Matematik 2

Forelæsning 1

Oversigt:
- n'te ordens differentialligninger
- Systemer af differentialligninger
- Uendelige rækker
- Potensrækker
- Fourierrækker

Vi betragter en 3. Ordens homogen differentialligning

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + (3+\omega^2)\frac{dy}{dt} + (1+\omega^2)y = 0 \qquad (1)$$

hvor $y = y(t)$ $\quad t \in [0;\infty[$ $\quad \omega \in \mathbb{R}$

Ny notation $\frac{d^ny}{dt^n} = y^{(n)}$

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (3+\omega^2)y^{(1)} + (1+\omega^2)y^{(0)} = 0$$

Eller $D_3\{y\} = 0$, hvor vi har defineret differentialoperatoren

$$D_3 = \frac{d^3}{dt^3} + 3\frac{d^2}{dt^2} + (3+\omega^2)\frac{d}{dt} + (1+\omega^2)$$

Såfremt $y_1(t)$ og $y_2(t)$ er løsninger til ligning (1) så er

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

også en løsning til (1), jvf. sætning 1.4.

$$D_3\{c_1 y_1 + c_2 y_2\} = c_1 D_3\{y_1\} + c_2 D_3\{y_2\}$$

Løsnings antagelse: $y(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Indsat i (1): $\lambda^3 e^{\lambda t} + 3\lambda^2 e^{\lambda t} + (3+\omega^2)\lambda e^{\lambda t} + (1+\omega^2) e^{\lambda t} = 0 \quad \Updownarrow$

$$\underbrace{\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + (3+\omega^2)\lambda + (1+\omega^2)\right)}_{= P(\lambda)} e^{\lambda t} = 0$$

$P(\lambda)$ Det karakteristiske polynomium

Løsningerne bestemmes af rødderne i $P(\lambda)$ dvs. $P(\lambda) = 0$.

Her har vi rødderne

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1 + i\omega \qquad \lambda_3 = -1 - i\omega$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) =$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - (-1 + i\omega))(\lambda - (-1 - i\omega))$$

Den fuldstændige løsning

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(-1+i\omega)t} + c_3 e^{(-1-i\omega)t}}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} \qquad \omega \neq 0$$

Basis sæt: $e^{-t} \qquad e^{(-1+i\omega)t} \qquad e^{(-1-i\omega)t}$

Reelle løsninger

$$y(t) = Re(y) + i\, Im(y) = y_r(t) + i\, y_i(t)$$

Indsat i ligning (1) giver $D_3(y_r + i y_i) = \underbrace{D_3(y_r)}_{=0} + i\, \underbrace{D_3(y_i)}_{=0} = 0$

To reelle løsninger: $Re(y)$ $Im(y)$

Jvf lemma 1.8

Basis for den fuldstændige reelle løsning er

$$e^{-t}$$

$$Re\left(e^{(-1+i\omega)t}\right) = e^{-t}\, Re\left(e^{i\omega t}\right) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

$$Im\left(e^{(-1+i\omega)t}\right) = e^{-t}\, Im\left(e^{i\omega t}\right) = e^{-t}\sin(\omega t)$$

Bemærk at $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$

Den fuldstændige reelle løsning $D_3\{y\} = 0$ er

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t}\cos(\omega t) + c_3 e^{-t}\sin(\omega t)}$$

$$c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R} \qquad \omega \neq 0$$

Lad os se på tilfældet $\omega = 0$

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$ ← Algebraisk multiplicitet for roden $\lambda = -1$.

Jvf definition 1.13

Den fuldstændige løsning bygges op på en basis af 3 lineært uafhængige løsninger

$$\boxed{e^{-t} \qquad t e^{-t} \qquad t^2 e^{-t}}$$

Den fuldstændige løsning er

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t}} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Se sætning 1.14 og sætning 1.15. Bevis i A3.

Såfremt $\lambda = a \pm i\omega t$ er 2 kompleks konjugerede rødder i $P(\lambda)$ med multiplicitet 3 har vi de tilhørende 6 lineært uafhængige reelle løsninger

$$e^{at}\cos(\omega t) \qquad t e^{at}\cos(\omega t) \qquad t^2 e^{at}\cos(\omega t)$$
$$e^{at}\sin(\omega t) \qquad t e^{at}\sin(\omega t) \qquad t^2 e^{at}\sin(\omega t)$$

Den inhomogene ligning

$$D_n\{y\} = u(t)$$

$y_0(t)$ løser $D_n\{y_0\} = u(t)$ $\qquad$ $y_{hom}(t)$ løser $D_n\{y_{hom}\} = 0$

Så har vi løsningen (den fuldstændige): $\boxed{y(t) = y_{hom}(t) + y_0(t)}$

y_0 kaldes en partikulær løsning.

y_0 kan findes ved gættemetoden.

1) $u(t) = b e^{st}$ gæt på $y_0(t) = c e^{st}$

2) $\left.\begin{array}{l} u(t) = b\sin(\omega t) \\ u(t) = b\cos(\omega t) \end{array}\right\}$ gæt på $y_0(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

3) $u(t) = b t^k$ gæt på

$$y_0(t) = c_{n+k} t^{n+k} + c_{n+k-1} t^{n+k-1} + \ldots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0$$

Superpositionsprincippet (sætning 1.22)

$$D_n\{y\} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Løs $D_n\{y_1\} = u_1(t)$ og $D_n\{y_2\} = u_2(t)$

En partikulær løsning er $\boxed{y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)}$

Indsættelse $D_n\{y\} = D_n\{c_1 y_1 + c_2 y_2\} = c_1 \underbrace{D_n\{y_1\}}_{= u_1} + c_2 \underbrace{D_n\{y_2\}}_{= u_2}$

$$D_n\{y\} = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

Overføringsfunktion og stationære svar (partikulær løsning).

Eksempel: $D_3\{y\} = b_1 u'(t) + b_0 u(t)$

$\omega \neq 0$ og $P(s) \neq 0$ med $u(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$, fås

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (3+\omega^2)y^{(1)} + (1+\omega^2)y = b_1 s e^{st} + b_0 e^{st}$$

Løsningsantagels $y(t) = H(s)\, e^{st}$

Indsat giver $s^3 H e^{st} + 3s^2 H e^{st} + (3+\omega^2) s H e^{st} + (1+\omega^2) H e^{st} = (b_1 s + b_0)\, e^{st}$

Division med e^{st}

$$[\, s^3 + 3s^2 + (3+\omega^2)s + (1+\omega^2)\,]\, H = P(s)\, H = (b_1 s + b_0)$$

Overføringsfunktion $\boxed{H(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{P(s)}}$

Løsning: $y(t) = H(s) e^{st}$ Partikulær løsning / stationært svar.

Jvf sætning 1.24

Læs selv sætningerne 1.26 og 1.27.