

最大公約数の定義

城北中学校・高等学校 数学科

清水団（しみず・だん）

最大公約数の定義（0を含む）

a , b を2つの整数とする。 d が次の2つの条件を満たすとき, d は a と b の最大公約数という。

- d は a と b の 0 以上の公約数である。
- a と b の公約数であるどんな整数も d の約数である。

※ 加藤文元先生（@FumiharuKato）のツイートを参考にしました。

(例1) 12 と 15 の最大公約数 d

- d は 12 と 15 の 0 以上の公約数である。
 - 12 の 0 以上の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12
 - 15 の 0 以上の約数は 1, 3, 5, 15

$$\therefore d = 1, 3$$

- 12 と 15 の公約数であるどんな整数も d の約数である。
 - 12 と 15 の公約数は $\pm 1, \pm 3$ である。

(例1) 12 と 15 の最大公約数 d

- $d = 1$ は最大公約数ではない。

d	12 と 15 の公約数	d の約数であるか？
1	1	$\bigcirc 1 = 1 \times 1$
1	-1	$\bigcirc 1 = (-1) \times (-1)$
1	3	\times
1	-3	\times

(例1) 12 と 15 の最大公約数 d

- $d = 3$ は最大公約数である。 $\therefore (12, 15) = 3$

d	12 と 15 の公約数	d の約数であるか？
3	1	$\bigcirc 3 = 1 \times 3$
3	-1	$\bigcirc 3 = (-1) \times (-3)$
3	3	$\bigcirc 3 = 3 \times 1$
3	-3	$\bigcirc 3 = (-3) \times (-1)$

(例2) 0 と 5 の最大公約数 d

- d は 0 と 5 の 0 以上の公約数である。
 - 0 の 0 以上の約数は, $0, 1, 2, 3 \dots$ である。
 - 5 の 0 以上の約数は, 1 と 5 である。

$$\therefore d = 1, 5$$

- 0 と 5 の公約数であるどんな整数も d の約数である。
 - 0 と 5 の公約数は $\pm 1, \pm 5$ である。

(例2) 0 と 5 の最大公約数 d

- $d = 1$ は最大公約数ではない。

d	0 と 5 の公約数	d の約数であるか？
1	1	○ $1 = 1 \times 1$
1	-1	○ $1 = (-1) \times (-1)$
1	5	×
1	-5	×

(例2) 0 と 5 の最大公約数 d

- $d = 5$ は最大公約数である。 $\therefore (0, 5) = 5$

d	0 と 5 の公約数	d の約数であるか？
5	1	$\bigcirc 5 = 1 \times 5$
5	-1	$\bigcirc 5 = (-1) \times (-5)$
5	5	$\bigcirc 5 = 5 \times 1$
5	-5	$\bigcirc 5 = (-5) \times (-1)$

(例3) 0 と 0 の最大公約数 d

- d は 0 と 0 の 0 以上の約数は, 0 以上のすべての整数である。

$$\therefore d = 0, 1, 2, \dots$$

- 0と0の公約数であるどんな整数も d の約数である。
 - 0と0の公約数は $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ である。

(例3) 0 と 0 の最大公約数 d

- $d = 3$ は最大公約数ではない。

d	0 と 0 の公約数	d の約数であるか？
3	0	×
3	1	○ $3 = 1 \times 3$
3	2	×
3	3	○ $3 = 3 \times 1$
3	4	×
3	⋮	⋮

(例3) 0 と 0 の最大公約数 d

- $d = 2$ は最大公約数ではない。

d	0 と 0 の公約数	d の約数であるか？
2	0	×
2	1	○ $2 = 1 \times 2$
2	2	○ $2 = 2 \times 1$
2	3	×
2	4	×
2	⋮	⋮

(例3) 0 と 0 の最大公約数 d

- $d = 1$ は最大公約数ではない。

d	0 と 0 の公約数	d の約数であるか？
1	0	×
1	1	○ $1 = 1 \times 1$
1	2	×
1	3	×
1	4	×
1	⋮	⋮

(例3) 0 と 0 の最大公約数 d

- $d = 0$ は最大公約数である。 $\therefore (0, 0) = 0$

d	0 と 0 の公約数	d の約数であるか？
0	0	$\bigcirc 0 = 0 \times x$
0	1	$\bigcirc 0 = 1 \times 0$
0	2	$\bigcirc 0 = 2 \times 0$
0	3	$\bigcirc 0 = 3 \times 0$
0	4	$\bigcirc 0 = 4 \times 0$
0	\vdots	\vdots

(例4) -2 と 4 の最大公約数 d

- d は -2 と 4 の 0 以上の公約数である。

$$\therefore d = 1, 2$$

- -2 と 4 の公約数であるどんな整数も d の約数である。
 - -2 と 4 の公約数は $\pm 1, \pm 2$ である。

(例4) -2 と 4 の最大公約数 d

- $d = 1$ は最大公約数ではない。

d	-2 と 4 の公約数	d の約数であるか？
1	1	$\bigcirc 1 = 1 \times 1$
1	-1	$\bigcirc 1 = (-1) \times (-1)$
1	2	\times
1	-2	\times

(例4) -2 と 4 の最大公約数 d

- $d = 2$ は最大公約数である。 $\therefore (-2, 4) = 2$

d	-2 と 4 の公約数	d の約数であるか？
2	1	$\bigcirc 2 = 1 \times 2$
2	-1	$\bigcirc 2 = (-1) \times (-2)$
2	2	$\bigcirc 2 = 2 \times 1$
2	-2	$\bigcirc 2 = (-2) \times (-1)$

$(A, B) = (|A|, |B|)$ となる。