DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 11. maj 2022
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 60 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 20%; Opgave 4: 5 %

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven afleveres elektronisk ved indtastning på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2, 3 og 4 kan enten afleveres i papirform eller ved oploadning.

Opgave 1

MC-spørgsmål 1 Om en 2.ordens differentialligning med reelle koefficienter,

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0 u' + b_1 u,$$

oplyses at overføringsfunktionen er

$$H(s) = \frac{1}{s+2},\ s \neq -2.$$

Bestem en løsning når $u(t) = \cos(t) + \sin(t)$.

Svaret er:

A: $y(t) = e^{it}$

B: $y(t) = \frac{2}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$

C: $y(t) = -\frac{1}{5}\cos(t) + \frac{2}{5}\sin(t)$

D: $y(t) = \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{3}{5}\sin(t)$

E: $y(t) = \frac{1}{2+i}\, e^{it}$

F: $y(t) = \frac{1}{2+i}\ \cos(t) + \frac{1}{2-i}\sin(t)$,

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 2 Lad $a \in \mathbb{R}$, og betragt differentialligningssystemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ hvor } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt. Svaret er:

A: $a < 0$; **B:** $a < -1$; **C:** $a > 2$.

Undersøg nu om systemet er stabilt for $a = 1$. Svaret er:

1: Ja; **2:** Nej

Det samlede svar er hermed:

A1

A2

B1

B2

C1

C2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 3 Betragt differentialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = 2x_1(t). \end{cases}$$

Bestem overføringsfunktionen $H(s)$. Svaret er

D: $H(s) = \frac{1}{(1-s)(2-s)}$; **E:** $H(s) = \frac{1}{2-s}$; **F:** $H(s) = \frac{4}{s-1}$

Bestem nu de værdier for $s \in \mathbb{C}$ for hvilke overføringsfunktionen er defineret. Svaret er:

1: $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$; **2:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$; **3:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$;

Det samlede svar er hermed

D1

D2

D3

E1

E2

E3

F1

F2

F3

MC-spørgsmål 4 Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2}\, x^n.$$

Bestem konvergensradius ρ. Svaret er:

G: $\rho = 1$; **H:** $\rho = 1/3$; **I:** $\rho = 3$.

Undersøg nu om rækken er konvergent for $x = -\rho$. Svaret er:

1: Ja **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

G1

G2

H1

H2

I1

I2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 5 Betragt funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2} \, x^n.$$

Beregn tallet $f(0)$. Svaret er

J: $f(0) = 1/4$;   **K:** $f(0) = 1$;   **L:** $f(0) = 7/12$

Beregn nu tallet $f'(0)$. Svaret er:

1: $f'(0) = 1/4$;   **2:** $f'(0) = 1/3$.

Det samlede svar er dermed

J1

J2

K1

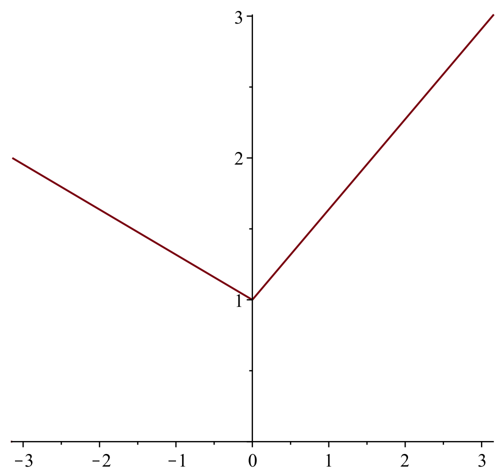
K2

L1

L2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 6 Betragt den 2π-periodiske funktion f, hvis graf er vist på figuren for $x \in [-\pi, \pi[$.



Undersøg om funktionen er lige, ulige, eller ingen af delene. Svaret er:

M: f er lige; **N:** f er ulige; **P:** f er hverken lige eller ulige

Undersøg nu om Fourierkoefficienten a_0 er positiv, negativ, eller nul. Svaret er:

1: $a_0 > 0$; **2:** $a_0 < 0$; **3:** $a_0 = 0$.

Det samlede svar er hermed

M1
M2
M3
N1
N2
N3
P1
P2
P3

MC-spørgsmål 7 Vi betragter fortsat funktionen f fra MC-spørgsmål 6, og undersøger nu Fourierrækkens konvergens for udvalgte x.

Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \pi$? Svaret er

Q: $\frac{5}{2}$; **R:** 2; **S:** 3

Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = 6\pi$? Svaret er

1: 1; **2:** 2; **3:** 3

Det samlede svar er hermed

Q1

Q2

Q3

R1

R2

R3

S1

S2

S3

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 8 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{4^n}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er

T: betinget konvergent; **U:** absolut konvergent; **V:** divergent

Undersøg nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{4^n}x^n$$

har en konvergent majorantrække på intervallet $[-1, 1]$. Svaret er

1: Rækken har ikke en konvergent majorantrække

2: Rækken har en konvergent majorantrække.

Det samlede svar er dermed

T1

T2

U1

U2

V1

V2

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 2 Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t}. \tag{1}$$

(i) Bestem den fuldstændige reelle løsning til den tilsvarende homogene ligning.

(ii) Redegør for, om (1) har en løsning på formen $y(t) = Cte^{2t}$.

(iii) Vis at (1) har en løsning på formen $y(t) = Ct^2e^{2t}$, og bestem den.

Opgave 3 Betragt den 2π-periodiske funktion f, der er givet ved

$$f(x) = \pi - \frac{1}{\pi}x^2,\ x \in [-\pi, \pi[.$$

(i) Skitser grafen for funktionen f på intervallet $[-3\pi, \pi[$.

(ii) Beregn Fourierkoefficienterne a_n og b_n for Fourierrækken på reel form.

(iii) Kan tegnet $\sim$ i definitionen af Fourierrækken erstattes af et lighedstegn?

(iv) Lad $S_N(x)$ betegne den N'te afsnitssum af Fourierrækken. Bestem $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 10^{-5}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 4 Det oplyses (skal IKKE vises), at differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 0, \ t \in]0, \infty[,$$

har løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2.$$

Bestem en løsning til den inhomogene differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = t^2, \ t \in]0, \infty[.$$

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) aflevere eller oploade løsningen til opgave 2 & 3 & 4.

01035 MAT-eksamen forår 2022

MC-Spørgsmål 1:

Det stationære svar hørende til

$u(t) = e^{it}$ er

$$H(i)e^{it} = \frac{1}{i+2} e^{it} = \frac{2-i}{5}(\cos t + i\sin t)$$

$$= \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + i\left(\frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t\right).$$

Så for $u(t) = \cos t$ fås løsningen

$$\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t,$$

og for $u(t) = \sin t$ løsningen

$$\frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t.$$

For $u(t) = \cos t + \sin t$ fås løsningen

$$y(t) = \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}\cos t$$

$$= \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t.$$

Svaret er **D**

MC- Spørgsmål 2:

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = (a-\lambda)(1-\lambda) - (a-2)$$
$$= \lambda^2 + (-a-1)\lambda + 2.$$

Så systemet er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

$$\begin{cases} -a-1 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases},$$ dvs. hvis og kun hvis $a < -1$. Svaret er $\underline{\underline{B}}$.

For $a=1$ fås $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, med rødderne $\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$.

Systemet er ustabilt, svaret er 2.

Det totale svar er $\underline{\underline{B2}}$

MC- Spørgsmål 3:

$$H(s) = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-s & 0 \\ 3 & 2-s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{(1-s)(2-s)}\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-s & 0 \\ -3 & 1-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(1-s)(2-s)}\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cdot(2-s) \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-4(2-s)}{(1-s)(2-s)} = \frac{4}{s-1}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}.$$

Svaret er $\underline{\underline{F2}}$

MC- Spørgsmål 4:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+3)^2}}{\frac{3^n x^n}{(n+2)^2}}\right| = 3|x|\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2$$

$$\to 3|x| \text{ for } n\to\infty.$$

Konvergensradius er $\rho = \frac{1}{3}$,

Svaret er H.

For $x = -\rho = -\frac{1}{3}$ fås række

$$\sum \frac{(-1)^n}{(n+2)^2},$$ som er konvergent.

Svaret er 1.

Det totale svar er <u>H1</u>.

MC- Spørgsmål 5:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)^2} x^n$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} x + \frac{9}{16} x^2 + \cdots$$

Så

$f(0) = \frac{1}{4}$, svaret er J

Og

$f'(0) = \frac{1}{3}$, svaret er 2.

Det totale svar er $\underline{\underline{J2}}$

MC- Spørgsmål 6:

Svaret er P, funktionen er hverken lige eller ulige.

Funktionen er positiv, så

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx > 0.$$

Svaret er 1,

Det totale svar er $\underline{\underline{P1}}$

MC-Spørgsmål 7:

For $x = \pi$ konvergerer

Fourierrækken mod $\frac{3+2}{2} = 2\frac{1}{2}$,

Svaret er Q.

For $x = 6\pi$ konvergerer

Fourierrækken mod det samme

som for $x = 0$, dvs. 1.

Svaret er 1.

Det totale svar er Q 1

MC-Spørgsmål 8:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \to \frac{1}{4}$$

for $n \to \infty$.

Rækken er absolut konvergent,

svaret er U.

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{4^n} x^n$, $x \in [-1,1]$

har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$,

som er konvergent.

Svaret er 2.

Det totale svar er hermed

$\underline{\underline{U2}}$

Opgave 2:

(i) Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

med rødderne $\frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$. (dobbeltrod)

Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er dermed

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) Nej, for te^{2t} er en løsning til den homogene ligning.

