-1} = 0 \quad n \geq 2.$$

Vi har $y'(0) = c_1 = 1$. Dermed

$$c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad 3c_3 - 4c_2 - 5c_1 = 3c_3 - 3 = 0,$$

for $n = 2$. Vi har $c_0 = -\frac{1}{2}$ og $c_3 = 1$.

Svaret er dermed: **I**.

Opgave 1.VIII:
Vi har

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{2}{n^2x^2+1}\right) \leq \frac{3}{n^2} < \frac{10}{n^2},$$

vha trekantsuligheden: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Svaret på den første del er dermed **P**. (Bemærk at svarmulighed N dur ikke for $x = 0$ og $n = 1$ hvor $k_1 = 0$ mens $f_1(0) = 3$.)

Idet majorantrækken er konvergent, så er sumfunktionen kontinuert.

Det samlede svar er derfor **P2**.

Opgave 1.IX:

Vi bruger Parsevals sætning med alle $a_n = 0$ (idet f er ulige)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Vi udregner højresiden og får

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Svaret er **T**.

Opgave 1.X:

Det følger af sammenligningskriteriet at $h(x) \geq g(x)$ for alle $x \in I = [0, 1[$.

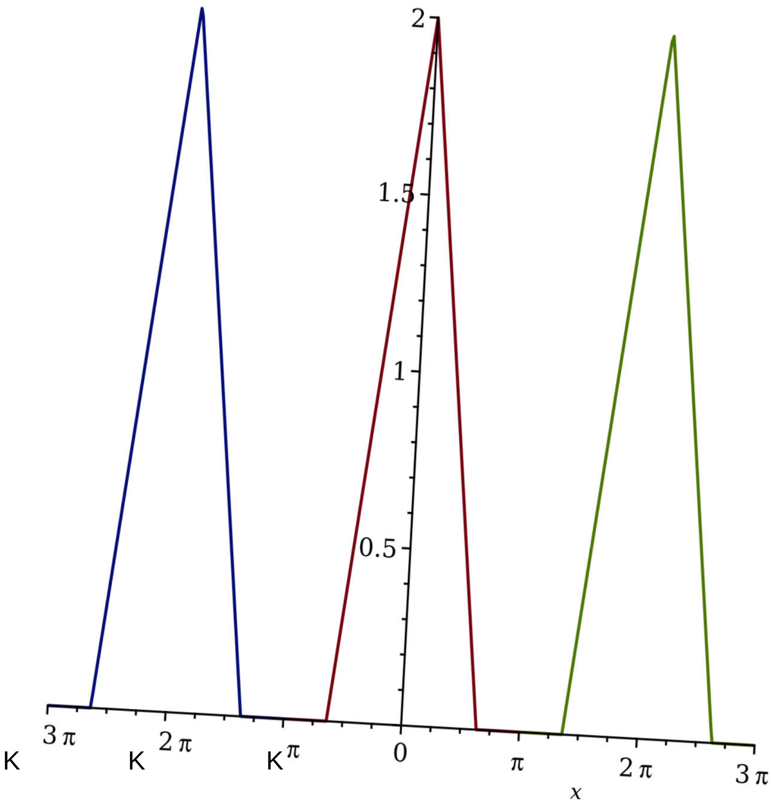
Idet $g(x) = \frac{1}{1-x}$, se sætning 5.2, så har vi $h(x) \to \infty$ for $x \to 1$ og rækken kan derfor ikke konvergere uniformt. Men h er en potensrække med konvergensradius $\rho = 1$ og derfor er den punktvis konvergent.

Det samlede svar er således: **X3**.

Del B

Opgave 2:

2.1 Grafen for funktionen f_1 ses i figur 1.



Figur 1: Graf for the den periodiske funktion f_1

2.2. Fourierrækken for f_1 konvergerer uniformt idet f_1 er kontinuert og stykkevis differentiabel, se korollar 6.17. Det ses af grafen i 2.1, specielt er f_k kontinuert i $x = 2k$ med værdi $f_k(2k) = 0$ og $f_k(-\pi) = f(\pi) = 0$ idet funktionen er lige.

2.3. f_k er en lige funktion og dermed er alle $b_n = 0$. Vi udregner a_0 og a_1 vha sætning 6.6 og får

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k} \frac{2k - x}{k} dx = \frac{4k}{\pi},$$

og

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k} \frac{2k - x}{k} \cos(x)dx = \frac{2(1-\cos(2k))}{\pi k}$$

2.4. Lad

$$g(x) = \frac{2}{kx^2}, \quad x > 0.$$

g er en aftagende funktion $g'(x) < 0$ for alle $x > 0$.

Vi kan derfor anvende korollar 4.35:

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{kn^2} \leq \int_N^{\infty} g(x)dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{2}{kx}\right]_N^t = \frac{2}{kN}.$$

Vi har $\frac{2}{kN} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow N \geq \frac{20}{k}$ og derfor $|f_k(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{10}$ for alle $N \geq 20 \geq \frac{20}{k}$ for alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Opgave 3:

3.1 Vi indsætter $x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ og får

$$VS = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad HS = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Idet $VS = HS$ for alle $t \in \mathbb{R}$ har vi vist at funktionen er en løsning til det homogene system.

3.2 Vi indsætter løsningen i den inhomogene ligning og får:

$$\begin{aligned} VS &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \\ HS &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 3+a \\ b-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Således $VS = HS$ for alle $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = -3$, $b = 2$.

3.3 Vi ser, at $\lambda = -1$ er egenværdi med egenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Derfor er $x = e^{-t}v$ en løsning til det homogene system. Med løsning fra 3.1 har vi to lineært uafhængige løsninger til det homogene system. Dermed

$$x(t) = c_1 e^{-t} v + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Alternativt:

$$x(t) = c_1 e^{-t} v + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$