大学入試（数学）と Julia 言語

清水　団　Dan Shimizu

2025-03-23

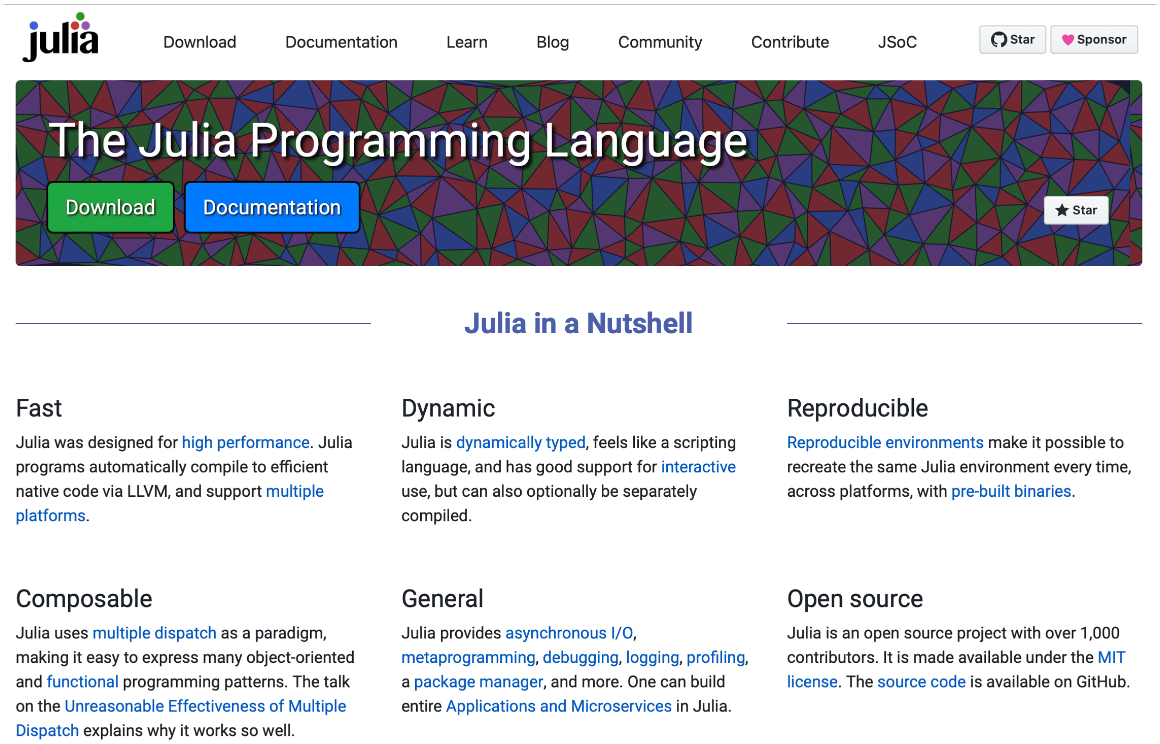
はじめに

自己紹介

- 清水　団（しみず・だん）
- 東京都板橋区 城北中学校・高等学校 に数学科の教員として勤務
- 2025 年度より校長です。

Julia 言語のについて

https://julialang.org



Julia は統計処理や科学技術計算、機械学習に強いプログラミング言語といわれています。例えば StatsBase.jl や Distributions.jl などのパッケージを使用すると、統計モデリングや仮説検定、回帰分析、時系列分析などの統計処理を行えます。

東京大(理系）2025・数学

2025 年 2 月 25 日に行われた東京大学の入学試験の理系の数学の問題を **Julia** 言語を用いて,「解く」というよりも「考えて」みました。コードを書くときはできるだけ，`julia` のパッケージを利用しました。

また，quarto というパブリッシング・システムを用いて Web ページを作成しました。基本 `Markdown` で，コードの読み込みも容易です。今回は利用していませんが，新たな数式処理の typst も実装可能です。

第 1 問

This is an equation: $\underbrace{e^{i\pi}}_{-1} + 1 = 0$

$$\underbrace{e^{i\pi}}_{-1} + 1 = 0$$

第 1 問・問題

座標空間内の点 $\mathrm{A}(0, -1, 1)$をとる. xy平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする.

