Forelæsning 11, Matematik 2, kursus 01035

1) Fourierrækkemetoden til løsning af differentialligninger. Kapitel 7.3 i lærebogen.

Vi betragter n første ordens og koblede differentialligninger på formen

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \\ y &= \underline{d}^T \underline{x} \end{aligned}\right\} \quad (7.20)$$

$\underline{x} = \underline{x}(t) \in \mathbb{C}^n$

$u = u(t) \in \mathbb{C}$

$y = y(t) \in \mathbb{C}$

$t \in \mathbb{R}$

$\underline{\underline{A}}$ er en $n \times n$ matrice

Antag at $u(t)$ er periodisk med perioden T.
Antag at systemet er asymptotisk stabilt, dvs
$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Frekvens: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Lemma 7.7

Vi betragter en ekstern påvirkning på formen

$$u(t) = S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{in\omega t}$$

Vi anvender superpositionsprincippet med løsningsantagelsen

$$\underline{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} \underline{v}_n e^{in\omega t}$$

Antagelsen indsættes i ligning (7.20) og vi får

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,u \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-N}^{N} in\omega\,\underline{v}_n e^{in\omega t} = \underline{\underline{A}} \sum_{n=-N}^{N} \underline{v}_n e^{in\omega t} + \underline{b} \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{in\omega t}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}_n - in\omega\,\underline{\underline{I}}\,\underline{v}_n + \underline{b}\,u_n \right) e^{in\omega t} = 0$$

Da funktionerne $e^{in\omega t}$, $n \in \mathbb{Z}$, er lineært uafhængige, har vi

$$(\underline{\underline{A}} - in\omega\,\underline{\underline{I}})\,\underline{v}_n = -\underline{b}\,u_n \qquad \Leftrightarrow$$

$$\underline{v}_n = -(\underline{\underline{A}} - in\omega\,\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{b}\,u_n$$

En partikulær løsning er

$$\boxed{\underline{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} -(\underline{\underline{A}} - in\omega\,\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{b}\,u_n\,e^{in\omega t}}$$

Den skalare funktion y er givet ved

$$y(t) = \underline{d}^T \underline{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} -\underline{d}^T (\underline{\underline{A}} - in\omega\,\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{b}\,u_n\,e^{in\omega t}$$

Vi introducerer overføringsfunktionen

$$\boxed{H(in\omega) = -\underline{d}^T (\underline{\underline{A}} - in\omega\,\underline{\underline{I}})^{-1}\,\underline{b}}$$

Bemærk $H(in\omega)$ er en skalær funktion.

Lemma 7.7

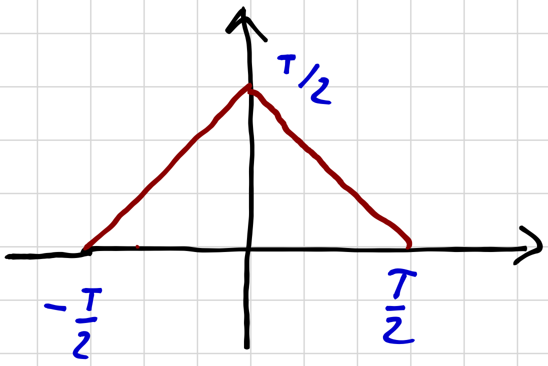
$$\boxed{y(t) = \sum_{n=-N}^{N} u_n H(in\omega) e^{in\omega t}}$$

For $N \to \infty$ fås sætning 7.8, Fourierrækkemetoden.

Eksempel:

Vi betragter den T-periodiske og stykkevis differentiable funktion:

$$u(t) = \begin{cases} t + \frac{T}{2} & \text{for } -\frac{T}{2} \le t < 0 \\ -t + \frac{T}{2} & \text{for } 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



Frekvens $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourierrækken for u på kompleks form er:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\omega t} = \frac{T}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{T(1-(-1)^n)}{2n^2\pi^2} e^{in\omega t}$$

hvor

$$u_n = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n \text{ lige} \\ \frac{T}{n^2\pi^2} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

Vi betragter differentialligningen

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u(t) \\ y = 1 \cdot x \end{cases}.$$

Sammenligning med ligning (7.20) i lærebogen fører til.

