

# 2025 年 東京大学・理系 数学

清水 団

2025 年 3 月 27 日

## 第 1 問

座標平面上の点  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $D(1, 0)$  を考える。実数  $0 < t < 1$  に対して、線分  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  を  $t : (1 - t)$  に内分する点をそれぞれ  $P_t$ ,  $Q_t$ ,  $R_t$  とし、線分  $P_tQ_t$ ,  $Q_tR_t$  を  $t : (1 - t)$  に内分する点をそれぞれ  $S_t$ ,  $T_t$  とする。さらに、線分  $S_tT_t$  を  $t : (1 - t)$  に内分する点を  $U_t$  とする。また、点  $A$  を  $U_0$ , 点  $D$  を  $U_1$  とする。

- (1) 点  $U_t$  の座標を求めよ。
- (2)  $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲を動くときに点  $U_t$  が描く曲線と、線分  $AD$  で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3)  $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす実数とする。 $t$  が  $0 \leq t \leq a$  の範囲を動くときに点  $U_t$  が描く曲線の長さを、 $a$  の多項式の形で求めよ。

## 第 2 問

- (1)  $x > 0$  のとき、不等式  $\log x \leq x - 1$  を示せ。
- (2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log \left( \frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2} \right) dx$$

## 第 3 問

平行四辺形  $ABCD$  において、 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ ,  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $a \leq b$  とする。次の条件を満たす長方形  $EFGH$  を考え、その面積を  $S$  とする。

条件: 点  $A, B, C, D$  はそれぞれ辺  $EF, FG, GH, HE$  上にある。ただし、辺はその両端の点も含むものとする。

- (1)  $\angle BCG = \theta$  とするとき、 $S$  を  $a, b, \theta$  を用いて表せ。
- (2)  $S$  のとりうる値の最大値を  $a, b$  を用いて表せ。

## 第 4 問

この問いでは、0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。 $a$  を正の整数とし、 $f_a(x) = x^2 + x - a$  とおく。

- (1)  $n$  を正の整数とする。 $f_a(n)$  が平方数ならば、 $n \leq a$  であることを示せ。
- (2)  $f_a(n)$  が平方数となる正の整数  $n$  の個数を  $N_a$  とおく。次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ。
  - (i)  $N_a = 1$  である。
  - (ii)  $4a + 1$  は素数である。

## 第5問

$n$  を 2 以上の整数とする。1 から  $n$  までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計  $n$  枚あり、横一列におかれている。1 以上  $(n-1)$  以下の整数  $i$  に対して、次の操作  $(T_i)$  を考える。

- $(T_i)$  左から  $i$  番目の札の数字が、左から  $(i+1)$  番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から  $A_1, A_2, \dots, A_n$  であったとする。この状態から  $(n-1)$  回の操作  $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$  を順に行った後、続けて  $(n-1)$  回の操作  $(T_{n-1}), \dots, (T_2), (T_1)$  を順に行ったところ、札の数字は左から  $1, 2, \dots, n$  と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

- (1)  $A_1$  と  $A_2$  のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。
- (2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方  $A_1, A_2, \dots, A_n$  の総数を  $c_n$  とする。 $n$  が 4 以上の整数であるとき、 $c_n$  を  $c_{n-1}$  と  $c_{n-2}$  を用いて表せ。

## 第6問

複素数平面上の点  $\frac{1}{2}$  を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円の周から原点を除いた曲線を  $C$  とする。

- (1) 曲線  $C$  上の複素数  $z$  に対し、 $\frac{1}{z}$  の実部は 1 であることを示せ。
- (2)  $\alpha, \beta$  を曲線  $C$  上の相異なる複素数とすると、 $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$  がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。
- (3)  $\gamma$  を (2) で求めた範囲に属さない複素数とすると、 $\frac{1}{\gamma}$  の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。