(i)　P は原点 O と異なる.

(ii)　$\angle\mathrm{AOP} \geqq \frac{2}{3}\pi$

(iii)　$\angle\mathrm{OAP} \leqq \frac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy平面上に図示せよ.

julia 言語で図示するコード作成

$\mathrm{A}(0, -1, 1)$,　$\mathrm{P}(x, y, 0)$として,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} \leqq \cos\frac{2\pi}{3} \land \cos\frac{\pi}{6} \leqq \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$$

- 線形代数パッケージ `LinearAlgebra.jl` を利用
- 描画パッケージ `Plots.jl` を利用

```julia
using LinearAlgebra , Plots


function val1(x,y)
    A = [ 0 -1 1 ]
    P = [ x y 0]
    dot(A, P) / norm(A,2) / norm(P,2)
end

function val2(x,y)
    A = [ 0 -1 1 ]
    P = [ x y 0]
    dot(-A, P-A) / norm(-A,2) / norm(P-A,2)
end

function f(x,y)
```

```
    if x == y == 0
        return 0
    elseif val1(x,y) <= cos(2π/3) && cos(π/6) <= val2(x,y)
        return 1
    else 0.8
    end
end

contour(-3:0.01:3 , -3:0.01:3 ,f,fill=true,aspectratio=true)
```

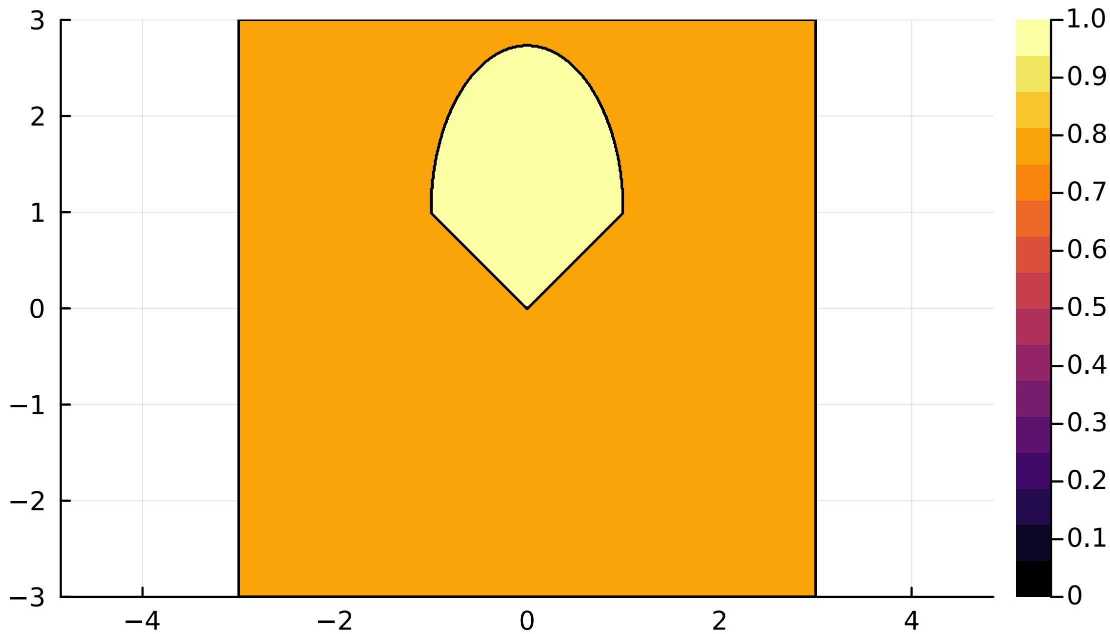


Figure 1: 範囲を図示

第 2 問

第 2 問・問題

次の関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\, dt \ \ (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1)　$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で, $f'(\tan\alpha) = 0$ となるものを求めよ.

