Løsninger til eksamensopgaverne i matematik 2, 10. december, 2017.

Kursus 01035.

Del A mc opgaver

(i) Vi betragter det homogene system

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \quad \text{hvor} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$ bestemmes af

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -3$$

Ifølge korollar 2.35 er systemet ustabilt, idet egenværdien $\lambda = 1$ er positiv.

$\boxed{\text{Svaret er C}}$

Opgave (ii) En 4. ordens differentialligning har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+1)$$

Rødderne for $P(\lambda)$ er

$\lambda^2 = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{(dobbelt rod)} \\ \lambda = \pm i & \text{(2 enkelt rødder)} \end{cases}$$

Ifølge sætning 1.15 er den fuldstændige løsning

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{svaret er c}}$

Opgave (iii) Vi betragter potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^n} x^n$$

Konvergens radius bestemmes af kvotient-kriteriet.

Kvotient: $\quad a_n = \dfrac{n+2}{3^n} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+3}{3^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n+2}{3^n} x^n}\right| = \frac{n+3}{n+2} \frac{3^n}{3^n \cdot 3} |x| =$$

$$\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \frac{1}{3}|x| \to \frac{1}{3}|x| \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Konvergens radius ρ bestemmes af uligheden for konvergens af rækken

$$\frac{1}{3}|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 = \rho$$

$\boxed{\text{svaret er d}}$

Opgave (iv) Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = \sin(\omega t)$$

hvor $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\omega \in \mathbb{R}$

Det stationære svar findes af sætning 1.27 med brug af overførings funktionen

$$H(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} \qquad s = i\omega$$

og fra ligning (1.26) som følger

$$x(t) = \mathrm{Im}\left(H(i\omega) e^{i\omega t} \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2 + 2i\omega + 1} e^{i\omega t} \right)$$

$\boxed{\text{svaret er } b}$

Opgave (V) Vi betragter differentialligningen

$$2\frac{dy}{dt} - y = 0 \,, \qquad y = y(t)$$

Antag potensrække løsningen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Vi bestemmer en rekursionsformel for c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ved indsættelse

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}$$

Indsættelse:

$$2y' - y = \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) c_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2(n+1) c_{n+1} - c_n \right) t^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker har vi at

$$2(n+1)c_{n+1} - c_n = 0 \quad \text{for } n = 0,1,2,\ldots$$

heraf fås rekursionsformlen

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2(n+1)} \quad \text{for } n = 0,1,2,\ldots$$

og c_0 er en arbitrær konstant.

Alternativt formuleret

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{2n} \quad \text{for } n = 1,2,3,\ldots$$

$\boxed{\text{Svaret er } e}$

Opgave (vi) Vi betragter Fourierrækken

$$f(x) = 3 + \cos(2x) = 3 + \tfrac{1}{2}\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) =$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-i2x} + 3 + \tfrac{1}{2}e^{i2x}$$

Heraf ses at de komplekse Fourier-koefficienter er

$$c_{-2} = \tfrac{1}{2} \qquad c_0 = 3 \qquad c_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$c_n = 0 \quad \text{for } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2,0,2\}$$

$\boxed{\text{Svaret er } c}$

Eksamens opgavesæt matematik 2, kursus 01035, 10. december 2017.

Løsninger til del B

Opgave 1

Vi betragter differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u(t)$$

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Opgave 1(i) $\quad u(t) = t$

Løsningsantagelse: $y(t) = at + b, \quad y' = a, \quad y'' = 0$

Indsat giver

$$3a + 2at + 2b = t \quad \Rightarrow \quad 2a = 1 \;\wedge\; 3a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{2} \;\wedge\; 2b = -3a = -\tfrac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{2} \;\wedge\; b = -\tfrac{3}{4}$$

Den partikulære løsning er $\boxed{y(t) = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{4}}$

1(ii) Det karakteristiske polynomium P har rødderne $\lambda = -1$ og $\lambda = -2$, dvs.

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Med $u(t) = e^{st}$ er overføringsfunktionen

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}}$$

Opgave 1 (iii) For $u(t) = e^{2t}$ er det stationære svar ifølge sætning 1.24

$$y(t) = H(2)e^{2t} = \frac{1}{3\cdot 4}e^{2t} = \frac{1}{12}e^{2t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}}$$

Opgave 1 (iv) For $u(t) = t + e^{2t}$ er den fuldstændige løsning med brug af superpositionsprincippet

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + \frac{1}{12}e^{2t}}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Opgave 2 (i)

$$R_1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} \qquad a_n = \frac{1}{(3n)!}$$

Rækken R_1's konvergens kan bestemmes v. hj. a kvotientkriteriet

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}} = \frac{(3n)!}{(3n+3)!} =$$

$$\frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to$$

0 for $n \to \infty$

Ifølge kvotientkriteriet er rækken konvergent.

