在本文中，我们研究了将一个圆圈拟合成一组的问题假设，从圆的圆周点的噪声测量独立的，分布相同的高斯测量错误。 我们提出了一种基于分支和边界的算法得到最大似然估计并证明这个算法获得最优估计。 我们检查收敛速度并确定所提出的计算复杂度算法。 我们也提供时间和比较现有的文献中提出的圈拟合技术。 最后，我们通过比较证明我们的算法在统计上是有效的我们的结果给CRAMER'-RAO下限。

精确拟合一个圆圈以嘈杂的测量点它的周长在科学文献中是一个被广泛研究的问题。在他的论文中，陈[1]提出了一个“循环函数关系”它假定测量误差是实例独立同分布（i.i.d.）随机变量并且这些点位于周围固定但未知的角度。这个模型需要估计未知数每个圆周点的角度，除了中心和圆的半径。 陈建议一个近似的方法当错误具有GAUSSIAN分布时找到MLE。 这个方法与[2]中的最小二乘法相同。 他还检查估计器的一致性。

MLE for circle的一个缺点是它可以是不同的，很难获得数字。 结果，现有的算法为计算MLE只会产生局部最优估计。 它是众所周知，对于高噪声，通常有几个局部最小值[3-6]。 BERMAN＆CULPIN [3]进行了详细的介绍统计分析MLE和DELOGNE-KASA˚估计量（DKE），它使用最小二乘法。 特别，他们研究了这个问题的渐近一致性和方差估计。

由于MLE的数值困难，有几个从业者广泛使用的拟合技术。该NEWTON-RAPHSON方法在安装时经常会失败圆圈[3,4]，发散到无限或进入极限周期对点的安排和初始化。 当它

收敛不能保证局部最优被发现是全球最优的。 还有其他迭代估计器这保证了每次迭代的目标函数的减少[4-6]。 这是对NEWTONRAPHSON的改进方法，但是，这并不能保证收敛

在估计

分支和界限的原则首先是以离散的方式提出的由Land＆DOIG在[7]以及分支和界限中设置搜索方法由WINSTON [8]的离散设置描述。先前已提出分支和界限用于大约定位圆形轮廓[9]和更一般的图像轮廓[10]。 在[11]中，ZHANG＆KORF对平均值进行了分析在一个典型的分支和边界的计算复杂性搜索应用

在本文中，我们提出了一个使用这个原理的新算法的分支和界限以估计来自a的圆参数一组嘈杂的测量圆周上的点。该算法将一个圆参数空间重复分割子空间。 在每个这样的分区细化之后，降低并计算MLE的目标函数的上限为每个子空间。 然后可能丢弃许多子空间

从考虑，导致一个有效的搜索算法将MLE限制在圆圈内任意小的区域内参数空间。 我们在理论和实证上都表明这一点算法获得全局最大似然估计。

1. 原理

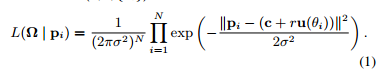
2.1。 CHAN的循环功能模型

陈的圆函数模型[1]为笛卡尔坐标pi，i = 1，...，N可以表示为pi = c + ru（θi）+ξi，其中c =（c1，c2）T是圆的中心，r是它的半径，u（θi）=（cosθi，sinθi）T是单位向量，ξi是随机的实例代表测量误差的向量。 他们被假定为是零均值和i.i.d. 另外，我们会指定它们高斯与协方差σ2I。

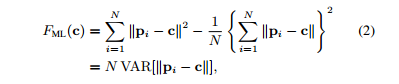
2.2。 最大似然估计

如果我们让Ω=（c，r，{θi}）

T，Ω的条件可能性是



1. 通过取（1）的对数并忽略常数偏移量和缩放比例，这两者都取决于N和σ，这是可能的简化目标函数



其中ρ∈R +是候选圆半径。

2.3。集和分区

在本文中，我们考虑应用于点，集合和函数的函数设置分区。假定我们正在搜有限体积有限维真实空间RN的子集Γ。我们只考虑紧凑集合，它们在我们的空间中是封闭的和有界的考虑。为了清楚起见，参数是单点的函数将会被表示为f（·），其输入是集合的函数将被表示f [·]，以及输入为设定分区的函数F ·。例如，函数min [·]将一个集合映射为最小值元件。设置函数f [·]可用于设置分区（其中是简单的集合集合）给集合值输出。轮到时括号用于设置参数，我们将结果解释为setvalued，即f（S）= {f（x）| x∈S}。定义2紧集γ的直径D [·]最小γ的两个元素之间的距离的上限，即D [γ] = supp1，p2∈γp1-p2 ?.直径D [γ]对于紧集γRM是有限的。守如果γ1⊆γ2，D [γ1]≤D[γ2]。设定分区P的直径D 1·δ被定义为最大值所有子集的直径γ∈P，即D≥P≤=max γ∈PD [γ]。定义3.给定集合Γ的两个集合分区P1和P2，我们定义了一个偏序P 1≤P2⇒⇒γ∈P 2，∃γ∈P1 s.t. γ⊆γ。这意味着P2比P1更精细地划分Γ。守对于Γ的两个分区P2≥P1，DP2 ≤DP1 ?.对于本文的其余部分，我们只提供引理和定理陈述。所有的证明可以在[12]中找到。