(2)　(1) で求めた α に対し, $\tan\alpha$ の値を求めよ.

(3)　関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ. 必要ならば, $0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい.

julia 言語で最大値・最小値を求めるコードを作成

- 数値積分パッケージ `QuadGK.jl` を利用
- 描画パッケージ `Plots.jl` を利用
- 最小値求値パッケージ `Optim.jl` を利用

```julia
using QuadGK , Plots


f(x) = quadgk(t -> abs(t-x)/(1+t^2), 0, 1)[1]

plot(f,xlim=(0,1),label="y=f(x)")
```

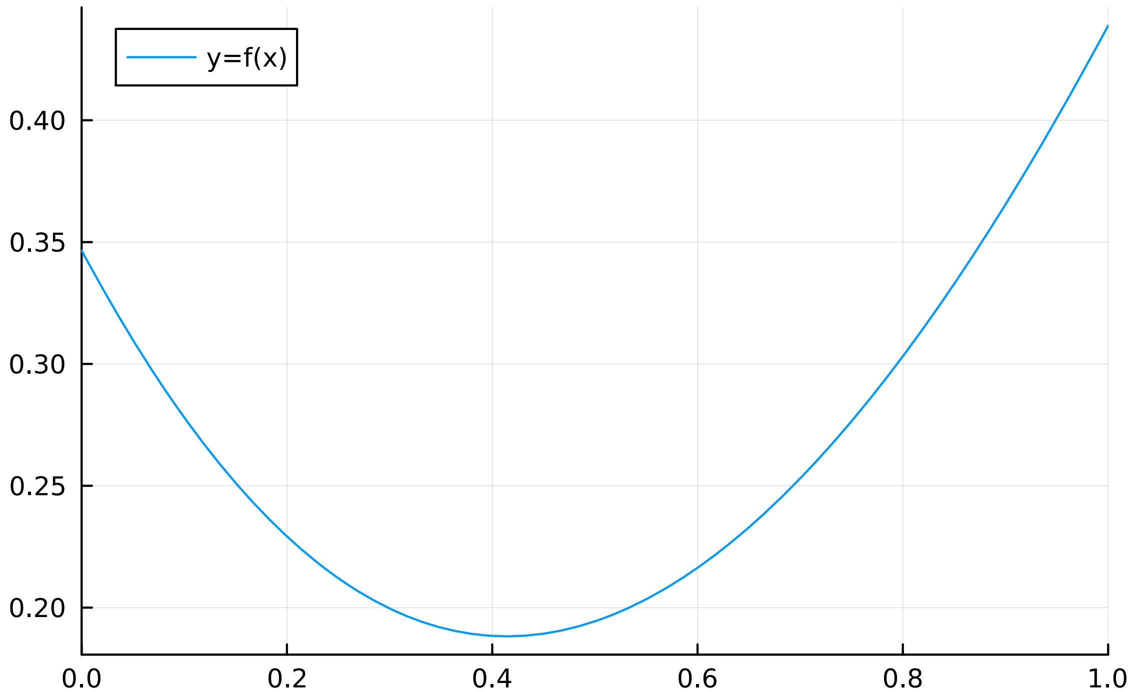


Figure 2: 関数を定義してグラフを作成

```
using QuadGK , Optim


f(x) = quadgk(t -> abs(t-x)/(1+t^2), 0, 1)[1]
g(x) = -f(x)

minf = optimize(f, 0.0, 1.0)
maxf = optimize(g, 0.0, 1.0)

println("x=",minf |> Optim.minimizer,"のとき最小値",minf |> Optim.minimum)

println("x=",maxf |> Optim.minimizer,"のとき最大値",maxf |> Optim.minimum |> x -
> -x)
```

```
x=0.414224911677881のとき最小値0.18822640711914512
x=0.999999984947842のとき最大値0.43882456129553843
```

第 3 問

第 3 問・問題

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える.

