

# 東京大学（理系）2024・数学

## 第1問

座標空間内の点  $A(0, -1, 1)$  をとる。  $xy$  平面上の点  $P$  が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i)  $P$  は原点  $O$  と異なる。

$$(ii) \angle AOP \geq \frac{2}{3}\pi$$

$$(iii) \angle OAP \leq \frac{\pi}{6}$$

$P$  がとりうる範囲を  $xy$  平面上に図示せよ。

解答

$P(x, y, 0)$  とおく。

$$(i) \angle AOP \geq \frac{2}{3}\pi \text{ より,}$$

$$\cos \angle AOP = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}} \leq -\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$(ii) \angle OAP \leq \frac{\pi}{6} \text{ より,}$$

$$\cos \angle OAP = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AP}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + (-1)^2}} = \frac{y+2}{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \textcircled{2}$$

① ∨ ② を Julia で図示する。

```
function val1(x,y)
    -y/sqrt(2) /sqrt(x^2+y^2)
end

function val2(x,y)
    (y+2)/sqrt(2) /sqrt(x^2+y^2+2y+2)
end

function f(x,y)
    if x == y == 0
        return 0
    elseif val1(x,y) <= -1/2 && sqrt(3)/2 <= val2(x,y)
        return 1
    else 0.8
    end
end

using Plots

contour(-3:0.01:3 , -3:0.01:3 ,f,fill=true,aspectratio=true)
```

