@HirokazuOHSAWA さんからの期待値の問題

番号 $1, 2, 3, \ldots$ の人が赤旗と白旗の両方を持って並んでいる。番号 1 の人は赤旗をあげる。また、番号 $n+1$ の人は番号 n の人があげた旗を見て、確率 0.9 で同じ色の旗をあげ、確率 0.1 で異なる色の旗をあげる（ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ）。

このとき、番号 $1, 2, 3, \ldots, n$ の中で赤旗をあげた人の人数の期待値を求めよ（ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ）。

- n 番目の人が赤旗を上げる確率を p_n とする。
- $p_1 = 1$ である。
- $p_{n+1} = 0.9p_n + 0.1(1 - p_n)$ （漸化式）

$$\therefore p_{n+1} = 0.8p_n + 0.1$$

$$\therefore p_{n+1} - 0.5 = 0.8(p_n - 0.5)$$

$$\therefore p_n - 0.5 = 0.8^{n-1}(p_1 - 0.5) = 0.5 \times 0.8^{n-1}$$

$$\therefore p_n = 0.5 + 0.5 \times 0.8^{n-1}$$

- i 番目の人が上げる赤旗の数を X_i とする。

  確率分布は

X_i	0	1	total
p	$1 - p_i$	p_i	1

- $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ として,

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n] \\ &= p_1 + p_2 + \ldots + p_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (0.5 + 0.5 \times 0.8^{i-1}) \\ &= 0.5n + \frac{0.5(1 - 0.8^n)}{1 - 0.8} \\ &= 0.5n + 2.5 - 2.5 \times 0.8^n \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E[X] = 0.5n + 2.5 - 2.5 \times 0.8^n}$$

- $\mu = E[X]$ として,

$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \mu^2$

$= E\left[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2\right] - \mu^2$

$= E\left[\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right)\right] - \mu^2$

$= E[X_1^2] + E[X_2^2] + \ldots + E[X_n^2] + 2\sum_{i<j} E[X_i X_j] - \mu^2$

- $1 \leqq i \leqq n$

$X_i \setminus X_i$	0	1	total
0	$1 - p_i$	0	$1 - p_i$
1	0	p_i	p_i
total	$1 - p_i$	p_i	1

X_i^2	0	1	total
p	$1 - p_i$	p_i	1

$$\therefore E[X_i^2] = p_i$$

- $1 \leqq i < j \leqq n$

$X_i X_j$	0	1	計
0	$(1 - p_i) \times (1 - p_{j-i+1})$	$(1 - p_i) \times (1 - p_{j-i+1})$	$1 - p_i$
1	$p_i \times (1 - p_{j-i+1})$	$p_i \times p_{j-i+1}$	p_i
計	$1 - p_{j-i+1}$	p_{j-i+1}	1

$X_i X_j$	0	1	total
p	$1 - p_i p_{j-i+1}$	$p_i p_{j-i+1}$	1

$$\therefore E[X_i X_j] = p_i p_{j-i+1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= p_1 + p_2 + \ldots + p_n + 2\sum_{i<j} p_i p_{j-i+1} - \mu^2 \\ &= \mu - \mu^2 + 2\sum_{i<j} p_i p_{j-i+1} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{Var}[X] = \mu - \mu^2 + 2\sum_{i<j} p_i p_{j-i+1}}$$

- julia 言語のコードです。
- n 人で旗を上げたときの赤旗上げた人数がアウトプットされます。
- 確率の部分は乱数を用います。

```
#n 人の中で何人赤旗を上げたのかを調べる。
function sample(n)
    if n == 1
        1
    else
        p = 1
        θ = 0 # 赤なら 0，白なら 1
        r = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]
        w = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,0]
        for i = 2:n
            if θ == 0
                t = rand(r)
                if t == 0
                    p += 1
                elseif t ==1
                    θ = 1
                end
            elseif θ == 1
                t = rand(w)
                if t == 0
                    p += 1
                    θ = 0
                end
            end
        end
        return p
    end
end
```

