Opg 1 MC

karakter ligningen med tilhørende rødder:

$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, $\lambda = 0 \vee \lambda = -1$

Løsning til homogen ligning:

$X_{hom} = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$

Løsningsgæt: $X_{gæt} = at^3 + bt^2$

$\Rightarrow a = 1$, $b = -3$

Fuldstændig løsning:

$X(t) = X_{hom} + X_{gæt} = t^3 - 3t^2 + c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$

Eneste mulighed på MC:

$X(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 1$

Opg 2 MC.

Overføringsfunktionen er givet ved:

$$H(s) = \frac{2s^2-6s-8}{s^2+(1-2a)s-2a} = 2 \quad , s \neq \{-1, 4\}$$

$$\Downarrow \quad 2s^2-6s-8 = 2\left(s^2+(1-2a)s-2a\right)$$

Indentitetssætningen for polynomier givet

$$-6 = 2(1-2a) \quad \text{og} \quad -8 = 2\cdot(-2a)$$

Kun opfyldt for $a=2$.

Opg 3 MC

Funktionen $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$, $x > 1$

er ikke negativ, kontinuert, og aftagende i intervallet $x \in [1; \infty[$.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t (x+1)^2 e^{-x}\,dx = 10e^{-1}$$

Integralkriteriet giver nu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 e^{-n}$$ er konvergent

og

$$10e^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 e^{-n} \leq 10e^{-1} + 4e^{-1}$$

Rækkens sum ligger i intervallet:

$$[10e^{-1}, 14e^{-1}]$$

Opg 4 MC.

kvotient kriteriet giver for denne række:

$$\frac{\left|\frac{a^{(n+1)+1}}{\sqrt{n+1}}x^{n+1}\right|}{\left|\frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}}x^{n}\right|} = \frac{a|x|\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow a|x|$$

for $n \to \infty$

$$a|x| < 1 \implies -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$$

Konvergensradius er $\rho = \frac{1}{a}$.

For $x = -\frac{1}{a}$ fås:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{a}\right)^n = a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Leibniz kriterium giver at rækken er konvergent, men den er ikke absolut konvergent da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ i følge sammenlignings kriteriet

Rigtigt svar: $\rho = \frac{1}{a}$ og rækken er betinget konvergent i $x = -\rho$.

Opg 5. MC.

Da f er reel gælder (Lemma 6.27)

$$c_{-n} = \overline{c_n} = c_n \quad , \quad c_{-1} = c_1 = \frac{2}{\pi}$$

Lemma 6.26 giver:

$$a_1 = c_1 + c_{-1} \quad , \quad b_1 = i(c_1 - c_{-1})$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \quad , \quad b_1 = 0$$

Opg 6 MC

Potensrækken indsættes i differentialligningen:

$$t \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 8t + 6$$

korollar 5.21 giver efter omskrivning:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_{n+1} t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 8t + 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, c_{n+1} t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n - 2c_0 = 8t + 6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)\cdot n\, c_{n+1} - 2c_n\right) t^n - 2c_0 = 8t + 6$$

$-2c_0 = 6 \implies \underline{c_0 = -3}$

$2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2c_1 = 8 \implies \underline{c_2 - c_1 = 4}$

$(n+1) \cdot n\, c_{n+1} - 2c_n = 0$

$\Downarrow$

$$c_{n+1} = \frac{2}{(n+1)\cdot n} c_n$$

Del B opgave 1

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}$$

Da $0 \le \frac{\sqrt{n}}{n+3} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ for $n \to \infty$

Ses af Leibniz kriterium at rækken er konvergent

Det ses også: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3} \right|$ er divergent

da $\frac{\sqrt{n}}{n+3} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ den harmoniske række er divergent

for $n \geqslant 3$

S er betinget konvergent.

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Rækken er absolut konvergent da

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ er en kvotientrække

Del B opg 2

1) Egenværdier og egenvektorer for systemmatricen:

$$\lambda_1 = -1, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sæt 2.12 giver den fuldstændige løsning til det homogene system:

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

2) Sæt 2.47 og sæt 2.38 giver os at systemet er asymptotisk stabilt da begge egenværdier er reelle og negative.

3) Vi indsætter løsningen $\underline{x}(t) = t e^{-t} \underline{v}$ ind i differentialligningen:

$$e^{-t}\underline{v} - t e^{-t}\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} t e^{-t}\underline{v} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi bemærker at $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Så $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for systemmatricen med tilhørende egenværdi $\lambda = -1$.

Vælg $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = te^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hermed ses at $\underline{x}(t) = te^{-t}\underline{v}$ er en løsning.

4) Den fuldstændige reelle løsning fås via struktursætningen:

$$\underline{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Del B opg 3.

1) Da f er lige, bruges sæt. 6.6.

$b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\tfrac{3}{2}x)\cos(nx)\,dx$$

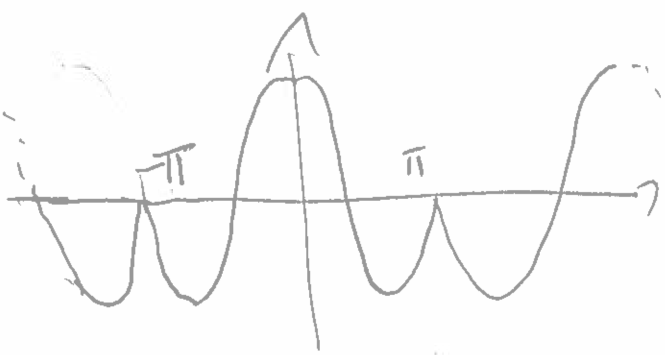
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi)\cos(n\pi)}{(3/2)^2 - n^2}$$

$$= \frac{3}{\pi}\,\frac{(-1)\cdot(-1)^n}{9/4 - n^2} = \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}$$

Specielt $a_0 = -\frac{4}{3\pi}$

Herved fås den ønskede Fourierrække.

2) Skitse af grafen for f.



Korollar 6.17 giver at rækken konvergerer uniformt mod f.

3) Da $\left|\frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)\right| \leq \frac{12}{\pi(4n^2-9)}$, $n \geq 2$

Så rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{12}{\pi(4n^2-9)}$ er en majorant-række for fourier rækken.

Majorantrækken er konvergent da den er ækvivalent med den konvergente række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ da:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{12}{\pi(4n^2-9)}} = \frac{\pi(4n^2-9)}{12n^2} = \frac{\pi}{12}\left(4-\frac{9}{n^2}\right) \to \frac{\pi}{3} = C$$

$n \to \infty$.

4) $$f(x) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{\pi(4n^2-9)}\cos(nt)$$

$$0 = f(\pi) = -\frac{2}{3\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi}\frac{(-1)^n}{(4n^2-9)}\cos(n\pi)$$

$\Updownarrow$

$$\frac{2}{3\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12((-1)^n)^2}{\pi(4n^2-9)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9} = \frac{1}{18}$$