(iii) Med

$$y(t) = c\,t^2 e^{2t}$$

er

$$y'(t) = c\left(2t\,e^{2t} + 2t^2 e^{2t}\right)$$

og

$$y''(t) = c\left(2e^{2t} + 4te^{2t} + 4te^{2t} + 4t^2e^{2t}\right)$$

$$= c\left(2e^{2t} + 8t\,e^{2t} + 4t^2 e^{2t}\right)$$

Ved indsættelse fås

ligningen

$$C\left[2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2e^{2t} - 4\left(e^{2t}2t + 2t^2e^{2t}\right) + 4t^2e^{2t}\right] = e^{2t},$$

dvs.

$$C\left[2 + t(8-8) + t^2(4-8+4)\right] = 1,$$

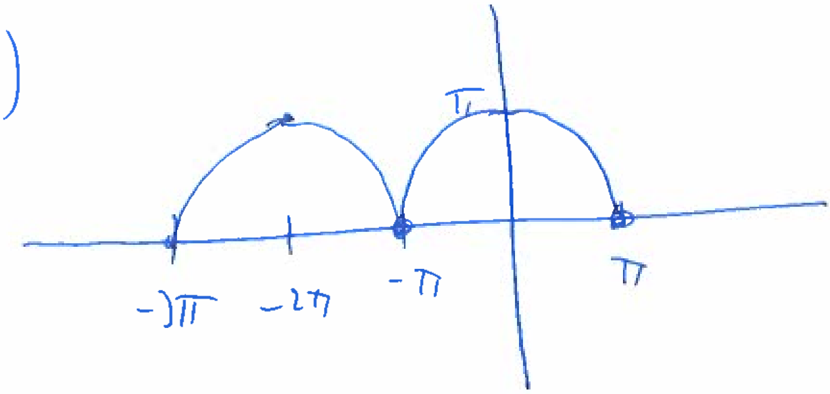
dvs. $2C = 1$, med løsningen $C = \frac{1}{2}$.

Så (1) har løsningen

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{2t}}}$$

Opgave 3

(i)



(ii) Fra eks. 6.8:

Funktionen t^2 har Fourier koefficienterne

$$a_0' = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n' = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n' = 0.$$

Så funktionen f har Fourierkoeffi- cienterne

$$\begin{cases} a_0 = 2\pi - \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^2}{3} = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \\ a_n = -\frac{1}{\pi}4\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

(iii) Ja, funktionen er 2π-periodisk, stykkevis differentiabel, og kontinuert

(iv)

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{\pi} \frac{1}{N}.$$

Så $|f(x) - S_N(x)| \leq 10^{-5}$

er opfyldt når

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{N} \leq 10^{-5},$$

dvs. når $N \geq \frac{400.000}{\pi}$

dvs. for $N \geq 127.324$

Opgave 4: Vi benytter Sætn. 1.31. Vi har

$$a_1(t) = -\frac{1}{t},$$

så $A_1(t) = \int a_1(t)\,dt = -\ln t$

og

$$\Omega(t) = e^{A_1(t)} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}.$$

Dermed er

$$\int y_1(t)\,\Omega(t)\,u(t)\,dt = \int \frac{1}{2}t^2 \frac{1}{t} t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^3 = \frac{1}{8}t^4.$$

Sætn. 1.31 (iii) giver nu løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 \int \frac{1}{\frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{t}} \frac{1}{8}t^4\,dt = \frac{1}{4}t^2 \int t$$

$$= \frac{1}{8}t^4$$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 17. maj 2021
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 4 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 65 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 10%; Opgave 4: 10 %

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. Hvis man svarer forkert, giver det negative point. For at opnå fuldt point i opgave 2, 3 og 4 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven tastes ind på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2, 3 og 4 afleveres direkte ved oploadning.

Opgave 1

(1) Vi undersøger om differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos(t) \tag{1}$$

har en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$. Svaret er:

a) Differentialligningen (1) har en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$.

b) Differentialligningen (1) har ikke en løsning på formen $y(t) = C\,\cos(t)$, men har løsninger på en anden form.

c) Differentialligningen (1) har ingen løsninger.

Opgaven fortsætter - Vend!

(2) Bestem overføringsfunktionen $H(s)$ for differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = u' + 2u, \tag{2}$$

hvor y er løsningen og u er påvirkningen. Svaret er:

a) $H(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$, $s \notin \{-2, 1\}$

b) $H(s) = \frac{1}{s-1}$, $s \neq 1$

c) $H(s) = \frac{1}{s-1}$, $s \notin \{-2, 1\}$

(3) For differentialligningen (2), bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = \sin(2t)$. Svaret er

a) $y(t) = \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{2}{5}\cos(2t)$

b) $y(t) = \sin(2t)$

c) $y(t) = -\frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{2}{5}\cos(2t)$

(4) Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ oplyses at det karakteristiske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)^2(\lambda + 3)^2.$$

Undersøg om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt, eller ustabilt. Svaret er

a) Systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt;

b) Systemet er asymptotisk stabilt;

c) Systemet er ustabilt.

(5) Undersøg om talfølgen givet ved

$$x_n = \frac{1}{2 + \cos(\pi n)}, \; n \in \mathbb{N}.$$

er konvergent, og bestem i bekræftende fald grænseværdien. Svaret er:

a) Talfølgen er divergent.

b) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1/3.

c) Talfølgen er konvergent, med grænseværdi 1.

(6) Benyt $n$te-ledskriteriet til at undersøge konvergensforholdene for rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\,\ln(n)}$$

Svaret er:

a) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken konvergent

b) Ifølge $n$te-ledskriteriet er rækken divergent

c) Brug af $n$te-ledskriteriet leder ikke til nogen konklusion for rækken.

(7) Bestem mængden af $x \in \mathbb{R}$ for hvilke potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(4x)^n$$

er konvergent.

Svaret er:

a) Konvergensintervallet er $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$;

b) Konvergensintervallet er $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$;

c) Konvergensintervallet er $-4 < x < 4$;

(8) Vi undersøger om den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\, x^n,\; x \in [-3, 3], \tag{3}$$

har en konvergent majorantrække.

Svaret er:

a) Rækken (3) har en konvergent majorantrække på intervallet $[-3, 3]$.

b) Rækken (3) har en majorantrække på intervallet $[-3, 3]$, men ikke en konvergent majorantrække;

c) Rækken (3) har ikke en majorantrække på intervallet $[-3, 3]$.

(9) Vi undersøger om funktionen

$$f(x) = \cos(x) + \ln(1 + |x|) + \frac{1}{100}\,x$$

er lige eller ulige. Svaret er

a) Funktionen f er lige;

b) Funktionen f er ulige;

c) Funktionen f er hverken lige eller ulige;

(10) Betragt funktionen givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

som tænkes udvidet til en 2π-periodisk funktion. For Fourierrækken på reel form,

$$f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

ønsker vi nu at bestemme Fourierkoefficienterne, a_0, a_2, og b_1. Svaret er

a) $a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, b_1 = 1$

b) $a_0 = 1, a_2 = 2, b_1 = 0$

c) $a_0 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0$

(11) Vi betragter igen funktionen f givet i spørgsmål (10), og ønsker nu at bestemme summen af den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$. Svaret er

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{4}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1$

Husk at indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark!

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 2 Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{for} \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{for } x = \pi, \end{cases}$$

som tænkes udvidet til en 2π-periodisk funktion.

(i) Tegn grafen for funktionen f på intervallet $[-3\pi, 3\pi]$.

(ii) Hvad konvergerer Fourierrækken for f imod for $x = -\pi$?

(iii) Konvergerer Fourierrækken for f uniformt?

Opgave 3 Betragt funktionen

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

og de tilhørende afsnitssummer

$$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} x^n, \; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(i) Vis at det for ethvert $N \in \mathbb{N}$ gælder at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N, \; \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(ii) Bestem nu $N \in \mathbb{N}$ således at

$$|f(x) - S_N(x)| \leq 0.1$$

for alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Opgaven fortsætter - Vend!

Opgave 4 For $a \in \mathbb{R}$ betragtes differentialligningssystemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = ax_1(t) + ax_2(t) \end{cases}$$

Bestem de værdier af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke ligningssystemet er asymptotisk stabilt.

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) oploade løsningen til opgave 2 & 3 & 4.

Eksamen, forår 2021

MC-del

(1) Svar b), løsninger på anden form

(2) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+s-2} = \frac{s+2}{(s+2)(s-1)}$

$= \frac{1}{s-1}, \quad s \notin \{-2, 1\}$

Svar c)

(3) $u(t) = \mathrm{Im}(e^{2it})$

Svaret er

$y(t) = \mathrm{Im}(H(2i)e^{2it})$

$= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i-1} e^{2it}\right)$

$= -\frac{1}{5}\sin(2t) - \frac{2}{5}\cos(2t)$

Svar c)

(4) Rødder: $\lambda = 0$, $\lambda = -1$, $\lambda = -3$

Ikke asymptotisk stabilt:

Da roden $\lambda = 0$ har algebraisk multiplicitet 1 (og dermed geometrisk multiplicitet 1) er systemet stabilt.

Svaret er a)

(5) Svaret er a)

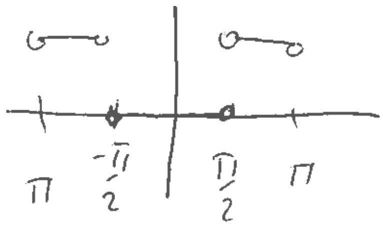
(6) Svaret er c)

(7) Svaret er a)

(8) Svaret er b)

(9) Svaret er c)

(10)



f er lige, så $b_n = 0$, $\forall n$.

