

番号  $1, 2, 3, \dots$  の人が赤旗と白旗の両方を持って並んでいる。番号  $1$  の人は赤旗をあげる。また、番号  $n+1$  の人は番号  $n$  の人があげた旗を見て、確率  $0.9$  で同じ色の旗をあげ、確率  $0.1$  で異なる色の旗をあげる ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

このとき、番号  $1, 2, 3, \dots, n$  の中で赤旗をあげた人の人数の期待値を求めよ ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

- $n$  番目の人が赤旗を上げる確率を  $p_n$  とする。
- $1 \leq i \leq n$

- $p_1 = 1$  である。

- $p_{n+1} = 0.9p_n + 0.1(1 - p_n)$  (漸化式)

$$\therefore p_{n+1} = 0.8p_n + 0.1$$

$$\therefore p_{n+1} - 0.5 = 0.8(p_n - 0.5)$$

$$\therefore p_n - 0.5 = 0.8^{n-1}(p_1 - 0.5) = 0.5 \times 0.8^{n-1}$$

$$\therefore p_n = 0.5 + 0.5 \times 0.8^{n-1}$$

- $i$  番目の人が上げる赤旗の数を  $X_i$  とする。

確率分布は

$X_i$	0	1	total
$p$	$1 - p_i$	$p_i$	1

- $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  として、

$$E[X] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n]$$

$$= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

$$= p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (0.5 + 0.5 \times 0.8^{i-1})$$

$$= 0.5n + \frac{0.5(1 - 0.8^n)}{1 - 0.8}$$

$$= 0.5n + 2.5 - 2.5 \times 0.8^n$$

$$E[X] = 0.5n + 2.5 - 2.5 \times 0.8^n$$

- $\mu = E[X]$  として、

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - \mu^2$$

$$= E[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2] - \mu^2$$

$$= E\left[\left(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + 2 \sum_{i < j} X_i X_j\right)\right] - \mu^2$$

$$= E[X_1^2] + E[X_2^2] + \dots + E[X_n^2] + 2 \sum_{i < j} E[X_i X_j] - \mu^2$$

$X_i \setminus X_i$	0	1	total
0	$1 - p_i$	0	$1 - p_i$
1	0	$p_i$	$p_i$
total	$1 - p_i$	$p_i$	1

$X_i^2$	0	1	total
$p$	$1 - p_i$	$p_i$	1

$$\therefore E[X_i^2] = p_i$$

- $1 \leq i < j \leq n$

$X_i X_j$	0	1	計
0	$(1 - p_i) \times (1 - p_{j-i+1})$	$(1 - p_i) \times p_{j-i+1}$	$1 - p_i$
1	$p_i \times (1 - p_{j-i+1})$	$p_i \times p_{j-i+1}$	$p_i$
計	$1 - p_{j-i+1}$	$p_{j-i+1}$	1

$X_i X_j$	0	1	total
$p$	$1 - p_i p_{j-i+1}$	$p_i p_{j-i+1}$	1

$$\therefore E[X_i X_j] = p_i p_{j-i+1}$$

$$\text{Var}[X] = p_1 + p_2 + \dots + p_n + 2 \sum_{i < j} p_i p_{j-i+1} - \mu^2$$

$$= \mu - \mu^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_{j-i+1}$$

$$\text{Var}[X] = \mu - \mu^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_{j-i+1}$$

- julia 言語のコードです。
- $n$  人で旗を上げたときの赤旗上げた人数がアウトプットされます。
- 確率の部分は乱数を用います。

#n 人の中で何人赤旗を上げたのかを調べる。

```
function sample(n)
    if n == 1
        1
    else
        p = 1
        θ = 0 # 赤なら 0, 白なら 1
        r = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]
        w = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,0]
        for i = 2:n
            if θ == 0
                t = rand(r)
                if t == 0
                    p += 1
                elseif t == 1
                    θ = 1
                end
            elseif θ == 1
                t = rand(w)
                if t == 0
                    p += 1
                    θ = 0
                end
            end
        end
        end
        return p
    end
end
```

