Løsning til Mat 2 eksamen August 2023

Del A

Opgave 1.I:

Egenværdierne er $\lambda = -1$ og $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. Vi bruger sætning 2.36 og konkluderer at systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

Det samlede svar er derfor **A**.

Opgave 1.II:

Vi bruger korollar 2.43 på:

$$Q(\lambda) = -P(\lambda) = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 - (a+2)\lambda - a.$$

Vi har $a_1 = -(a+2)$, $a_2 = -(a+2)$, $a_3 = -a$.

i $a < -2$ og $a < 0$.

ii $D_2 = a_1 a_2 - a_3 = (a+4)(a+1) > 0 \Leftrightarrow a < -4$ eller $a > -1$.

Samlet konkluderer vi $a < -4$, og svaret er dermed **G**.

Opgave 1.III:
For R bruger vi kvotientkriteriet og får

$$\left|\frac{1+e^n}{1+e^{n+1}}\right| \to e^{-1} \in]0,1[,$$

og dermed er R absolut konvergent.

For T indses det (eksempelvis af grafen) at $f(n)$ aftager monotont mod nul og rækken er derfor konvergent pga Leibniz kriteriet. Alternativt, så har vi $f'(n) < 0$ for $n > 1$. Den er ikke absolut konvergent via sammenligningskriteriet idet det ses af grafen at $f(n) \geq g(n)$. Specielt er rækken med ledene $g(n)$ divergent. Alternativt, så er $f(n) \sim g(n)$ og vi kan bruge ækvivalenskriteriet.

Svaret er dermed **L2**.

Opgave 1.IV:

Vi bruger korollar 5.38:

$$
\begin{aligned}
H(x) &= H(0) + \sum_{n=0}(n+1)^5 \int_0^x t^n dt = 1 + \sum_{n=0}(n+1)^5 \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1} n^4 x^n.
\end{aligned}
$$

Svaret er derfor **M**.

Opgave 1.V:
Vi har at $y(t) = H(6)e^{6t} = \frac{1}{35}e^{6t}$ er en løsning til $u(t) = e^{6t}$. Pga linearitet så er $y(t) = 35H(6)e^{6t} = e^{6t}$ en løsning til $u(t) = 35e^{6t}$.

Svaret er dermed **S**.

Opgave 1.VI:
Vi har at $y(t) = H(i)e^{it} = -\frac{1}{2}e^{it}$ er en løsning til $u(t) = e^{it}$. Men der gælder så også at $y(t) = \operatorname{Re}\left(H(i)e^{it}\right) = -\frac{1}{2}\cos(t)$ for $u(t) = \cos(t)$. Vha linearitet fås så en løsning $y(t) = -2\operatorname{Re}\left(H(i)e^{it}\right) = \cos(t)$ for $u(t) = -2\cos(t)$.

Svaret er dermed: **E**.

Opgave 1.VII:

Vha identitetssætningen for potensrækker (korollar 5.21) indses

$$
c_0 = -\frac{1}{2}c_1, \quad c_2 = c_0, \quad (n+1)c_{n+1} - 4c_n - 5c_{n-1} = 0 \quad n \geq 2.
$$

Vi har $y'(0) = c_1 = 1$. Dermed

$$
c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad 3c_3 - 4c_2 - 5c_1 = 3c_3 - 3 = 0,
$$

for $n = 2$. Vi har $c_0 = -\frac{1}{2}$ og $c_3 = 1$.

Svaret er dermed: **I**.

Opgave 1.VIII:
Vi har

$$
|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{2}{n^2x^2+1}\right) \leq \frac{3}{n^2} < \frac{10}{n^2},
$$

vha trekantsuligheden: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Svaret på den første del er dermed **P**. (Bemærk at svarmulighed N dur ikke for $x = 0$ og $n = 1$ hvor $k_1 = 0$ mens $f_1(0) = 3$.)

Idet majorantrækken er konvergent, så er sumfunktionen kontinuert.

Det samlede svar er derfor **P2**.

Opgave 1.IX:

Vi bruger Parsevals sætning med alle $a_n = 0$ (idet f er ulige)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Vi udregner højresiden og får

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Svaret er **T**.

Opgave 1.X:

Det følger af sammenligningskriteriet at $h(x) \geq g(x)$ for alle $x \in I = [0, 1[$.