I følge sætn. 6.3 er

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = 1$$

og

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2x)\,dx = \frac{2}{\pi}\;\frac{1}{2}\Big[\sin(2x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0$$

Svaret er c)

(11) I følge Parseval er

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2,$$

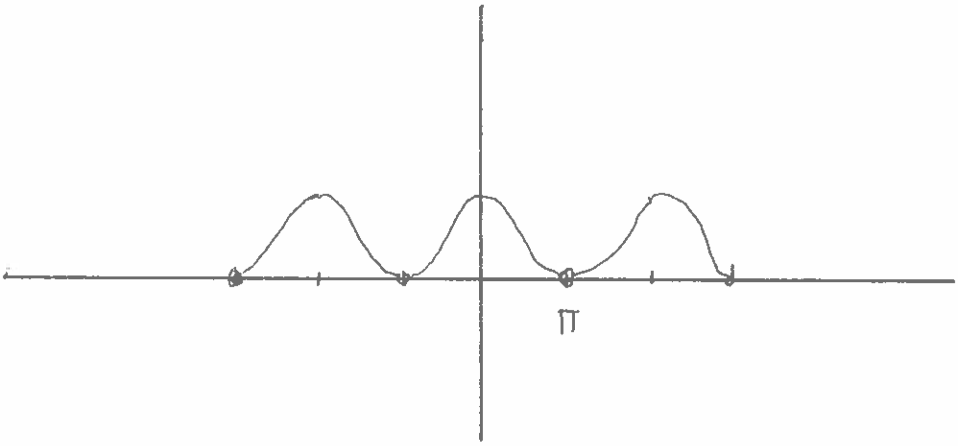
så

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\,2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

svaret er b)

Opgave 2

(i)



Bemærk at funktionen ikke er kontinuert i punkterne $\pi + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$

(ii) Funktionen er stykkevist differentiabel (check det!), men ikke kontinuert i $x = \pi$. Så ifølge Fouriers sætning konvergerer Fourierrækken mod $\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-\pi^2} + e^{-\pi^2}}{2} = \underline{\underline{e^{-\pi^2}}}$

(iii) Nej, da f ikke er kont kan Fourierrækken ikke konvergere uniformt mod f [men den konvergerer uniformt mod den 2π-periodiske udvidelse af $g(x) = e^{-x^2}$, $-\pi \le x < \pi$

Opgave 3:

(i)
$$\left| f(x) - S_N(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} |x|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

(ii) Uligheden $\frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 0.1$ er opfyldt for $\underline{\underline{N = 2}}$

Opgave 4

Det karakteristiske polynomium er

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 \\ a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + a$$

$$= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + a$$

Betingelsen for asymptotisk stabilitet er

$$\begin{cases} -2a > 0 \\ a^2 + a > 0 \end{cases}, \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} a < 0 \\ a(a+1) > 0, \end{cases}$$

dvs.

$$\underline{\underline{a < -1}}$$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 5. december 2021
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 60%, Opgave 1: 15%, Opgave 2: 15%, og Opgave 3: 10%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt differentialligningen

$$x''(t) + 4\,x'(t) + 3\,x(t) = u'(t)\,. \tag{1}$$

1. Find rødderne i det karakteristiske polynomium hørende til (1), og opskriv ved hjælp af disse rødder den fuldstændige reelle løsning til den homogene del af (1).
2. Bestem overføringsfunktionen for differentialligningen (1).
3. Bestem det stationære svar hørende til påvirkningen $u(t) = e^{4t}$.
4. Bestem en partikulær løsning til (1) når $u(t) = e^{-3t}$, ved at gætte på en løsning af formen $x(t) = Ae^{-3t}$ hvor A er en reel konstant.

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Opgave 2

Betragt differentialligningsystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Find den fuldstændige reelle løsning til det homogene system.
2. Vis at $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ er en løsning til (2) og angiv den fuldstændige reelle løsning til (2).
3. Afgør om differentialligningsystemet (2) er asymptotisk stabilt.

Opgave 3

Betragt den homogene differentialligning

$$t\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} + y = 0\,. \tag{3}$$

Antag at differentialligningen (3) har en løsning, der kan skrives som en potensrække, $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, med konvergensradius $\rho > 0$.

1. Indsæt potensrækken for y i differentialligningen (3) og vis at konstanterne a_n skal opfylde $a_0 = 0$ samt rekursionsformlen
$$a_{n+2}(n+2)(n+1)n + a_n = 0, \text{ for } n \geq 1.$$
2. Bestem a_1, a_2 og a_3 for en potensrækkeløsning $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ med $y'(0) = 3$ og $y''(0) = 4$.

—————oooOooo—————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).

Svar eksamen Mat 2

December 2021

1 Opgaver del 2

Opgave 1
1) Rødderne i det karakteristiske polynomium findes til $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -3$. Den fuldstændige reelle løsning er så

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}\ ,\ c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

2) Ifølge ligning (1.20) findes overførings funktionen til

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}\ ,\ s \neq (-1, -3)$$

3) $x(t) = H(4)e^{4t} = \frac{4}{35}e^{4t}$

4) $x_{par}(t) = A \cdot te^{-3t}$ indsat i differentialligingen giver dette:

$$\begin{aligned}
&\left(A \cdot te^{-3t}\right)'' + 4\left(Ate^{-3t}\right)' + 3Ate^{-3t} = -3e^{-3t} \\
&e^{-3t}(-2A) = -3e^{-3t} \\
&A = \frac{3}{2} \\
&\lambda_{par}(t) = \frac{3}{2}te^{-3t}
\end{aligned}$$

Opgave 2
1) Egenværdierne og egenvektorerne til systemmatricen findes:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = -2 + i\sqrt{2}, &\quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
\lambda_2 = -2 - i\sqrt{2} \quad , &\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sætning 2.6 giver nu løsningerne

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-2t}\left(\cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} - \sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right)\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix}\\
x_2(t) &= e^{-2t}\left(\sin\sqrt{2}t\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} + \cos\sqrt{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right).\\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Den fuldstændige reelle løsning er:

$$X_{\text{hom}}\ (t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t\end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{2}t\\ \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\end{pmatrix}.$$

2) Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$\begin{aligned}
&\text{HS: } \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}\\
&VS: \begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3e^t\\ 2e^t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}\\
&HS = VS
\end{aligned}$$

Den fuldstændige reelle løsning er nu:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + \begin{bmatrix}e^t\\ 0\end{bmatrix}$$

3) Da egnværdierne for systemmatricen har negative realdele er systemet ifølge sætning (2.36) asymptotisk stabilt.

Opgave 3

1) Vi indsætter $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i differentialligningen.
De to led giver

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Vi ser at der i andet led med y er et konstantled (a_0) der ikke kan balanceres med noget fra det første led, og derfor må være 0. Dette gør at andet led faktisk starter fra $n = 1$. Med brug af dette, og ved at 'sænke' index i første led med 2, får man at differentialligningen kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}n(n+1)(n+2) + a_n\right] t^n = 0$$

hvoraf fra identitetssætningen (korrolar 5.21) følger at

$$a_{n+2}n(n+1)(n+2) + a_n = 0. \qquad \text{for } n \geq 1$$

2) Fra $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ved vi at:

$$a_0 = y(0) = 0 \text{ og } a_1 = y'(0) = 3$$

Envidere er $2a_2 = y''(0) = 4$ hvoraf $a_2 = 2$.

Endelig bruger vi rekursionsrelationen til at slutte af

$$a_3 \cdot 2 \cdot 3 = -a_1 = -3$$

og derfor er $a_3 = -\frac{1}{2}$

Del A

Opgave 1: [-2,2[

Opgave 2: f er lige og dens Fourierrække konvergerer uniformt mod f.

Opgave 3: $a \in]0, 6[$

Opgave 4: $\frac{1}{6}e^{4t}$

Opgave 5: R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

Opgave 6: $c_0 = \frac{\pi^2}{3}, c_{-1} = -\frac{1}{2} + i, c_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}i$

Opgave 7: $a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = 0$

Opgave 8: $a_2 = 0, b_1 = -1, b_3 = -\frac{1}{3}$

Summer Del A 21

Side 1

Vis rigtige svar
Skjul rigtige svar

Spørgsmål 1

Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+1} x^n$$

Hvilket udsagn om konvergensen af rækken er korrekt?

- [ ] Rækken er punktvis konvergent men ikke uniform konvergent på intervallet [-1,1]
- [x] Rækken er uniform konvergent på intervallet [-1,1]
- [ ] Rækken er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$

Spørgsmål 2

Afgør konvergens af rækkerne

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1 \right), \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{1+11^n}$$

- [ ] R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- [ ] R er divergent og S er betinget konvergent.
- [ ] R og S er begge absolut konvergente.
- [ ] R og S er begge divergente.
- [x] R er divergent og S er absolut konvergent.

Side 2

Spørgsmål 3

Det oplyses om en ukendt første-ordens lineær homogen differentialligning, at potensrækkemetoden, dvs. indsættelse af

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

i ligningen, giver

$$c_1 + 2c_2 t - c_0 - c_1 t + \sum_{n=2}^{\infty}((n+1)c_{n+1} - c_n - 4c_{n-2})t^n = 0$$

for alle $t \in \mathbb{R}$

Idet det yderligere oplyses at $y(0) = 2$ bestem da c_1 og c_3.

- [x] $c_1 = 2, c_3 = 3$
- [ ] $c_1 = 1, c_3 = 1$
- [ ] $c_1 = 2, c_3 = -1$
- [ ] $c_1 = -2, c_3 = -3$

Spørgsmål 4

For ethvert $a > 0$ betragt da rækken

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-7n}$$

Angiv de værdier af $a$for hvilke rækken er konvergent, og angiv rækkens sum.

- [ ] $0 < a < 1, \quad S(a) = \frac{1}{1 - a^{-7}}$
- [ ] $0 < a, \quad S(a) = \frac{1}{1 - a^{7}}$
- [ ] $0 < a < 7, \quad S(a) = a^{6}$
- [x] $a > 1, \quad S(a) = \frac{a^{7}}{a^{7} - 1}$
- [ ] $a > 1, \quad S(a) = \frac{1}{1 + a^{7}}$

Side 3

Spørgsmål 5

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ betragt da differentialligning:

$$y''(t) + y(t) = ae^t$$

Bestem alle de værdier af a hvor differentialligningen har en periodisk løsning, dvs en løsning $y(t)$, der er en periodisk funktion af t.

- [ ] Differentialligningen har en periodisk løsning for alle værdier af $a \in \mathbb{R}$
- [ ] Differentialligningen har en periodisk løsning kun når $a = 1$
- [x] Differentialligningen har en periodisk løsning kun når $a = 0$
- [ ] Der findes ingen værdier af a for hvilke differentialligningen har periodiske løsninger.

