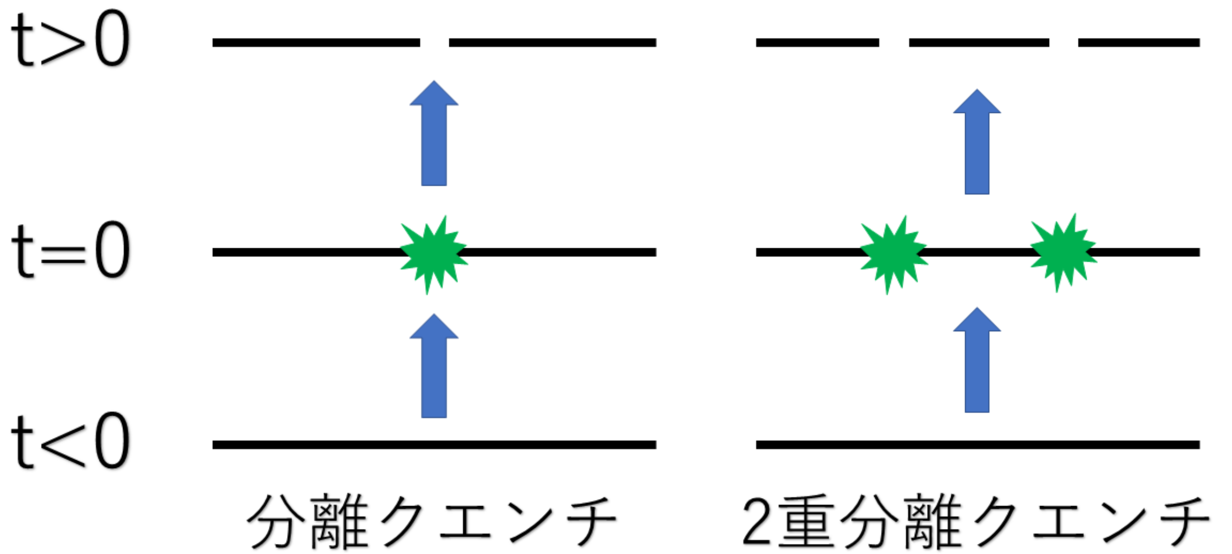
重力双対を持つ2次元共形場理論における分離クエンチ

基礎物理学研究所　素粒子論研究室
島地哲平

① 島地, T.Takayanagi, Z. Wei, *JHEP*, 2019.
② P.Caputa, T.Numasawa, 島地, T.Takayanagi, Z.Wei, *JHEP*, 2019.
に基づく

導入：分離クエンチとは？

- 1次元量子系の、ある点での相互作用を時刻 $t = 0$ で瞬時に切ること
- 冷却原子気体を用いた実験（M.Gring et al., Science 2012）



→ 孤立量子系の熱平衡化を実験的・理論的に調べることができる

内容

２次元共形場理論の真空を分離クエンチして、エンタングルメントエントロピー(EE)の時間発展を調べた

→臨界点上の量子系の熱平衡化の理解につながる

結果

① 重力双対をもつ共形場理論での急速な緩和時間を確認した

② 反ドジッター時空の重力の効果を用いて、EEについてのある不等式を予想した

内容

2次元共形場理論の真空を分離クエンチして、エンタングルメントエントロピー(EE)の時間発展を調べた

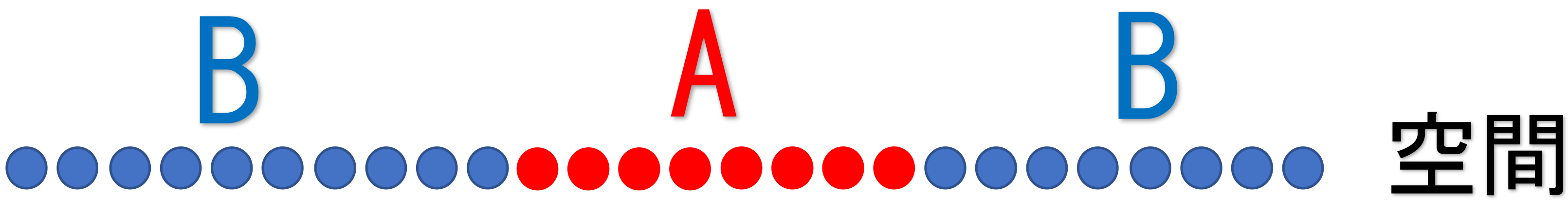
→臨界点上の量子系の熱平衡化の理解につながる

結果

① 重力双対をもつ共形場理論での急速な緩和時間を確認した

② 反ドジッター時空の重力の効果を用いて、EEについてのある不等式を予想した

用語: エンタングルメントエントロピー(EE)とは?



$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\ \rho$$

EE : $S_A = -\mathrm{tr}_A(\rho_A \log \rho_A)$

空間を2つの領域A,Bに分ける。全体の密度行列 ρ を BでトレースしてできるAの密度行列 ρ_A のエントロピーをエンタングルメントエントロピー(EE)という

→ 非平衡量子系でのエントロピーを定義する量
→ EEの下限を与える2-Renyiエントロピーを測る実験(R. Islam et al., Nature 2015)

用語: 2次元共形場理論(CFT)とは？

- 空間1次元 + 時間1次元の、スケール不変な場の理論
  → 臨界点上の1次元量子系を記述する

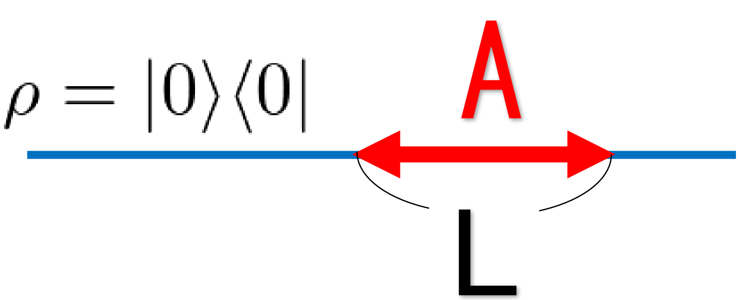
- 中心電荷 c という、系の自由度を表すパラメータを持つ
  例) massless自由ディラック場 → $c=1$
  臨界イジングモデル → $c=1/2$

2次元CFTの真空のEE

$$S_A^{\mathrm{vac}} = \frac{c}{3}\log\frac{L}{\epsilon}$$

（ε :UVカットオフ ）

$\rho = |0\rangle\langle 0|$



用語: 重力双対をもつ2次元CFTとは？

３次元反ドジッター(AdS)時空上の場の物理量に一致する物理量をもつような、特殊なクラスの２次元CFTのこと

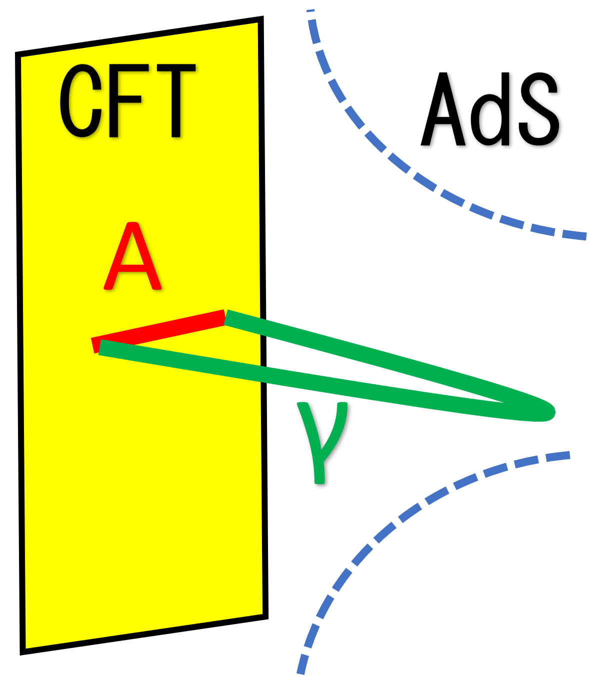
→cf. AdS/CFT対応

$c \gg 1$ (必要条件)

