Kursus 01035 Matematik 2

Eksamen 18. maj 2015

Løsninger

Opg. 1 (i) $R: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$

Rækken er alternerende og vi bruger Leibniz' kriterium med

$$b_n = \frac{1}{4n+3}$$

(i) $b_n > 0$ for $n = 1, 2, \ldots$

(ii) b_n aftager monotont.

(iii) $b_n = \frac{1}{4n+3} \to 0$ for $n \to \infty$

Heraf følger at R er konvergent.

Vi betragter nu $R': \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{4n+3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$

Denne række er ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Indfør $a_n = \frac{1}{n}$. Bevis:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{4n+3}} = \frac{4n+3}{n} = 4 + \frac{3}{n} \to 4 \quad \text{for } n \to \infty$$

Heraf fås at de 2 rækker er ækvivalente

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent er også R' divergent

R er altså betinget konvergent

$\boxed{\text{Svaret er } c}$

Opg. 1(ii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x \left(\frac{x}{3}\right)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Dette er en kvotientrekke og

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = x \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3x}{3-x}$$

Rekken er konvergent for $\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \iff$

$|x| < 3$

$\boxed{\text{svaret er } b}$

Opg 1 (iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{-n} x^{2n+1}$$

Konvergensradius kan findes fra kvotient-kriteriet.

Indfør: $a_n = \beta^{-n} x^{2n+1}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{2(n+1)+1}}{\beta^{+(n+1)}}}{\frac{x^{2n+1}}{\beta^n}}\right| = \left|\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{\beta^n}{\beta^{n+1}}\right| =$$

$$\frac{1}{\beta} x^2 \to \frac{1}{\beta} x^2 \quad \text{for } n \to \infty$$

Rækken er konvergent for $\frac{1}{\beta} x^2 < 1 \iff$

$$x^2 < \beta \iff |x| < \sqrt{\beta} = \rho$$

Alternativt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{\beta^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{\beta}\right)^n$$

Denne række er en kvotientrække, som er konvergent for

$$\left|\frac{x^2}{\beta}\right| < 1 \iff x^2 < \beta \iff |x| < \sqrt{\beta} = \rho$$

Svaret er c

Opg 1 (iv)

Rødderne for $P(\lambda) = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 (\lambda + 2)$ er $\lambda = \pm i$ og $\lambda = -2$

Den fuldstændige reelle løsning er

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 t \cos t + c_3 \sin t + c_4 t \sin t + c_5 e^{-2t}$$

Svaret er a

Opg 1 (v) $P(\lambda) = (\lambda - 2i)^2 (\lambda + 2i)^2$

har rødderne $\lambda = \pm 2i$ med algebraisk multiplicitet 2. Real delene for egenværdierne er 0. Da den geometriske multiplicitet er 1 følger det af sætning 2.34 at systemet er ustabilt

Svaret er a

Opg 1 (vi)

f er periodisk med perioden $T = 3\pi$ og stykkevis differentiabel.

Fourierrækken for f har Fourier koefficienterne med

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx =$$

$$\frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\cos\left(n\frac{2}{3}x\right)dx \qquad \text{for } n = 0,1,2,\ldots$$

og

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx =$$

$$\frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\sin\left(n\frac{2}{3}x\right)dx \qquad \text{for } n = 1,2,3,\ldots$$

$\boxed{\text{svaret er b}}$

Opg 2

Vi betragter systemet

$$\frac{dx}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{b}\,\sin(2t) \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y = \underline{d}^T \underline{x} \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

To egenværdier med tilhørende egen-vektorer for $\underline{\underline{A}}$ er

$$\lambda_1 = -1 \qquad \underline{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1+i \qquad \underline{V}_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1-i \\ 2 \end{bmatrix}$$