- 理論値は実装してあります。

```
using StatsPlots,Distributions

# 理論値
q(n) = 0.5 + 0.5 * 0.8^(n-1)
heikin(n) = sum(q(i) for i = 1:n)
function bunsan(n)
    k = 0
    for i = 1:n-1, j = i+1:n
        k += q(i) * q(j-i+1)
    end
    heikin(n) - heikin(n)^2 + 2*k
end

# 標本
m = 10^5
n = 100
X = [sample(n) for _ = 1:m]

@show mean(X);
@show heikin(n);
@show var(X, corrected=true);
@show bunsan(n);
```

```
mean(X) = 52.52454
heikin(n) = 52.49999999949071
var(X, corrected = true) = 208.5671234596345
bunsan(n) = 208.7500000045893
```

- 理論値と標本からの結果が一致しますね。

- 大数の法則を見ておこう！

```
using StatsPlots,Distributions
m = 10^3
n = 100

X=[sample(n) for _= 1:m]
Z = [mean(X[i] for i =1:k) for k =1:m]

plot(Z,label="sample mean")
plot!(x->heikin(n),label="mean")
```

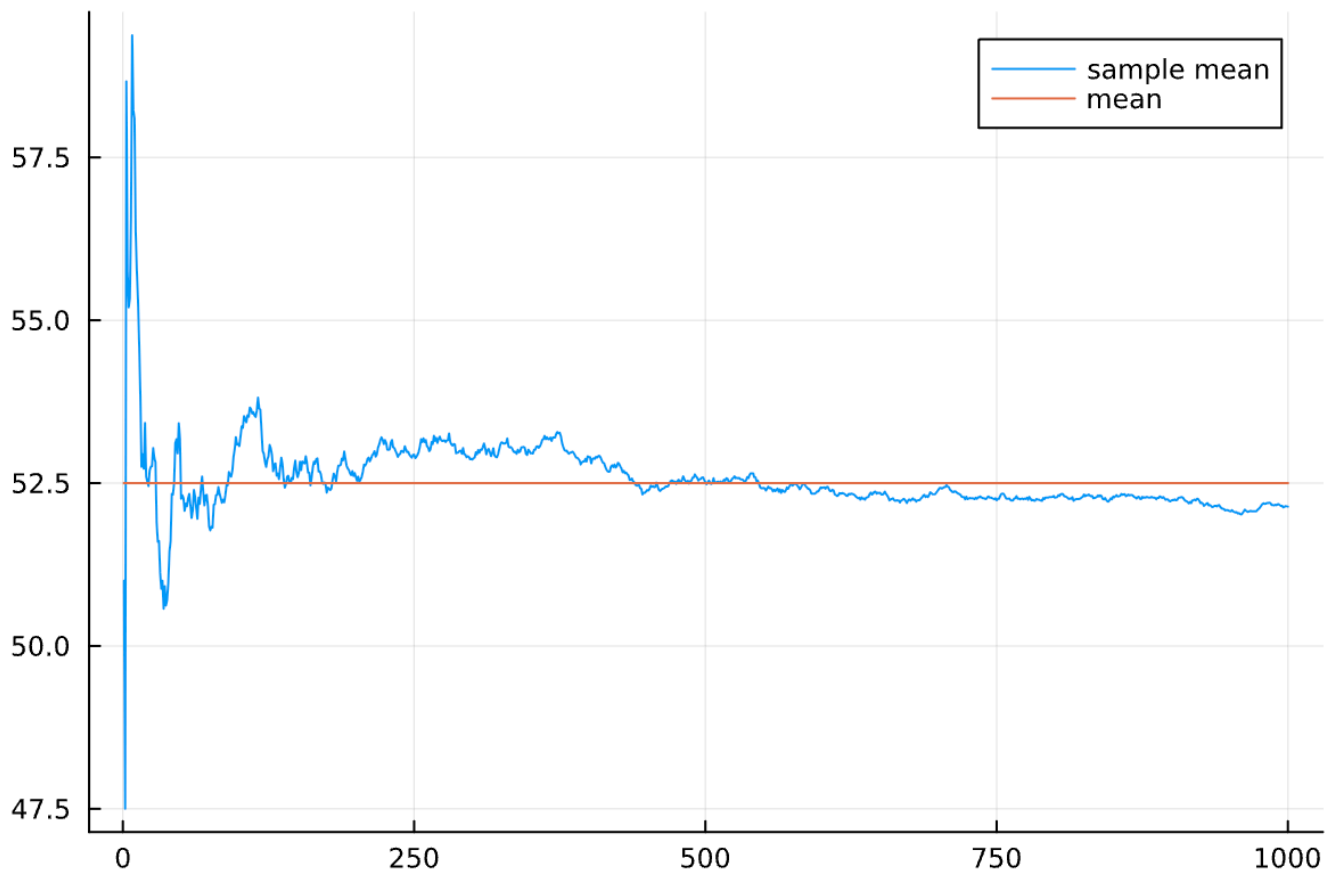


図 1: 大数の法則

- 中心極限定理を見ておこう！

```
# 中心極限定理も見ておこう！
using StatsPlots,Distributions
m , n =10^5,100
A = [sample(n) for _=1:m]
B = [[i,count(x -> x==i ,A)] for i = 1:n]
C = [B[i][2]./m for i=1:n]

bar(C,label="sample")
@show mean(A)
@show std(A,corrected=false)

plot!(Normal(mean(A),std(A,corrected=false)),label="Normal")
```

