Løsninger til eksamensopgaverne i matematik 2, kursus 01037 / 01035 august 2017

Opgave 1(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{1+n}$

Vi betragter leddet

$$\frac{2^n}{1+n} = \frac{2^n}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \infty \quad \text{for } n \to \infty$$

idet $\frac{2^n}{n} \to \infty$ for $n \to \infty$. Jvf. lærebogens bageste omslag vedrørende

$$\frac{x^\alpha}{b^x} \to 0 \quad \text{for } x \to \infty \quad \text{for alle } a>0,\ b>1$$

I denne opgave er $x \to n$, $\alpha \to 1$, $b \to 2$

Heraf fås at $(-1)^n \frac{2^n}{1+n}$ ikke går mod 0 for $n \to \infty$.

Af n'te leds kriteriet er rækken derfor divergent.

Svaret er (a)

Opgave 1 (ii)

Konvergensradius for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$

bestemmes med $a_n = \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ af

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{1}{n^2 3^n} x^n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{3^n}{3^{n+1}} |x| =$$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \frac{1}{3} |x| \to \frac{1}{3} |x| \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Fra kvotientkriteriet er rækken konvergent for

$$\frac{1}{3} |x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 3 = \rho$$

Rækkens konvergensradius er $\rho = 3$.

Svaret er (b)

Opgave 1 (iii)

Vi betragter $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+\frac{1}{2})\omega\pi}$ $\qquad \omega > 0$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} (-1)^n e^{-n\omega\pi} = e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-\omega\pi})^n$$

Da $|-e^{-\omega\pi}| < 1$ har vi ifølge sætning 5.2

$$S = e^{-\frac{1}{2}\omega\pi} \frac{1}{1-(-e^{-\omega\pi})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega\pi}}{1+e^{-\omega\pi}}$$

svaret er (b)

Bemærk den uendelige række er en kvotientrække i forklædning.

Opgave 1(iv)

For differentialligningen

$$y^{(4)} + 5y^{(3)} + 10y^{(2)} + 10y^{(1)} + 4y = 0$$

er det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$$

med rødderne $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$,

$\lambda_3 = -1+i$, $\lambda_4 = -1-i$

Ifølge sætning 1.9 er den fuldstændige reelle løsning:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t}\cos(t) + c_4 e^{-t}\sin(t)$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Svaret er (a)

Opgave 1(v)

Vi betragter differentialligningen

$$2y' + ay = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} e^{int} \quad , \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Det karakteristiske polynomium for det homogene problem er $P(\lambda) = 2\lambda + a$

Af formel (1.20) side 18 i lærebogen er overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{2s+a}$$

Ifølge superpositionsprincippet har vi den stationære løsning med $s = in$

$$y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} \frac{1}{2in+a} e^{int} =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(3+n^2)(a+2in)(a-2in)} e^{int} =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(3+n^2)(a^2+4n^2)} e^{int}$$

Svaret er (c)

Opgave 1 (vi)

Vi betragter $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 \quad \text{med rødderne}$$

$$\lambda^2 = -\frac{8}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8^2 - 4 \cdot 16} = -4$$

$\Updownarrow$

$\lambda = \pm i2$ er begge dobbelt rødder, dvs

$$P(\lambda) = (\lambda - i2)^2 (\lambda + i2)^2$$

Den algebraiske multiplicitet er 2 for de 2 rødder.

Ifølge sætning 1.15 er den fuldstændige reelle løsning

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 t \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + c_4 t \sin(2t)$$

Svaret er (a)

Opgave 2

Vi betragter differentialligningen

$$y'' + ty = 0 \quad , \quad y = y(t) \qquad (1)$$

(i) Indsæt potensrække løsningen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad i \quad (1)$$

Vi udregner

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} , \qquad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

og får ved indsættelse i (1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2 a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-1} \right) t^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker får vi rekursionsformlen

$$\boxed{a_2 = 0} \quad \text{og} \quad (n+2)(n+1)\,a_{n+2} + a_{n-1} = 0$$
for $n = 1,2,3,\ldots$

eller
$$a_{n+2} = \frac{-a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{for } n = 1,2,\ldots$$

eller
$$\boxed{a_{n+3} = \frac{-a_n}{(n+3)(n+2)} \quad \text{for } n = 0,1,2,\ldots}$$

a_0 og a_1 er arbitrære konstanter

2(ii) Vi opskriver $S_5(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n t^n$

$$a_3 = \frac{-a_0}{6}, \qquad a_4 = \frac{-a_1}{4\cdot 3} = \frac{-a_1}{12}, \quad a_5 = 0$$

Vi har
$$\boxed{S_5(t) = a_0 + a_1 t - \frac{a_0}{6} t^3 - \frac{a_1}{12} t^4}$$

Opgave 3

Et homogent differentialligningssystem har formen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(i) For at bestemme systemets stabilitet udregnes det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(a-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-2 & 1 \\ 2 & -\lambda-2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$(a-\lambda)\left((\lambda+2)^2 - 2\right) + 2(\lambda+2) =$$

$$(a-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 2) + 2\lambda + 4 =$$

$$-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + a\lambda^2 + 4a\lambda + 2a + 2\lambda + 4 =$$

$$-\lambda^3 + (a-4)\lambda^2 + 4a\lambda + 4 + 2a$$

Vi ganger nu med -1 og betragter

$$-P(\lambda) = \lambda^3 + (4-a)\lambda^2 - 4a\lambda - (2a+4)$$

Fra Routh-Hurwitz' kriterium korollar 2.41 er betingelsen for at systemet i (2) er asymptotisk stabilt at