笠-高柳公式

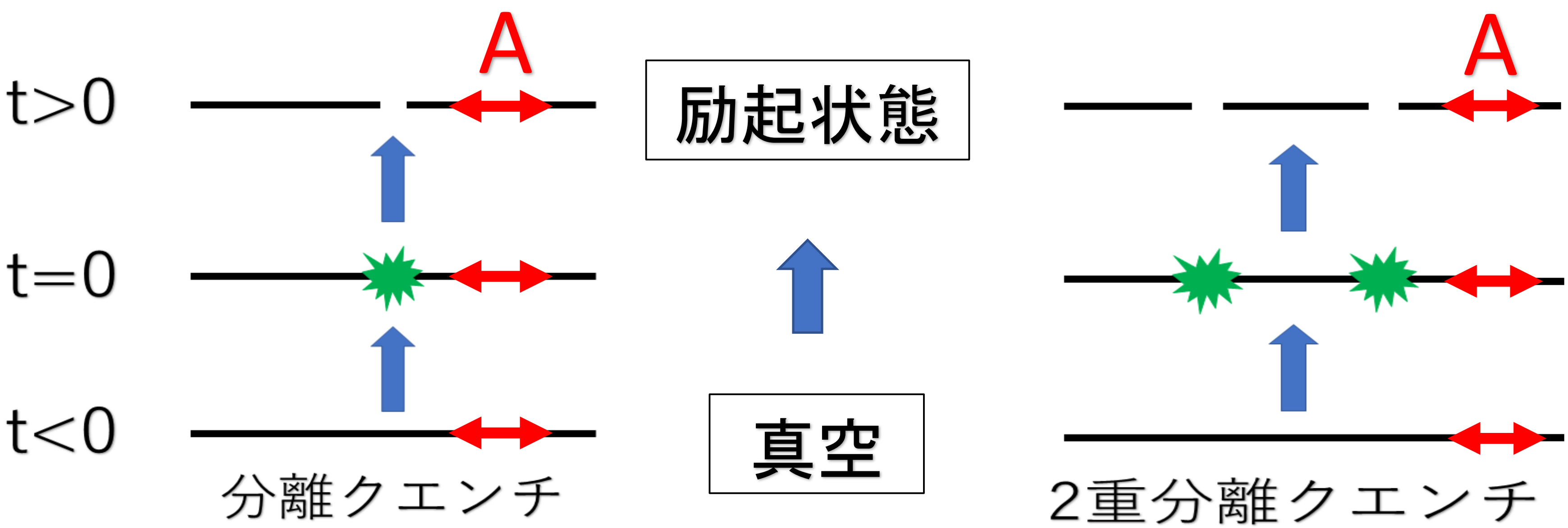
「重力双対をもつCFTの真空のEE
= 測地線の長さ / 4G」

$$S_A^{\mathrm{vac}} = \frac{c}{3}\log\frac{L}{\epsilon} = \min\left(\frac{\gamma\text{の長さ}}{4G}\right)$$



内容

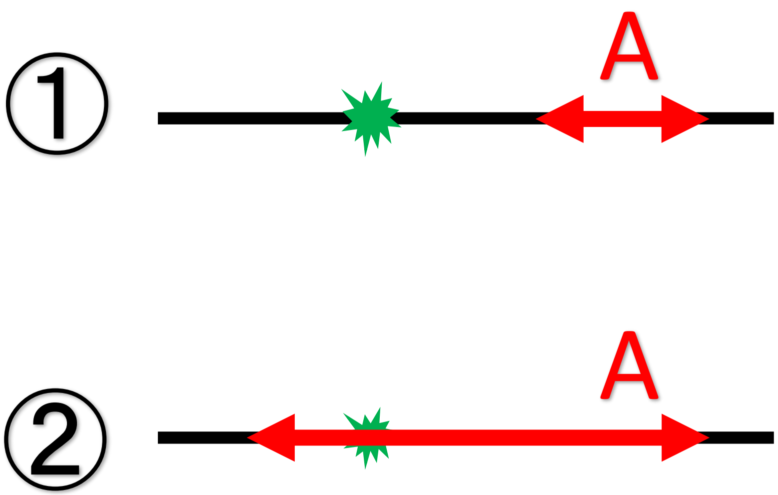
2次元共形場理論の真空を分離クエンチして、エンタングルメントエントロピーの時間発展を調べた

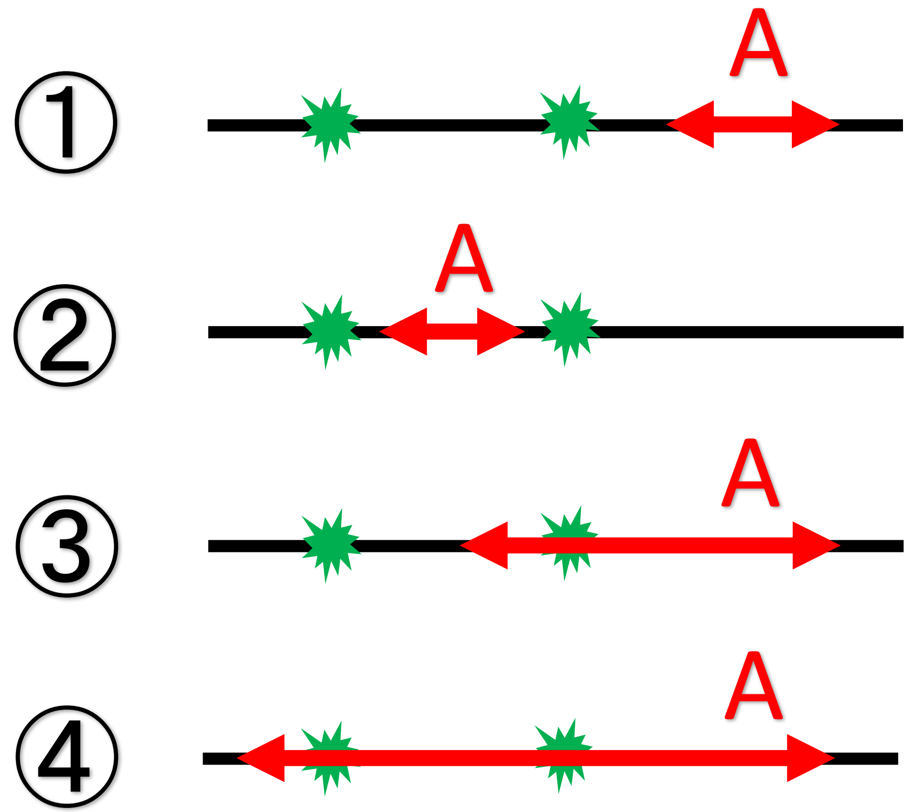


$$S_A^{\mathrm{single}}(t) = \Delta S_A^{\mathrm{single}}(t) + S_A^{\mathrm{vac}}$$

$$S_A^{\mathrm{double}}(t) = \Delta S_A^{\mathrm{double}}(t) + S_A^{\mathrm{vac}}$$

