DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 2-timers prøve, 9. december 2013
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 15 spørgsmål, der vægtes som følger:

Opgave 1: 30 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 15%; Opgave 4: 15%; Opgave 5: 25%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3, 4 og 5 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0 %, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2.5 %.

Opgave 1

(i) Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 8y = e^{2t} \tag{1}$$

Vi undersøger om (1) har løsninger på formen $y(t) = Ce^{2t},\ C \in \mathbb{R}$.

Svaret er:

a) Ligningen (1) har ingen løsning på formen $y(t) = Ce^{2t}$.

b) Ligningen (1) har uendeligt mange løsning på formen $y(t) = Ce^{2t}$.

c) Ligningen (1) har præcis én løsning på formen $y(t) = Ce^{2t}$, nemlig for $C = 0$.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!

(ii) Et differentialligningssystem har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{1}{s-1}, \ \ s \neq 1. \tag{2}$$

Det stationære svar $y(t)$ på påvirkningen $u(t) = e^{3t}$ er:

a) $y(t) = \frac{1}{8}e^{3t} + \frac{1}{17}e^{-3t}$

b) $y(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$

c) $y(t) = \frac{1}{8}\cos(3t) - \frac{1}{17}\sin(3t)$

d) ved ikke.

(iii) Vi betragter igen differentialligningssystemet med overføringsfunktionen (2).

Det stationære svar $y(t)$ på påvirkningen $u(t) = \cos(3t)$ er:

a) $y(t) = \frac{1}{2}\cos(3t)$

b) $y(t) = -\frac{1}{10}\cos(3t) + \frac{3}{10}\sin(3t)$

c) $y(t) = \frac{1}{2}\sin(3t)$

d) ved ikke.

(iv) Betragt talfølgen givet ved

$$x_n = \frac{\sin(n)}{n^2}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Undersøg om talfølgen $x_n, \ n \in \mathbb{N}$, er konvergent, og bestem i bekræftende fald grænseværdien. Svaret er:

a) Talfølgen er divergent.

b) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi π^2.

c) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 0.

d) ved ikke.

(v) Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^4}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er:

a) Rækken er absolut konvergent

b) Rækken er betinget konvergent

c) Rækken er divergent

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!

(vi) Betragt den 2π-periodiske funktion f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, \pi[\\ 1 & \text{for } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Vi undersøger Fourierrækkens konvergensforhold. Svaret er:

a) Fourierrækken er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$, men ikke uniformt konvergent

b) Fourierrækken er uniformt konvergent

c) Fourierrækken er ikke konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$

d) ved ikke.

Opgave 2

Vi betragter differentialligningen

$$y''' - 6y'' + 16y' - 16y = 0 \tag{3}$$

(i) Bestem den fuldstændige komplekse løsning til (3).

(ii) Bestem den fuldstændige reelle løsning til (3).

Opgave 3

(i) Bestem konvergensradius for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}$$

(ii) Vis ved brug af potensrækkerne for $\cos(x)$ og $\sin(x)$ at

$$x\cos(x) + \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 4

(i) Vis at det uegentlige integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,dx$$

er konvergent.

(ii) Bestem en tilnærmet værdi for summen af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5},$$

med en fejl på højst 0.05.

Opgave 5

En 2π-periodisk, stykkevis differentiabel og kontinuert funktion er givet ved Fourierrækken

$$u(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+1}\, e^{int}.$$

Endvidere er der givet et asymptotisk stabilt differentialligningssystem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \\ y = \mathbf{d}^\top \mathbf{x}, \end{cases} \tag{4}$$

med overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \ \ s \neq -1.$$

(i) Opskriv Fourierrækken for en løsning y til differentialligningssystemet med den angivne påvirkning u.

(ii) Konvergerer Fourierrækken for løsningen y i spørgsmål (i) uniformt? Svaret skal begrundes.

(iii) Lad S_N betegne den N'te afsnitssum af Fourierrækken for løsningen y i spørgsmål (i). Bestem N således at

$$|y(t) - S_N(t)| \leq 0.1$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

Opgavesættet slut.