Opgave 2(ii)

$$R_2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$$

R_1 er en alternerende række med $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$

Vi har

(i) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}} > 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

(ii) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$ er en aftagende funktion af n

(iii) $b_n = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0$ for $n \to \infty$

Ifølge Leibniz' kriterium er R_2 konvergent.

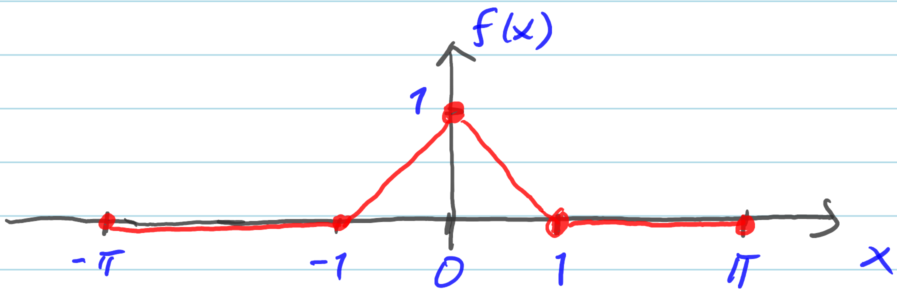
Opgave 3

Funktionen f er 2π-periodisk og lige.

I intervallet $[0;\pi]$ er f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{for} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{for} \quad 1 < x \le \pi \end{cases}$$

Opgave 3(i) I intervallet $[-\pi;\pi]$ er grafen for f



Opgave 3(ii)

Ifølge korollar 6.13 konvergerer Fourier-rækken for f punktvis og tillige uniformt mod f, idet f er kontinuert og stykkevis differentiabel. Det sidste skyldes at $1-x$ er differentiabel i $[0;1]$ og at 0 er differentiabel i $[1;\pi]$.

Opgave 3 (iii) Fourier koefficienterne for f bestemmes af sætning 6.3 som følger

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad \text{for } n = 0,1,2,\ldots$$

Vi har

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \qquad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}}$$

For $n = 1,2,3,\ldots$ har vi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^1$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{n}\sin(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}\sin(n) - \frac{2}{n\pi}\sin(n) + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n)-1\right) = \frac{2\left(1-\cos(n)\right)}{n^2\pi}, \quad n = 1,2,\ldots}$$

Da f er lige er $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Opgave 4. Vi har den uendelige række

$$R_3: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

Opgave 4(i) Vi vil tage udgangspunkt i sætning 5.33 vedrørende kontinuitet af en sumfunktion. Vi bestemmer først en majorantrække for R_3, jvf definition 5.31. Vi betragter for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right| =$$

$$\frac{|\sin(n) - n\cos(n)|}{n^3} |\cos(nx)| \leq$$

$$\frac{|\sin(n)| + n|\cos(n)|}{n^3} \cdot 1 \leq \frac{1 + n \cdot 1}{n^3} = \frac{1+n}{n^3} \leq$$

$$\frac{n+n}{n^3} = \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} = k_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Heraf fås majorantrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

for R_3. Ifølge eksempel 4.34 er denne række konvergent $(\alpha = 2)$. Vi har at forudsætning (ii) i sætning 5.33 er opfyldt. Da $\cos(nx)$ er en kontinuert funktion af x i hele $\mathbb{R}$, er betingelse (i) i 5.33 også opfyldt. Heraf følge nu af sætning 5.33, at R_3 konvergerer uniformt mod sin sumfunktion g, og at sumfunktionen er kontinuert.

Opgave 4 (ii)

Vi skal bestemme N i afsnitsummen

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

således at

$$|g(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 0{,}05$$

hvor $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx)$$

Vi har at

$$|g(x) - S_N(x)| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n) - n\cos(n)}{n^3} \cos(nx) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

Af uligheden (4.32) har vi vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx + \frac{2}{(N+1)^2} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \left[-2x^{-1}\right]_{N+1}^{t} + \frac{2}{(N+1)^2} = \frac{2}{N+1} + \frac{2}{(N+1)^2} =$$

$$\frac{2(N+1)}{(N+1)^2} + \frac{2}{(N+1)^2} = \frac{2N+4}{N^2+2N+1} = \frac{2(N+2)}{N(N+2)+1} \leq$$

$$\frac{2(N+2)}{N(N+2)} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon \iff N \geq \frac{2}{\varepsilon} = 40$$

med $\varepsilon = 0{,}05$. $\boxed{\text{Vi vælger } N = 40}$

Vi har hermed vist at afsnitssummen $S_{40}(x)$ approksimerer $g(x)$ med en fejl mindre end eller lig $\varepsilon = 0{,}05$.