Eksamen d. 16/5 2011

Matematik 2

Opgave 1 (1)

For den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$

med $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$ gælder at

a_n ikke konvergerer mod 0. Ifølge

n'te leds kriteriet er rækken divergent

$\boxed{\text{svar C}}$

Opgave 1 (2)

$$f(x) = e^{\sin(x)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Da e^y hverken er lige eller ulige er

også $f(x)$ hverken lige eller ulige.

$\boxed{\text{svar C}}$

Opgave 1 (3)

Vi betragter potensrækken

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4} x^n$$

Konvergensradius ρ bestemmes med brug af kvotientkriteriet. Indfør

$$a_n(x) = \frac{n+1}{n^3+4} x^n$$

og udregn

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{n+2}{(n+1)^3+4} x^{n+1}}{\frac{n+1}{n^3+4} x^n}\right| = \frac{n+2}{n+1} \frac{n^3+4}{(n+1)^3+4} |x| =$$

$$\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1+\frac{4}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{4}{n^3}} |x| \to |x| \quad \text{for } n \to \infty$$

Ifølge sætn. 4.17 (kvotientkriteriet) har vi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \text{såfremt} \quad |x| < 1$$

Heraf følger at konvergensradius er $\rho = 1$

$\boxed{\text{Svaret er b}}$

Løsninger til den skriftlige eksamen Maj 2011.

Opgave 1 (4)

Overføringsfunktionen for

$$y'' + y' + 4y = e^{st}$$

er

$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+4}$$

$$s \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15} \right\}$$

Vi betragter påvirkningen $u(t) = 2\sin(t)$.

$$u(t) = 2\sin(t) = 2\,\mathrm{Im}\left(e^{it}\right)$$

Overføringsfunktionen for e^{it} er $(s = i)$

$$H(i) = \frac{1}{i^2+i+4} = \frac{1}{3+i}$$

$$= \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i}{10}$$

Det stationære svar er

$$y(t) = \mathrm{Im}\left(2H(i)\,e^{it}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{3-i}{5}\,e^{it}\right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\left(\frac{3}{5} - \frac{i}{5}\right)\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$y(t) = \frac{3}{5} \sin t - \frac{1}{5} \cos t$.

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opgave 1 (5)

Af $P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+3)$ har vi at

$\lambda = -1$ er en dobbeltrod.

$\lambda = -3$ er en enkelt rod.

Da $\lambda = -1$ er en dobbeltrod er den algebraiske multiplicitet 2.

$\underline{x}_1(t)$ og $\underline{x}_2(t)$ er lineart uafhængige.

Da $\underline{x}_2(t)$ indeholder leddet $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t e^{-t}$

må den geometriske multiplicitet være 1.

$\boxed{\text{Svar a}}$

Opgave 1 (b)

Vi betragter differentialligningen

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0$$

En løsning kan skrives på potensrække formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Vi har

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Indsat fås

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} t^{n-1} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) \, t^{n-1} + a_1 = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker har vi

$$a_1 = 0 \quad \text{og} \quad n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \quad \text{for } n = 2,3,4 \ldots$$

Dvs $\quad a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$

Da $a_1 = 0$ er $\quad a_3 = -\frac{1}{3^2} a_1 = 0$, og

$$a_n = 0 \quad \text{for } n \text{ ulige}$$

For n lige haves at a_0 er arbitrær og

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2} \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

eller

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)^2} a_n \qquad n = 0, 2, 4, 6$$

$\boxed{\text{Svaret er } C}$

Opgave 2

Vi betragter differentialligningssystemet

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & \sigma & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2.1) Maple kommandoen Eigenvectors($\underline{\underline{A}}$) udregner egenværdier og egenvektorer som følger for $\sigma = 4$

$$\lambda_1 = -3 \qquad \underline{v}_1 = [\,1/3\,,\ -2/3\,,\ 1\,]^T$$

$$\lambda_2 = 3 \qquad \underline{v}_2 = [\,1\,,\ 1\,,\ 0\,]^T$$

$$\lambda_3 = -5 \qquad \underline{v}_3 = [\,-1\,,\ 1\,,\ 0\,]^T$$

3 komplekse og lineært uafhængige løsninger er

$$\underline{x}_1(t) = \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$\underline{x}_2(t) = \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$\underline{x}_3(t) = \underline{v}_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