Spørgsmål 6

Betragt den 2π-periodiske funktion, der i intervallet $[-\pi, \pi[$ er givet ved forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{for} \quad x \in [-\pi, 0[\\ \sin(2x) & \text{for} \quad x \in [0, \pi[\end{cases}$$

- [x] Fourierrækken for f konvergerer uniformt mod f
- [ ] Fourierrækken for f konvergerer uniformt, men ikke mod f
- [ ] Fourierrækken for f konvergerer punktvis, men ikke uniformt, mod f
- [ ] Fourierrækken for f er divergent i mindst et punkt.

Side 4

Spørgsmål 7

Betragt den 2π-periodiske funktion f givet i intervallet $[-\pi, \pi[$ ved forskriften:

$$f(t) = \frac{|t|}{\pi} - 1$$

Afgør hvilket udsagn om Fourier-koefficienterne er korrekt.

- [x] $a_0 = -1, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi^2}, \quad a_2 = 0$
- [ ] $a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi^2}, \quad a_2 = 0.$
- [ ] $b_1 = \frac{4}{\pi^2}, \quad b_2 = 0.$
- [ ] $a_0 = -\frac{2}{\pi^2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{4}{\pi^2}.$
- [ ] $b_1 = -\frac{4}{\pi^2}, \quad b_2 = 0.$

Spørgsmål 8

Bestem konvergensradius ρ af rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{n^9 + \sqrt{n}} x^n$$

- [x] $\rho = 1$
- [ ] $\rho = \infty$
- [ ] $\rho = 0$
- [ ] $\rho = 2$

Side 5

Spørgsmål 9

Om et (ukendt) første-ordens lineært homogen differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$
oplyses det, at det karakteristiske polynomium for A er givet ved
$P(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda^2+1)$

- [x] Systemet er stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.
- [ ] Systemet er ustabilt
- [ ] Systemet er asymptotisk stabilt.
- [ ] Der er ikke tilstrækkelig information til at afgøre stabilitet.

Spørgsmål 10

Om en (ukendt) anden-ordens lineær inhomogen differentialligning med konstante koefficienter oplyses følgende:
Funktionerne
$2e^{-t} + e^{2t}$
og
$3e^{t} + e^{2t}$
er begge løsninger. Bestem den fuldstændige løsning. (c_1, c_2, c_3 er herunder alle arbitrære reelle konstanter)

- [x] $c_1e^{-t} + c_2e^{t} + e^{2t}$
- [ ] $2e^{-t} + 3e^{t} + c_1e^{2t}$
- [ ] $c_1e^{-t} + c_2e^{t} + c_3e^{2t}$
- [ ] $c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + 3e^{t}$

Mat 2 Exam E20 Part A

Page 1

Show correct answers
Hide correct answers

Question 1

Consider the two infinite series:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{1+\sqrt{n}}, \quad \text{and} \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2+1) \frac{2+n^2}{1+n!}.$$

Which statement is true?

- [ ] Both A and B are absolutely convergent.
- [ ] Both A and B are divergent.
- [x] A is conditionally convergent and B is absolutely convergent.
- [ ] A is divergent and B is absolutely convergent.
- [ ] A is convergent and B is divergent.

Question 2

Consider the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

The interval of convergence for the series is:

- [ ] $\mathbb{R}$
- [x] $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.
- [ ] $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.
- [ ] $-2 \leq x < 2$.
- [ ] $-2 \leq x \leq 2$.
- [ ] $-1 < x < 1$.
- [ ] $-1 \leq x \leq 1$.
- [ ] $x = 0$.

Question 3

It is given that the characteristic polynomial for a 4th order linear homogeneous differential equation with constant coefficients is: $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda^2 + 1)$.

Choose the function below that is a solution to the differential equation:

- [ ] $y(t) = e^{3t} + e^{2t}$.
- [ ] $e^{2t} + e^{-3t} + t\cos(t) + t\sin(t)$.
- [ ] $-e^{-3t} + 7e^{2t} + 2e^{t} + te^{t}$.
- [ ] $e^{3t} + \cos(t) + \sin(t)$.
- [x] $5e^{2t} - 2e^{-3t} + \cos(t)$.
- [ ] $4e^{2t} + 3e^{-3t} + 2e^{-t}$.

Question 4

Given three infinite series, $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$

with positive terms $a_n > 0, b_n > 0, c_n > 0,$

suppose that:

$a_n \leq b_n \text{ for all } n,$ and $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = 2.$

Which of the following conclusions follows from this information? (Only one is valid).

- [ ] B and C are divergent, but the convergence status of A is unkown.
- [x] If A is divergent then C is divergent.
- [ ] All three series have the same convergence status.
- [ ] If C is divergent then A is divergent.
- [ ] If $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ then A is convergent.

Question 5

Consider the differential equation

$y''(t) + 2y'(t) + ty(t) = 0.$

By setting:

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

we can rewrite the differential equation as one of the following equations. Choose the correct one:

- [ ] $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(n+1)c_{n+1} + c_{n-1}\right) t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 + c_0 t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)c_{n-2} + 2nc_{n-1} + c_{n+1}\right) t^n = 0$
- [ ] $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(n(n-1)c_{n-1} + 2nc_n + c_{n+1}\right) t^n = 0$
- [x] $2(c_1 + c_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(n+1)c_{n+1} + c_{n-1}\right) t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 + c_0 t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)c_{n-2} + 2nc_{n-1} + c_{n-1}\right) t^n = 0$

Page 2

Question 6

Consider the series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}.$$

The sum of the series is:

- [ ] $\frac{1}{x-1}$, valid for $|x| < 1.$
- [ ] $\frac{x}{1-x}$, valid for $|x| < 1.$
- [ ] $\frac{x}{1-x}$, valid for $|x| > 1.$
- [ ] $\frac{1}{1+x}$, valid for $|x| < 1.$
- [ ] $\frac{1}{1+x}$, valid for $|x| > 1.$
- [x] $\frac{1}{x-1}$, valid for $|x| > 1.$

Question 7

Consider a first order system of differential equations

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ with

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix},$$

where $a, b, c \in \mathbb{R}.$

The system is asymptotically stable for:

- [ ] $c < 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0.$
- [ ] $c < 0$ and $ab > 1.$
- [ ] $c < 0, a < 0, b < 0.$
- [x] $c < 0$ and $ab < 1.$
- [ ] $c > 0$ and $0 < ab < 1.$
- [ ] $c > 0$ and $ab > 0.$

Question 8

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an *even* and 2π-periodic function, given on the interval $[0, \pi]$ by the formula:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{for } x \in [1, \pi]. \end{cases}$$

Which of the following statements about the Fourier series of f is valid?

- [ ] The Fourier series converges pointwise, but not uniformly, to f.
- [ ] The Fourier series converges pointwise, but not to f.
- [ ] The Fourier series converges uniformly, but not to f.
- [x] The Fourier series converges uniformly to f.
- [ ] There is at least one point x at which the Fourier series is divergent.

Question 9

Consider the infinite series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}+\frac{\sin(nx)}{n+e^n}\right), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Select the statement that is valid:

- [ ] The series converges at each point, but the sum function is not continuous at every point.
- [ ] The series converges only at the point $x=0$.
- [x] The series converges at each $x\in\mathbb{R}$, and the sum function is continuous.
- [ ] The series converges only at points $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$
- [ ] The series converges only at the points $x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k\in\mathbb{Z}.$
- [ ] The series converges only at points of the form $x=(2k+1)\pi$ or $x=(2k+1)\pi/2$, where k is an integer.

Question 10

A power series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ satisfies the equation:

$$2(c_1+c_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)c_{n+2}+2(n+1)c_{n+1}+3c_{n-1}\right)t^n=0.$$

This leads to the following recurrence relation:

- [ ] $c_2=-c_1, \quad \text{and } c_n=\frac{2(n-1)c_{n-1}+3c_{n-3}}{n(n-1)}, \ \ n\geq 4.$
- [ ] $c_2=-2c_1, \quad \text{and } c_n=-\frac{2(n+1)c_{n-1}+3c_{n-3}}{n(n+1)}, \ \ n\geq 3.$
- [ ] $c_{n+2}=-\frac{2(n+1)c_{n+1}-3c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ \ n\geq 0.$
- [ ] $c_{n+2}=\frac{2(n+1)c_{n+1}+3c_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \ \ n\geq 0.$
- [x] $c_2=-c_1, \quad \text{and } c_n=-\frac{2(n-1)c_{n-1}+3c_{n-3}}{n(n-1)}, \ \ n\geq 3.$

TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Written 3 hour exam, 7. December 2020
Course: Mathematics 2 01034/01035/01037

Allowed aids: All aids allowed by DTU.
Weights: Multiple-choice (electronic): 65%, Problem 1: 20%, Problem 2: 15%.

The weights are only guidelines. The exam is evaluated as a whole. In order to get full points in part B, you need to include intermediate calculations to a reasonable extent. Furthermore, all answers must be substantiated, if necessary with references to the text-book.

NB. The exam consists of two parts: **Part A**, electronic multiple-choice; **Part B**, see below.

- **To answer Part A:** Open the exam assignment "Mat2 Exam E20 Part A" and follow the instructions there.
- **Part B is included below**. Upload your answers to part B as a PDF file. (If your answers are hand-written, part B may be handed in on paper instead).

Part B

Problem 1

Consider the infinite series

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{2^n}.$$

Explain your reasoning for each of your answers to the following questions:

1. Show that the series $f(t)$ converges for every $t \in \mathbb{R}$.
2. Is f an even function, an odd function, or neither?
3. Does the series converge uniformly on $\mathbb{R}$?
4. Is f continuous?
5. Determine an $N \in \mathbb{N}$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ the following inequality holds:
$$\left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nt)}{2^n} \right| \leq 10^{-3}.$$
6. Find the value of $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$.

The exam set continues - Turn!

Problem 2

Consider the system of differential equations

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - x_2(t) + e^t\,, \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) + x_2(t)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Show that the vector-valued function

   $$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} te^{3t} \\ 2te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix}$$

   is a solution to the corresponding *homogeneous* system.

2. Find the general real solution to the homogeneous system.

3. Find the general real solution to (1).

——————oooOooo——————

End of Part B. Remember to answer Part A (Multiple Choice).

