Forelæsning 5

Kvotientrækker

Konvergenskriterier

Definition 5.1, kvotientrække

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots x^n + \dots \qquad x \text{ kaldes kvotienten}$$

Sætning 5.2. Konvergens af en kvotientrække

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent, hvis og kun hvis $|x|<1$ og i dette tilfælde

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

Bevis

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^N$$

$$x S_N = \sum_{n=0}^{N} x^{n+1} = x + x^2 + \dots + x^N + x^{N+1}$$

$$S_N - x S_N = 1 - x^{N+1}$$

$$(1-x)S_N = 1-x^{N+1} \quad \Leftrightarrow \quad S_N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$x^{N+1} \to 0$ for $N \to \infty$ forudsat at $|x| < 1$

$S_N \to \frac{1}{1-x}$ for $N \to \infty$ og $|x| < 1$

lemma 4.16

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N}$$

Bevis

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \underbrace{a_N + a_{N+1} + \dots}$$

$$\| $$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+N} = \overbrace{a_N + a_{N+1} + \dots}$$

Korollar 5.5 for $|x| < 1$

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{N+n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^N x^n = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}$$

Eksempel:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Sætning 4.20 sammenligningskriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad 0 \le a_n \le b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

I dette tilfælde gælder

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} \qquad a_n = \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}}$$

Vi ser nu på $\quad n(n+1) = n^2+n \ge n^2+\frac{1}{n}$

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}} = a_n$$

Er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ er konvergent.

Definition 4.23. Ækvivalente rækker

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, hvis der findes et tal $c > 0$ således at $a_n > 0$, $b_n > 0$ og

$$\frac{a_n}{b_n} \to c \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Sætning 4.24. Ækvivalenskriteriet.

Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ har positive led og er ækvivalente. Da er begge rækker enten konvergente eller divergente.

Bevis Vi har $\frac{a_n}{b_n} \to c > 0$ for $n \to \infty$

$$\frac{a_n}{c\, b_n} \to 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ således at for $n \geq N$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{c\,b_n} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \left| \frac{a_n}{c\,b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} c\, b_n$$

Sammenligningskriteriet giver nu resultatet i sætn. 4.24.

<u>Eksempel</u> (Eksamen maj 2012)

Det oplyses at $R_1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent. $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$R_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Vi har $\quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$ for $n \to \infty$

De 2 rækker R_1 og R_2 er ækvivalente. Heraf følger at R_2 er divergent fordi R_1 er divergent.

Definition 4.26. Absolut konvergens

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, såfremt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Sætning 4.27

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Endvidere er $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Definition 4.28. Betinget konvergens

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siges at være betinget konvergent, såfremt

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent og $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er divergent.

Eksempel R_3 : $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n$

$a_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n$ vi betragter $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

er en konvergent kvotientrække da $\frac{1}{5} < 1$

Hvoraf følger at R_3 er absolut konvergent.

Vi har endda: $R_3: \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{1}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$

$$\left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} < \frac{1}{4}$$

Sætning 4.30 Kvotientkriteriet

Betragt rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hvor $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ og hvor der gælder

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to c \in [0; \infty[\quad \text{for } n \to \infty$$

så gælder

(i) Hvis $c < 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

(ii) Hvis $c > 1$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

(iii) Hvis $c = 1$; Ingen konklusion

Eksempel

$R: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ $\qquad a_n = \frac{n^3}{e^n}$

Vi udregner $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^3}{e^{(n+1)}}}{\frac{n^3}{e^n}} = \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{e^n}{e^{n+1}} =$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 e^n e^{-n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 e^{-1} \to e^{-1} < 1 \text{ for } n \to \infty$$

R er absolut konvergent og dermed er R konvergent.

R_2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

Vi udregner $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} =$

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}} \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

Vi kan ikke fra kvotientkriteriet afgøre konvergens.