$\underline{\underline{A}} \to -1 \qquad b = 1 \qquad d = 1 \qquad \underline{\underline{I}} \to 1 \qquad s = in\omega$

Overføringsfunktionen er

$$H(s) = -d^T (A - sI)^{-1} b = -1(-1-s)^{-1} 1 = \frac{1}{1+s}$$

Fra sætning 7.8, lign. (7.27), kan vi nu bestemme den partikulære/stationære løsning y.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n H(in\omega) e^{in\omega t} =$$

$$\frac{T}{4} H(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{T(1-(-1)^n)}{2n^2\pi^2} \frac{1}{1+in\omega} e^{in\omega t}$$

eller

$$\boxed{y(t) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{2n^2} \frac{1-in\omega}{1+n^2\omega^2} e^{in\omega t}}$$

Hvis vi definerer m ved $n = 2m-1$, kan vi skrive ovenstående udtryk for y på formen

$$y(t) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1 - i(2m-1)\omega}{1 + (2m-1)^2\omega^2} e^{i(2m-1)\omega t}$$

Example

Vi ønsker at approksimere Fourierrækken for y med en N'te afsnitssum

$$S_N(t) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \frac{1-(-1)^n}{2n^2} \frac{1}{1+in\omega} e^{in\omega t}$$

Vi har

$$|y(t) - S_N(t)| = \frac{T}{\pi^2} \left| \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1-(-1)^n}{2n^2} \frac{1}{1+in\omega} e^{in\omega t} \right| \leq$$

$$\frac{T}{\pi^2} \sum_{|n| \geq N+1} \left| \frac{1-(-1)^n}{2n^2} \frac{1}{1+in\omega} e^{in\omega t} \right| =$$

$$\frac{T}{\pi^2} \sum_{|n| \geq N+1} \frac{|1-(-1)^n|}{2n^2} \frac{1}{|1+in\omega|} |e^{in\omega t}| \leq$$

$$\frac{T}{\pi^2} \sum_{|n| \geq N+1} \frac{2}{2n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2\omega^2+1}} \leq \frac{T}{\pi^2} \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{|n|\omega} =$$

$$\frac{T}{\omega \pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \leq \frac{2T}{\frac{2\pi}{T}\pi^2} \int_N^\infty x^{-3}\,dx =$$

Se ulighed (4.33), side 103 i lærebogen.

$$\frac{T^2}{\pi^3} \lim_{\tau \to \infty} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_N^{\tau} = \frac{T^2}{\pi^3} \frac{1}{2N^2} =$$

$$\frac{T^2}{2\pi^3} \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{T^2}{2\pi^3 \varepsilon} \leq N^2 \quad \Leftrightarrow \quad N \geq \frac{T}{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

For $T = 2\pi$ og $\varepsilon = 10^{-2}$ har vi

$$N \geq \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}} 10 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 10 = 7.98$$

Vi vælger $N = 8$. Men $c_8 = c_{-8} = 0$ så vi kan vælge $N = 7$.

Eksempel

Alternativt kan vi vælge at se på

$$y(t) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1}{1 + i(2m-1)\omega} e^{i(2m-1)\omega t}$$

Vi ønsker at approksimere $y(t)$ med den M'te afsnitssum

$$S_M(t) = \frac{T}{4} + \frac{T}{\pi^2} \sum_{m=-M+1}^{M} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1}{1 + i(2m-1)\omega} e^{i(2m-1)\omega t}$$

Vi estimerer

$$|y(t) - S_M(t)| = \left| \frac{T}{\pi^2} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{2}{(2m-1)^2} \frac{1}{1+i(2m-1)\omega} e^{i(2m-1)\omega t} \right| \le$$

$$\frac{2T}{\pi^2} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1}{\sqrt{(2m-1)^2\omega^2 + 1}} \le \frac{2T}{\pi^2} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \frac{1}{(2m-1)\omega} =$$

$$\frac{2T}{\omega\pi^2} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \le \frac{2T}{\frac{2\pi}{T}\pi^2} \int_M^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3} =$$

$$\frac{T^2}{\pi^3} \lim_{\tau \to \infty} \left[-\frac{1}{4}(2x-1)^{-2} \right]_M^{\tau} = \frac{T^2}{\pi^3} \frac{1}{4} \frac{1}{(2M-1)^2} \le \varepsilon$$

$$\Updownarrow \quad \frac{T^2}{4\pi^3 \varepsilon} \le (2M-1)^2 \iff \frac{T}{2\pi^{3/2}\sqrt{\varepsilon}} \le 2M-1 \iff$$

$$M \ge \frac{T}{4\pi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2}$$

Vælges $T = 2\pi$ og $\varepsilon = 10^{-2}$ fås

$$M \ge \frac{2\pi}{4\pi^{3/2}} 10 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 10 + \frac{1}{2} = 3.32$$

Heraf ses at vi kan vælge $M = 4$.

Bemærk at $N = 2M - 1 = 8 - 1 = 7$. Dett er samme resultat som i det foregående eksempel.