現代数理統計学の基礎 第 2 章　問 12

X の確率密度関数が $f(x)=1$，$0<x<1$，で与えられている。

(1)　X の積率母関数を求め，平均と分散を与えよ。

(2)　$Y = X^2$ なる変数変換したときの Y の確率密度関数を求め，その平均と分散を計算せよ。

(3)　$Y=-\log(X)$ なる変数変換したときの Y の確率密度関数を求め，その平均と分散を計算せよ。

(4)　$\sigma > 0$ に対して $Y = \sigma X + \mu$ なる変数変換をするとき，Y の確率密度関数，積率母関数，平均と分散を計算せよ。

(1)　$$\boldsymbol{M_X(t)} = E\left[e^{tx}\right] = \int_0^1 e^{tx} f(x)dx = \int_0^1 e^{tx}dx = \left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{e^t-1}{t}}$$

$$\frac{d}{dt}M_X(t) = \frac{e^t(t-1)+1}{t^2}$$

$$\boldsymbol{E[X]} = \lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}M_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t(t-1)+1}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t}e^t}{2\cancel{t}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) = \frac{e^t(t^2-2t+2)-2}{t^3}$$

$$E[X^2] = \lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t(t^2-2t+2)-2}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^2}e^t}{3\cancel{t^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = E[X^2]-(E[X])^2 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(2)　$y=g(x)=x^2 \quad (0<x<1)$ とすると，$g^{-1}(y)=\sqrt{y}$，$x:0\to 1$ のとき，$y:0\to 1$

$f_X(x)=f(x)=1$ として，

$$\boldsymbol{f_Y(y)} = f_X(\sqrt{y})\cdot\left|(\sqrt{y})'\right| = 1\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

$$\boldsymbol{E[Y]} = E\left[X^2\right] = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E\left[Y^2\right]-(E[Y])^2 = E\left[X^4\right]-\left(E[X^2]\right)^2$$

$$\frac{d^3}{dt^3}M_X(t) = \frac{e^t(t^3-3t^2+6t-6)+6}{t^4}$$

$$\frac{d^4}{dt^4}M_X(t) = \frac{e^t(t^4-4t^3+12t^2-24t+24)-24}{t^5}$$

$$E[X^4] = \lim_{t\to 0}\frac{d^4}{dt^4}M_X(t) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t(t^4-4t^3+12t^2-24t+24)-24}{t^5} = \lim_{t\to 0}\frac{\cancel{t^4}e^t}{5\cancel{t^4}} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{5}-\frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{4}{45}}$$

(3)　$y = g(x) = -\log x \quad (0 < x < 1)$ とすると，$g^{-1}(y) = e^{-y}$

$x : 0 \to 1$ のとき，$y : \infty \to 0$

$f_X(x) = f(x) = 1$ として，

$$\boldsymbol{f_Y(y)} = f_X\left(e^{-y}\right) \cdot \left|\left(e^{-y}\right)'\right| = 1 \cdot e^{-y} = \boldsymbol{e^{-y}}$$

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} e^{-y} dy = \int_0^\infty e^{(t-1)y} dy = \left[\frac{e^{(t-1)y}}{t-1}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-t} \quad (t < 1)$$

$$\boldsymbol{E[Y]} = \frac{d}{dt} M_Y(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1-t)^{-1}\bigg|_{t=0} = (1-t)^{-2}\bigg|_{t=0} = \mathbf{1}$$

$$E[Y^2] = \frac{d^2}{dt^2} M_Y(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(1-t)^{-2}\bigg|_{t=0} = 2(1-t)^{-3}\bigg|_{t=0} = 2$$

$$\mathbf{Var}\boldsymbol{(Y)} = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2 = 2 - 1^2 = \mathbf{1}$$

(4)　$y = g(x) = \sigma x + \mu \quad (0 < x < 1)$ とすると，$g^{-1}(y) = \dfrac{y-\mu}{\sigma}$

$x : 0 \to 1$ のとき，$y : \mu \to \mu + \sigma$

$f_X(x) = f(x) = 1$ として，

$$\boldsymbol{f_Y(y)} = f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \cdot \left|\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)'\right| = 1 \cdot \frac{1}{\sigma} = \boldsymbol{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\boldsymbol{M_Y(t)} = \int_\mu^{\mu+\sigma} e^{ty} \cdot \frac{1}{\sigma} dy = \left[\frac{e^{ty}}{t\sigma}\right]_\mu^{\mu+\sigma} = \boldsymbol{\frac{e^{t(\mu+\sigma)} - e^{t\mu}}{t\sigma}}$$

$$\boldsymbol{E[Y]} = E[\sigma X + \mu] = \sigma E[X] + \mu = \boldsymbol{\frac{\sigma}{2} + \mu}$$

$$\mathbf{Var}\boldsymbol{(Y)} = \mathrm{Var}(\sigma X + \mu) = \sigma^2 \mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{12}}$$