円順列について

2023年3月14日

＃３分数学 清水団（@dannchu）

都内の私立の中学校・高等学校で数学を教えています。

今年は場合の数・確率の授業がありました。

その時のテストの問題を紹介します。

5. 次の文章を読み，問題に答えよ。(15 点)

花子 今から，白玉と黒玉を円形に並べてその総数を考えます。

太郎 面白そうだけど，難しそうでだね。

花子 まずは，白玉 3 個と黒玉 1 個を円形に並べてみましょう。

太郎 これは 1 通りだね！

花子 そうね。でもどうして？

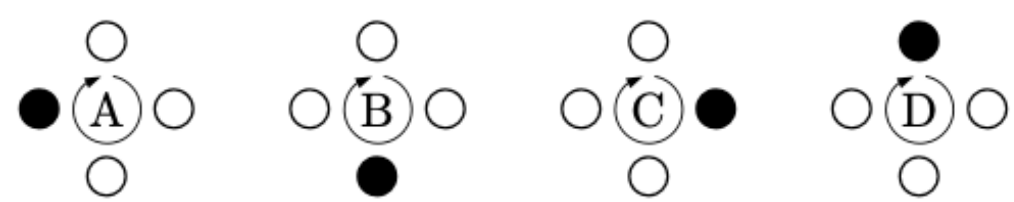
太郎 だって，並べたら 1 通りしかないじゃん！

花子 でも，『1 通りしかない』っていうことをどうやって説明するの？

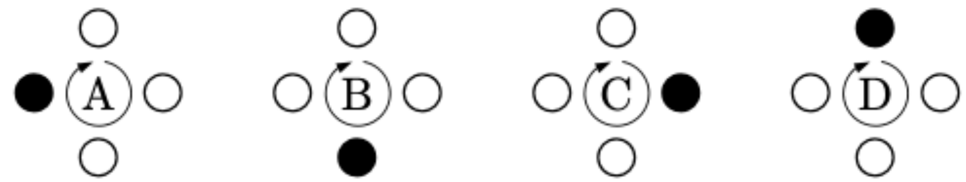
太郎 そうだね ····（そんなこと言ったって 1 通りしかないじゃないか！花子さんはいつも通り理屈っぽいな）

花子 まずは，1 列に並べると 4 通りあるわね。それらを円形にして回転させ，重なるかどうかチェックしみましょう。まず，1 列に並べて，そして，円形にしてみると ···

A:○○○●，B:○○●○，C:○●○○，D:●○○○



A:○○○●, B:○○●○, C:○●○○, D:●○○○



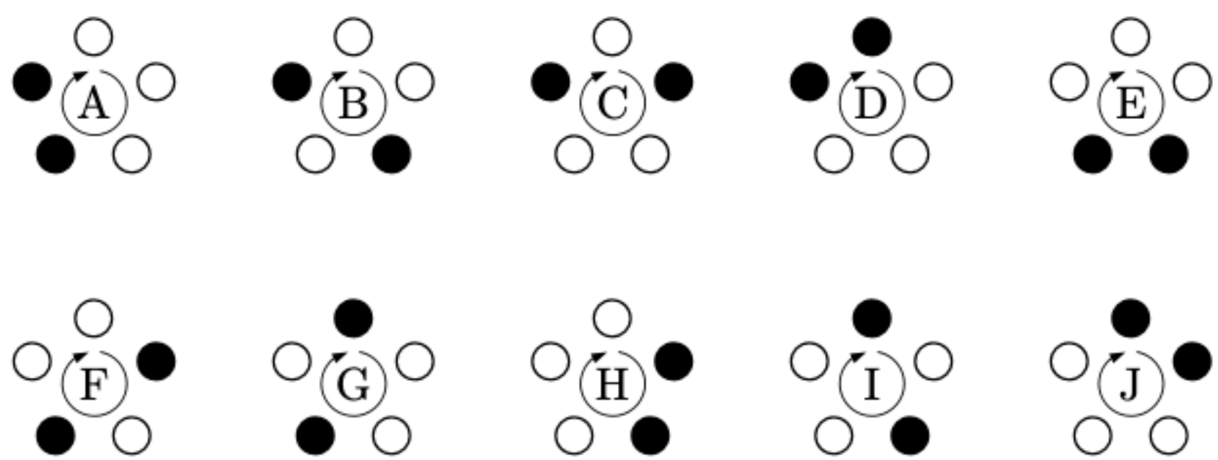
太郎 Bを時計回りに90度回転すると，Aに重なるね。CとDもそれぞれ180度，270度回転するとAと重なる。4通りを1組とみて1通りとなるわけだ。