$$a_1 = 4 - a > 0 \iff a < 4$$

$$a_2 = -4a > 0 \iff a < 0$$

$$a_3 = -2a - 4 > 0 \iff -a > 2 \iff a < -2$$

Derudover kræves

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-a & -(2a+4) \\ 1 & -4a \end{vmatrix} = 4a(a-4) + 2a + 4 =$$

$$4a^2 - 16a + 2a + 4 = 4a^2 - 14a + 4 > 0 \iff$$

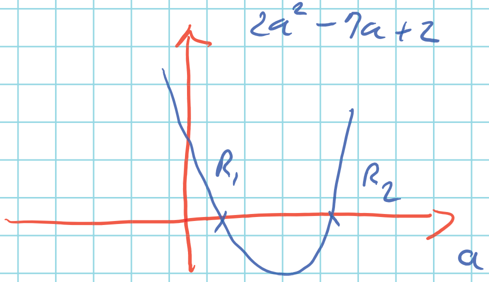
$$2a^2 - 7a + 2 > 0$$

Rødderne i dette polynomium i a er

$$a = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{49 - 16} =$$

$$\frac{7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{33} = \begin{cases} 3,186 = R_2 \\ 0,314 = R_1 \end{cases}$$

Med skitsen nedenfor af $2a^2 - 7a + 2$ har vi nu betingelsen



$$a < \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \quad \vee \quad a > \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Heraf fås at systemet i (2) er asymptotisk stabilt for $\boxed{a < -2}$

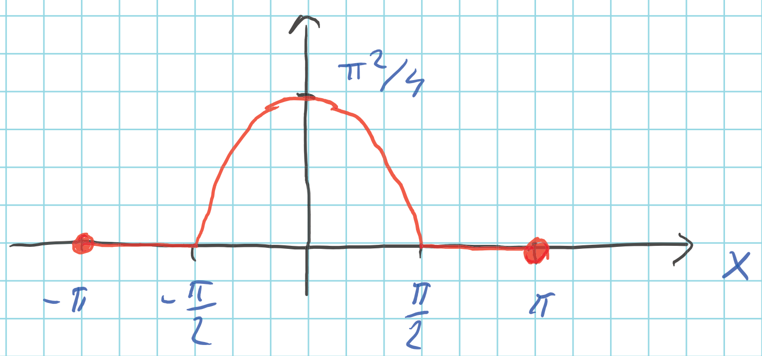
Opgave 4

En 2π-periodisk funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ -(x+\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) & \text{for } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

i intervallet $[-\pi; \pi[$

4(i) En skitse af f er



4(ii) Da f er kontinuert er Fourierrækken for f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

f er en lige funktion og derfor er Fourierkoefficienterne $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ifølge sætning 6.3, side 135 i lærebogen, er Fourierkoefficienterne a_n givet ved

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi har med brug af Maple

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx)\, dx =$$

$$\frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3} \qquad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

og

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{for } n = 0$$

Fourierrækken for f er

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^3} \cos(nx)}$$

4 (iii) For Fourierkoefficienterne a_n, $n = 1, 2, \ldots$ har vi vurderingen

4(iii)

$$|a_n| = \left| \frac{4\sin(\frac{n\pi}{2}) - 2n\pi\cos(\frac{n\pi}{2})}{\pi n^3} \right| \leq$$

$$\frac{|4\sin(\frac{n\pi}{2})| + |2n\pi\cos(\frac{n\pi}{2})|}{\pi n^3} \leq \frac{4+2n\pi}{\pi n^3} \leq$$

$$\frac{2n\pi + 2n\pi}{\pi n^3} = \frac{4n\pi}{\pi n^3} = \frac{4}{n^2}$$

Her har vi brugt at $4 < 2n\pi$ for $n=1,2,\ldots$

Vi har hermed vurderingen

$$\boxed{|a_n| \leq \frac{4}{n^2} \quad \text{for} \quad n=1,2,3,\ldots}$$

Da vi har at $|a_n\cos(nx)| = |a_n||\cos(nx)| \leq |a_n| \leq 4/n^3$ for $n=1,2,3,\ldots$, har Fourierrækken følgende majorantrække

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

4(iv)

Da f er differentiabel i hvert af de lukkede intervaller $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ og $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ er f stykkevis differentiabel. Tillige er f kontinuert og 2π-periodisk. Ifølge korollar 6.13 er Fourierrækken uniform konvergent. Svaret er ja.

4(v) Vi skal bestemme den N'te afsnitssum

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \quad \text{således at}$$

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 10^{-2}$$

Fra spørgsmål 4(iii) har vi

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

Fra ulighed 4.32 har vi nu vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{4}{x^2}\,dx + \frac{4}{(N+1)^2} = \left[-4x^{-1}\right]_{N+1}^{\infty} +$$

$$\frac{4}{(N+1)^2} = \frac{4}{N+1} + \frac{4}{(N+1)^2} = 4\,\frac{N+1+1}{(N+1)^2} = 4\,\frac{N+2}{N^2+1+2N} =$$

$$4\,\frac{N+2}{N(N+2)+1} \leq 4\,\frac{N+2}{N(N+2)} = \frac{4}{N} \leq \varepsilon \iff N \geq \frac{4}{\varepsilon} = 400$$

for $\varepsilon = 10^{-2}$

Vi vælger $N = 400$ og får denne værdi approksimerer den N'te afsnitssum S_{400} funktionen f med en fejl mindre en $\varepsilon = 0{,}01$.