Math 2 exam December 2020
Part B

Problem 1

1. We have $\left|\dfrac{\sin(nt)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$, so the convergent series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ is a convergent majorant, and f is therefore (uniformly) convergent.

2. f is an odd function. A linear combination of odd functions (here $\sin(nx)$) is odd, and this extends to the limit, since the series is convergent.

3. Yes, see part 1.

4. Yes, it's a uniformly convergent series of continuous functions, so the sum function is continuous.

5. We have:

$$\left|f(t) - \sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{2^n}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{2^n}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2^{N+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{N+1}}2 = \frac{1}{2^N}.$$

So if $2^{-N} \leq 10^{-3}$ the required inequality is satisfied. Solving this:

$$2^{-N} \leq 10^{-3} \iff -N \leq \log_2(10^{-3}) = -3\log_2(10) \iff N \geq 3\log_2(10) \approx 9.97$$

So $N = 10$ works.

(We could alternatively have used the integral test with $\int_N^{\infty}(1/2^x)\mathrm{d}x$, which leads to $N \geq 10.495$, or with $\int_{N+1}^{\infty}(1/2^x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2^{N+1}}$, which leads to $N \geq 10.254$, so in both cases $N = 11$).

6. Parseval's identity gives:

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\pi\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}.$$

Problem 2

1. Setting $x(t)$ into the equation, the left hand side is:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} te^{3t} \\ 2te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} + 3te^{3t} \\ 2e^{3t} + 6te^{3t} - 3e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3te^{3t} + e^{3t} \\ 6te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

   and the right hand side is

$$\begin{pmatrix} 5te^{3t} - (2te^{3t} - e^{3t}) \\ 4te^{3t} + (2te^{3t} - e^{3t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3te^{3t} + e^{3t} \\ 6te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

   which is equal to the left hand side.

2. The characteristic polynomial for the matrix $\left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ is $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ which has 3 as a double root, and eigenvector $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Which gives a solution $\mathbf{x}(t) = \left(\begin{smallmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{smallmatrix}\right)$. This is linearly independent from the previous solution, so the general solution is:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{3t} \\ 2te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

3. We need a particular solution, so we look for a solution of the form $e^t\mathbf{v}$. Setting into the equation we get:

$$e^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} e^t\mathbf{v} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

   which has the solution $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. The general solution to the inhomogeneous equation is the sum of the particular solution with the homogeneous general solution:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} te^{3t} \\ 2te^{3t} - e^{3t} \end{pmatrix} , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Eksamen Mat 2 Del A E19 Dansk

Vis rigtige svar
Skjul rigtige svar

Side 1

Der er 10 spørgsmål i alt.

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+n^3}{4n^3+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{n+1}.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- R og S er begge konvergente.
- R og S er begge divergente.
- R er divergent og S er betinget konvergent.
- R er divergent og S er absolut konvergent.
- R er betinget konvergent og S er divergent.

Spørgsmål 2

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\ln(n)}{3^n} x^n$$

er:

- $\rho = \frac{1}{3}$
- $\rho = 3$
- $\rho = 1$
- $\rho = \infty$
- $\rho = \frac{1}{2}$
- $\rho = 2$
- $\rho = 0$

Spørgsmål 3

Det karaktersiske polynomium for en fjerdeordens homogen differentialligning med konstante koefficiente er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2-1).$$

Den generelle løsning er da.

- $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos(t) + c_4\sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- $y(t) = c_1 + c_2t + c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- $y(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- $y(t) = c_1 + c_2\cos(t) + c_3\sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- $y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- $y(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4te^t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

Spørgsmål 4

Betragt to uendelige rækker af positive led

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

og

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hvor $a_n > 0,\ b_n > 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$, og talfølgen

$$c_n = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Det oplyses, at $\sqrt{a_n} \leq b_n$ for alle n, og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- ☐ R og S er begge divergente.
- ☐ S er divergent og R er konvergent.
- ☐ Begge rækker er konvergente.
- ☐ R er divergent og S er konvergent.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$y'(t) - t^3 y(t) = 0$$

Ved at indsætte

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

kan ligningen omskrives til en af følgende ligninger. Vælg den korrekte ligning.

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t + \sum_{n=-3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n+1}(n+1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n-1}(n-1) - c_{n+3}\right) t^n = 0$
- ☐ $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(c_{n-1}(n-1) - c_{n-3}\right) t^n = 0$

Spørgsmål 6

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$$

På hvilket af nedenstående x-interval er rækken uniform konvergent?

- ☐ $-3/4 \leq x \leq -1/4$
- ☐ $-3 \leq x \leq 3$
- ☐ $-1 \leq x \leq 1$
- ☐ $-1/2 < x < 1/2$
- ☐ $1/4 \leq x \leq 3/4$
- ☐ $0 < x < 1$

Spørgsmål 7

Om et førsteordens differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

oplyses det, at matricen

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

har egenværdierne:

$$\lambda_1 = -1 - a, \quad \lambda_2 = a$$

hvor tallet $a \in \mathbb{R}$ er en reel parameter.

For $a \neq -1/2$ oplyses desuden: λ_1 har algebraisk multiplicitet 1, mens λ_2 har algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1.

For hvilke værdier af parameteren a er systemet stabilt?

- ☐ $-1 \leq a \leq 0$
- ☐ $-1 \leq a < 0$
- ☐ $a < 0$
- ☐ $a > 1$
- ☐ $-\infty < a < \infty$
- ☐ Der findes ingen værdier af a for hvilke systemet er stabilt.

Spørgsmål 8

Lad

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

være en lige og 2π-periodisk funktion, givet i intervallet $[0, \pi]$ ved udtrykket:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, 1[, \\ 3/2 & \text{for } x = 1, \\ 2 & \text{for } x \in]1, \pi]. \end{cases}$$

Der gælder da følgende:

- ☐ Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke uniformt, mod f.
- ☐ Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.
- ☐ Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke mod f.
- ☐ Fourierækken konvergerer uniformt, men ikke mod f.
- ☐ Fourierrækken er divergent i mindst et punkt.

Spørgsmål 9

To rækker af generelle funktioner er givet ved

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{og} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Angiv det korrekte udsagn.

- ☐ Begge rækker har en konvergent majorantrække.
- ☐ Begge rækker har en majorantrække, men ingen har en konvergent majorantrække.
- ☐ Begge har en majorantrække, men kun S har en konvergent majorantrække.
- ☐ Hverken R eller S har en majorantrække.
- ☐ Begge rækker har en majorantrække, men kun R har en konvergent majorantrække

Spørgsmål 10

Om en homogen lineær tredjeordens differentialligning med begyndelsesbetingelserne

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,$$

er det givet, at potensrækkemetoden fører til rekursionsformlen:

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

for potensrækkeløsningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Der gælder da følgende om den tilhørende afsnitssum

$$S_6(x) = \sum_{n=0}^{6} c_n x^n$$

- ☐ $S_6(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- ☐ $S_6(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- ☐ $S_6(x) = x + \frac{1}{12}x^4$
- ☐ $S_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^5$
- ☐ $S_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6$

Eksamen Mat 2 Del A E19 Dansk

Side 1

Vis rigtige svar

Skjul rigtige svar

Der er 10 spørgsmål i alt.

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n^3}{4n^3+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+1}.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- [ ] R og S er begge konvergente.
- [ ] R og S er begge divergente.
- [x] R er divergent og S er betinget konvergent.
- [ ] R er divergent og S er absolut konvergent.
- [ ] R er betinget konvergent og S er divergent.

Spørgsmål 2

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln(n)}{3^n} x^n$$

er:

- [ ] $\rho = \frac{1}{3}$
- [x] $\rho = 3$
- [ ] $\rho = 1$
- [ ] $\rho = \infty$
- [ ] $\rho = \frac{1}{2}$
- [ ] $\rho = 2$
- [ ] $\rho = 0$

Spørgsmål 3

Det karaktersiske polynomium for en fjerdeordens homogen differentialligning med konstante koefficiente er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1).$$

Den generelle løsning er da.

- [ ] $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$
- [x] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$
- [ ] $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$

Spørgsmål 4

Betragt to uendelige rækker af positive led

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

og

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

hvor $a_n > 0,\ b_n > 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$, og talfølgen

$$c_n = \frac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Det oplyses, at $\sqrt{a_n} \leq b_n$ for alle n, og at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 1.$$

Vælg det korrekte udsagn.

- [ ] R og S er begge divergente.
- [x] S er divergent og R er konvergent.
- [ ] Begge rækker er konvergente.
- [ ] R er divergent og S er konvergent.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$y'(t) - t^3 y(t) = 0$

Ved at indsætte

$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

kan ligningen omskrives til en af følgende ligninger. Vælg den korrekte ligning.

- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t + \sum_{n=-3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [x] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n+1}(n+1) - c_{n-3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n-1}(n-1) - c_{n+3})\, t^n = 0$
- [ ] $c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (c_{n-1}(n-1) - c_{n-3})\, t^n = 0$

Side 2

Spørgsmål 6

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$$

På hvilket af nedenstående x-interval er rækken uniform konvergent?

- [ ] $-3/4 \leq x \leq -1/4$
- [ ] $-3 \leq x \leq 3$
- [ ] $-1 \leq x \leq 1$
- [ ] $-1/2 < x < 1/2$
- [x] $1/4 \leq x \leq 3/4$
- [ ] $0 < x < 1$

Spørgsmål 7

Om et førsteordens differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

oplyses det, at matricen

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

har egenværdierne:

$$\lambda_1 = -1 - a, \quad \lambda_2 = a$$

hvor tallet $a \in \mathbb{R}$ er en reel parameter.

For $a \neq -1/2$ oplyses desuden: λ_1 har algebraisk multiplicitet 1, mens λ_2 har algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1.

For hvilke værdier af parameteren a er systemet stabilt?

- [ ] $-1 \leq a \leq 0$
- [x] $-1 \leq a < 0$
- [ ] $a < 0$
- [ ] $a > 1$
- [ ] $-\infty < a < \infty$
- [ ] Der findes ingen værdier af a for hvilke systemet er stabilt.