部分系Aの取り方

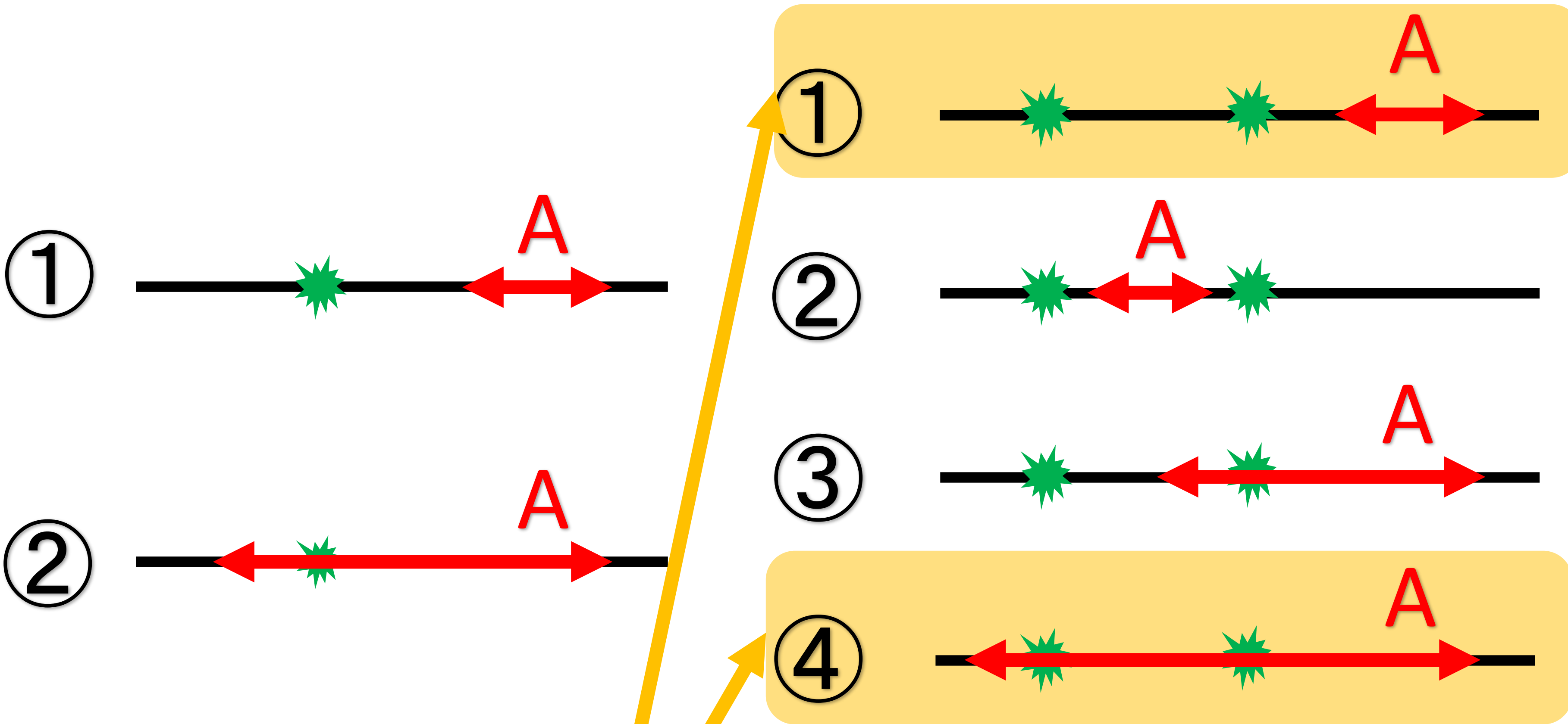




分離クエンチ

２重分離クエンチ

部分系Aの取り方

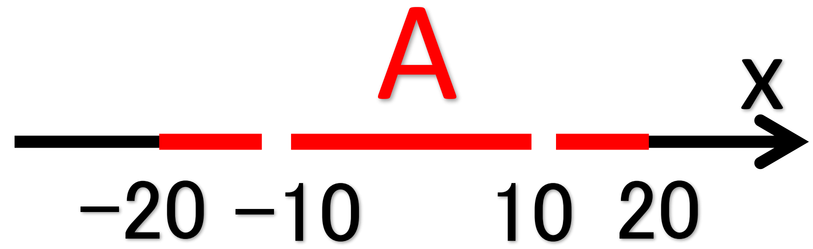


今回は特に、2重分離の①,④を考える

④の結果

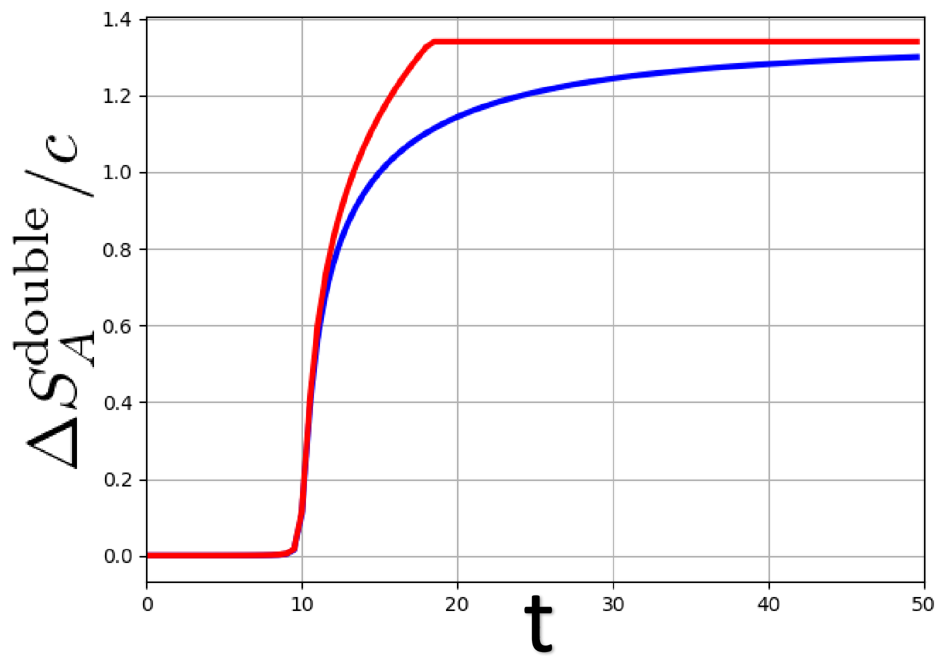
X = ±10で分離する2重分離

クエンチのA=[−20,20]でのEE



青線: massless自由ディラック場

赤線: 重力双対をもつCFT

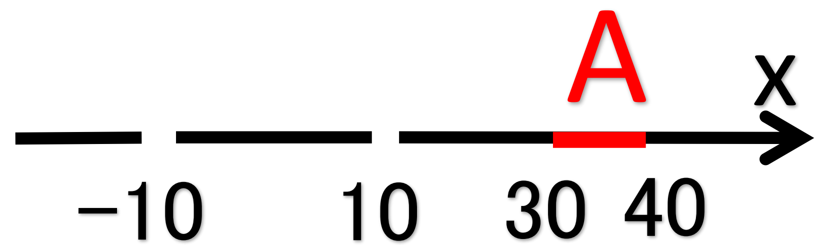


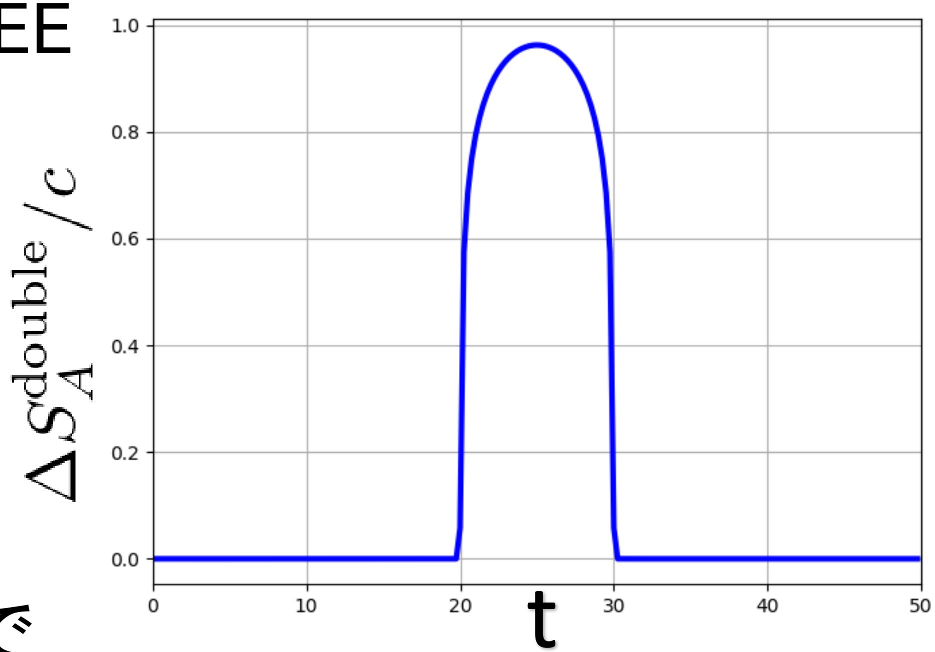
→重力双対をもつCFTは
ディラック場に比べて
急激に緩和する

（cf.重力双対をもつCFTは最も強いカオス性をもつ
(Maldacena,Shenker,Stanford, 2015))

①の結果

重力双対をもつCFT を
X = ±10で分離する2重分離
クエンチのA = [30,40]でのEE



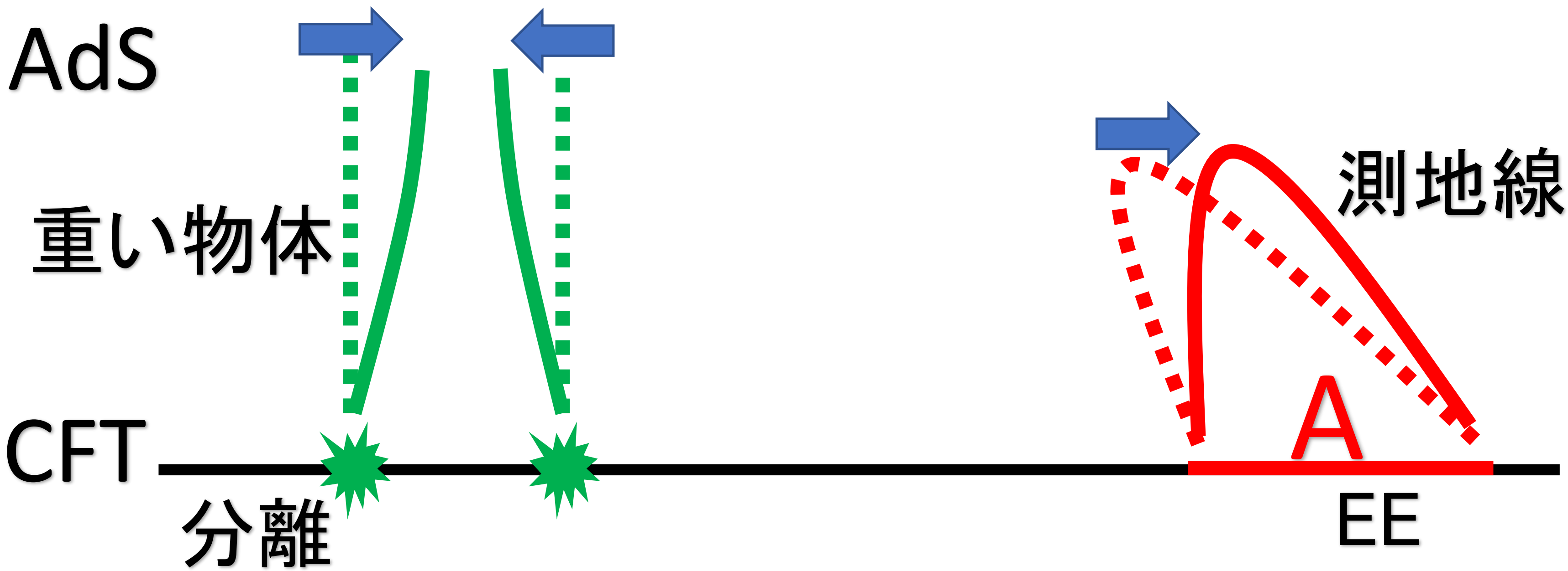


青線: 重力双対をもつCFT

→「分離した」情報が光速で
　伝播し、EEがそれをキャッチする
　("準粒子描像" Calabrese,Cardy 2014)