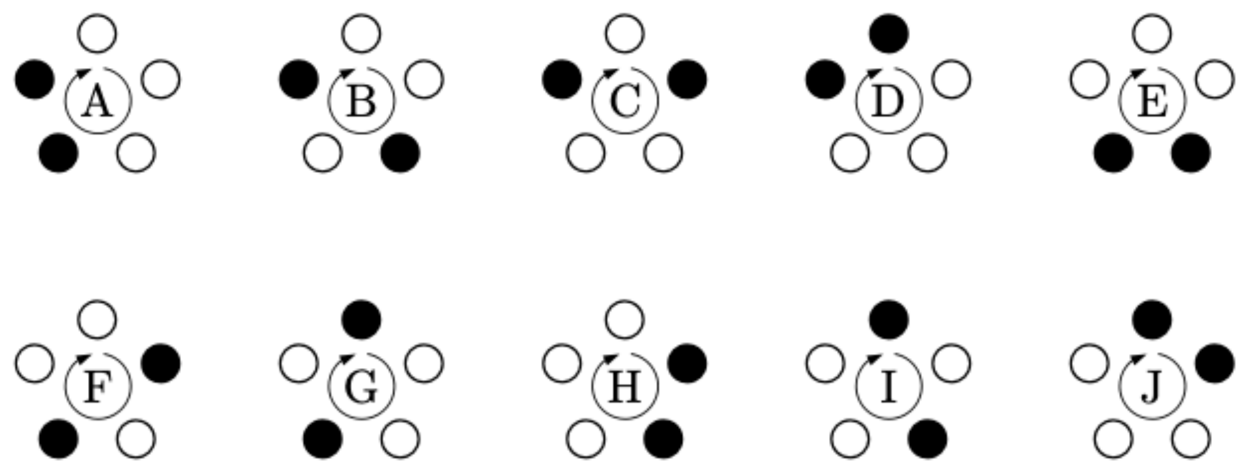
花子 それでは，他の場合もやってみましょう！白玉3個と黒玉2個だとどうなるかしら？

太郎 じゃあ，まず，1列に並べてみるよ。${}_5C_3 = 10$ 通りあるね。

A:○○○●●, B:○○●○●, C:○●○○●, D:●○○○●, E:○○●●○
F:○●○●○, G:●○○●○, H:○●●○○, I:●○●○○, J:●●○○○

太郎 そして，これらを円形に並べて …





花子 回転してAに重なるのはD，E，H，J，回転してBに重なるのはC，F，G，Iで，AとBは回転しても重ならないようね。

太郎 ということは答えは2通りだね … 花子さん！すごい規則性に気がついたよ！

花子 何に気がついたの？

太郎 **円順列の個数は一列に並べた総数を個数で割ればいいんじゃない？**

最初の白玉3個，黒玉1個の例と2番目の白玉3個，黒玉2個の例は次のように計算できるよ！

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{4} = \frac{4}{4} = 1\ (\text{通り}) \qquad \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{5} = \frac{10}{5} = 2\ (\text{通り})$$

花子 太郎くん，考えが甘いわよ。白玉 4 個，黒玉 2 個でやってごらんなさい。

太郎 そうなの … やってみますよ。（花子さんはいつも偉そうなんだよな。これがなければ結構いい感じなのにな …）

花子 何ぶつぶつ言っていいるの！やってみるわよ！

太郎 はい !!!

$$\frac{{}_6C_2}{6} = \frac{15}{6} = 2.5$$

太郎 計算上は 2.5 通りだね。

花子 何言ってるの！整数になっていないじゃない！

太郎 じゃあ，これも 1 列に並べてから，円形にしてみるといいんじゃない？
なんでうまくいかないか原因がわかるかもしれない。
1 列に並べたもので，後ろにあるものを先頭に持ってきても，円形に並べると同じになる。
このことを利用して，全部書いてみよう！

