DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 27. august 2017
Kursus: Matematik 2 01037 / 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Opgave 1: 30% , opgave 2: 20% , opgave 3: 15% og opgave 4: 35%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i opgaverne 2, 3 og 4 kræves at mellemregninger medtages i rimeligt omfang. Alle svar i opgaverne 2, 3 og 4 skal begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen.

NB. Opgave 1 er en multiple-choice opgave og svaret på hvert spørgsmål angives ved afkrydsning på det vedlagte løsningsark, der afleveres som en del af besvarelsen. Udregninger hørende til opgave 1 skal ikke afleveres og vil ikke kunne indgå i bedømmelsen. Ved svaret "ved ikke" gives 0%, ved korrekt svar gives +5%, og ved et forkert svar gives -2,5%.

Opgave 1

(i) Den uendelige række $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+n}$ er:

a) divergent.

b) absolut konvergent.

c) betinget konvergent.

d) ved ikke.

(ii) For potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} x^n$ er konvergensradius ρ:

a) $\rho = \frac{1}{3}$.

b) $\rho = 3$.

c) $\rho = \infty$.

d) ved ikke.

(iii) Summen af rækken $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1/2)\omega\pi}$ med $\omega > 0$ er:

a) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1+e^{-(1/2)\omega\pi}}$.

b) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1+e^{-\omega\pi}}$.

c) $s = \frac{e^{-(1/2)\omega\pi}}{1-e^{-\omega\pi}}$.

d) ved ikke.

Opgaven fortsætter - Vend!

(iv) Vi betragter differentialligningen $y^{(4)}(t) + 5y^{(3)}(t) + 10y^{(2)}(t) + 10y^{(1)}(t) + 4y(t) = 0$ med det karakteristiske polynomium $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1-i)(\lambda+1+i)$. For de arbitrære konstanter $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, er den fuldstændige reelle løsning:

a) $y(t) = c_1 \exp(-t)\sin(t) + c_2 \exp(-t)\cos(t) + c_3 \exp(-t) + c_4 \exp(-2t)$.

b) $y(t) = c_1 \exp(t)\sin(t) + c_2 \exp(t)\cos(t) + c_3 \exp(t) + c_4 \exp(2t)$.

c) $y(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-2t) + c_3 \exp(t)\sin(t) + c_4 \exp(t)\cos(t)$.

d) ved ikke.

(v) Den inhomogene differentialligning $2y'(t) + ay(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3+n^2} e^{int}$, hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ og $N \in \mathbb{N}$, har den stationære løsning:

a) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(a^2-4n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

b) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-in}{(a^2+n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

c) $y(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a-2in}{(a^2+4n^2)(3+n^2)} e^{int}$.

d) ved ikke.

(vi) Differentialligningen $y^{(4)}(t) + 8y^{(2)}(t) + 16y(t) = 0$ har den fuldstændige løsning ($c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$):

a) $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 t \sin(2t) + c_3 \cos(2t) + c_4 t \cos(2t)$.

b) $y(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(4t) + c_4 \cos(4t)$.

c) $y(t) = c_1 \sin(4t) + c_2 t \sin(4t) + c_3 \cos(4t) + c_4 t \cos(4t)$.

d) ved ikke.

Opgave 2

Følgende differentialligning med en variabel koefficient ønskes løst med potensrækkemetoden.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ty = 0 \; , \tag{1}$$

hvor $y = y(t)$ og $t \in \mathbb{R}$.

(i) Indsæt en potensrække af formen $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i ligning (1) og bestem en rekursionsformel for a_n, $n = 0, 1, 2, ...$ Angiv hvilke koefficienter a_n, der er arbitrære.

(ii) Opskriv eksplicit afsnitssummen $S_5(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n t^n$ udtrykt ved de arbitrære koefficienter.

Opgave 3

Et homogent differentialligningssystem er givet ved

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \; , \quad \text{hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \; . \tag{2}$$

Den afhængige variabel $\mathbf{x}$ er en tredimensional vektorfunktion af tiden $t \in \mathbb{R}$.

(i) For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er systemet i (2) asymptotisk stabilt? Determinanter må bestemmes med brug af Maple.

Opgave 4

En 2π-periodisk funktion f er i intervallet $[-\pi, \pi[$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \ , \\ -(x+\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) & \text{for} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \ , \\ 0 & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \ . \end{cases} \tag{3}$$

(i) Skitser grafen for f, hvor $x \in [-\pi, \pi]$.

(ii) Find Fourierrækken for f. Du må bruge Maple til at bestemme integraler.

(iii) Vis, at Fourierkoefficienterne a_n, $n \geq 1$, opfylder uligheden $|a_n| < 4/n^2$.

(iv) Er Fourierrækken uniform konvergent?

(v) Den N'te afsnitsum af Fourierrækken for f betegnes $S_N(x)$. Bestem N således at $|S(x) - S_N(x)| \leq \varepsilon = 10^{-2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hvor $S(x)$ er Fourierrækkens sum.

Opgavesættet slut.