mean(A) = 52.54648

std(A, corrected = false) = 14.42870609616815

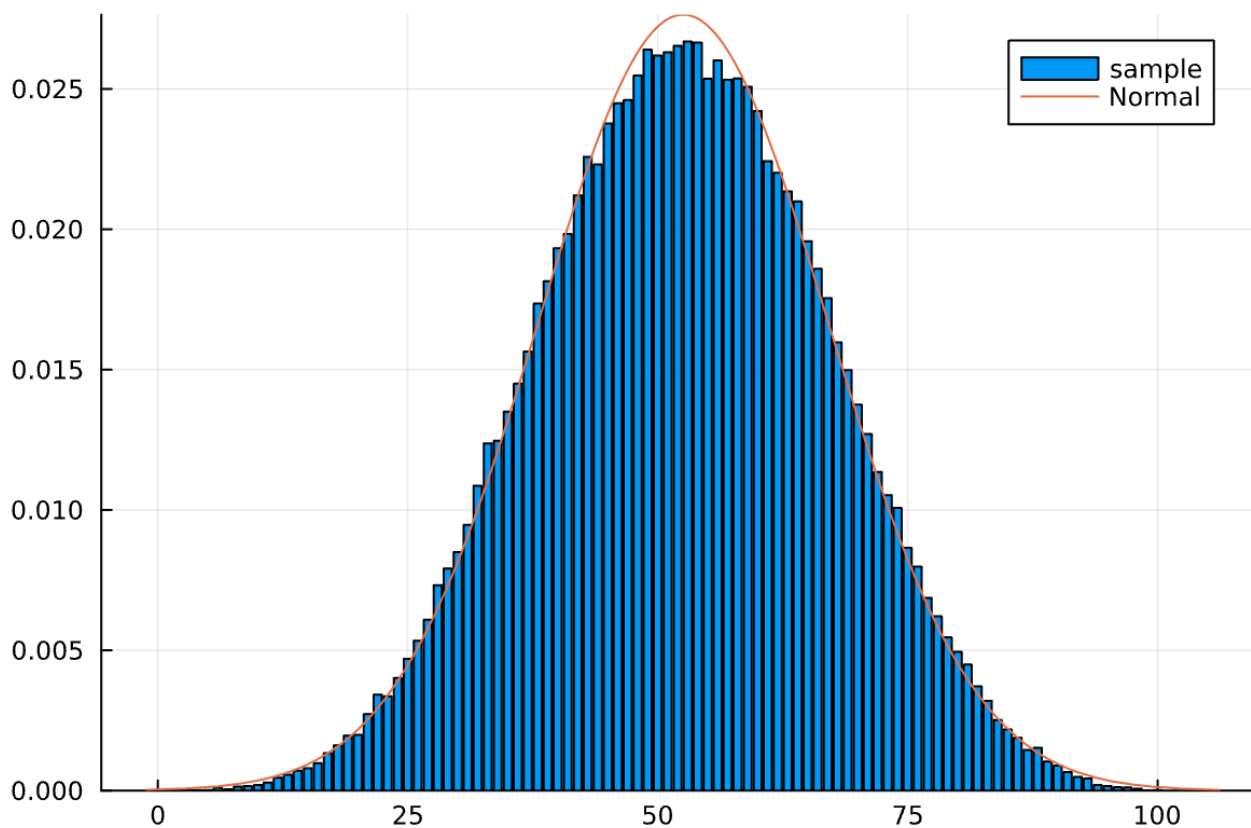


図 2: 中心極限定理

- 人数が少ないと正規分布とならないですね。

```
# 人数が少ないと正規分布とならない。
using StatsPlots,Distributions
m , n =10^5,10
A = [sample(n) for _=1:m]
B = [[i,count(x -> x==i ,A)] for i = 1:n]