花子 太郎くんにしてはいいアイデアね。

花子 太郎くんにしてはいいアイデアね。

○○○○●●，●○○○○●，●●○○○○，○●●○○○，○○●●○○，○○○●●○

この 6 個は円形にすると同じ並びとなる。

○○○●○●，●○○○●○，○●○○○●，●○●○○○，○●○●○○，○○●○●○

この 6 個も円形にすると同じ並びとなる。

○○●○○●，●○○●○○，○●○○●○

この 3 個は円形にすると同じ並びとなる。**（6 個でなく，3 個で 1 つと数えるようだ！）**

太郎 答えは 3 通りだね。

（最初の 2 つの例と 3 つ目の例では何が違うんだろう。）

（数字の組で見ると，$(3,1)$，$(3,2)$，$(4,2)$ か ⋯ ）

（あれ ⋯ もしかして ⋯ 最大公約数か ⋯? ）

清水 この問題は『コーシー・フロベニウスの定理（バーンサイドの補題)』を用いて，

$$\frac{15+0+0+3+0+0}{6}=\frac{18}{6}=3$$

と計算できます。

太郎・花子 ?????（そんなのわかるか !!! ）

【問題】

白玉 m 個と黒玉 n 個を円形に並べる。

(1) $m = 2$，$n = 2$ のとき，並べ方は全部で何通りか。

(2) $m = 3$，$n = 5$ のとき，並べ方は全部で何通りか。

(3) $m = 4$，$n = 6$ のとき，並べ方は全部で何通りか。

問題文は以上で終わりです。

5. (1) 一列に並べると ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り

○○●●，●○○●，●●○○，○●●○

この 4 個は円形にすると同じ並びとなる。

○●○●，●○●○

この 2 個は円形にすると同じ並びとなる。

よって，円形に並べる方法は **2 通り**。

(2) 一列に並べると ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り

3 と 5 は互いに素（最大公約数が 1）なので，円形に並べる方法は

$$\frac{56}{8} = \mathbf{7}\ \textbf{(通り)}$$

(3) 一列に並べると ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 通り

- 4 と 6 の最大公約数は 2 であるので，まず，5 個で 1 組となるものを考える。
- ○○●●●の並べ方は ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通りで，これらを 2 つ並べたものは 5 個 1 組である。
- （例えば○○●●●○○●●●，○●○●●○●○●●など）
- それ以外の $210 - 10 = 200$ 通りは 10 個で 1 組である。

以上より，円形に並べる方法は

$$\frac{10}{5} + \frac{200}{10} = 2 + 20 = \mathbf{22}\ \textbf{通り}$$

【参考】コーシー・フロベニウスの定理より,

$$\frac{210+0+0+0+0+10+0+0+0+0}{10}=\frac{220}{10}=22\text{（通り）}$$

となります。

【いくつかの例】

- 白玉 4 個・黒玉 4 個

$$\begin{aligned}&\frac{{}_8C_4+0+{}_2C_1+0+{}_4C_2+0+{}_2C_1+0}{10}\\&=\frac{70+0+2+0+6+0+2+0}{10}\\&=\frac{80}{10}=\mathbf{8}\ \textbf{（通り）}\end{aligned}$$

- 白玉 6 個・黒玉 6 個

$$\begin{aligned}&\frac{{}_{12}C_6+0+{}_2C_1+0+{}_4C_2+0+{}_6C_3+0+{}_4C_2+0+{}_2C_1+0}{12}\\&=\frac{924+0+2+0+6+0+20+0+6+0+2+0}{10}\\&=\frac{960}{10}=\mathbf{96}\ \textbf{（通り）}\end{aligned}$$

- 白玉 3 個・黒玉 3 個・赤玉 3 個

$$\frac{\frac{9!}{3!3!3!}+0+0+3!+0+0+3!+0+0}{9}$$
$$=\frac{1680+0+0+6+0+0+6+0+0}{9}$$
$$=\frac{1692}{9}=\mathbf{188}\ \textbf{(通り)}$$

- 白玉・黒玉による 5 個の重複円順列

  5 は素数なので，

$$\frac{2^5+2+2+2+2}{5}=\frac{32+2+2+2+2}{5}=\frac{40}{5}=\mathbf{8}\ \textbf{(通り)}$$

- 白玉・黒玉による 6 個の重複円順列

  $6=2\times 3$ なので，ちょっと大変

$$\frac{2^6+2+(2+2)+(2+6)+(2+2)+2}{6}$$
$$=\frac{64+2+4+8++4+2}{6}$$
$$=\frac{84}{6}=\mathbf{14}\ \textbf{(通り)}$$


Facebookを検索
11
カバー写真を編集
清水 団
友達335人
ストーリーズに追加
プロフィールを編集
投稿
基本データ
友達
写真
動画
チェックイン
その他

```julia
# 円順列（同じものでもOK）この例は集合から3個とってくる円順列。
function circperm(seq, k)
    p = union(permutations(seq, k))
    n = length(p)
    d = []
    for i = 1:n-1, j = i+1:n, t = 1:k-1
        if p[i] == circshift(p[j], t)
            push!(d, j)
        end
    end
    deleteat!(p, sort!(union!(d)))
end

circperm(seq, 3)
```

Julia言語です。パッケージCombinatorics.jlを使います。

```julia
using Combinatorics #multinomial(a)多項係数を求める
using Primes    #totient(i) オイラーのトーシェント関数

function divisors(n)    #約数のリストを求める関数
   X=[]
   for i=1:n
       if n % i==0
           X =push!(X,i)
       end
   end
   X
end

function enkan(a)
   l=gcd(a)    #リスト（配列）aの最大公約数を求める。
   N=sum(a)    #aの総和
   A=divisors(l)
   p=0
   for k in A
       q=map(x -> x÷k,a)
       p +=totient(k)*multinomial(q...)
   end
   p÷N
end

enkan([4 6])
```

ありがとうございました。