①の設定の重力双対の予想図

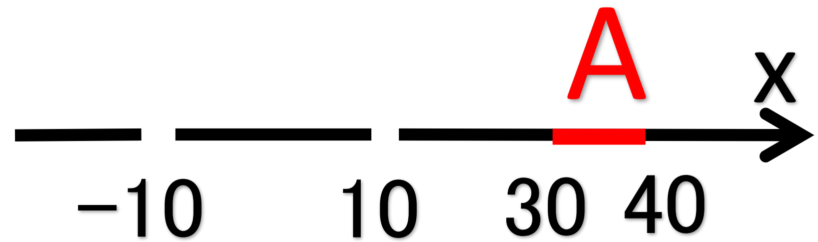
CFTの2つの分離	＝	AdSでの2つの重い物体
CFTのEE	＝	AdSでの測地線の長さ



重い物体が引き合うことで、測地線はより短くなるはず

→ $\Delta S_A^{\mathrm{double}}(t) - (\Delta S_{A,+}^{\mathrm{single}}(t) + \Delta S_{A,-}^{\mathrm{single}}(t)) < 0$ を予想

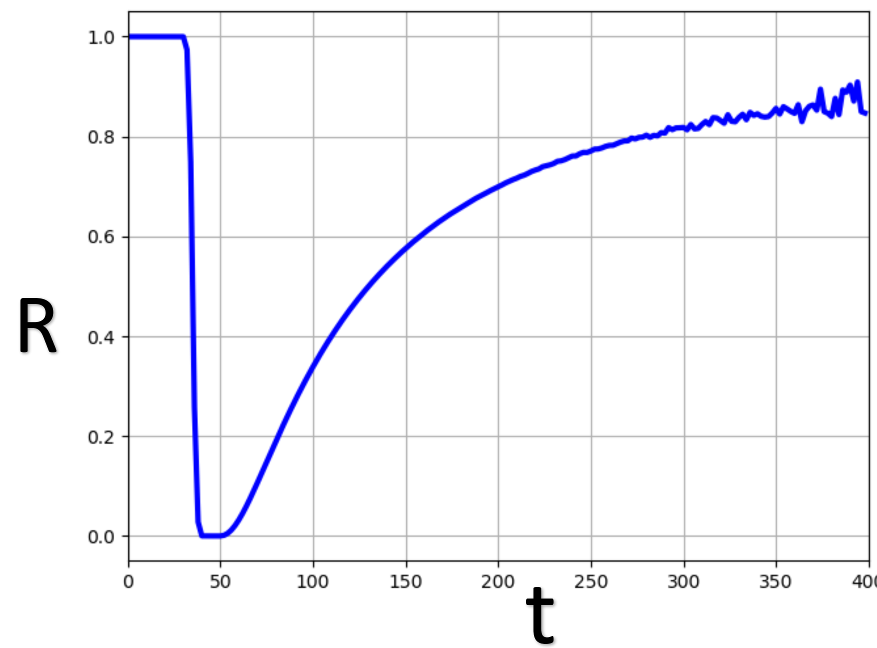
$$\Delta S_A^{\mathrm{double}}(t) - (\Delta S_{A,+}^{\mathrm{single}}(t) + \Delta S_{A,-}^{\mathrm{single}}(t)) < 0$$ の予想



同じ設定で

$$R = \frac{\Delta S_A^{\mathrm{double}}}{\Delta S_{A,+}^{\mathrm{single}} + \Delta S_{A,-}^{\mathrm{single}}}$$

をプロットする



→Aの位置を様々に
　変化させて検証

→Aが分離点から十分離れていれば $R < 1$ が成立

まとめ

２次元CFTの真空を分離クエンチしたときの
エンタングルメントエントロピーの時間発展を調べた

- 重力双対をもつCFTでの急速な緩和時間を確認した

→　重力双対をもつCFTのカオス性の例

- 反ドジッター時空の重力の効果を用いて、EEについての不等式を予想した

→　AdS/CFT対応の検証

今後の課題

強相関系や、AdS/CFTへの応用？　高次元？

補足

境界条件について

- 共形境界条件を用いた。共形対称性を最大限保つ境界条件。

境界を持った 2 次元 Riemann 多様体 Σ 上の共形場理論を考える。境界 $\partial\Sigma$ の単位接線・法線ベクトルを t, n で書くとき、次の境界条件は**共形境界条件 (conformal boundary condition)** と呼ばれる [64]。

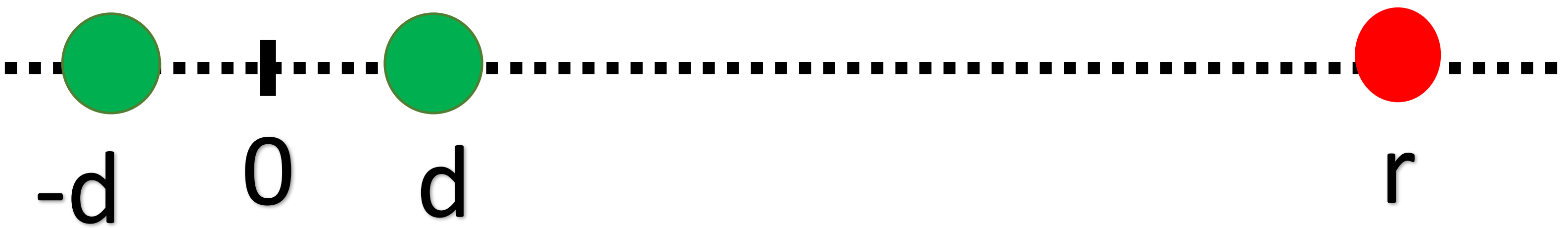
$$T_{\mu\nu} t^{\mu} n^{\nu} = 0 \text{ on } \partial\Sigma \tag{2.76}$$

複素座標では $n = it, \overline{n} = -i\overline{t}$ であり、上の共形境界条件は

$$T_{zz} = T_{\overline{zz}} \text{ on } \partial\Sigma \tag{2.77}$$

と書ける。共形境界条件を課した、境界付き多様体上の共形場理論を**境界共形場理論 (boundary conformal field theory, BCFT)** という。

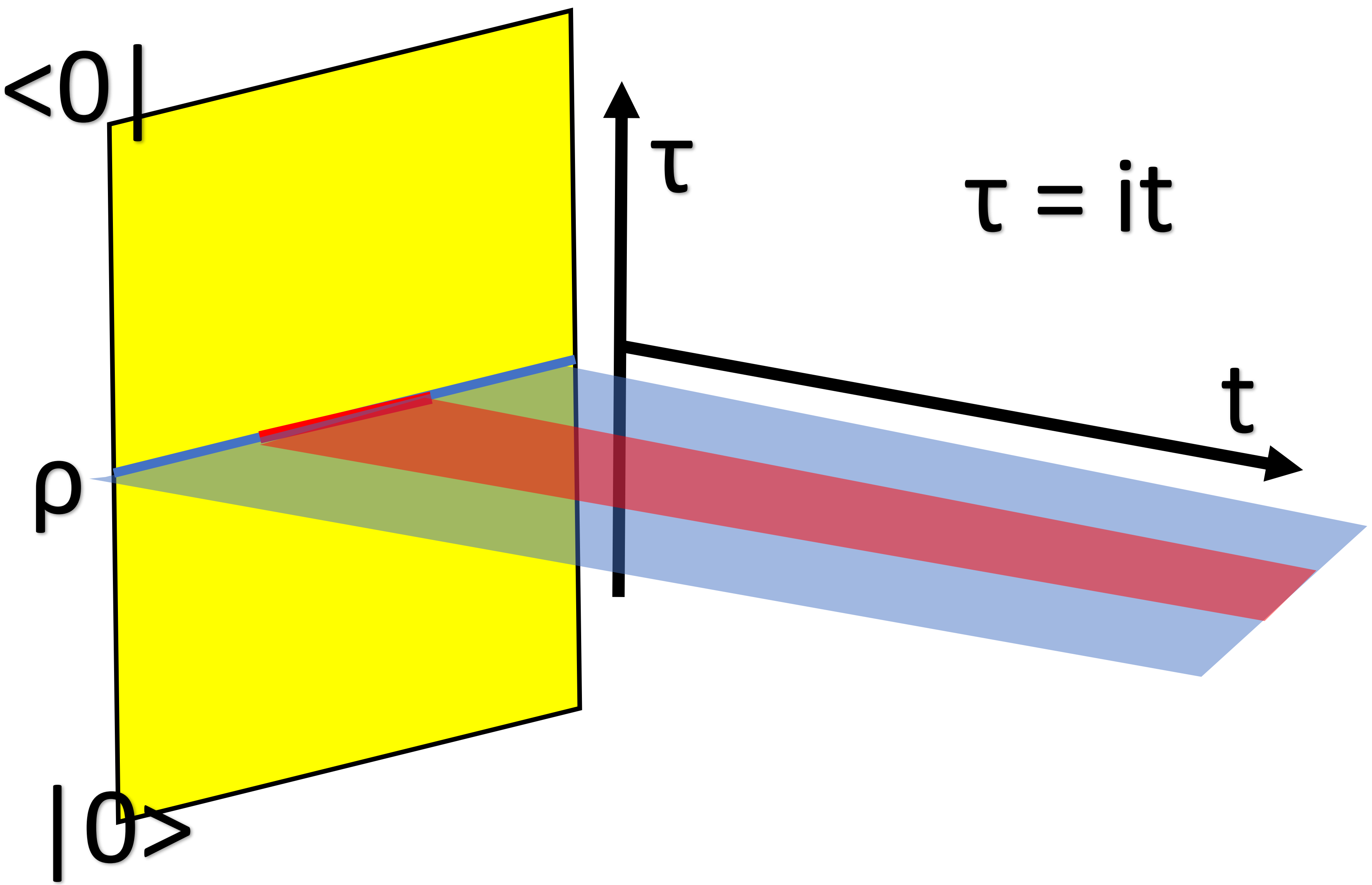
重力のけいさん



$$|F| = \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r-d} = \frac{2r}{r^2 - d^2}$$