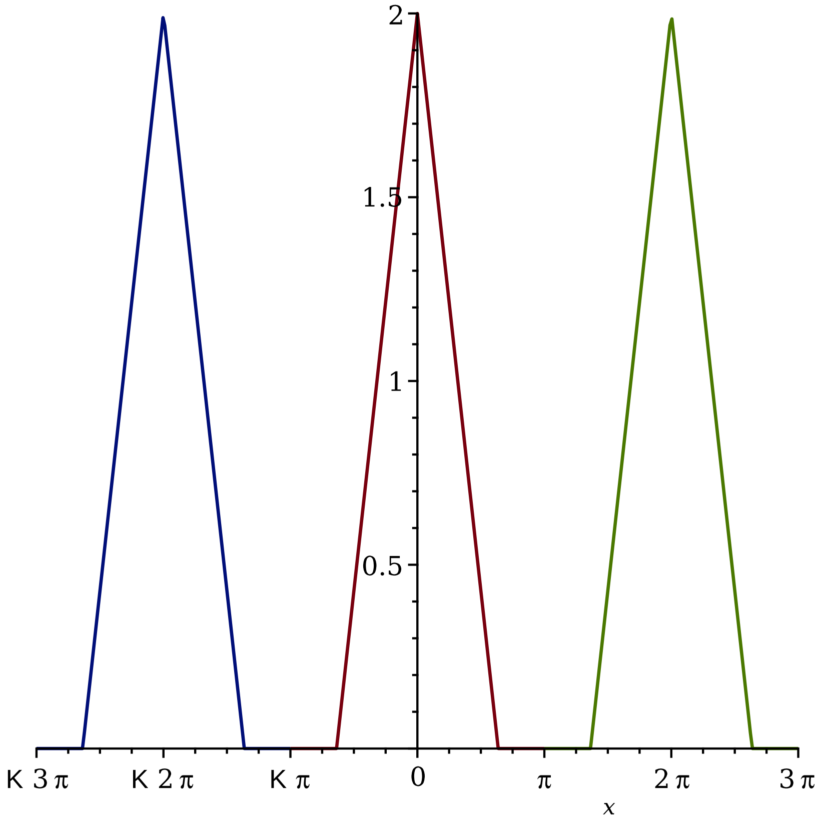
Idet $g(x) = \frac{1}{1-x}$, se sætning 5.2, så har vi $h(x) \to \infty$ for $x \to 1$ og rækken kan derfor ikke konvergere uniformt. Men h er en potensrække med konvergensradius $\rho = 1$ og derfor er den punktvis konvergent.

Det samlede svar er således: **X3**.

Del B

Opgave 2:

2.1 Grafen for funktionen f_1 ses i figur 1.



Figur 1: Graf for the den periodiske funktion f_1

2.2. Fourierrækken for f_1 konvergerer uniformt idet f_1 er kontinuert og stykkevis differentiabel, se korollar 6.17. Det ses af grafen i 2.1, specielt er f_k kontinuert i $x = 2k$ med værdi $f_k(2k) = 0$ og $f_k(-\pi) = f(\pi) = 0$ idet funktionen er lige.

2.3. f_k er en lige funktion og dermed er alle $b_n = 0$. Vi udregner a_0 og a_1 vha sætning 6.6 og får

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k} \frac{2k-x}{k}dx = \frac{4k}{\pi},$$

og

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2k} \frac{2k-x}{k}\cos(x)dx = \frac{2(1-\cos(2k))}{\pi k}$$

2.4. Lad

$$g(x) = \frac{2}{kx^2}, \quad x > 0.$$

g er en aftagende funktion $g'(x) < 0$ for alle $x > 0$.

Vi kan derfor anvende korollar 4.35:

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{kn^2} \leq \int_N^{\infty} g(x)dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{2}{kx}\right]_N^t = \frac{2}{kN}.$$

Vi har $\frac{2}{kN} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow N \geq \frac{20}{k}$ og derfor $|f_k(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{10}$ for alle $N \geq 20 \geq \frac{20}{k}$ for alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Opgave 3:

3.1 Vi indsætter $x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ og får

$$VS = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad HS = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -2t+2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Idet $VS = HS$ for alle $t \in \mathbb{R}$ har vi vist at funktionen er en løsning til det homogene system.

3.2 Vi indsætter løsningen i den inhomogene ligning og får:

$$\begin{aligned} VS &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \\ HS &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 3+a \\ b-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Således $VS = HS$ for alle $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = -3$, $b = 2$.

3.3 Vi ser, at $\lambda = -1$ er egenværdi med egenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Derfor er $x = e^{-t}v$ en løsning til det homogene system. Med løsning fra 3.1 har vi to lineært uafhængige løsninger til det homogene system. Dermed

$$x(t) = c_1 e^{-t} v + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Alternativt:

$$x(t) = c_1 e^{-t} v + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$