Spørgsmål 8

Lad

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

være en lige og 2π-periodisk funktion, givet i intervallet $[0, \pi]$ ved udtrykket:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0, 1[, \\ 3/2 & \text{for } x = 1, \\ 2 & \text{for } x \in]1, \pi]. \end{cases}$$

Der gælder da følgende:

- [x] Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke uniformt, mod f.
- [ ] Fourierrækken konvergerer uniformt mod f.
- [ ] Fourierrækken konvergerer punktvist, men ikke mod f.
- [ ] Fourierækken konvergerer uniformt, men ikke mod f.
- [ ] Fourierrækken er divergent i mindst et punkt.

Spørgsmål 9

To rækker af generelle funktioner er givet ved

$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$ og $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Angiv det korrekte udsagn.

- [ ] Begge rækker har en konvergent majorantrække.
- [ ] Begge rækker har en majorantrække, men ingen har en konvergent majorantrække.
- [x] Begge har en majorantrække, men kun S har en konvergent majorantrække.
- [ ] Hverken R eller S har en majorantrække.
- [ ] Begge rækker har en majorantrække, men kun R har en konvergent majorantrække

Spørgsmål 10

Om en homogen lineær tredjeordens differentialligning med begyndelsesbetingelserne

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0,$

er det givet, at potensrækkemetoden fører til rekursionsformlen:

$$c_{n+3} = \frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0,$$

for potensrækkeløsningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Der gælder da følgende om den tilhørende afsnitssum

$$S_6(x) = \sum_{n=0}^{6} c_n x^n$$

- [x] $S_6(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- [ ] $S_6(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6$
- [ ] $S_6(x) = x + \frac{1}{12}x^4$
- [ ] $S_6(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{40}x^5$
- [ ] $S_6(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{180}x^6$

Eksamen i matematik 2, kurserne, 01037, 01035, 01034, fredag d. 23/8, 2019. (Dansk version).

- [x] Vis rigtige svar
- [ ] Skjul rigtige svar

Side 1

Spørgsmålgruppe 1

Der er 18 multiple choice spørgsmål i alt.

Vejledning til opgavesættet:

- Der er kun en korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end en svarmulighed, hvilket giver delvise point, såfremt et rigtigt svar afkrydses.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

Spørgsmål 1

Vi betragter den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Bestem rækkens sum. Svaret er

- [x] $\frac{3}{5}$.
- [ ] $-\frac{3}{5}$.
- [ ] 3 .
- [ ] -3 .
- [ ] $-\frac{2}{5}$.
- [ ] $\frac{5}{3}$.

Spørgsmål 2

Bestem konvergensforholdene for den uendelig række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(n+3)^2} .$$

Svaret er

- [ ] Rækken er divergent.
- [ ] Rækken er absolut konvergent.
- [x] Rækken er betinget konvergent.

Spørgsmål 3

Den uendelige række

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{(n-|\sin(n)|)^2}$$

er

- [x] divergent.
- [ ] absolut konvergent.
- [ ] betinget konvergent.
- [ ] konvergent.

Spørgsmål 4

En uendelig række er givet ved

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{a^n} ,$$

hvor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rækken er konvergent for

- [ ] $a \geq e^{-2}$.
- [ ] $|a| \geq e^{-2}$.
- [x] $|a| > e^{-2}$.
- [ ] $|a| > e^{2}$.
- [ ] $a < e^{-2}$.

Spørgsmål 5

For de a hvor rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-2n}}{a^n}$$

fra spørgsmål 4 er konvergent, er rækkens sum S lig med

- [ ] $S = \dfrac{a}{a - e^{-2}}$.
- [x] $S = \dfrac{e^{-4}}{a(a - e^{-2})}$.
- [ ] $S = \dfrac{1}{ae^{4} - e^{2}}$.
- [ ] $S = \dfrac{e^{-4}}{a(a - e^{2})}$.
- [ ] $S = \dfrac{e^{-2}}{a - e^{-2}}$.

Side 2

Spørgsmålgruppe 2

Spørgsmål 6

Bestem konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n+n^2} x^n \,.$$

Konvergensradius er

- [ ] $\rho = 1/2$.
- [ ] $\rho = 1$.
- [ ] $\rho = \infty$.
- [x] $\rho = 2$.
- [ ] $\rho = 0$.

Spørgsmål 7

En homogen lineær differentialligning har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3+i)(\lambda+3-i) \,.$$

Den fuldstændige reelle løsning er

- [ ] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 t e^{-3t}\cos(t)$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}\cos(t) + c_3 e^{3t}\sin(t)$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [x] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 e^{-3t}\sin(t)$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}\cos(t) + c_3 e^{-3t}\sin(t)$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}\cos(3t) + c_3 e^{-t}\sin(3t)$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål 8

Vi betragter den inhomogene differentialligning

$$y'' + ay' + \omega^2 y = 3\cos(t) + 2\sin(4t) \,,$$

hvor y er en funktion af $t \in \mathbb{R}$. Den stationære løsning er

- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2+1+ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2+16+i4a}\right)$.
- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{t}}{\omega^2-1+ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{4t}}{\omega^2-16+i4a}\right)$.
- [ ] $y(t) = 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2-1+ia}\right) + 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2-16+i4a}\right)$.
- [x] $y(t) = 3\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2-1+ia}\right) + 2\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2-16+i4a}\right)$.
- [ ] $y(t) = 3\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i4t}}{\omega^2-16+i4a}\right) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{\omega^2-1+ia}\right)$.

Spørgsmål 9

Et differentialligningssystem

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix} \ ,$$

hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Systemet er asymptotisk stabilt hvis og kun hvis

- [ ] $ab > 14$.
- [ ] $b > 8/a$, for $a > 0$.
- [ ] $8 < ab < 15$.
- [ ] $b > \dfrac{15}{a}$, for $a \neq 0$.
- [x] $ab < 8$.

Spørgsmål 10

Et 3×3 differentialligningssystem

$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

har systemmatricen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Den fuldstændige reelle løsning til differentialligningssystemet er

- [ ] $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [ ] $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [x] $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
- [ ] $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Side 3

Spørgsmålgruppe 3

Spørgsmål 11

Fourierkoefficienterne for en Fourierrække på reel form er

$$a_n = 0\ , \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$
$$b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}\ , \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, ...\ .$$

Den tilhørende Fourierrække på kompleks form er

- [x] $\sum_{n=-\infty}^{-1} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx}\ .$
- [ ] $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{inx}\ .$
- [ ] $\sum_{n=-\infty}^{-1} i\frac{(-1)^n}{2n^2}e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} i\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}e^{inx}\ .$
- [ ] $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} i\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}e^{inx}\ .$

Spørgsmål 12

Et inhomogent differentialligningssystem

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \quad y(t) = \mathbf{d}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

har overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4}\ , \quad \text{hvor} \quad s \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{15}\ .$$

Bestem den stationære løsning for påvirkningen

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3}{n^2+1}e^{int}\ .$$

Svaret er

- [ ] $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2+in)}{(n^2+1)(n^4+16-7n^2)}e^{int}\ .$
- [x] $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2-in)}{(n^2+1)((4-n^2)^2+n^2)}e^{int}\ .$
- [ ] $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(4-n^2-in)}{(n^2+1)(n^4+16-9n^2)}e^{int}\ .$
- [ ] $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6(n^2-4-in)}{(n^2+1)((n^2-4)^2+n^2)}e^{int}\ .$
- [ ] $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{6}{n^2+1}\frac{1}{s^2+s+4}e^{st}\ .$

Spørgsmål 13

En uendelig række R med varierende led er givet ved

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(nt) - \sin(2nt)}{n^2+1} \ .$$

Hvilket af følgende udsagn er korrekt?

- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$,
R er uniform konvergent og sumfunktionen er kontinuert.

- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+1}$,
R er punktvis konvergent men ikke uniform konvergent.

- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$,
R er punktvis konvergent og sumfunktionen har diskontinuitetspunkter.

- [ ] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$
og R er divergent.

- [x] R har majorantrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$,
R er uniform konvergent og sumfunktionen er kontinuert.

Spørgsmål 14

En lige og 2π-periodisk funktion f er i intervallet $[0;\pi]$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin(4x) & \text{for} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{4} \ , \\ 0 & \text{for} \quad \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \ . \end{cases}$$

Bestem Fourierkoefficienterne på reel form i Fourierrækken for f . Svaret er

- [ ] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi)-1)}{\pi(n^2-16)}$ for $n = 1,2,3,5,6\dots$,
$a_4 = 0$ og $b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\dots$.

- [ ] $a_n = 0$ for $n = 0,1,2,3,4\dots$ og
$b_n = \frac{-8\sin(n\pi/4)}{\pi(n^2-16)}$ for $n = 1,2,3,4\dots$.

- [x] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi/4)+1)}{\pi(16-n^2)}$ for $n = 1,2,3,5,6\dots$,
$a_4 = 0$ og $b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\dots$.

- [ ] $a_0 = \frac{1}{\pi}$, $a_n = \frac{8(\cos(n\pi/4)+1)}{\pi(16-n^2)}$ for $n = 1,2,3,4\dots$ og
$b_n = 0$ for $n = 1,2,3,4\dots$.

Spørgsmål 15

En differentialligning med variable koefficienter er givet ved

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+2)y = 0 \ ,$$

hvor $x \in \mathbb{R}$. Vi betragter en potensrækkeløsning til differentialligningen på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Bestem en rekursionsformel for a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Svaret er

- [ ] $a_{n+2} = \dfrac{-2a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+1)}$ for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,
  hvor a_0 og a_1 er arbitrære konstanter.

- [ ] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ for $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$,
  med $a_0 = 0$ og hvor a_1 er en arbitrær konstant.

- [x] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+1)n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$,
  med $a_0 = 0$ og hvor a_1 er en arbitrær konstant.

- [ ] $a_{n+1} = \dfrac{-2a_n - a_{n-1}}{(n+1)n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$,
  hvor a_0 er en arbitrær konstant og
  $a_1 = -(3/2)a_0$.

