DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 24. august 2018
Kursus: Matematik 2 01037 / 01034 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Navn:
Studienummer:

Del A: Multiple choice opgaver

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.

Denne papirversion skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.

Vejledning til del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Konvergensradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{n+1} x^n$ er:

☐ a) $\rho = \infty$.

☐ b) $\rho = \frac{1}{4}$.

☐ c) $\rho = 1$.

☐ d) $\rho = 0$.

☐ e) $\rho = 4$.

(ii) Den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^n}{1+n^2}$ er:

☐ a) divergent.

☐ b) absolut konvergent.

☐ c) betinget konvergent.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

(iii) Summen af rækken $s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2+x)^n}{5^{n-1}}$ er lig:

☐ a) $\frac{25}{7+x}$ for $-7 < x < 3$.

☐ b) $\frac{(2+x)^2}{7+x}$ for $-3 < x < -1$.

☐ c) $\frac{(2+x)^2}{5(7+x)}$ for $-3 < x < -1$.

☐ d) $\frac{(2+x)^2}{3-x}$ for $-7 < x < 3$.

☐ e) $\frac{(2+x)^2}{7+x}$ for $-7 < x < 3$.

(iv) Differentialligningen $y^{(3)}(t) - 5y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) + 13y(t) = 0$ har det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3-i2)(\lambda-3+i2)$. Med de arbitrære konstanter $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, er den fuldstændige reelle løsning:

☐ a) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-3t)\cos(2t) + c_3 \exp(-3t)\sin(2t)$.

☐ b) $y(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-3t)\cos(2t) + c_3 \exp(-3t)\sin(2t)$.

☐ c) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(3t)\cos(2t) + c_3 \exp(3t)\sin(2t)$.

☐ d) $y(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(3t)\cos(2t) + c_3 \exp(3t)\sin(2t)$.

(v) Et system af 3 koblede første ordens differentialligninger $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ har systemmatricen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Det oplyses at $\mathbf{A}$ har følgende egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \lambda_2 = -2 \,, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,, \quad \text{og} \quad \lambda_3 = -3 \,, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En fundamentalmatrix er:

☐ a)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -4e^{-3t} & 5e^{-2t} & 2 \\ 4e^{-3t} & 0 & 4 \\ -4e^{-3t} & -5e^{-2t} & 2 \end{pmatrix} .$$

☐ b)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 10 & -e^{-2t} & e^{-3t} \\ 21 & 0 & -e^{-3t} \\ 10 & e^{-2t} & e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

☐ c)

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & 7 & -3e^{-3t} \\ 0 & 14 & 3e^{-3t} \\ 2e^{-2t} & 7 & 3e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

(vi) Vi betragter differentialligningen

$$(1+t)\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0\ , \tag{1}$$

med en variabel koefficient $1+t$, hvor $t \in \mathbb{R}$. Den afhængige variabel er $y = y(t)$. De første 4 led i en potensrækkeløsning til (1) på formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ er:

☐ a) $y(t) = a_1 t - a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_1 t^3 - \frac{1}{18} a_1 t^4 \ldots$, hvor a_1 er en arbitrær reel konstant.

☐ b) $y(t) = a_1 t - \frac{a_1}{3} t^3 + \frac{a_1}{6} t^4 - \frac{a_1}{15} t^5 \ldots$, hvor a_1 er en arbitrær reel konstant.

☐ c) $y(t) = a_0 + a_1 t - a_0 t^2 + \frac{a_0 + a_1}{3} t^3 + \ldots$, hvor a_0 og a_1 er arbitrære reelle konstanter.

☐ d) $y(t) = a_0 + a_1 t - a_0 t^2 + \frac{a_0 - a_1}{3} t^3 + \ldots$, hvor a_0 og a_1 er arbitrære reelle konstanter.

(vii) Et differentialligningssystem $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & -3 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{pmatrix}\ , \tag{2}$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Systemet er asymptotisk stabilt for:

☐ a) $-\sqrt{15} < a < \sqrt{15}$.

☐ b) $0 < a < \sqrt{\frac{95}{4}}$.

☐ c) $-\sqrt{\frac{10}{3}} < a < \sqrt{\frac{10}{3}}$.

☐ d) $0 < a < \sqrt{\frac{10}{3}}$.

☐ e) $a < -\sqrt{\frac{10}{3}}$ eller $\sqrt{\frac{10}{3}} < a$.

Del A er slut. Husk, at svare på del B.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 24. august 2018
Kursus: Matematik 2 01037 / 01034 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice (stilles elektronisk): 50%, opgave 1: 20% opgave 2: 15% og opgave 3: 15%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen. Mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (Del A) og denne (Del B).

Del A stilles og besvares elektronisk. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.

Del B stilles nedenfor, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

En 2π-periodisk funktion f er ulige og stykkevis differentiabel. I intervallet $[0, \pi]$ er f givet ved et 3. grads polynomium

$$f(x) = -x^3 + \pi^2 x \ . \tag{1}$$

(i) Skitser grafen for f i intervallet $[-\pi; \pi]$.

(ii) Bestem Fourierrækken for f. Integraler må udregnes med Maple.

(iii) Er Fourierrækken uniform konvergent? Svaret skal begrundes.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

En Fourierrække med sumfunktionen S er givet ved

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \ . \tag{2}$$

(i) Vis, at $S(x)$ er kontinuert.

(ii) Bestem en $N'te$ afsnitssum S_N, således at $S_N(x)$ approksimerer Fourierrækkens sumfunktion $S(x)$ med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 10^{-4}$.

Opgave 3

Vi betragter følgende system af 3 koblede første ordens differentialligninger

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \ , \quad \text{hvor} \ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Det oplyses at $\mathbf{A}$ har følgende egenværdier og egenvektorer:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad \lambda_2 = -2 \ , \ \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = -3 \ , \ \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

(i) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (3).

(ii) Er differentialligningssystemet stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt? Begrund svaret.

(iii) Er det inhomogene system $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$, hvor $\mathbf{u}$ er en begrænset påvirkning, BIBO stabilt? Begrund svaret.

Del B er slut. Husk at svare på Del A (Multiple Choice).