Forelæsning 9, Matematik 2, kursus 01035

Fourier rækker. Vi betragter en periodisk funktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med perioden T

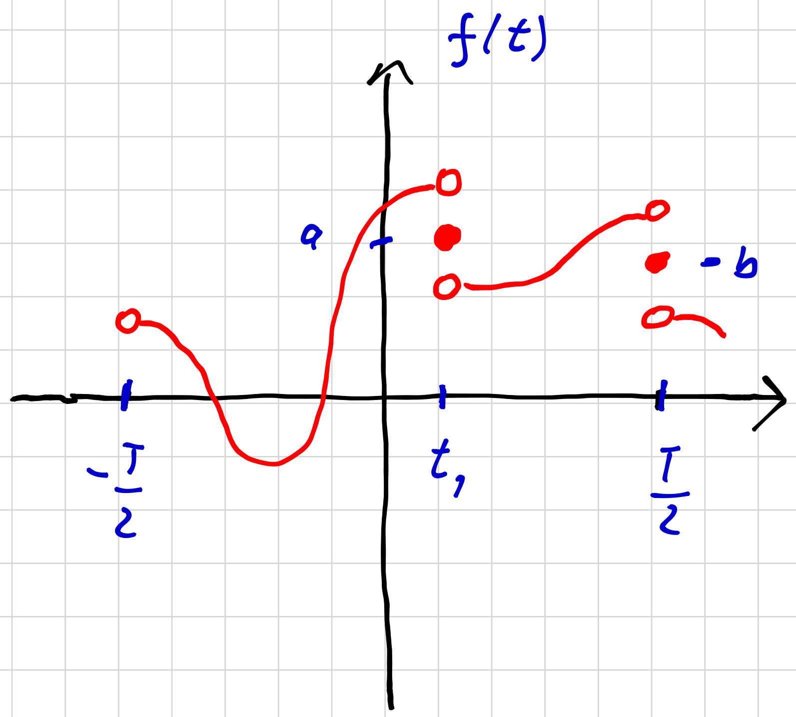
f opfylder

1) $f(t+T) = f(t)$

2) $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt < \infty$, $\quad f \in L^2[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$

3) f er stykkevis differentiabel.

Eksempel



$$f(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{for } -\frac{T}{2} < t < t_1 \\ a & \text{for } t = t_1 \\ F_2(t) & \text{for } t_1 < t < \frac{T}{2} \\ b & \text{for } t = \frac{T}{2} \end{cases}$$

Forlang at F_1 er differentiabel og $F_1'(t)$ er kontinuert på det lukkede interval $[-\frac{T}{2}; t_1]$.

Tilsvarende, forlang at F_2 er differentiabel og $F_2'(t)$ er kontinuert på $[t_1; \frac{T}{2}]$.

Se definition 6.13 og eksempel 6.14 i lærebogen.

Sætning 6.16 Fouriers sætning

Fourierrækken for f er defineret ved

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. Rækken er punktvis konvergent.

Fourierkoefficienterne er givet ved

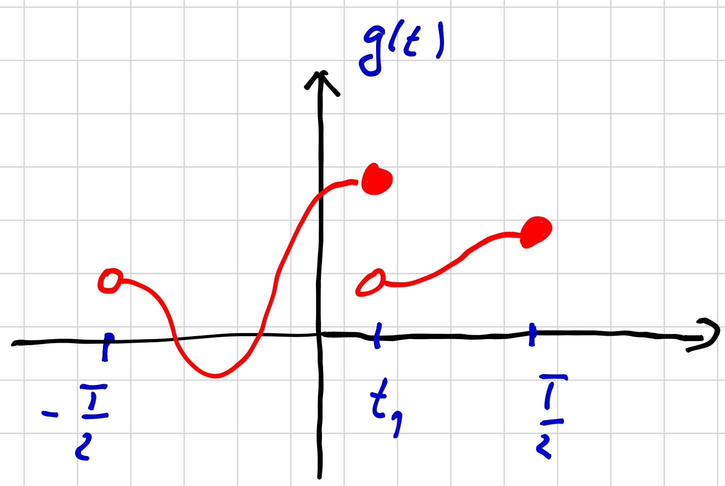
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

I et punkt t_1 hvor $f(t)$ har et diskontinuert spring gælder

$$s(t_1) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \to t_1 -} f(t) + \lim_{t \to t_1 +} f(t) \right)$$

I ovenstående eksempel har vi at $f(t) = s(t)$.