2(i) Da $\underline{\underline{A}}$ er en reel matrice er den sidste egenværdi $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$

og den tilhørende egenvektor $\underline{v}_3 = \overline{\underline{v}_2}$

Dvs

$$\lambda_3 = -1-i \qquad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -i \\ -1+i \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 (ii) Den reelle løsning til $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

har et basis sæt

$$\underline{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\,\underline{v}_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_2(t) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_2 t}\,\underline{v}_2\right) =$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{-t}(\cos t + i\sin t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right] =$$

$$e^{-t}\cos t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^{-t}\sin t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_3(t) = \operatorname{Im}\left[e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$e^{-t}\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}\sin t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

Den fuldstændige reelle løsning er

$$\boxed{\underline{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t + \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}}$$

Opg 2 (iii)

Overførings funktionen er

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Med $u(t) = \sin(2t)$ betragter vi påvirkningen e^{i2t} med $s = i2$.

Fra sætning 2.24 har vi

$$y(t) = \mathrm{Im}\left(H(i2)\, e^{i2t} \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\cos(2t) + i\sin(2t)}{-i8 - 3\cdot 4 + i8 + 2} \right) =$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\cos(2t) + i\sin(2t)}{-10} \right) = -\frac{1}{10}\sin(2t)$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{10}\sin(2t)}$$

Opg 3)

Vi betragter $x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Potensrække løsning $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Vi udregner $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Indsat i differentialligningen giver

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (=)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (=)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n c_{n+1} x^n + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (=)$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1) n c_{n+1} + c_n] x^n = 0$$

Ifølge identitets sætningen for potensrække har vi rekursions formlen

Opg. 3

$c_0 = 0$ og $(n+1)n\, c_{n+1} + c_n = 0$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dvs

$$c_{n+1} = \frac{-1}{n(n+1)}\, c_n \quad \text{for } n = 1, 2, 3, \ldots$$

og $c_0 = 0$. c_1 er en arbitrær konstant

Opg. 4

Vi har løsningen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Konvergensradius bestemmes af kvotient kriteriet med $a_n = c_n x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}\, x^{n+1}}{c_n\, x^n}\right| =$$

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x| = \left|\frac{\frac{n}{4n+1}\, c_n}{c_n}\right| |x| =$$

$$\frac{n}{4n+1}|x| = \frac{1}{4 + \frac{1}{n}}|x| \rightarrow \frac{1}{4}|x| \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Heraf følger at konvergensradius er bestemt af

$$\frac{1}{4}|x| < 1 \iff |x| < 4 = \rho$$

Konvergens radius er $\boxed{\rho = 4}$

Opg 5

f er periodisk med perioden 2π

og f har Fourierrækken

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

5(i)

Vi bestemmer først en majorantrække for rækken i (7) ved vurderingen:

$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2(n+1)} = k_n$$

for alle $n = 1, 2, \ldots$

En majorantrække er $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}, \quad a_n = \frac{1}{n^2(n+1)}, \text{ er}$$

ækvivalent med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $b_n = \frac{1}{n^3}$

Bevis: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2(n+1)} \quad \frac{n^3}{1} = \frac{n^2 n}{n^2(n+1)} =$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{for } n \to \infty$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ er konvergent

er også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ konvergent

(Jvf eksempel 4.34 side 99 i lærebogen)

Ifølge sætning 5.33, side 127 i lærebogen, fås nu at Fourierrækken er uniform konvergent, fordi rækken har en konvergent majorant række.

5(iii) Den N'te afsnits sum er

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx)$$

Vi vurderer

$$|f(x) - S_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx) \right| \leq$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Fra ulighed (4.33) i lærebogen har vi

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx + \frac{1}{(N+1)^3} =$$

$$\left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_{N+1}^{\infty} + \frac{1}{(N+1)^3} = \frac{1}{2(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} =$$

$$\frac{1}{(N+1)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} \right) \leq \frac{1}{(N+1)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{(N+1)^2} \leq \varepsilon \iff (N+1)^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff$$

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{0{,}01}} - 1 = 9$$

Velg $N = 9$

$$S_9(x) = \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n^2(n+1)} \sin(nx) \quad \text{approksimerer}$$

$f(x)$ med en feil $\leq \varepsilon = 0{,}01$.