C = [B[i][2]./m for i=1:n]

bar(C,label="sample")
@show mean(A)
@show std(A,corrected=false)

plot!(Normal(mean(A),std(A,corrected=false)),label="Normal")
```

```
mean(A) = 7.23811
std(A, corrected = false) = 2.9339007529055943
```

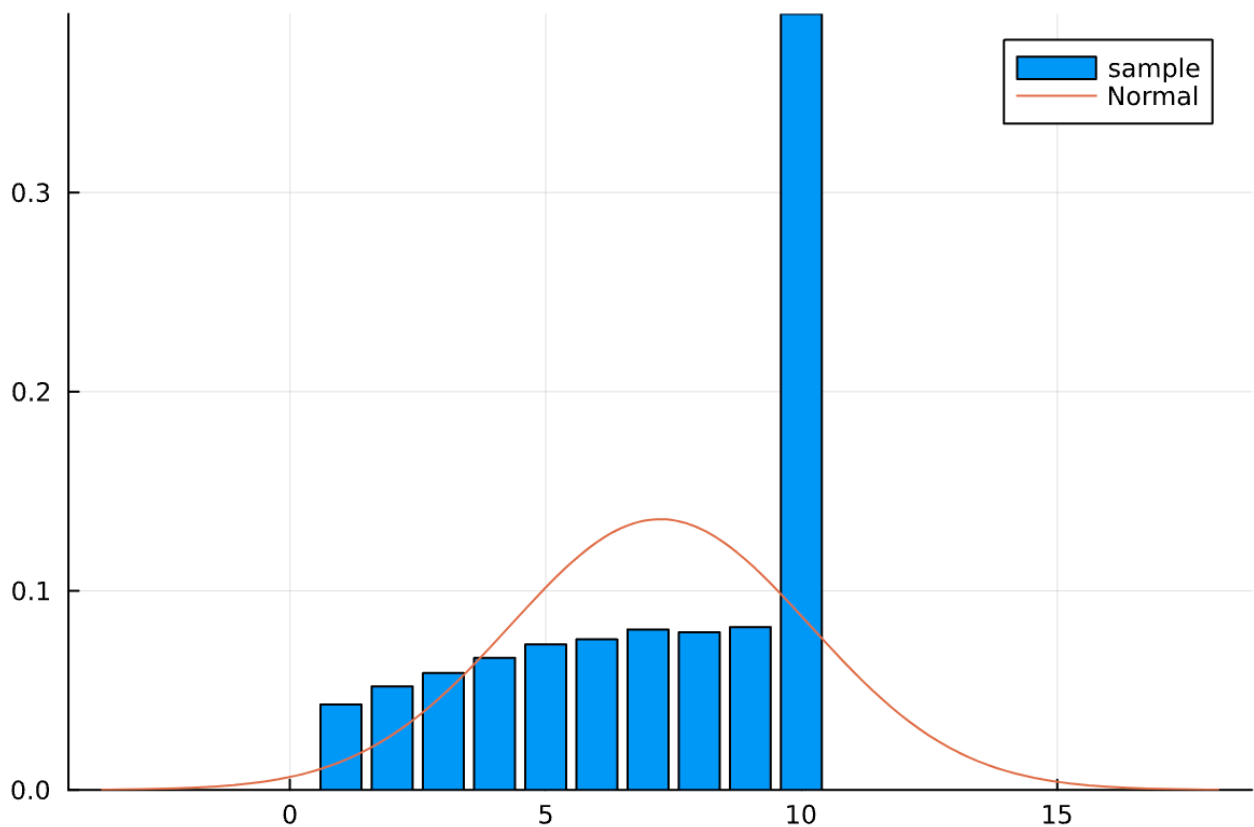


図 3: 中心極限定理とならない