

Chapter 10 The Blahut-Arimoto Algorithms

Tetsuya SHIMIZU

2023 年 3 月 17 日

離散的無記憶通信路 $p(y|x)$ の場合、通信路容量は

$$C = \max_{r(x)} I(X; Y) \quad (1)$$

となる。ここで、 X と Y はそれぞれ一般的な通信路の入力と出力、 $r(x)$ は入力分布であり、通信路をととして情報を確実に伝送できる漸近的に達成可能な最大レートの特徴づける。式 (1) の C は、汎用通信路の遷移行列のみに依存し、通信路に対する符号のブロック長 n には依存しないので、*single-letter characterization* (一文字特性化) と呼ばれる。入力アルファベット \mathcal{X} と出力アルファベット \mathcal{Y} の両方が有限であるとき、 C の計算は有限次元の最大化問題となる。

一般的な確率変数 X を持つ i.i.d. 情報源 $\{X_k, k \geq 1\}$ に対して、レート歪み関数

$$R(D) = \min_{Q(\hat{x}|x): Ed(X, \hat{X}) \leq D} I(X; \hat{X}) \quad (2)$$

1 文字の歪み尺度 d に関して D 以下の平均歪みで情報源を再生するレート歪み符号の漸近的に達成できる最小レートを特徴付ける。再び、式 (2) の $R(D)$ が一文字特性であり、これはレート歪み符号のブロック長 n でなく、一般的な確率変数 X だけに依存する。情報源アルファベット \mathcal{X} と再生アルファベット $\hat{\mathcal{X}}$ の両方が有限であるとき、 $R(D)$ の計算は有限次元の最小化問題となる。

よほど特殊な場合を除き、 C や $R(D)$ の式を閉じた形で得ることは不可能であり、数値計算に頼らざるを得ない。しかし、これらの量を計算することは、関連する最適化問題が非線形であるため、一筋縄ではいかない。本章では、このために考案された反復アルゴリズムである Blahut-Arimoto アルゴリズム (以下、BAA) について解説する。

BAA がどのように、そしてなぜ機能するのかをよりよく理解するために、まず次のセクションで一般的な設定におけるアルゴリズムを説明する。 C と $R(D)$ の計算のためのアルゴリズムの特殊化については 2 節で説明し、アルゴリズムの収束については 3 節で証明する。

1 Alternating Optimization

本節では、交互最適化アルゴリズムについて説明する。このアルゴリズムは、次節で通信路容量とレート歪み関数を計算するために特化される予定である。二重の \sup を考える。

$$\sup_{\mathbf{u}_1 \in A_1} \sup_{\mathbf{u}_2 \in A_2} f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \quad (3)$$

ここで、 A_i は $i = 1, 2$ について \Re^{n_i} の凸部分集合であり、 f は $A_1 \times A_2$ 上で定義された関数である。関数 f は上方から有界であり、 $A_1 \times A_2$ 上で連続的な偏導関数を持っている。さらに、すべての $\mathbf{u}_2 \in A_2$ に対して、

$$f(c_1(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2) = \max_{\mathbf{u}'_1 \in A_1} f(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2) \quad (4)$$

を満たすような一意の $c_1(\mathbf{u}_2) \in A_1$ が存在し、すべての $\mathbf{u}_1 \in A_1$ に対して、

$$f(\mathbf{u}_1, c_2(\mathbf{u}_1)) = \max_{\mathbf{u}'_2 \in A_2} f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}'_2) \quad (5)$$

を満たすような一意の $c_2(\mathbf{u}_1) \in A_2$ が存在するとする。

$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ と $A = A_1 \times A_2$ とすると、式 (3) は式 (6) と書くことができる。

$$\sup_{\mathbf{u} \in A} f(\mathbf{u}) \quad (6)$$

すなわち、 f の \sup は、 \Re^{n_1} と \Re^{n_2} の 2 つの凸部分集合のデカルト積に等しい $\Re^{n_1+n_2}$ の部分集合に対してそれぞれ取られる。