Technical University of Denmark

Mathematics 2, MC problems, December 2023

Part A

1. Det karakteristiske polynomium for en 3. ordens homogen differentialligning med konstante koefficienter er givet som

$$P(\lambda) = \lambda(4\lambda^2 + 4\lambda + 1).$$

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen. Svaret er

(a) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(b) $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(c) $y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} + c_3 t e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(d) $y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(e) $y(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. Beregn overføringsfunktionen for differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2u.$$

Svaret er

(a) $H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1, -2\}$

(b) $H(s) = \frac{1}{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1, -2\}$

(c) $H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$

(d) $H(s) = \frac{1}{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

(e) $H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

3. Find konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n} x^n$$

Svaret er

(a) $\rho = 3$

(b) $\rho = 1/3$

(c) $\rho = 0$

(d) $\rho = \infty$

(e) $\rho = 1$

4. Afgør om nedenstående uendlige række er absolut konvergent, betinget konvergent eller divergent.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^3 + 8}$$

(a) Rækken er divergent

(b) Rækken er betinget konvergent

(c) Rækken er absolut konvergent

5. Betragt den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{e^{-3n}}.$$

Værdierne af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke rækken er konvergent er

(a) $|a| \leq e^{-3/2}$

(b) $|a| < e^{-3/2}$

(c) $|a| \geq e^{2/3}$

(d) $|a| > e^{-3/2}$

(e) $|a| \leq e^{-2/3}$

(f) $|a| > e^{-2/3}$

6. En 2π-periodisk funktion f har Fourierrækken

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

Vi betragt nu Fourierrækken på kompleks form,

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Bestem Fourier koefficienten c_{-1}.

(a) $c_{-1} = \frac{1}{2}$

(b) $c_{-1} = 1 + i\,\frac{1}{2}$

(c) $c_{-1} = \frac{1}{2} + i$

(d) $c_{-1} = 1 - i\,\frac{1}{2}$

(e) $c_{-1} = 1$

7. Løs ligningen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} = x^2.$$

Løsningerne er

(a) $x = \pm 1/2$

(b) $x \in [-1/2, 1/2]$ and $x \neq 0$

(c) $x = \pm\sqrt{2}$

(d) $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ and $x \neq 0$

(e) $x = \pm\sqrt{2}/2$

(f) $x = \pm 2$

(g) Ligningen har ingen løsning.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 5. december 2023
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 60%, Opgave 1: 20%, Opgave 2: 20%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningsystemet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Afgør om differentialligningssystemet (1) er asymptotisk stabilt.
3. Vis at (1) har en løsning på formen $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{w}$, hvor $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er vektorer.
4. Angiv den fuldstændige reelle løsning til (1).

Opgave 2

Funktionen f er 2π-periodisk og lige. I intervallet $[0, \pi]$ er f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{for } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{for } x \in]3, \pi]. \end{cases} \tag{2}$$

1. Skitser grafen for f på intervallet $[-\pi, \pi]$.
2. Argumenter for, at Fourierrækken for f konvergerer mod f for alle x, og for, at konvergensen er uniform.

Det oplyses og må uden argumentation benyttes at $\int_0^a (a - x)\ \cos(n\,x)dx = \frac{1-\cos(a\,n)}{n^2}$ når $n > 0$.

3. Bestem og opskriv Fourierrækken for f.
4. Afgør om Fourierrækken for f har en konvergent majorantrække.

——————oooOooo——————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).