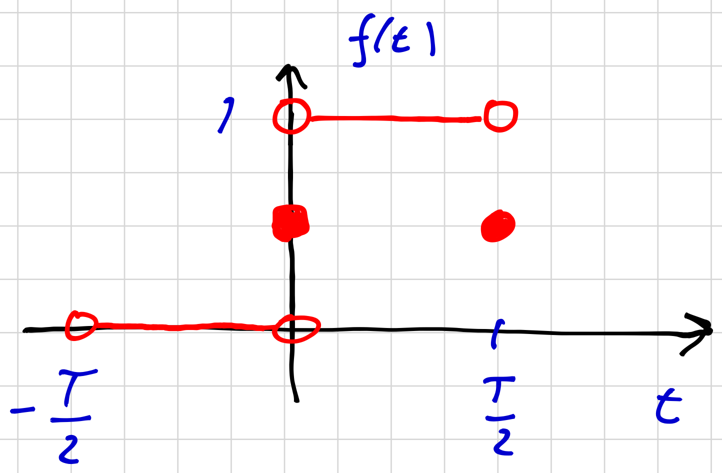


$g \sim s$ men $g(t) \neq s(t)$.

$f \sim s$ og $f(t) = s(t)$.

At f har Fourierrækken s skrives således: $f \sim s$

Eksempel



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1/2 & \text{for } t = 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 1/2 & \text{for } t = T/2 \end{cases}$$

f er periodisk med perioden T. $\quad f(t+T) = f(t)$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Fourierkoefficenterne beregnes som følger

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 1\,dt = \frac{2}{T}\,\frac{T}{2} = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 1\cdot\cos(n\omega t)\,dt =$$

$$\frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T}\,\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} 1\cdot\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$\frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T\,n\frac{2\pi}{T}}\left(-\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

Vi kan reformulere Fourierrækken som følger

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

n:	1	2	3	4	5
$1-(-1)^n$:	2	0	2	0	2
m:	1		2		3

Vi definerer $n = 2m-1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_m = \frac{2}{(2m-1)\pi}$$

Fourierrækken for f bliver nu

$$\boxed{S(t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m-1)\pi} \sin\left((2m-1)\omega t\right) = f(t)}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} = S(0)$$

Korollar 6.17

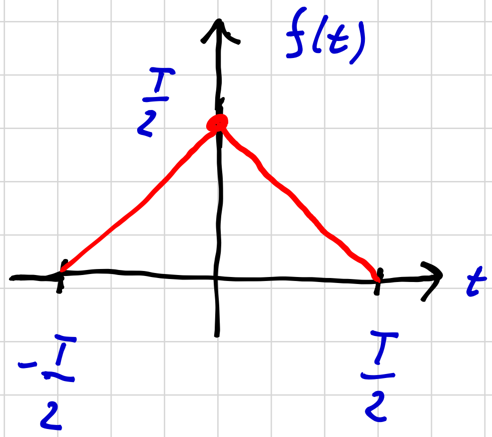
Hvis f er kontinuert, stykkevis differentiabel og T-periodisk,

$\Downarrow$

så er Fourierrækken for f uniform konvergent og vi har yderligere at

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Eksempel



$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{T}{2} & -\frac{T}{2} \le t < 0 \\ -t + \frac{T}{2} & 0 \le t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t)$$

f er kontinuert og stykkevis differentiabel.

f er en lige funktion

Fourier koefficienterne er

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)\, dt = \frac{4}{T} \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2} \cdot \frac{T}{2}\right) = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\pi t)\, dt = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(-t + \frac{T}{2}\right) \cos(n\omega t)\, dt =$$

$$\frac{T}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \frac{T\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2} \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fourier rækken bliver nu

$$S(t) = \frac{T}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2} \cos(n\omega t), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Den N'te afsnitssum er

$$S_N(t) = \frac{T}{4} + \sum_{n=1}^{N} \frac{T(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2} \cos(n\omega t)$$

Vi kan omskrive Fourierkoefficienterne som følger

n:	1	2	3	4	5
$1-(-1)^n$:	2	0	2	0	2
m	1		2		3

$n = 2m-1$ $\qquad a_n = a_{2m-1} = \frac{2T}{(2m-1)^2\pi^2}$

$$a_{2m} = 0$$

Fourierrækken omskrives til

$$\boxed{f(t) = S(t) = \frac{T}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2T}{(2m-1)^2\pi^2} \cos((2m-1)\omega t)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Den N'te afsnitssum er

$$S_N(t) = \frac{T}{4} + \sum_{m=1}^{N} \frac{2T}{(2m-1)^2\pi^2} \cos((2m-1)\omega t)$$

Korollar 6.20 og korollar 6.21

Antag at f er kontinuert, stykkevis differentiabel og T-periodisk. Fourierrækken for f er

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Den N'te afsnitssum er

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

Estimat 1 : $\quad |f(t) - S_N(t)| \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{2N} \int_0^T |f'(t)|^2 \, dt}$

Estimat 2 : $\quad |f(t) - S_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n| \right)$

Estimat 2 kan bruges sammen med uligheden (4.33) side 103 i lærebogen.

Vi introducerer $h(n) = |a_n| + |b_n|$

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} h(n) \leq \int_N^{\infty} h(x)\,dx \leq \varepsilon$$