2.2) De 3 lineært uafhængige løsninger er fundet med Maple kommandoen Eigenvectors ($\underline{A}$) for $\sigma = -9$

$$\underline{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} i\,\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-1+i6)t}$$

$$\underline{x}_3(t) = \begin{bmatrix} -i\,\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{(-1-i6)t} = \overline{\underline{x}_2(t)}$$

kompleks konjugeret.

Bemærk at $\underline{x}_3(t)$ er den kompleks konjugerede af $\underline{x}_2(t)$.

$\underline{x}_1(t)$ er reel, så her skal ikke gøres mere.

(9)

Vi betragter nu

$$\underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} i\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \left(\cos(6t) + i\sin(6t)\right) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \left(\cos(6t) + i\sin(6t)\right)$$

$$+ \; i \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \left(\cos(6t) + i\sin(6t)\right)$$

Den 2. reelle løsning $\underline{x}_2^{reel}(t)$ er givet ved

$$\underline{x}_2^{reel}(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{x}_2(t)\right) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos(6t) - \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin(6t) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} e^{-t} \sin(6t) \\ e^{-t} \cos(6t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Den 3. relle løsning $\underline{x}_3^{reel}(t)$ er givet ved

$$\underline{x}_3^{reel}(t) = Im(\underline{x}_2(t)) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \sin(6t) + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \cos(6t) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} e^{-t} \cos(6t) \\ e^{-t} \sin(6t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 2 (3)

Fra Maple har vi egenværdierne

$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -1 + 2\sqrt{\sigma} \qquad \lambda_3 = -1 - 2\sqrt{\sigma}$

Systemet er asymptotisk stabilt for $Re(\lambda_i) < 0$ for alle $i = 1, 2, 3$.

For $\sigma \leq 0$ er systemet asymptotisk stabilt. ($\sqrt{\sigma} = \sqrt{-|\sigma|} = i\sqrt{|\sigma|}$ og $Re(\lambda_i) = -1 < 0$ for alle $i = 1, 2, 3$)

For $\sigma > 0$ er systemet asymptotisk stabilt for $\lambda_2 < 0 \Rightarrow -1 + 2\sqrt{\sigma} < 0 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{\sigma} < 1 \Leftrightarrow 4\sigma < 1 \Leftrightarrow \sigma < \frac{1}{4}$

Da λ_3 for $\sigma > 0$ altid har negativ real del fås nu

Systemet er asymptotisk stabilt for alle $\sigma \in \mathbb{R}$ for hvilke der gælder

$$\boxed{\sigma < \frac{1}{4}}$$

Opgave 3

Funktionen $f(t)$ er 2π - periodisk i intervallet $]-\pi;\pi]$ og

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi < t < 0 \\ \alpha & \text{for } t = 0 \\ 4 + \sin(4t) & \text{for } 0 < t < \pi \\ \beta & \text{for } t = \pi \end{cases}$$

(1) For at Fourierrækken $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

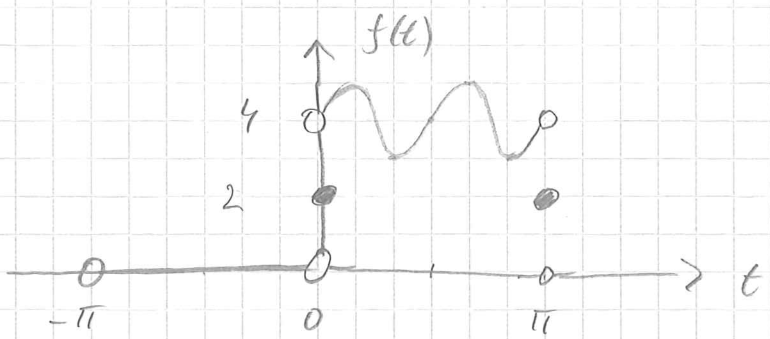
kan konvergere punktvis mod $f(t)$ må vi vælge α således at

