DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 17. maj 2021
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 65 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 10%; Opgave 4: 10 %

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. Hvis man svarer forkert, giver det negative point. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven tastes ind på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2, 3 og 4 afleveres direkte ved oploadning.

Opgave 1

(1) Vi undersøger om differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos(t) \tag{1}$$

har en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$. Svaret er:

a) Differentialligningen (1) har en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$.

b) Differentialligningen (1) har ikke en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$, men har løsninger på en anden form.

c) Differentialligningen (1) har ingen løsninger.

Opgaven fortsætter - Vend!

(2) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ for differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = u' + 2u, \tag{2}$$

hvor y er løsningen og u er påvirkningen. Svaret er:

a) $H(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$, $s \notin \{-2, 1\}$

b) $H(s) = \frac{1}{s-1}$, $s \neq 1$

c) $H(s) = \frac{1}{s-1}$, $s \notin \{-2, 1\}$

(3) For differentialligningen (2), bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = \sin(2t)$. Svaret er

a) $y(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{2}{5}\cos(2t)$

b) $y(t) = \sin(2t)$

c) $y(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{2}{5}\cos(2t)$

(4) Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ oplyses at det karakteristiske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda+3)^2.$$

Undersøg om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt, eller ustabilt. Svaret er

a) Systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt;

b) Systemet er asymptotisk stabilt;

c) Systemet er ustabilt.

(5) Undersøg om talfølgen givet ved

$$x_n = \frac{1}{2+\cos(\pi n)}, \; n \in \mathbb{N}.$$

er konvergent, og bestem i bekræftende fald grænseværdien. Svaret er:

a) Talfølgen er divergent.

b) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1/3.

c) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1.

(6) Benyt $n$te-ledskriteriet til at undersøge konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\,\ln(n)}$$

Svaret er:

a) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken konvergent

b) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken divergent

c) Brug af $n$te-ledskriteriet leder ikke til nogen konklusion for rækken.

(7) Bestem mængden af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(4x)^n$$

er konvergent.

Svaret er:

a) Konvergensintervallet er $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$;

b) Konvergensintervallet er $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$;

c) Konvergensintervallet er $-4 < x < 4$;

(8) Vi undersøger om den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\, x^n,\ x \in [-3, 3], \tag{3}$$

har en konvergent majorantrække.

Svaret er:

a) Rækken (3) har en konvergent majorantrække på intervallet $[-3, 3]$.

b) Rækken (3) har en majorantrække på intervallet $[-3, 3]$, men ikke en konvergent majorantrække;

c) Rækken (3) har ikke en majorantrække på intervallet $[-3, 3]$.

(9) Vi undersøger om funktionen

$$f(x) = \cos(x) + \ln(1 + |x|) + \frac{1}{100}x$$

er lige eller ulige. Svaret er

a) Funktionen f er lige;

b) Funktionen f er ulige;

c) Funktionen f er hverken lige eller ulige;

(10) Betragt funktionen givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

som tænkes udvidet til en 2π-periodisk funktion. For Fourierrækken på reel form,

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

ønsker vi nu at bestemme Fourierkoefficienterne, a_0, a_2, og b_1. Svaret er

a) $a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, b_1 = 1$

b) $a_0 = 1, a_2 = 2, b_1 = 0$

c) $a_0 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0$

(11) Vi betragter igen funktionen f givet i spørgsmål (10), og ønsker nu at bestemme summen af den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$. Svaret er

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1$

Husk at indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark!

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 2 Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{for} \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{for } x = \pi, \end{cases}$$

som tænkes udvidet til en 2π-periodisk funktion.

(i) Tegn grafen for funktionen f på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

(ii) Hvad konvergerer Fourierrækken for f imod for $x = -\pi$?

(iii) Konvergerer Fourierrækken for f uniformt?

Opgave 3 Betragt funktionen

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

og de tilhørende afsnitssummer

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} x^n, \; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(i) Vis at det for ethvert $N \in \mathbb{N}$ gælder at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N, \; \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(ii) Bestem nu $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$$

for alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 4 For $a \in \mathbb{R}$ betragtes differentialligningssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = ax_1(t) + ax_2(t) \end{cases}$$

Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke ligningssystemet er asymptotisk stabilt.

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) oploade løsningen til opgave 2 & 3 & 4.