Løsninger til eksamensopgaver august 2015

Opg 1 (i) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Dette er en kvotientrække og ifølge sætning 5.2 har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x} \quad \text{for } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$$

$\boxed{\text{Svaret er } b}$

Opg 1 (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ er en alternerende række med $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ifølge Leibniz' kriterium er rækken konvergent. Vi betragter nu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Denne række er konvergent ifølge Eksempel 4.34

Heraf fås at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ er absolut konvergent.

$\boxed{\text{Svaret er } b}$

Opg. 1 (iii)

$$R1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{3n}$$

Indfør $a_n = \frac{1}{n+1} x^{3n}$. Konvergens af R1 afgøres med brug af kvotientkriteriet. Vi betragter

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+2} x^{3(n+1)}}{\frac{1}{n+1} x^{3n}}\right| = \frac{n+1}{n+2} |x^3| =$$

$$\frac{1+1/n}{1+2/n} |x|^3 \to |x|^3 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Rækken er konvergent for $|x|^3 < 1$ ifølge kvotientkriteriet og $|x| < \sqrt[3]{1} = 1 = \rho$, hvor ρ er konvergensradius.

$\boxed{\text{svaret er C}}$

Opg 1 (iv) For $y''' + 2y'' + 5y = 0$ er det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i)\lambda =$$

$$(\lambda - (-1+2i))(\lambda - (-1-2i))(\lambda - 0)$$

$P(\lambda)$ har rødderne

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

$$\lambda_3 = -1 - 2i$$

Opg 1(iv) Den fuldstændige reelle løsning er

$$y(t) = c_1 e^{0t} + c_2 e^{-t}\cos(2t) + c_3 e^{-t}\sin(2t)$$

$$= c_1 + c_2 e^{-t}\cos(2t) + c_3 e^{-t}\sin(2t)$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Svaret er a}}$

Opg 1(v) R2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(\cos(nt) - 2\sin(nt))$

Vi betragter

$$\left| \frac{1}{n^3}(\cos(nt) - 2\sin(nt)) \right| \leq \frac{|\cos(nt)| + 2|\sin(nt)|}{n^3} \leq$$

$$\frac{3}{n^3} = k_n \qquad \forall n \in \{1, 2, \ldots\}$$

En majorantrække for R2 er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3}$$

$\boxed{\text{svaret er c}}$

Opg 1 (vi) $\quad 3xy'' + y = 0$

løsnings antagelse $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Indsat giver

$$3x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3n(n-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3(n+1)n c_{n+1} x^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3(n+1)n c_{n+1} + c_n \right] x^n = 0$$

Ifølge identitetssætningen for potensrækker har vi

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad 3(n+1)n c_{n+1} + c_n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$c_0 = 0 \quad \text{og} \quad c_{n+1} = -\frac{1}{3(n+1)n} c_n \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\boxed{\text{svaret er a}}$

Opg 2 $\quad y''' + 3y'' + 4y' + 2y = u(t)$

$y = y(t)$

Det karakteristiske polynomium $P(\lambda) =$
$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$ har rødderne

$\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -1-i$

2(i) Den tredje rod i P er $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = \underline{\underline{-1+i}}$

2(ii) Ifølge formel (1.20) er overførings funktionen

$$H(s) = \frac{1}{P(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{s^3+3s^2+4s+2}}}$$

2(iii) Den stationære løsning for $u(t) = \cos(3t)$ findes af sætning 1.27

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(H(i3)e^{i3t}\right)$$

idet $\cos(3t) = \mathrm{Re}\left(e^{i3t}\right)$. Vi udregner

$$H(i3) = \frac{1}{(i3)^3 + 3(i3)^2 + 4(i3) + 2} =$$

$$\frac{1}{-i27 - 27 + i12 + 2} = \frac{1}{-25 - i15} =$$

$$\frac{-25+i15}{25^2+15^2} = \frac{-5+i3}{5\cdot 25 + 3\cdot 15} = \frac{-5+i3}{170}$$

Vi har nu at den stationære løsning er

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{-5+i3}{170}e^{i3t}\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{-5+3i}{170}(\cos(3t)+i\sin(3t))\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{5}{170}\cos(3t) - \frac{3}{170}\sin(3t)}$$

Opg. 3

$$f \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

3(i) Fourier koefficienterne er

$$\frac{a_0}{2} = 2 \iff a_0 = 4$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)} \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

3(ii)

$$S(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx)$$

En majorant række for Fourierrækken bestemmes af

$$2 \le k_0 \quad \text{og} \quad \left| \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx) \right| \le k_n \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vi vælger

$$k_0 = 2 \quad \text{og} \quad \left| \frac{\cos(nx)}{n(n+3)} \right| \le \frac{1}{n(n+3)} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ og } \forall n \in \mathbb{N}$$

En majorantrække for Fourierrækken er

$$\boxed{2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Opg 3(ii)

Ifølge eksempel (4.34) er denne majorant-række konvergent.

Betingelserne (i) og (ii) er nu opfyldte i sætning 5.33 for Fourierrækken og derfor er sumfunktionen

$$S(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx)$$

kontinuert. Tillige følger det at Fourierrækken er uniform konvergent. Derfor gælder at $f(x) = S(x)$.

Opg 3 (iii)

Den N'te afsnitssum er

$$S_N(x) = 2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx)$$

Bestem N således at $|S(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 0{,}01$

Vi udregner

$$|S(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \cos(nx) \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n(n+3)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Opg. 3 (iii)

Ifølge ulighed (4.32) har vi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{(N+1)^2} =$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} =$$

$$\frac{1}{N+1}\left(1+\frac{1}{N+1}\right) < \frac{1}{N+1}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2(N+1)}$$

for $N \geq 1$

Vi vælger N således at $\frac{3}{2(N+1)} \leq \varepsilon \iff$

$$\frac{3}{\varepsilon} \leq 2(N+1) \iff N \geq \frac{3}{2\varepsilon} - 1 = 149$$

$\boxed{\text{Vælg } N = 149}$

Opg. 3 (iv)

Ifølge Lemma 7.11 er effekten for den 2π-periodiske funktion f

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Ifølge Parsevals sætning (6.25) har vi

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

$$=$$

Opg 3 (iv)

$$P(f) = \frac{1}{4}4^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+3)^2} =$$

$$4 + \frac{1}{2}\frac{1}{1^2(1+3)^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+3)^2} =$$

$$4 + \frac{1}{2 \cdot 16} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+3)^2} = \frac{129}{32} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+3)^2}$$

Da $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+3)^2} > 0$ har vi $\boxed{P(f) > \frac{129}{32}}$