２つの物体が近づくほうが、より重力が小さくなる

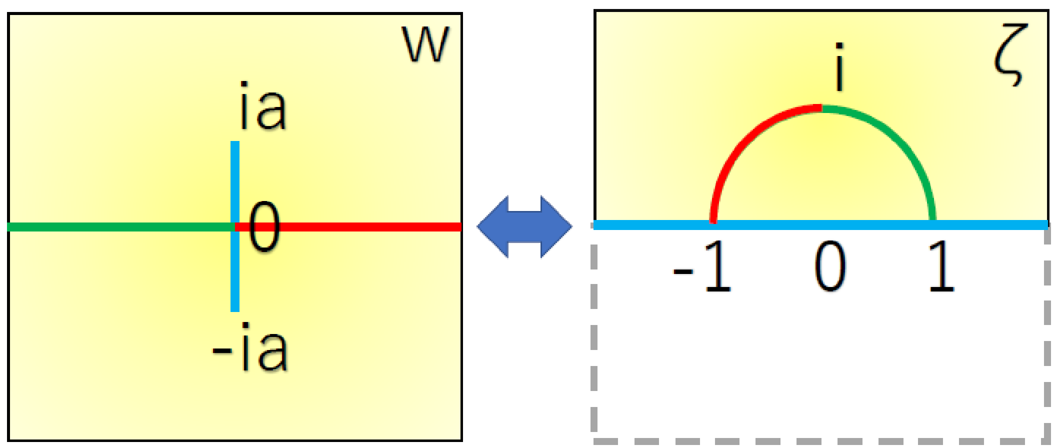
クエンチとレプリカ法



分離クエンチしたディラック場のEE(1)

分離クエンチの虚時間でのセットアップを上半平面に移す

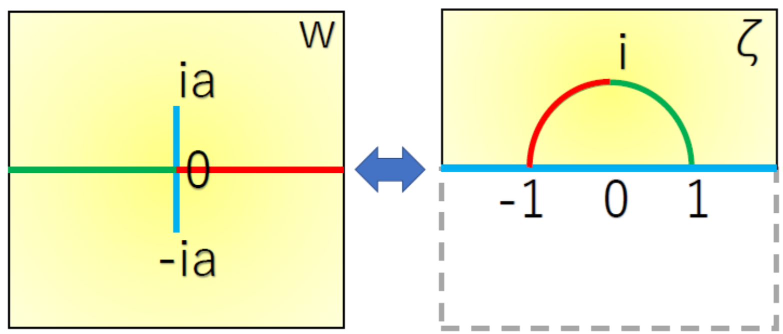
$$\zeta = i\sqrt{\frac{w+ia}{w-ia}} \equiv f(w)$$



分離クエンチしたディラック場のEE(2)

分離クエンチの虚時間でのセットアップを上半平面に移す

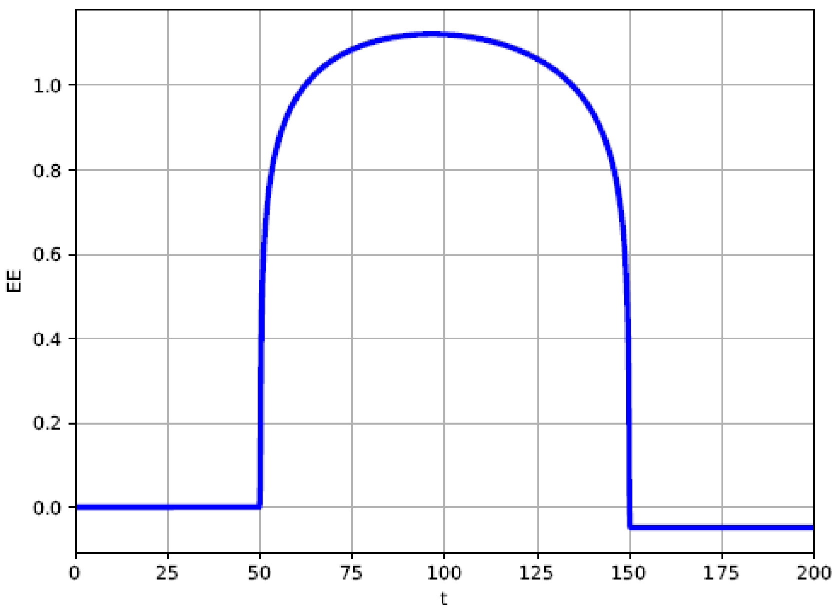
→　２重化のトリックを用いて、EEを計算する。

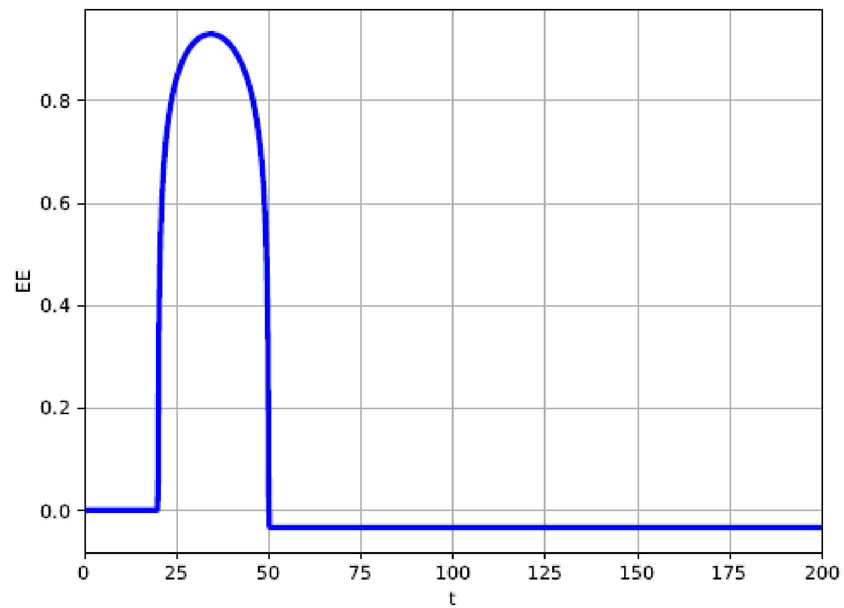


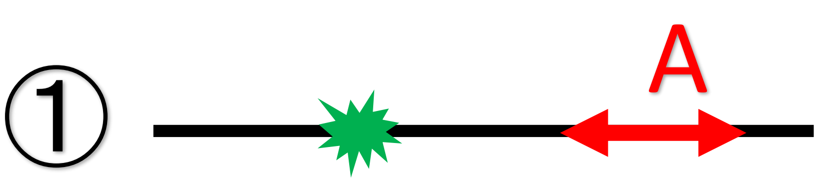
$$S_A = -\frac{1}{6}\log(F\epsilon^2)$$

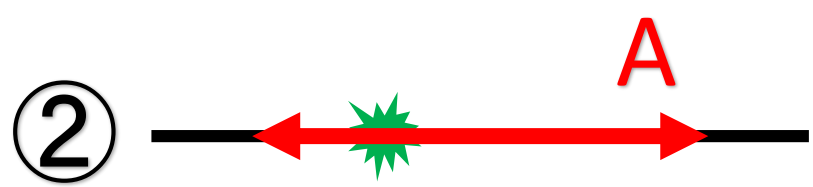
$$F = \left|\frac{d\zeta_1}{dw_1}\right|\left|\frac{d\zeta_2}{dw_2}\right|\frac{(\zeta_1-\bar{\zeta}_2)(\bar{\zeta}_1-\zeta_2)}{|\zeta_1-\bar{\zeta}_1||\zeta_2-\bar{\zeta}_2|(\zeta_1-\zeta_2)(\bar{\zeta}_1-\bar{\zeta}_2)}$$

$(1/3)\log(L/\epsilon)$ の差 $S_A(t) - S_{\mathrm{vac}}$ を計算しており、左図は部分系 $[50, 150]$, 右図は $[-20, 50]$ にとった場合である。この結果は [38] で予想されたような、準粒子描像に当てはまっている。