Side 4

Spørgsmålgruppe 4

Spørgsmål 16

Vi betragter den konvergente uendelige række med variable led

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^3+n}$$

med sumfunktion S og hvor $t \in \mathbb{R}$. Vi ønsker at bestemme en afsnitssum S_N, der approksimerer S med en fejl mindre end eller lig med $\varepsilon = 10^{-2}$.
Bestem det mindste N_0 blandt tallene

$\{4, 9, 21, 99, 999\}$

der fører til at

$|S(t) - S_N(t)| \leq 10^{-2}$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og for alle $N \geq N_0$. N_0 er

- [ ] $N_0 = 4$.
- [x] $N_0 = 9$.
- [ ] $N_0 = 21$.
- [ ] $N_0 = 99$.
- [ ] $N_0 = 999$.

Spørgsmål 17

En lineær 6. ordens differentialligning for $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har det karakteristiske polynomium

$P(\lambda) = (\lambda^2 + 25)^3$.

Den fuldstændige reelle løsning er

- [ ] $y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 t e^{-5t} + c_3 t^2 e^{-5t} + c_4 e^{5t} + c_5 t e^{5t} + c_6 t^2 e^{5t}$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.
- [ ] $y(t) = c_1 e^{-t} \cos(5t) + c_2 t e^{-t} \cos(5t) + c_3 t^2 e^{-t} \cos(5t) + c_4 e^{-t} \sin(5t) + c_5 t e^{-t} \sin(5t) + c_6 t^2 e^{-t} \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1 e^{-5t} \cos(t) + c_2 t e^{-5t} \cos(t) + c_3 t^2 e^{-5t} \cos(t) + c_4 e^{-5t} \sin(t) + c_5 t e^{-5t} \sin(t) + c_6 t^2 e^{-5t} \sin(t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- [ ] $y(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 t \cos(5t) + c_3 \sin(5t) + c_4 t \sin(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- [x] $y(t) = c_1 \sin(5t) + c_2 t \sin(5t) + c_3 t^2 \sin(5t) + c_4 \cos(5t) + c_5 t \cos(5t) + c_6 t^2 \cos(5t)$, hvor $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Spørgsmål 18

En inhomogen differentialligning med en variabel koefficient er givet ved

$$t\frac{dy}{dt} + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(1-(-1)^{n+1})\frac{1}{n!}t^{n+1} \; .$$

Vi søger en potensrækkeløsning på formen

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \; .$$

Bestem a_n , $n = 0, 1, 2, \ldots$. Den 4. afsnitssum

$$S_4(t) = \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$$

for potensrækken for y er

- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{30}t^4$.
- [x] $S_4(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^3$.
- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}t^3$.
- [ ] $S_4(t) = a_0 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^3$, $\;$ hvor a_0 er en arbitrær konstant.
- [ ] $S_4(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{16}t^3$.
- [ ] $S_4(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{30}t^4$.

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 14. maj 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035

Navn:

Studienummer:

Del A: Multiple-choice

NB. Multiple-choice spørgsmålene stilles og besvares elektronisk.
Denne papirversion skal kun bruges, hvis det er umuligt at bruge den elektroniske version. I dette tilfælde afkrydses svarene på dette ark, som afleveres. Husk, at angive navn og studienummer.
Vejledning til del A:
- Der er kun én korrekt svarmulighed per spørgsmål.
- Man kan vælge mere end én svarmulighed, hvilket giver delvise point.
- Hvis man svarer forkert, giver det negative point.
- Blindt gætteri giver i gennemsnit nul point.

(i) Betragt de to uendelige rækker:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

☐ a) Både R og S er betinget konvergent.

☐ b) Både R og S er absolut konvergent.

☐ c) R er absolut konvergent og S er divergent.

☐ d) R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.

☐ e) R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.

☐ f) R er betinget konvergent og S er divergent.

(ii) En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]. \end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

☐ a) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(\gamma)$.

☐ b) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma}\cos(\gamma)$.

☐ c) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\gamma)$.

☐ d) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\cos(\gamma)$.

☐ e) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma}\sin(2\pi x\gamma)$.

☐ f) $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi x}\cos(\pi\gamma x)$.

(iii) Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen A har det karakteristiske polynomium:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

☐ a) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

☐ b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{t} \\ e^t & 2e^{t} \end{pmatrix}$.

☐ c) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

☐ d) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{t} \end{pmatrix}$.

☐ e) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^{t} \end{pmatrix}$.

☐ f) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$.

(iv) Konvergenradius ρ for potensrækken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2+2n+1} x^n$ er:

☐ a) $\rho = 0$.
☐ b) $\rho = \frac{1}{4}$.
☐ c) $\rho = 1$.
☐ d) $\rho = 4$.
☐ e) $\rho = \infty$.
☐ f) $\rho = \frac{1}{2}$.

(v) Betragt differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 e^t \,.$$

Ved at sætte : $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, kan differentialligningen omskrives som:

☐ a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ c) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$.

☐ d) $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$.

☐ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$.

☐ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$.

Opgavesættet fortsætter!

(vi) Fourierrækken $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$ har reel form:

- ☐ a) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ b) $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ c) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ d) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} \cos(nt)$.
- ☐ e) $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1} \sin(nt)$.
- ☐ f) $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1} \cos(nt) - \frac{2}{n^4+1} \sin(nt)\right)$.

(vii) Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialigningen omksrives som et 1. ordens system, så er systemmatricen:

☐ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(viii) Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ er:

- ☐ a) $\frac{\pi^2}{9}$.
- ☐ b) $\frac{\pi^3}{3}$.
- ☐ c) 2.
- ☐ d) $\frac{1}{3}$.
- ☐ e) $\frac{9}{8}$.
- ☐ f) $\frac{1}{2}$.

——————oooOooo——————

Del A er slut. Husk, at svare på del B

Eksamen_maj2018_delA

Side 1

Vis rigtige svar
Skjul rigtige svar

Der er 8 spørgsmål i alt, på 2 sider. Side 1:

Spørgsmål 1

Betragt de to uendelige rækker:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n^4+2n+1}, \qquad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Hvilket udsagn er sandt?

- [ ] Både R og S er betinget konvergent.
- [ ] Både R og S er absolut konvergent.
- [ ] R er absolut konvergent og S er divergent.
- [x] R er absolut konvergent og S er betinget konvergent.
- [ ] R er betinget konvergent og S er absolut konvergent.
- [ ] R er betinget konvergent og S er divergent.

Spørgsmål 2

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}] \\ 0, & x \notin [-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]. \end{cases}$$

Fouriertransformationen af f er:

- [x] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma} \sin(\gamma)$
- [ ] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma} \cos(\gamma)$
- [ ] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \sin(2\pi\gamma)$
- [ ] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \cos(\gamma)$
- [ ] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi\gamma} \sin(2\pi x\gamma)$
- [ ] $\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\pi x} \cos(\pi\gamma x)$

Spørgsmål 3

Om et lineært differentialligningssystem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}$ oplyses, at systemmatricen *A* har det karakteristiske polynomium

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

Netop én af følgende matricer kunne være fundamentalmatricen til systemet. Hvilken er det?

- [ ] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- [ ] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix}$
- [x] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^{-t} \end{pmatrix}$
- [ ] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- [ ] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$
- [ ] $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

Spørgsmål 4

Konvergensradius ρ for potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2 + 2n + 1} x^n$$

er:

- [ ] $\rho = 0$
- [ ] $\rho = \frac{1}{4}$
- [ ] $\rho = 1$
- [ ] $\rho = 4$
- [ ] $\rho = \infty$
- [x] $\rho = \frac{1}{2}$

Side 2

Side 2.

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = t^2e^t\ .$$

Ved at sætte :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

kan differentialligningen omskrives som:

- [x] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + 3c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$
- [ ] $2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (2n+1)c_n\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)nc_{n+2} + (n+2)c_n\right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$
- [ ] $\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_{n+1} + 2c_n\right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+2)!}$

Spørgsmål 6

Fourierrækken

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{n^4+1} e^{int}$$

har reel form:

- [ ] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [x] $f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4+1}\cos(nt)$
- [ ] $f(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4+1}\sin(nt)$
- [ ] $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^4+1}\cos(nt) - \frac{2}{n^4+1}\sin(nt)\right)$

Spørgsmål 7

Det oplyses, at en homogen lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter har karakterligning:

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Hvis differentialligningen omksrives som et 1.~ordens system, så er systemmatricen:

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Spørgsmål 8

Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at dens Fourierrække er givet ved

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{3^n} \sin(nx) \right).$$

Tallet

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 x$$

er:

- $\frac{\pi^2}{9}$
- $\frac{\pi^3}{3}$
- 2
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{9}{8}$
- $\frac{1}{2}$

DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 9. december 2018
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Multiple-choice(stilles elektronisk): 40%, Opgave 1: 10%, Opgave 2: 25%, Opgave 3: 10% og Opgave 4: 15%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. For at opnå fuldt point i del B skal alle svar begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang.

NB. Eksamen består af 2 dele: En elektronisk multiple-choice opgave (**Del A**) og denne (**Del B**).

- **Del A stilles og besvares elektronisk**. I tilfælde af at den elektroniske multiple-choice ikke virker, findes den på papir i alle eksamenslokaler.
- **Del B stilles nedenfor**, og kan afleveres enten elektronisk eller på papir.

Del B

Opgave 1

Betragt rækken,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\,, \quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{1}$$

(i) Find et $a>0$, så rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2}$ er en majorantrække for (1).

(ii) Bestem et $N\in\mathbb{N}$, så

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| < 0.01\,, \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Opgave 2

Betragt systemet af førsteordens differentialligninger

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{2}$$

hvor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ og

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+a & a & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & -1 & -2-a \end{pmatrix}.$$

Matricen $\mathbf{A}$ afhænger af en parameter $a \in \mathbb{R}$.

(i) Bestem egenværdierne for $\mathbf{A}$ og de værdier af a for hvilke systemet (2) er asymptotisk stabilt.

(ii) Sæt $a = -1$ i $\mathbf{A}$. Afgør om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

(iii) Sæt $a = -2$ i $\mathbf{A}$. Afgør om systemet er stabilt, asymptotisk stabilt eller ustabilt.

