Opgaver E21 Mat 2 del A

Der anvendes en scoringsalgoritme, som er baseret på "One best answer"

Dette betyder følgende:
Der er altid netop ét svar som er mere rigtigt end de andre
Studerende kan kun vælge ét svar per spørgsmål
Hvert rigtigt svar giver 1 point
Hvert forkert svar giver 0 point (der benyttes IKKE negative point)

The following approach to scoring responses is implemented and is based on "One best answer"
There is always only one correct answer – a response that is more correct than the rest
Students are only able to select one answer per question
Every correct answer corresponds to 1 point
Every incorrect answer corresponds to 0 points (incorrect answers do not result in subtraction of points)

Betragt potensrækken

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n.$

Hvad er det størst mulige interval, for hvilket rækken er konvergent:

Choose one answer

- $\mathbb{R}$
- $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$
- $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $]-2, 2[$
- $[-2, 2[$
- $[-2, 2]$
- $x = 0$

Funktionen f er 2π periodisk og på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ givet ved $f(x) = x\sin(x)$.
Hvilket udsagn er sandt:

Choose one answer

- f er lige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er lige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.
- f er ulige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er ulige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.
- f er hverken lige eller ulige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.
- f er hverken lige eller ulige og dens Fourierrække konvergerer ikke uniformt mod f.

Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

som afhænger af en reel parameter a.
Det oplyses at det karakteristiske polynomium for systemet er givet ved

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + a, \quad \text{hvor} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hvilket af nedenstående intervaller sikrer at systemet er asymptotisk stabilt:

Choose one answer

- $a \in [0,6]$
- $a \in]-1,7]$
- $a \in]0,6[$
- $a \in [-1,7]$
- $a \in [-6,0]$
- $a \in]-6,0[$
- Det rigtige svar er ikke vist her.

Vi betragter en inhomogen andenordens lineær differentialligning med konstante koefficienter, med tilhørende overføringsfunktion $H(s)$.

Overføringsfunktionen $H(s)$ er givet ved

$H(s) = \frac{3}{s^2+s-2}$, $s \neq \{-2, 1\}$.

Hvilken af nedenstående funktioner y kan være en løsning til differentialligningen?

Choose one answer

- $y(t) = 3e^{t}$
- $y(t) = \frac{1}{6}e^{4t}$
- $y(t) = \frac{1}{10}e^{3t}$
- $y(t) = 3e^{4t}$
- $y(t) = \frac{-3}{10}e^{3t}$
- $y(t) = 3e^{-t}$
- Ingen af de mulige svar kan være en løsning til differentialligningen.

Betragt de to uendelige rækker

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n^2+3n}{(n+1)^4} \quad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{\sqrt{n}+1}.$$

Angiv det korrekte udsagn vedrørende de to rækker:

Choose one answer

- R er absolut konvergent og S er divergent.
- R er divergent og S er betinget konvergent.
- R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.
- R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- R er divergent og S er divergent.
- R er absolut konvergent og S er absolut konvergent.
- Ingen af de nævnte udsagn er korrekte.

Fourierrækken for en funktion f er på reel form givet ved

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \right).$$

Vi betragter nu Fourierrækken for f givet på kompleks form

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Hvilket sæt af Fourierkoefficienter er korrekt:

Choose one answer

- $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = -\frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = -2 - 2i$, $c_2 = \frac{1}{4} + i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}i$
- $c_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$, $c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$
- Ingen af de viste sæt er korrekte.

Betragt en 3-ordens lineær homogen differentialligning med konstante koefficienter
$\frac{d^3x}{dt^3} + a_1\frac{d^2x}{dt^2} + a_2\frac{dx}{dt} + a_3x = 0.$

Det oplyses at nedenstående funktion er løsning til differentialligningen

$$x(t) = e^{2t} + e^{-t} + 1.$$

Hvilket af nedenstående sæt af værdier for koefficienterne $a_1,\ a_2$ og a_3 er det rigtige?

Choose one answer

- $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1$
- $a_1 = -1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$
- $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 0$

Vi betragter en 2π periodisk funktion f, som i intervallet $[-\pi, \pi[$ er givet ved forskriften

$$f(t) = \begin{cases} \pi & -\pi \leq t < 0 \\ t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Fourierrækken hørende til funktionen f er givet ved:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Hvilke af nedenstående værdier er de korrekte Fourierkoefficienter for f:

Choose one answer

- $a_2 = 0,\ b_1 = -1,\ b_3 = -\frac{1}{3}$
- $a_2 = 0,\ b_1 = 1,\ b_3 = \frac{1}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = -1,\ b_3 = -\frac{1}{3}$
- $a_2 = 0,\ b_1 = -\pi,\ b_3 = -\frac{\pi}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = -\pi,\ b_3 = -\frac{\pi}{3}$
- $a_2 = -\frac{2}{\pi},\ b_1 = \pi,\ b_3 = \frac{\pi}{3}$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 5. december 2021
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 60%, Opgave 1: 15%, Opgave 2: 15%, og Opgave 3: 10%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$x''(t) + 4\,x'(t) + 3\,x(t) = u'(t)\,. \tag{1}$$

1. Find rødderne i det karakteristiske polynomium hørende til (1), og opskriv ved hjælp af disse rødder den fuldstændige reelle løsning til den homogene del af (1).
2. Bestem overføringsfunktionen for differentialligningen (1).
3. Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{4t}$.
4. Bestem en partikulær løsning til (1) når $u(t) = e^{-3t}$, ved at gætte på en løsning af formen $x(t) = Ate^{-3t}$ hvor A er en reel konstant.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningsystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Vis at $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ er en løsning til (2) og angiv den fuldstændige reelle løsning til (2).
3. Afgør om differentialligningsystemet (2) er asymptotisk stabilt.

Opgave 3

Betragt den homogene differentialligning

$$t\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} + y = 0\,. \tag{3}$$

Antag at differentialligningen (3) har en løsning, der kan skrives som en potensrække, $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, med konvergensradius $\rho > 0$.

1. Indsæt potensrækken for y i differentialligningen (3) og vis at konstanterne a_n skal opfylde $a_0 = 0$ samt rekursionsformlen
$$a_{n+2}(n+2)(n+1)n + a_n = 0, \text{ for } n \geq 1.$$
2. Bestem a_1, a_2 og a_3 for en potensrækkeløsning $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ med $y'(0) = 3$ og $y''(0) = 4$.

————oooOooo————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).