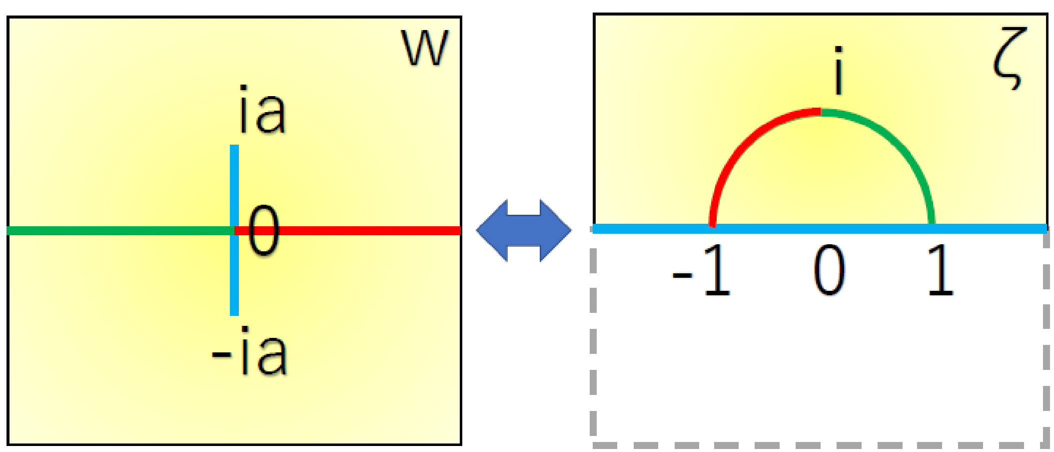




分離クエンチした重力双対をもつCFT2のEE(1)

分離クエンチの虚時間でのセットアップを上半平面に移す

$$\zeta = i\sqrt{\frac{w+ia}{w-ia}} \equiv f(w)$$



分離クエンチした重力双対をもつCFT2のEE(2)

分離クエンチの虚時間でのセットアップを上半平面に移す

→　AdS/BCFTの処方と笠-高柳公式を用いて、EEを計算する。

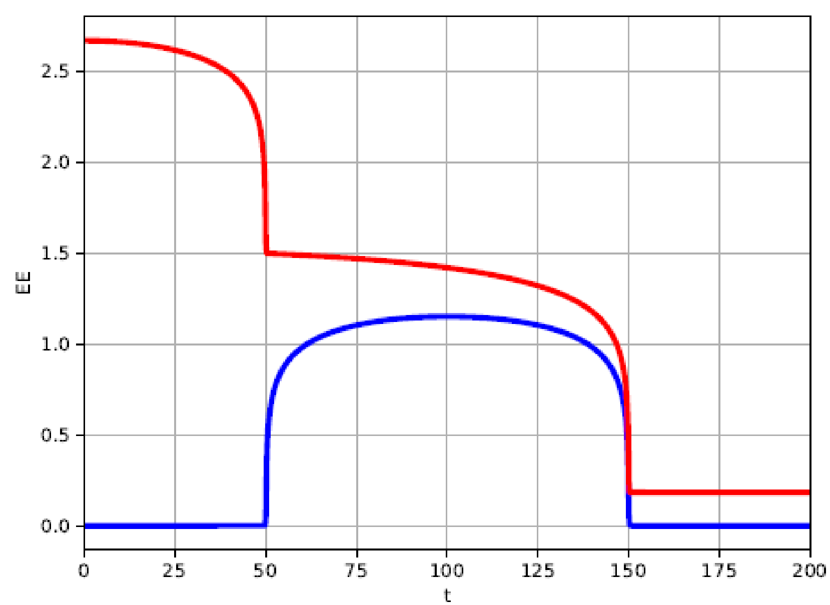
$$S_A = \min\{S_A^{con}, S_A^{dis}\}$$

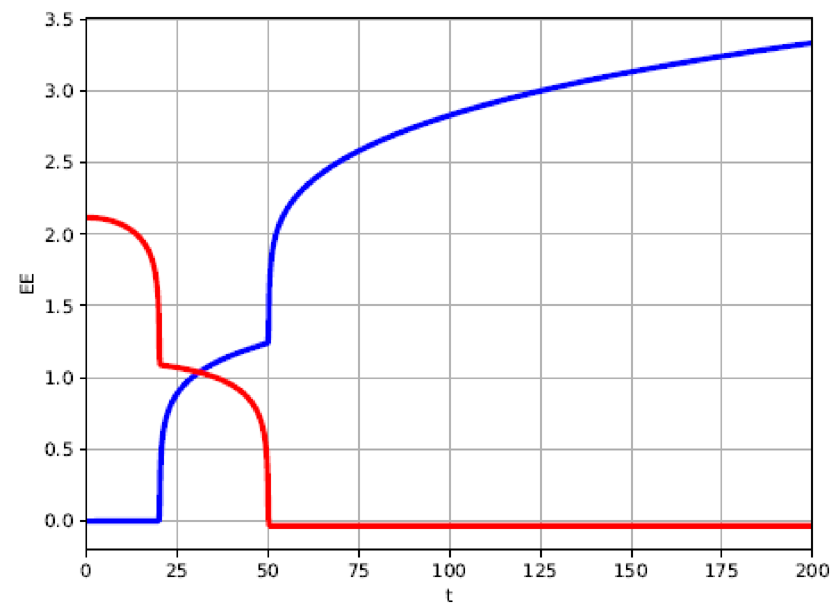
$$S_A^{con} = \frac{c}{6}\log\left(\frac{|f(w_1)-f(w_2)|^2}{\delta_1\delta_2}\right)$$

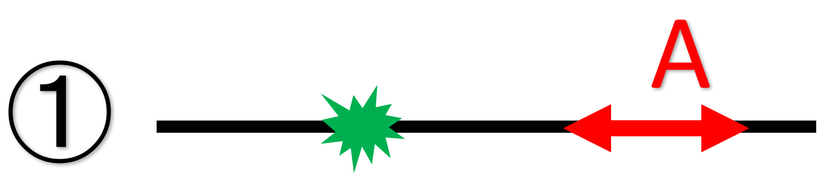
$$S_A^{dis} = \frac{c}{6}\log\left(\frac{4(\mathrm{Im}\, f(w_1))(\mathrm{Im}\, f(w_2))}{\delta_1\delta_2}\right)$$

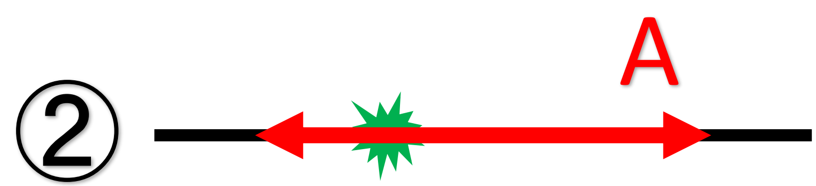
$$\epsilon|f'(w_i)| = \delta_i$$

$(c/3)\log(L/\epsilon)$ の差を計算しており、左図は部分系 $[50, 150]$, 右図は $[-20, 50]$ にとった場合である。青線が connected　geodesic に対応するグラフで、赤線が disconnecetd geodesic に対応するグラフであり、$S_A(t)$ は 2 つの最小値である。この結果も準粒子描像に当てはまっている。



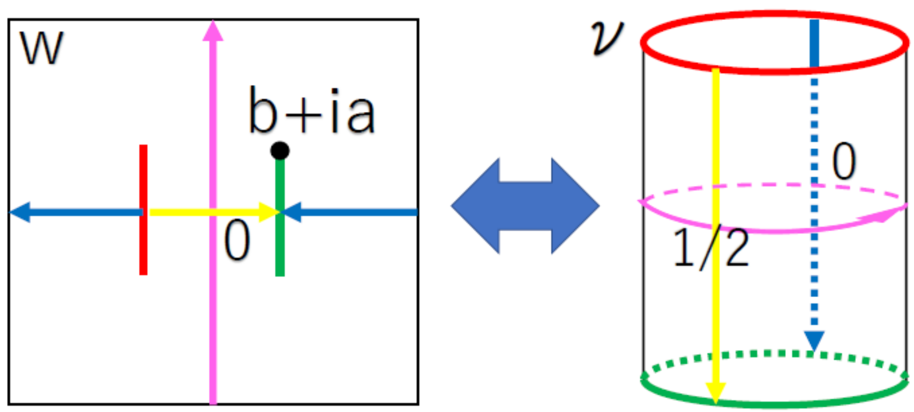






2重分離クエンチしたディラック場のEE(1)

2 重分離クエンチの虚時間でのセットアップを
円筒座標に移す



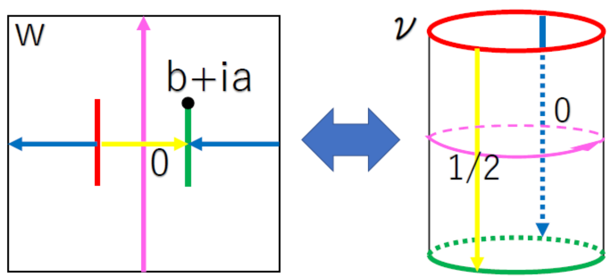
$$w(\nu) = x + i\tau = b\left(1 + K_{\beta^{-1}}(\nu) + K_{\beta^{-1}}\left(\nu + \frac{i\beta^{-1}}{2}\right)\right) \tag{5.1}$$

$$K_{\beta^{-1}}(\nu) = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial \nu'}\log\theta_1(\nu', i\beta^{-1})\Big|_{\nu'=\nu} \tag{5.2}$$

2重分離クエンチしたディラック場のEE(2)