- 理論値は実装してあります。

```
using StatsPlots,Distributions

# 理論値
q(n) =0.5+0.5*0.8^(n-1)
heikin(n) = sum(q(i) for i =1:n)
function bunsan(n)
    k = 0
    for  i = 1:n-1 , j = i+1:n
        k += q(i)*q(j-i+1)
    end
    heikin(n)-heikin(n)^2+2*k
end

# 標本
m = 10^5
n = 100
X =[sample(n) for _= 1:m]

@show mean(X);
@show heikin(n);
@show var(X,corrected=true);
@show bunsan(n);
```

```
mean(X) = 52.52454
heikin(n) = 52.49999999949071
var(X, corrected = true) = 208.5671234596345
bunsan(n) = 208.7500000045893
```

- 理論値と標本からの結果が一致しますね。

- 大数の法則を見ておこう！

```
using StatsPlots,Distributions
m = 10^3
n = 100

X =[sample(n) for _= 1:m]
Z = [mean(X[i] for i =1:k) for k =1:m]

plot(Z,label="sample mean")
plot!(x->heikin(n),label="mean")
```

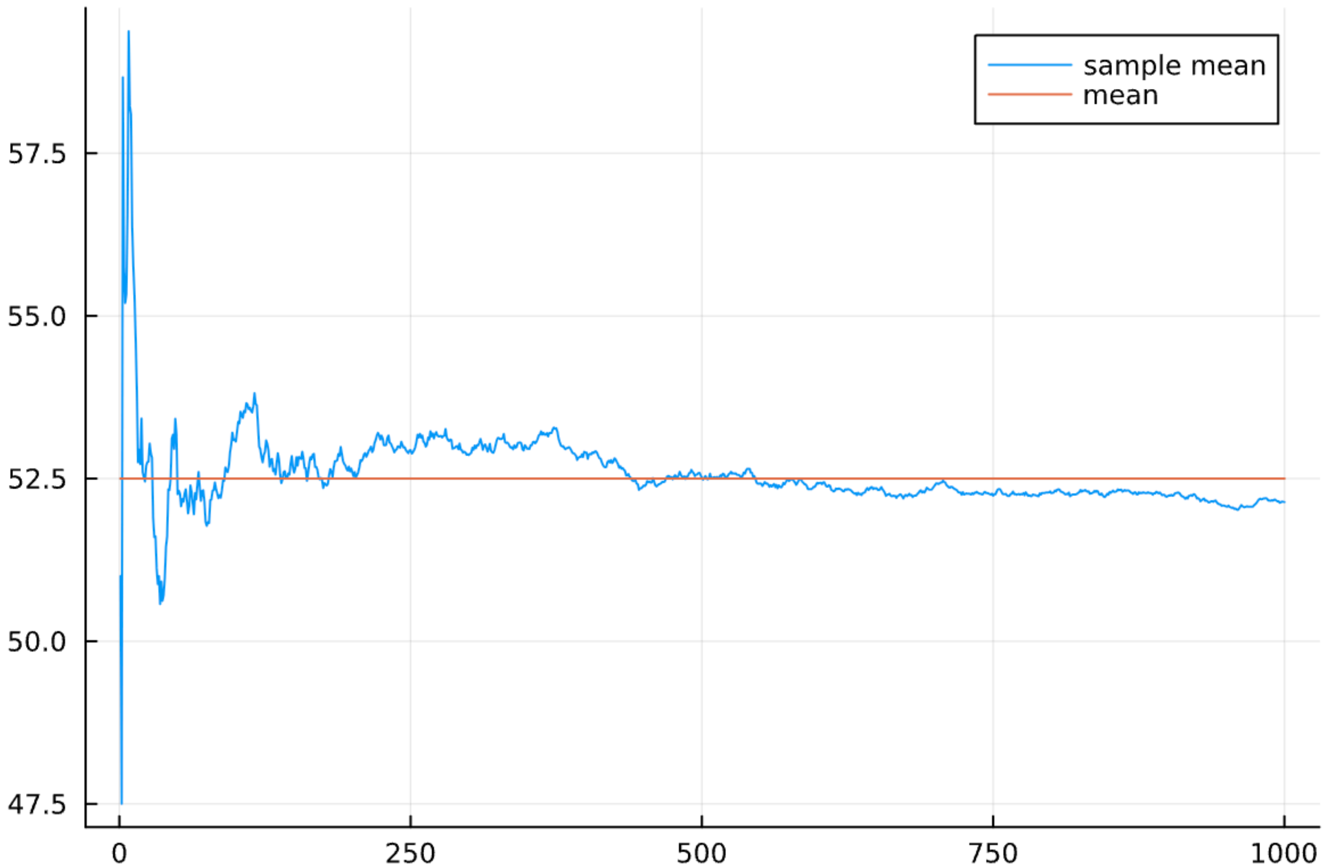

図 1: 大数の法則

- 中心極限定理を見ておこう！

```
# 中心極限定理も見ておこう！
# 中心極限定理も見ておこう！
using StatsPlots,Distributions
m , n =10^5,100
A = [sample(n) for _=1:m]
B = [[i,count(x -> x==i ,A)] for i = 1:n]
C = [B[i][2]./m for i=1:n]

bar(C,label="sample")
@show mean(A)
@show std(A,corrected=false)

plot!(Normal(mean(A),std(A,corrected=false)),label="Normal")
```

```
mean(A) = 52.54648
std(A, corrected = false) = 14.42870609616815
```

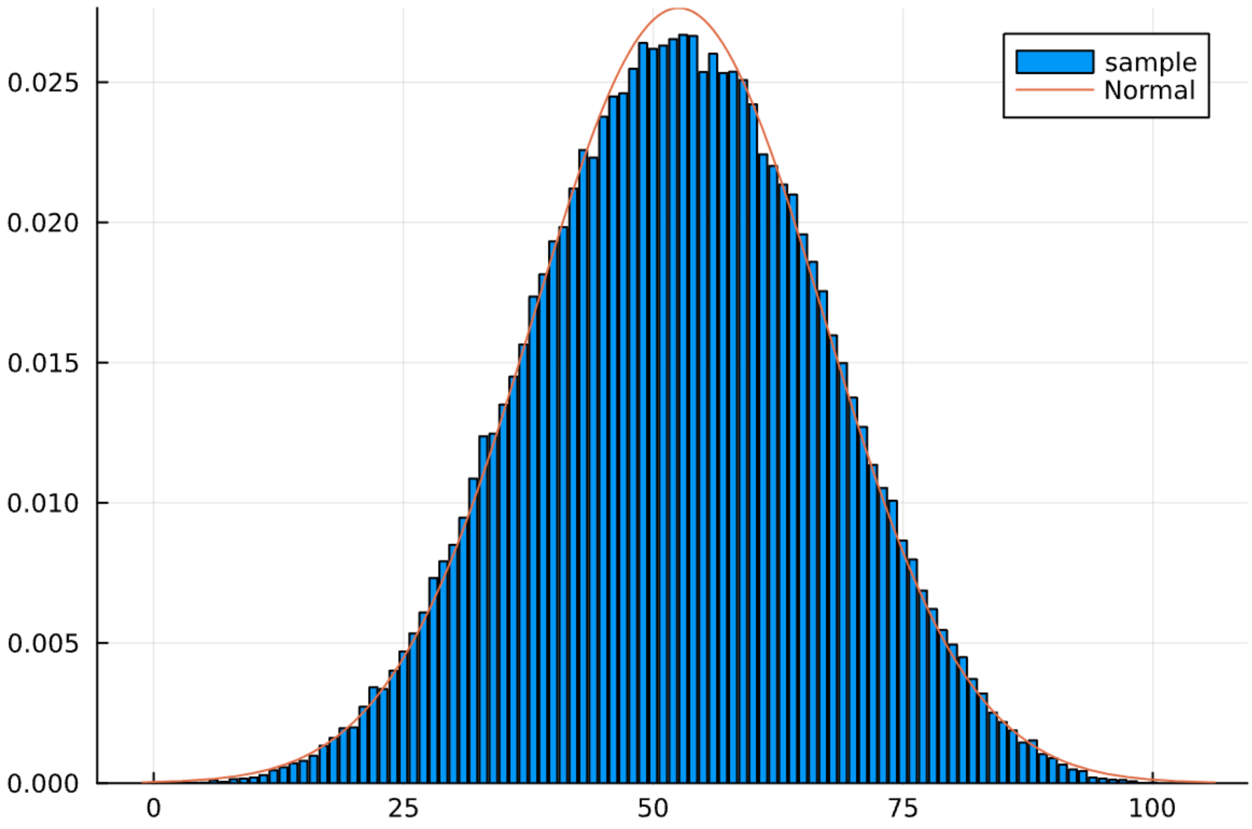

図 2: 中心極限定理