DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 11. maj 2022

Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 60 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 20%; Opgave 4: 5 %

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven afleveres elektronisk ved indtastning på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2, 3 og 4 kan enten afleveres i papirform eller ved oploadning.

Opgave 1

MC-spørgsmål 1 Om en 2.ordens differentialligning med reelle koefficienter,

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 u' + b_1 u,$$

oplyses at overføringsfunktionen er

$$H(s) = \frac{1}{s+2},\ s \neq -2.$$

Bestem en løsning når $u(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

Svaret er:

A: $y(t) = e^{it}$

B: $y(t) = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$

C: $y(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t)$

D: $y(t) = \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t)$

E: $y(t) = \frac{1}{2+i}\, e^{it}$

F: $y(t) = \frac{1}{2+i}\ \cos(t) + \frac{1}{2-i}\sin(t)$,

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 2 Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt. Svaret er:

A: $a < 0$; **B:** $a < -1$; **C:** $a > 2$.

Undersøg nu om systemet er stabilt for $a = 1$. Svaret er:

1: Ja; **2:** Nej

Det samlede svar er hermed:

A1

A2

B1

B2

C1

C2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 3 Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = 2x_1(t). \end{cases}$$

Bestem overføringsfunktionen $H(s)$. Svaret er

D: $H(s) = \frac{1}{(1-s)(2-s)}$; **E:** $H(s) = \frac{1}{2-s}$; **F:** $H(s) = \frac{4}{s-1}$

Bestem nu de værdier for $s \in \mathbb{C}$ for hvilke overføringsfunktionen er defineret. Svaret er:

1: $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$; **2:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$; **3:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$;

Det samlede svar er hermed

D1

D2

D3

E1

E2

E3

F1

F2

F3

MC-spørgsmål 4 Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2} x^n.$$

Bestem konvergensradius ρ. Svaret er:

G: $\rho = 1$; **H:** $\rho = 1/3$; **I:** $\rho = 3$.

Undersøg nu om rækken er konvergent for $x = -\rho$. Svaret er:

1: Ja **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

G1

G2

H1

H2

I1

I2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 5 Betragt funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2} x^n.$$

Beregn tallet $f(0)$. Svaret er

J: $f(0) = 1/4$; **K:** $f(0) = 1$; **L:** $f(0) = 7/12$

Beregn nu tallet $f'(0)$. Svaret er:

1: $f'(0) = 1/4$; **2:** $f'(0) = 1/3$.

Det samlede svar er dermed

J1

J2

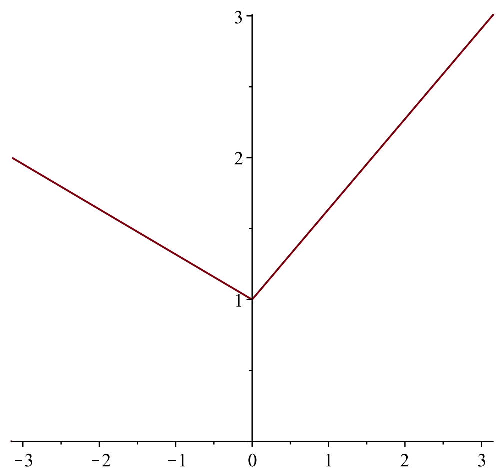
K1

K2

L1

L2

MC-spørgsmål 6 Betragt den 2π-periodiske funktion f, hvis graf er vist på figuren for $x \in [-\pi, \pi[$.



Undersøg om funktionen er lige, ulige, eller ingen af delene. Svaret er:

M: f er lige; **N:** f er ulige; **P:** f er hverken lige eller ulige

Undersøg nu om Fourierkoefficienten a_0 er positiv, negativ, eller nul. Svaret er:

1: $a_0 > 0$; **2:** $a_0 < 0$; **3:** $a_0 = 0$.

Det samlede svar er hermed

M1
M2
M3
N1
N2
N3
P1
P2
P3

MC-spørgsmål 7 Vi betragter fortsat funktionen f fra MC-spørgsmål 6, og undersøger nu Fourierrækkens konvergens for udvalgte x.

Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \pi$? Svaret er

Q: $\frac{5}{2}$; **R:** 2; **S:** 3

Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = 6\pi$? Svaret er

1: 1; **2:** 2; **3:** 3

Det samlede svar er hermed

Q1

Q2

Q3

R1

R2

R3

S1

S2

S3

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 8 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{4^n}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er

T: betinget konvergent; **U:** absolut konvergent; **V:** divergent

Undersøg nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{4^n}x^n$$

har en konvergent majorantrække på intervallet $[-1,1]$. Svaret er

1: Rækken har ikke en konvergent majorantrække

2: Rækken har en konvergent majorantrække.

Det samlede svar er dermed

T1

T2

U1

U2

V1

V2

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 2 Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t}. \tag{1}$$

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(ii) Redegør for, om (1) har en løsning på formen $y(t) = Cte^{2t}$.

(iii) Vis at (1) har en løsning på formen $y(t) = Ct^2e^{2t}$, og bestem den.

Opgave 3 Betragt den 2π-periodiske funktion f, der er givet ved

$$f(x) = \pi - \frac{1}{\pi}x^2,\ x \in [-\pi, \pi[.$$

(i) Skitser grafen for funktionen f på intervallet $[-3\pi, \pi[$.

(ii) Beregn Fourierkoefficienterne a_n og b_n for Fourierrækken på reel form.

(iii) Kan tegnet $\sim$ i definitionen af Fourierrækken erstattes af et lighedstegn?

(iv) Lad $S_N(x)$ betegne den N'te afsnitssum af Fourierrækken. Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 10^{-5}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 4 Det oplyses (skal IKKE vises), at differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0, \; t \in]0, \infty[,$$

har løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

Bestem en løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = t^2, \; t \in]0, \infty[.$$

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) aflevere eller oploade løsningen til opgave 2 & 3 & 4.