東京大学（理系）2024・数学

第 1 問

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,-1,1)$をとる。xy平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする.

(i) P は原点 O と異なる.

(ii) $\angle\ \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle\ \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲をxy平面上に図示せよ.

解答

$\mathrm{P}(x,y,0)$とおく。

(i) $\angle\ \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$より，

$$\cos\angle\ \mathrm{AOP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2}\ldots①$$

(ii) $\angle\ \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$より，

$$\cos\angle\ \mathrm{OAP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y+1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+(-1)^2}} = \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+2y+2}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}\ldots②$$

① ∨ ② を `julia` で図示する。

東京大学（理系）2024・数学

第 1 問

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,-1,1)$をとる。xy平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする.

(i) P は原点 O と異なる.

(ii) $\angle\ \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle\ \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲をxy平面上に図示せよ.

第 2 問

次の関数 $f(x)$を考える.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 αで，$f'(\tan\alpha) = 0$となるものを求めよ.

(2) (1) で求めた αに対し，$\tan\alpha$の値を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$の区間 $0 \leqq x \leqq 1$における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，
$0.69 < \log 2 < 0.7$であることを用いてよい.

第 3 問

座標平面上を次の規則 (i),
(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える.