2.4。分支和绑定

考虑一个标量函数F：Γ→R在域Γ上我们希望找到的全球极值点。在本节中我们假设通用性是最小值的要点找到始终隐含的最大点。假定F是一个连续函数，Γ是一个紧凑集合。

在最大似然估计中，Γ对应于参数一个模型的空间，而F计算负的对数似然给定的参数矢量。 已知的搜索方法因为分支和限制可能适用于搜索最小值参数空间Γ中的函数F通过反复分区Γ分解成紧凑的子集并限制范围内的值每套。 然后考虑可能包含最小值的集合通过分割成更小的子集更详细不能包含的最小值可能会被忽略。在本文中，我们应用分支和边界来解决连续问题问题形式为c = arg minx∈F（x）。

2.4.1。在一个区域上绑定一个函数考虑参数空间γΓ的一个区域。然后一双套函数Fmin [γ]，Fmax [γ]在区域γ上绑定F当且仅当如果Fmin [γ]≤min[F（γ）]并且max [F（γ）]≤Fmax[γ]。这样的界限不必紧张。事实上，边界函数Fmin [γ]，Fmax [γ]可以选择简单的计算，以避免评估F在γ中的所有点上。引理1.给出两个紧集γ1⊆γ2⊆Γ，我们有这个min [F（γ1）]≥min[F（γ2）]和max [F（γ1）]≤max[F（γ2）]。所以，当我们从集合γ2中删除点以产生子集γ1时，下限是单调而非递减的，而上限是单调递减的约束是单调不增加的。现在，边界函数的类似性质如下。定义4 Fmin，Fmax是单调的，当且仅当紧凑设γ1γ2Γ，Fmin [γ1]≥Fmin[γ2]，F max [γ1]≤Fmax [γ2]。引理2.考虑一系列非空的紧凑集γ1⊃γ2⊃...⊃γ∞单调递减直径δi=D [γi]收敛于0.然后定义γ∞是一组零半径，即a点。然后，对于连续函数F，limi→∞min [F（γi）] =F（γ∞）= limi→∞max [F（γi）]。定义5，边界函数Fmin，Fmax是收敛的只有limi→∞Fmin [γi] = limi→∞Fmax [γi] = F（γ∞）。

2.4.2。绑定一个分区

我们可以得到Γ上F的全局最小值的界应用于Γ的设定分区P的边界函数Fmin，Fmaxmin [Fmin [P]]≤min[F（Γ）]≤min[Fmax [P]]。 （5）考虑一系列越来越细的分区P1≤P2≤Γ直径收敛为零。然后收敛边界函数Fmin和Fmax是全局最小值的边界由（5）计算而收敛到全局最小值，即limi→∞min[Fminπ] = min [F（Γ）] = limi→∞min[Fmaxπ]。引理3.设γ∈P下界Fmin [γ] 比...更棒最小上限min[Fmax [P]]不能包含全局最小值即Fmin [γ]> min [Fmax [P]]→c∈/γ。在里面

搜索全局最小值可能会丢弃这些集合。

引导分支过程，限制Γ的区域需要更详细地考虑。特别是应用程序引理3允许我们从考虑中删除一些数字不能包含全局最小值的集合。这个流程修剪搜索树，减少必须的区域数量被搜索。最后，算法停止时的位置全局最小值在规定的距离δ内是已知的。算法1 :(分支和绑定）找到最小c = arg minx∈F（x）的位置距离δ：

•设置P = {Γ}•直到所有集合γ∈P可能包含在一个直径内d [P] <δ分支：通过划分P中的每个集合来优化P.界限：对于所有γ∈P，计算边界Fmin [γ]和Fmax [γ]

Prune：用Fmin [γ]> min [Fmax [P]]丢弃所有集合γ∈P定理1对于具有单一的一致连续函数F.具有全局最小值的点c和收敛边界函数Fmin和Fmax，算法1在有限数字后终止

3.算法

3.1。 对数似然界

在本节中，我们考虑（2）这个函数中的目标函数在可能的圆心的参数空间上定义，Γ= R2。 在这一节中，我们考虑将Γ分割成长度为[c1分钟，c1max]×[c2分钟，c2最大。给定矩形γΓ，我们希望定义边界函数Fmin和Fmax是单调的，收敛的和高效的可计算的。 我们通过限制总和的每一项限定这样做在（2）中，这又要求界定距离di（X）的操作。定理2对于具有全局单点c的函数F.最小值，终止算法1在这个点内定位距离δ。算法的收敛速度取决于重新计算的结果，设置分区P的细化方案以及属性的边界函数Fmin和Fmax。请注意该算法本文所描述的不会因为病态而终止嘈杂的圆点配置有多种全球最小值完全相等。就像这样一套点配置已测量为零，本文未考虑它。