２重分離クエンチの虚時間でのセットアップを
円筒座標に移す

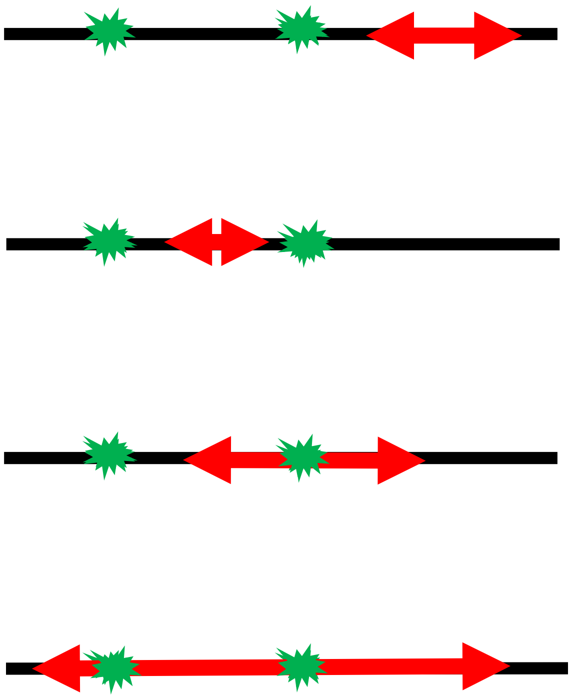
→　２重化のトリックを用いて、EEを計算する。

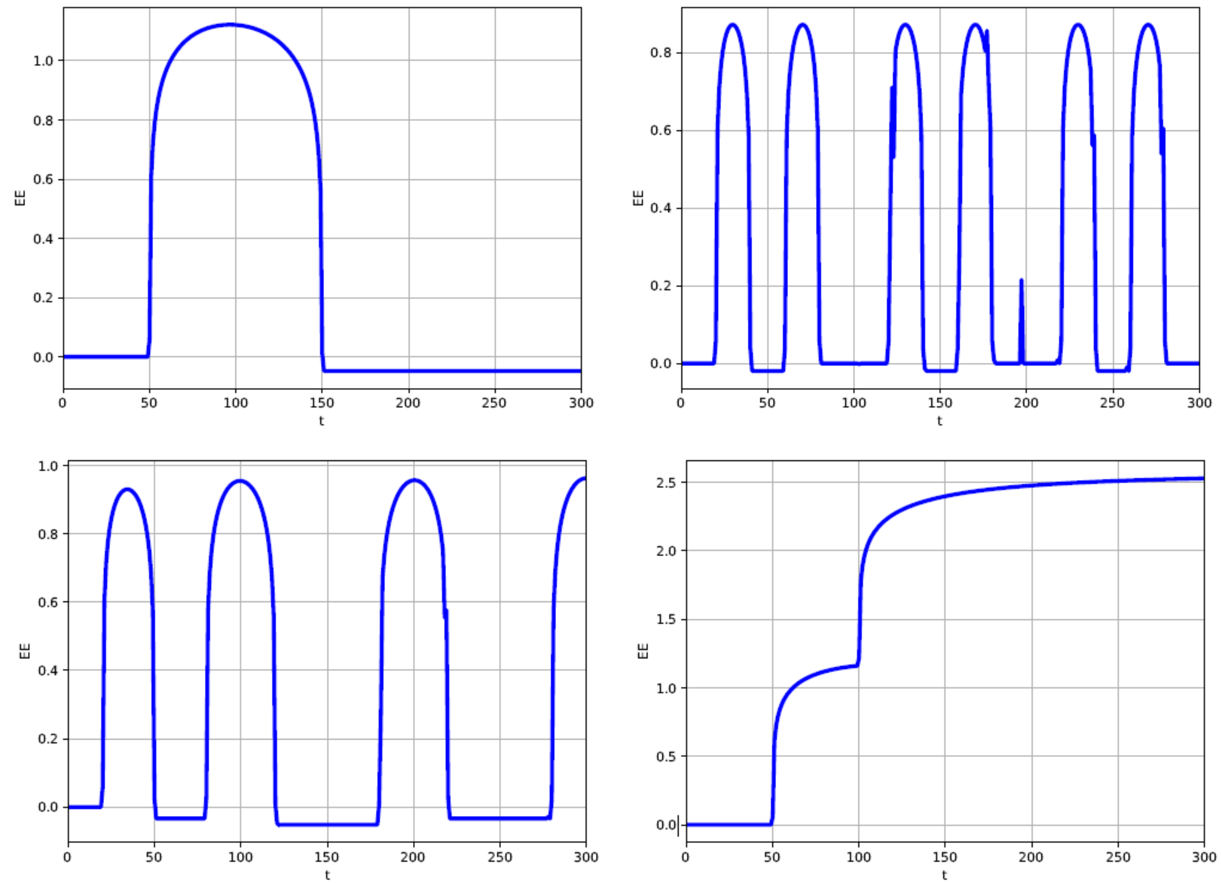


$$S_A = \frac{1}{6}\log(\frac{G}{\epsilon^2}) \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} G = &\frac{1}{(2\pi)^2}\left|\frac{dw_1}{d\nu_1}\right|\left|\frac{dw_2}{d\nu_2}\right| \\ &\times \frac{\theta_1\left(\nu_1-\nu_2|i\beta^{-1}\right)\theta_1\left(\overline{\nu}_1-\overline{\nu}_2|i\beta^{-1}\right)\theta_1\left(\nu_1-\overline{\nu}_1+\frac{i\beta^{-1}}{2}|i\beta^{-1}\right)\theta_1\left(\nu_2-\overline{\nu}_2+\frac{i\beta^{-1}}{2}|i\beta^{-1}\right)}{\eta(i\beta^{-1})^6\theta_1\left(\nu_1-\overline{\nu}_2+\frac{i\beta^{-1}}{2}|i\beta^{-1}\right)\theta_1\left(\nu_2-\overline{\nu}_1+\frac{i\beta^{-1}}{2}|i\beta^{-1}\right)} \end{aligned} \tag{5.6}$$

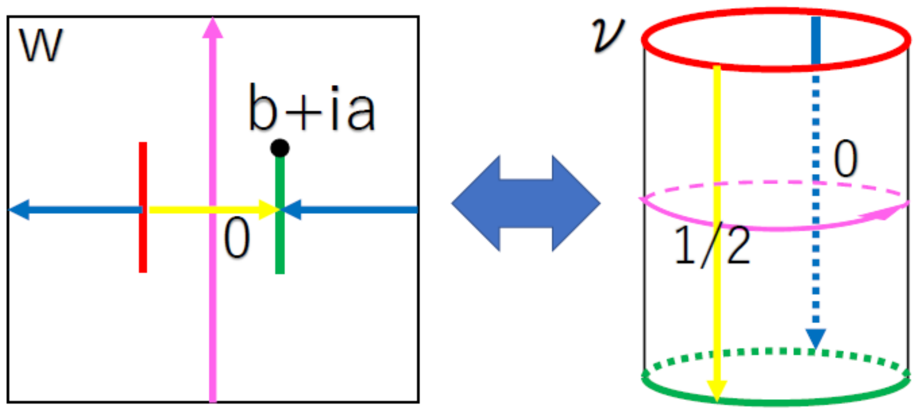
$0.05 \iff \beta^{-1} = 5.28$ で計算しており、左上図は部分系 $[100, 200]$、右上図は部分系 $[10, 30]$、左下図は部分系 $[30, 100]$、右下図は $[-150, 100]$ にとった場合である。





2重分離クエンチした重力双対をもつCFT2のEE(1)

2重分離クエンチの虚時間でのセットアップを円筒座標に移す



$$w(\nu) = x + i\tau = b\left(1 + K_{\beta^{-1}}(\nu) + K_{\beta^{-1}}\left(\nu + \frac{i\beta^{-1}}{2}\right)\right) \tag{5.1}$$

$$K_{\beta^{-1}}(\nu) = \frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial \nu'}\log\theta_1(\nu', i\beta^{-1})\Big|_{\nu'=\nu} \tag{5.2}$$

2重分離クエンチした重力双対をもつCFT2のEE(2)

