Løsning til Mat 2 eksamen E19 Del B

Opgave 1:
1. Vi betragter den homogene differentilligning:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0, \tag{1}$$

med hertil hørende karakteriske polynomium:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2. \tag{2}$$

Rødderne i det karakteriske polynomium er $\lambda = 1 \pm i$. Ifølge sætning 1.15 så er den fuldstændige komplekse løsning til (1) givet ved

$$y(t) = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

mens den fuldstændige reelle løsning er

$$y(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t, \quad c_1, c_2 \in R.$$

2. Vi betragter differentialligningen:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t. \tag{4}$$

Vi indsætter nu

$$y(t) = \frac{1+t}{2}, \tag{5}$$

på venstresiden og får:

$$0 - 2\frac{1}{2} + 2\frac{1+t}{2} = t,$$

hvilket er det samme som højresiden i (4). Således har vi vist at $y(t) = \frac{1+t}{2}$ er en løsning.
3. Vi betragter differentialligningen:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{st}. \tag{6}$$

Overføringsfunktionen $H(s)$ bestemmes vha løsningsantagelsen $y(t) = H(s)e^{st}$ eller ved brug af (1.20) i lærebogen:

$$H(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}, \quad s \neq 1 \pm i,$$

hvor P er det karakteriske polynomium, se (2). Vi betragter dernæst

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \tag{7}$$

og anvender superpositionsprincippet: Idet $y = H(in)e^{int}$ er en løsning til $(6)_{s=in}$ for ethvert n, så er

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n H(in)e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} -\frac{c_n}{n^2 + 2in - 2}e^{int}, \tag{8}$$

en løsning til (7). Det er Fourierrækkemetoden, se evt. også Lemma 7.7.
4. Vi betrager differentialligningen

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = t + \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}. \tag{9}$$

Vi bemærker først, at højresiderne fås ved addition af højresiderne i (4) og (7). Vha superpositions-princippet, så er

$$y(t) = \frac{1+t}{2} + \sum_{n=-N}^{N} -\frac{c_n}{n^2 + 2in - 2}e^{int},$$

som fremkommer ved addition af (5) og (8), derfor en partikulær løsning til (9). Derudover, idet (3) er den fuldstændige komplekse løsning til det homogene system, fås den komplete løsning til (9) som:

$$y(t) = c_1 e^{(1+i)t} + c_2 e^{(1-i)t} + \frac{1+t}{2} + \sum_{n=-N}^{N} -\frac{c_n}{n^2 + 2in - 2}e^{int}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Opgave 2:
1. Funktionen er ulige. Vi bruger derfor sætning 6.3 i lærebogen:

$$a_n = 0,$$

for alle $n = 0, 1, \ldots$ og

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\sin(nx)dx = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2-4}.$$

Vi ser, at $n = 2$ er et særtilfælde, som vi udregner separat:

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\sin(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

Lad $n = 2m$, så n er lige for $m \in \mathbb{N}$. Da gælder for alle $m \neq 1$, at

$$b_{2m} = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{2}\right)}{4(m^2-1)} = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin(m\pi)}{m^2-1} = 0,$$

for alle m, eftersom at $\sin(m\pi) = 0$ for alle $m \in \mathbb{Z}$.
2. Vi får oplyst, at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{8}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{10}$$

foor alle $N \in \mathbb{N}$. Vi anvender, da "`integral_kriteriet.pdf`" metode (i): Lad $g(x) = \frac{8}{\pi}\frac{1}{x^2}$, således at $|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1} g(n)$. Idet $g'(x) < 0$, så er g aftagende. Desuden er $\int_1^{\infty} g(x)dx$ også konvergent. Dermed, vha sætningen i denne note, har vi

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \int_N^{\infty} g(x)dx = \frac{8}{\pi}\frac{1}{N}.$$

Løser vi

$$\frac{8}{\pi}\frac{1}{N} \leq \frac{1}{100},$$

for N, fås

$$N \geq \frac{800}{\pi} = 254.65.$$

Der gælder derfor, at $|f(x) - S_N(x)| \leq 0.01$ får alle $N \geq 255$.
3. Ja, Fourierrækken konvergerer uniformt.
Argument (a): f er en kontinuert funktion. Vi ser specielt $f(0^+) = f(0^-) = 0$ og $f\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = f\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = 0$. Uniform konvergens følger så af korollar 6.13.
Argument (b): Rækken på højresiden af (10) er konvergent, specielt går den mod 0 når $N \to 0$. Uniform konvergens følger derfor af definition (5.24) i lærebogen. Mere specifikt: Vi kan løse (5.24) i lærebogen for N for et vilkårligt $\epsilon > 0$ vha af vores fremgangsmåde i **2**. Det giver

$$N \geq N_0(\epsilon) := \frac{8}{\pi\epsilon},$$

således, at $|f(x) - S_N(x)| \leq \epsilon$ for alle $N \geq N_0(\epsilon)$.