3.1.1。边界di

（2）中的似然函数取决于di（x），它们是均匀的连续凸函数。我们对待迪（x）作为标量场，并用一阶多项式对它进行约束，即我们可以定义紧张的边界（x）在形式di的矩形γ上min（x）≤迪（x）≤dimax（x），其中迪min（x）=∇di（cγ）·（x-pi），（6）迪max（x）=∇di（cγ）·（x-pi）+ BiMAX，∇di（cγ）是单位向量∇di（cγ）=（pi-cγ）/πpi-cγα，双max是上界的截距，cγ是中心点

矩形γ。请注意，∇di（cγ）没有在圆点处定义PI。因此，边界函数dimin（x）和dimax（x）in包含圆点pi的矩形被分开处理在本节结尾处。现在，可以看出，毕最大必须是矩形γ的一个角处的f（x）的值，即双max =maxx∈corners（γ）{di（x） - ∇di（cγ）·（x-pi）}。这些第一有序边界是紧密的，因此都是单调和收敛的。他们计算起来也很简单。包含圆点pi的矩形γ存在困难在计算边界dimin（x）和dimax（x）以上，作为距离函数di（x）在pi上是不可微分的。所以，

这些矩形由常量函数绑定迪min（x）= minxεγ{di（X）}和dimax（x）= maxxεγ{di（X）}。这些界限也很紧张，因此都是单调的收敛。然而，因为它们是零阶函数它们会聚合比上述的一阶界限更慢。如结果我们使用矩形的一阶边界而不是包含任何圆点，仅默认为零阶边界必要时。

3.1.2。边界F结合这些我们可以统一地得出边界Fmin和Fmax连续对数似然函数F：Fmin（x）=ΔNI = 1dmini（X）2 - 1ñ26 NI = 1dmaxi（X）2，（7）Fmax（x）=ΔNI = 1dmaxi（X）2 - 1ñ26 NI = 1dmini（X）2。值得注意的是，min（x）和dimax（x）在前面部分被选择为一致的非负面的，导致Fmin（x）和Fmax（x）的简单表达式。请注意，我们在这里取二阶多项式的差值，从而得到

在x∈γ上的似然函数F（x）的二次边界。最后，我们可以将二次曲线Fmin和Fmax减到最小关联的矩形γ确定最小值的边界在该矩形内，即Fmin [γ] = min [Fmin [γ]]，Fmax [γ] = min [Fmax [γ]]。

3.2。 复杂性分析

算法1的简单分区细化方案如下。设置Γ是一个足够大的矩形封装圆的中心。 在每个细化步骤中，分割每个矩形在划分成四个相同大小的较小矩形的情况下，从而确保矩形直径在每次迭代中减半。因此，精化步骤的数目与所需精度δ的负对数成正比全球最低。一般来说，分支和绑定方法的最坏情况可能很差复杂。然而正如ZHANG和KORF [11]经常注意到的那样平均复杂度较低。在这里我们简单地提一下这个专业该算法的算术复杂度的结果。定理3.分区的直径的阶数为O（D2）。推论1.算法1的每次迭代都采用恒定量的时间。推论2.算法1的每次迭代都提高了精度的圆心中心估计值c在每个坐标中一位，算法的运行时间与对数成正比的圆心估计所需的精度。

4.模拟

对于本文中的实验，选择了一个初始矩形这是集中在点，并有100倍的面积

点的边界矩形。品牌和绑定（B＆B）算法使用模拟蒙特卡洛分析。二十分钟无噪音（N = 20）在圆周上均匀分布地生成一个单位圆。对于σ的每个值，评估算法超过10,000次试验。在每个试验中，噪音都被加入到了真正的点来获得圆圈c和中心的估计值半径r根据CHAN的循环功能模型。这是用于生成均方误差（MSE）值。数量的噪声，σ以相等的几何增量从10-2变化到1。DKE（DKE）[13]也是这样做的，质心方法（CEN）通过取x和y坐标的平均值，SPATH算法（SPA）[5]和CHERNOV＆LESORT算法（CL）[4]。另外，对于本文提出的算法，

依次记录似然函数评估的次数证明其对σ的独立性。参见图2（a）。中心，c和半径r中的MSE值被绘制成图他们相应的CRAMER'-RAO下界（CRLB，见[12]）

对于图2（b）和2（c）中的对数噪声σ相同规模。随着噪声水平σ接近零，所有方法除CEN方法统计效率外。质心方法由于偏见而关闭。 CHERNOV＆LESORT方法分歧对于噪声的最高4个值，结果不能绘制。