2重分離クエンチの虚時間でのセットアップを円筒座標に移す

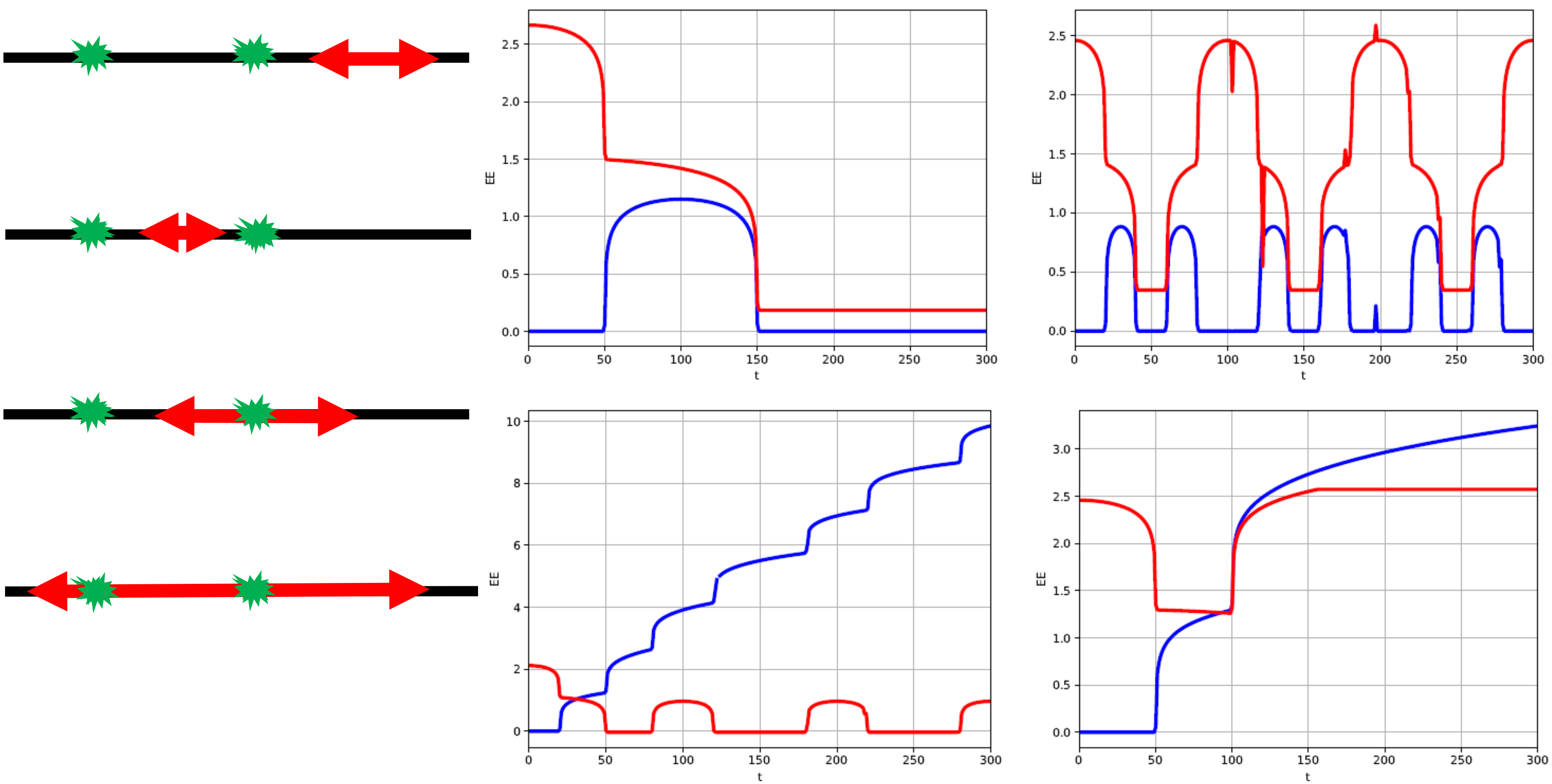
→　AdS/BCFTの処方と笠-高柳公式を用いて、EEを計算する。

$$S_A = \min\{S_A^{con}, S_A^{dis}\}$$

$$S_A^{con} = \frac{c}{6}\log\left(\left(\frac{1}{\pi\epsilon}\right)^2\left|\frac{dw_1}{d\nu_1}\right|\left|\frac{dw_2}{d\nu_2}\right|\sin\left(\pi(\nu_1-\nu_2)\right)\sin\left(\pi(\overline{\nu}_1-\overline{\nu}_2)\right)\right) \tag{5.21}$$

$$S_A^{dis} = \min_{\sigma_1=\pm1,\sigma_2=\pm1}\left(\frac{c}{6}\log\frac{1}{\pi\epsilon}\left|\frac{dw_1}{d\nu_1}\right|\sin\left(\pi(\nu_1-\overline{\nu}_1+\frac{i\sigma_1\beta^{-1}}{2})\right)+(1\leftrightarrow 2)\right.$$
$$\left.+\frac{1-\sigma_1\sigma_2}{2}\times\frac{c}{6}\pi\beta^{-1}\right) \tag{5.23}$$

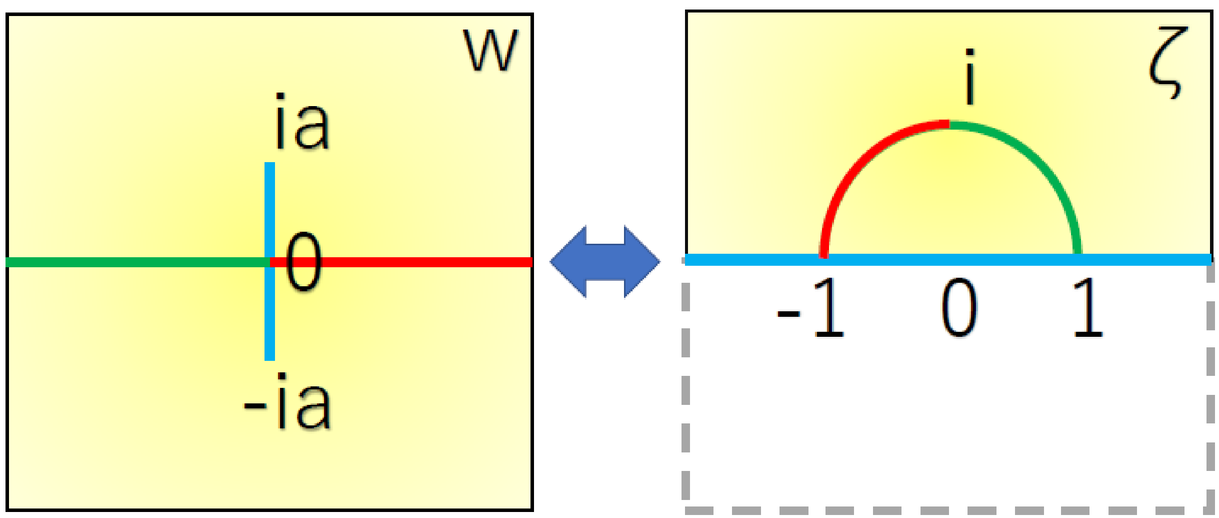
上の計算を数値計算したものがグラフ 5.9 である。$b = 50, a = 0.05$ で計算しており、左上図は部分系 $[100, 200]$、右上図は部分系 $[10, 30]$、左下図は部分系 $[30, 100]$、右下図は $[-150, 100]$ にとった場合である。



Gravity dual の計算式

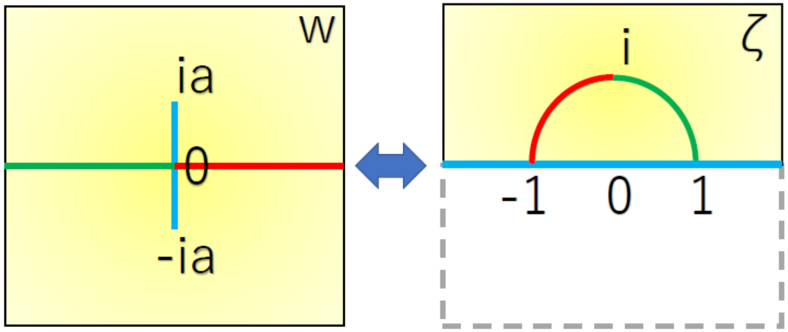
AdSの描像は１重分離クエンチのときのみ計算した
２重分離クエンチについては行っていない

CFTの虚時間でのセットアップは



右のζ座標にPoincare座標が対応すると仮定してw座標の双対を計算

Gravity dual の計算式



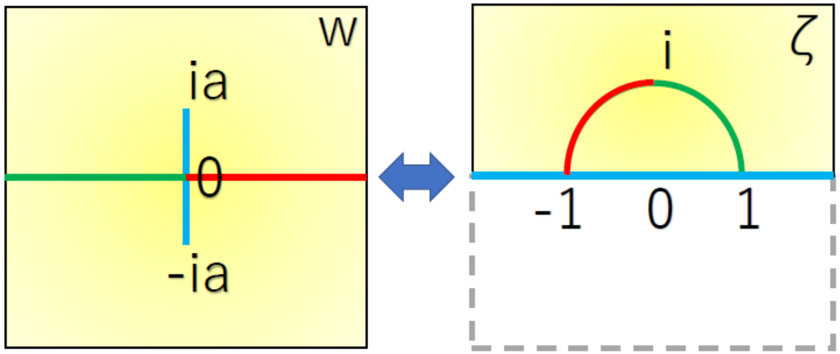
$$ds^2 = R_A^2 \frac{dz_P^2 + dx_P^- dx_P^+}{z_P^2} \tag{2.267}$$

$$x_P^- = f(x^-) - \frac{2z^2 (f')^2 \overline{f}''}{4f'\overline{f}' + z^2 f'' \overline{f}''} \tag{2.268}$$

$$x_P^+ = \overline{f}(x^+) - \frac{2z^2 (\overline{f}')^2 f''}{4f'\overline{f}' + z^2 f'' \overline{f}''} \tag{2.269}$$

$$z_P = \frac{4z(f'\overline{f}')^{3/2}}{4f'\overline{f}' + z^2 f'' \overline{f}''} \tag{2.270}$$

Gravity dual の計算式



$$ds^2 = \frac{R_A^2}{z^2}dz^2 + 4GR_ATdx^{-2} + 4GR_A\overline{T}dx^{+2} + \left(\frac{R_A^2}{z^2} + 16G^2z^2T(x^-)\overline{T}\right)dx^-dx^+ \quad (2.252)$$

$$\frac{4G}{R_A}T(x'^-) = \frac{3(f'')^2 - 2f'f'''}{4f'^2}, \ \frac{4G}{R_A}\overline{T}(x'^+) = \frac{3(\overline{f}'')^2 - 2\overline{f}'\overline{f}'''}{4\overline{f}'^2} \qquad (2.271)$$