Sæt nu $a = 0$ og betragt systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(iv) Givet $a = 0$, find en partikulær løsning til ligningssystemet (3).

Opgave 3

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er 2π-periodisk og lige. For en parameter $0 < a < \pi$ er f på intervallet $[0, \pi]$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0, a[, \\ b & \text{for } x = a, \\ 0 & \text{for } x \in \,]a, \pi]. \end{cases}$$

(i) Vis, at f har Fourierrækken

$$\frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(a\,n)}{n}\cos(n\,x)\,. \tag{4}$$

(ii) Bestem værdien af b således, at Fourierrækken for f konvergerer mod $f(x)$ for alle x. Er konvergensen uniform?

Opgavesættet fortsætter!

Opgave 4

Antag, at den homogene differentialligning

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2\, y = 0\,. \tag{5}$$

har en løsning, der kan skrives som en potensrække, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, med konvergensradius $\rho > 0$.

(i) Vis, ved indsættelse i differentialligningen, at $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ og bestem en rekursionsformel for a_n, $n \geq 3$.

Det oplyses nu, at

$$a_{3m} = \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{3}\right)^m a_0\,, \quad a_{3m+1} = 0\,, \quad a_{3m+2} = 0\,, \quad \text{for } m \geq 0\,. \tag{6}$$

(ii) Givet (6), bestem konvergensradius ρ for rækkeløsningen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{3m} x^{3m}\,.$$

————oooOooo————

Del B slut. Husk at svare på del A (Multiple Choice).

Løsning til Mat eksamen E18 Del B

Opgave 1:
(i) Vi har

$$\left|\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| \le \frac{2|\cos(n^2x)|+|\sin(nx^2)|}{1+n^2} \le \frac{3}{1+n^2} \le \frac{3}{n^2}\,.$$

Så hvis $a \ge 3$ har vi en majorantrække.
(ii) Vi har

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right|$$
$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{2\cos(n^2x)+\sin(nx^2)}{1+n^2}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{1+n^2} \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{n^2} \le \int_N^\infty \frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{N}\,.$$

Så vi ønsker

$$\frac{a}{N} < 0.01 \iff N > 100a\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > 300$. Hvis vi bruger bogens vurdering, får vi

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < 0.01 \iff 100a(N+2) < (N+1)^2 \iff N > 50a - 1 + 10\sqrt{25a^2+a}\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > 149 + 10\sqrt{228} \approx 299.99$, dvs., $N \ge 300$. Alternativt

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < \frac{2a}{N+1} < 0.01 \iff N+1 > 200a \iff N > 200a - 1\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N \ge 600$. Eller lidt bedre, idet $N \ge 1$:

$$\frac{a}{N+1} + \frac{a}{(N+1)^2} < \frac{a}{N+1} + \frac{a}{2(N+1)} < \frac{3a}{2(N+1)} < 0.01 \iff N > 150a - 1\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N \ge 450$. Endelig kan vi bruge vurderingen

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a}{1+n^2} \le \int_N^\infty \frac{a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan N\right)\,,$$

og dermed fås vurderingen

$$a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan N\right) < 0.01 \iff a\arctan N > a\frac{\pi}{2} - 0.01 \iff N > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{0.01}{a}\right)\,.$$

Hvis $a = 3$ fås $N > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{0.01}{3}\right) \approx 299.99$, dvs., $N \ge 300$. Hvis bogens vurdering bruges, fås

$$a\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(N+1) + \frac{1}{1+(N+1)^2}\right) < 0.01\,.$$

Hvia $a = 3$ ses ved plot af venstresiden $-$ højresiden, at $N \ge 300$. Det kan verificeres ved indsættelse:

$$3\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(301) + \frac{1}{1+(301)^2}\right) \approx 0.009999 < 0.01\,.$$

Opgave 2:
(i) Vi har

$$\det\begin{pmatrix} 1+a-\lambda & a & 0 \\ 0 & 1+a-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -2-a-\lambda \end{pmatrix} = (1+a-\lambda)^2(-2-a-\lambda)\,.$$

Så egenværdierne er $1+a$ (dobbelt) og $-2-a$. Systemet er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis de er negative, vi skal altså have, at $1+a<0 \iff a<-1$ og $-2-a<0 \iff a>-2$, dvs. $a\in]-2,-1[$.
(ii) Hvis $a=-1$, har vi dobbeltroden 0 og systemmatricen er

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

som har rang 2. Den geometriske multiplicitet af 0 er altså kun 1, og systemet er dermed ustabilt.
(iii) hvis $a=-2$, har vi dobbeltroden -1 og den simple rod 0, systemet er dermed stabilt.
(iv) Hvis $a=0$, har vi systemmatricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\,,$$

med den dobbelte egenværdi 1 og den simple egenværdi -2 Da -1 ikke er en egenværdi, gætter vi på en løsning af formen $\mathbf{x}=\mathbf{v}e^{-t}$. Ved indsættelse fås ligningen

$$-\mathbf{v}e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v}e^{-t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

som har løsningen $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$, dvs. differentialligningssystemet har løsningen $\mathbf{x}=e^{-t}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$.

Opgave 3:
(i) Da f er lige, har vi $b_n=0$,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^a 1\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\,, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^a \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^a = \frac{2}{\pi}\frac{\sin an}{n}\,, \quad n\in\mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

og

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin an}{n}\cos nx\,.$$

(ii) Da $(f(a-)+f(a^+))/2 = (1+0)/2 = 1/2$ skal vi have $b=1/2$. Da f ikke er kontinuert, er konvergensen ikke uniform.

Opgave 4:
(i) vi har,

$$x^2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-1}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,,$$

så

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty}(n a_n - a_{n-3})x^{n-1}\,.$$

Vi får dermed ligningerne

$$a_1 = 0\,, \quad a_2 = 0\,, \quad \text{og} \quad n a_n - a_{n-3} = 0 \iff a_n = \frac{a_{n-3}}{n}\,, \quad n \geq 3\,.$$

Alternative omskrivninger er

$$x^2 y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n\,, \qquad x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n\,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=-2}^{\infty}(n+3)a_{n+3}x^{n+2}\,,$$

som leder til rekursionsformlerne

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-2}}{n+1}\,, \quad n \geq 2\,, \qquad a_{n+3} = \frac{a_n}{n+3}\,, \quad n \geq 0\,.$$

(ii) Vi har

$$\left|\frac{a_{3(m+1)}x^{3(m+1)}}{a_{3m}x^{3m}}\right| = \frac{1/(m+1)!\,(1/3)^{m+1}|a_0||x|^3}{1/m!\,(1/3)^m|a_0|} = \frac{|x|^3}{(m+1)3} \to 0\,, \quad \text{for } m \to \infty\,.$$

Kvotientkriteriet giver altså, at rækken konvergerer for alle x og dermed er konvergensradius $\rho = \infty$.

Mat 2 Eksamen Del A på Dansk

Side 1

Vis rigtige svar

Skjul rigtige svar

Spørgsmål 1

Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+n)}{n^4+1}$$

er

- [x] absolut konvergent
- [ ] betinget konvergent
- [ ] divergent

Spørgsmål 2

Rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$$

er

- [x] absolut konvergent
- [ ] betinget konvergent
- [ ] divergent

Spørgsmål 3

Om et differentialligningssystem

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

oplyses det, at det karakteristiske polynomium $P(\lambda)$ er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{1}{a}\lambda + a, \quad a \neq 0.$$

Systemet er asymptotisk stabilt, hvis og kun hvis

- [ ] $a > 0$
- [ ] $a > \sqrt{2}$
- [ ] $a > 2$
- [x] $0 < a < \sqrt{2}$
- [ ] $0 < a < 2$
- [ ] $\sqrt{2} < a < 2$

Spørgsmål 4

Betragt den lineære differentialligning

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = u + \frac{du}{dt}$$

Med påvirkningen $u(t) = e^{st}$ er forskriften for overføringsfunktionen givet ved

- [ ] $H(s) = \dfrac{1}{s^3 - s^2 + s - 1}$
- [ ] $H(s) = \dfrac{1+s}{s^3 - s^2 + s - 1}$
- [ ] $H(s) = \dfrac{1-s}{s^3 - s^2 + s - 1}$
- [ ] $H(s) = \dfrac{1}{s^3 + s^2 + s + 1}$
- [x] $H(s) = \dfrac{1+s}{s^3 + s^2 + s + 1}$
- [ ] $H(s) = \dfrac{1-s}{s^3 + s^2 + s + 1}$

Spørgsmål 5

Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - x = 4e^t$$

Følgende funktion er løsning til differentialligningen

- [ ] $x(t) = e^t - te^{-t}$
- [x] $x(t) = te^t - te^{-t}$
- [ ] $x(t) = t^2e^t - e^{-t}$
- [ ] $x(t) = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}te^{-t}$

Spørgsmål 6

Betragt rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n}(x+8)^{3n}$$

hvor $x \in \mathbb{R}$.

Rækken er konvergent hvis og kun hvis

- [ ] $-16 < x < -8$
- [x] $-10 < x < -6$
- [ ] $-8 < x < -4$
- [ ] $8 < x < 16$
- [ ] $6 < x < 10$
- [ ] $4 < x < 8$

Side 3

Spørgsmål 7

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den 2π-periodiske funktion givet ved

$f(x) = 4 + 4\cos 7x + 6\sin 7x$

Betragt Fourierrækken på kompleks form

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

De komplekse Fourierkoefficienter for f er

- [ ] $c_0 = 2,\ c_7 = 2+3i,\ c_{-7} = 2-3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$.
- [ ] $c_0 = 2,\ c_7 = 2-3i,\ c_{-7} = 2+3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$.
- [ ] $c_0 = 4,\ c_7 = 2+3i,\ c_{-7} = 2-3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$
- [x] $c_0 = 4,\ c_7 = 2-3i,\ c_{-7} = 2+3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$.
- [ ] $c_0 = 8,\ c_7 = 2+3i,\ c_{-7} = 2-3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$.
- [ ] $c_0 = 8,\ c_7 = 2-3i,\ c_{-7} = 2+3i$ og $c_n = 0$ ellers, dvs for alle $n \notin \{-7, 0, 7\}$.