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0-} f(t) + \lim_{t\to 0+} f(t)\right) = \frac{1}{2}(0+4) = 2$$

og vi skal vælge β således at

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to \pi_-} f(t) + \lim_{t\to \pi_+} f(t)\right) = \frac{1}{2}(4+0) = 2$$

(2) Grafen for $f(t)$ for $t \in [-\pi;\pi]$ er



(3) På grund af diskontinuiteterne i $x = n\pi$, hvor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ er Fourierrækken <u>ikke</u> uniformt konvergent.

Ser vi på definition 5.27, side 110 i lærebogen, af uniform konvergens ser vi, at for den N'te afsnitssum $S_N(t)$ gælder

$$\left| f(t) - S_N(t) \right| > \varepsilon > 0$$

for et givet ε, hvor $0 < \varepsilon < 2$ såfremt t er tilstrækkelig tæt på $t = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Dette gælder for vilkårlige store N.

Så definition 5.27 kan ikke opfyldes.

(4) Maple udregner Fourier koefficienterne som følger

Først udregnes

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (4 + \sin(4t))\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}4\pi + \frac{1}{4\pi}\left[-\cos(4t)\right]_0^{\pi} = 4 + \frac{1}{4\pi}(-1+1) = 4$$

$$\boxed{a_0 = 4}$$

Herefter bruges Maple til at udregne a_n for $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (4 + \sin(4t))\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(4t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(4t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(4t)\cos(nt)\,dt = \frac{4(\cos(n\pi)-1)}{\pi(n^2-16)}$$

udtrykket er kun gyldigt for $n \neq 4$.

Vi har $\cos(n\pi) = (-1)^n$ og

$$a_n = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi(n^2-16)} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige og } n \neq 4. \\ \dfrac{-8}{\pi(n^2-16)} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

Heraf fås

$$a_{2n+1} = \frac{-8}{\pi\left((2n+1)^2-16\right)} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Vi udregner nu a_n for $n = 4$.

$$a_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(4t)\cos(4t)\,dt = 0$$

Samlet fås nu

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= 4 \qquad a_{2n} = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \\ a_{2n+1} &= \frac{-8}{\pi\left[(2n+1)^2-16\right]} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

Vi udregner nu b_n, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(4 + \sin(4t)\right)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\sin(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(4t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(4t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{n\pi}\left[-\cos(n\pi)+1\right] + \frac{4\sin(n\pi)}{\pi(n^2-16)}$$

Vi forlanger at $n \neq 4$ og får

$$b_n = \frac{4\left[-(-1)^n+1\right]}{n\pi} = \frac{4\left[(-1)^{n+1}+1\right]}{n\pi}$$

Heraf fås

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ lige og } n \neq 4 \\ \frac{8}{n\pi} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases}$$

Dvs. vi kan skrive

$$b_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)\pi} \quad \text{for } n = 0,1,2,3,\ldots$$

Vi udregner nu b_4 og får

$$b_4 = \frac{4}{4\pi}\left[-\cos(4\pi)+1\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(4t)^2\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(4t)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Samlet har vi

$$\boxed{\begin{aligned} b_{2n} &= \begin{cases} 0 & \text{for } n = 1,3,4,5,6 \\ \frac{1}{2} & \text{for } n = 2 \end{cases} \\[2em] b_{2n+1} &= \frac{8}{(2n+1)\pi} \quad \text{for } n = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}}$$

Fourier rækken for $f(t)$ er

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right) = \\ & 2 + \frac{1}{2}\sin(4t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-8}{((2n+1)^2 - 16)\pi} \cos((2n+1)t) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)t) \end{aligned}}$$