(i)　最初に, P は点 $(2, 1)$にいる.

(ii)　ある時刻で P が点 (a, b)にいるとき, その 1 秒後には P は

- 確率 $\frac{1}{3}$で x軸に関して (a, b)と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$で y軸に関して (a, b)と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$で直線 $y = x$に関して (a, b)と対称な点
- 確率 $\frac{1}{6}$で直線 $y = -x$に関して (a, b)と対称な点

にいる.

以下の問に答えよ. ただし, (1)については, 結論のみを書けばよい.

(1)　P がとりうる点の座標をすべて求めよ.

(2)　nを正の整数とする. 最初から n秒後に P が点 $(2, 1)$にいる確率と, 最初から n秒後に P が点 $(-2, -1)$にいる確率は等しいことを示せ.

(3)　nを正の整数とする. 最初から n秒後に P が点 $(2, 1)$にいる確率を求めよ.

Julia 言語でn秒後の確率を求めるコードを作成

行列で考える。求める確率はa_n

- $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6^{n-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```julia
function f(n)
    A = 1//6* [
    0 1 0 2 0 1 0 2
    1 0 2 0 1 0 2 0
    0 2 0 1 0 2 0 1
    2 0 1 0 2 0 1 0
    0 1 0 2 0 1 0 2
```

```
    1 0 2 0 1 0 2 0
    0 2 0 1 0 2 0 1
    2 0 1 0 2 0 1 0
    ]

    X = [
    1
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    0
    ]

    if n == 1
        return X[1]
    else
        for i = 1:n-1
            X = A*X
        end
        return X[1]
    end
end

for j = 1:10
    println("n=$j のとき，確率は",f(j))
end
```

```
n=1 のとき，確率は 1
n=2 のとき，確率は 0//1
n=3 のとき，確率は 5//18
n=4 のとき，確率は 0//1
n=5 のとき，確率は 41//162
n=6 のとき，確率は 0//1
n=7 のとき，確率は 365//1458
n=8 のとき，確率は 0//1
n=9 のとき，確率は 3281//13122
n=10 のとき，確率は 0//1
```

第 4 問

第 4 問・問題

$f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$とおく. $0<t<4$を満たす実数 tに対し, 座標平面上の点 $(t,f(t))$を通り, この点において放物線 $y=f(x)$と共通の接線を持ち, x軸上に中心を持つ円をC_tとする.

(1)　円 C_tの中心の座標を $(c(t),0)$, 半径を $r(t)$とおく. $c(t)$と $\{r(t)\}^2$を tの整式で表せ.

(2)　実数aは $0<a<f(3)$を満たすとする. 円 C_tが点 $(3,a)$を通るような実数 tは $0<t<4$ の範囲にいくつあるか.

Julia 言語で実数tの個数を図で確認

1. 関数を定義してグラフを作成

- $f(x)=-\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$
- $c(t)=\frac{f(t)}{f'(t)}+t$
- $r(t)=\sqrt{(t-c(t))^2+f(t)^2}$
- $g(t)=r(t)^2-(3-c(t))^2$
- $h(t)=-g(t)$
- $y=g(t)$のグラフを見る
- $y=a^2$のグラフを$0<a^2<f(3)^2$の範囲で考える。

2. 個数を調べるための極値・端点を調べる。

- 自動微分パッケージ Zygote.jl を利用
- 描画パッケージ Plots.jl を利用
- 最小値求値パッケージ Optim.jl を利用

```
using Zygote , Plots
f(x) = -sqrt(2)/4 *x^2+4*sqrt(2)
c(t) = f(t)*f'(t)+t
r(t) = sqrt((t-c(t))^2+f(t)^2)
g(t) = r(t)^2-(3-c(t))^2

plot(g,xlim=(0,4),label="y=g(x)")
plot!(x->0,label="y=0")
plot!(x->f(3)^2,label="y=f(3)^2=$(f(3)^2)")
```

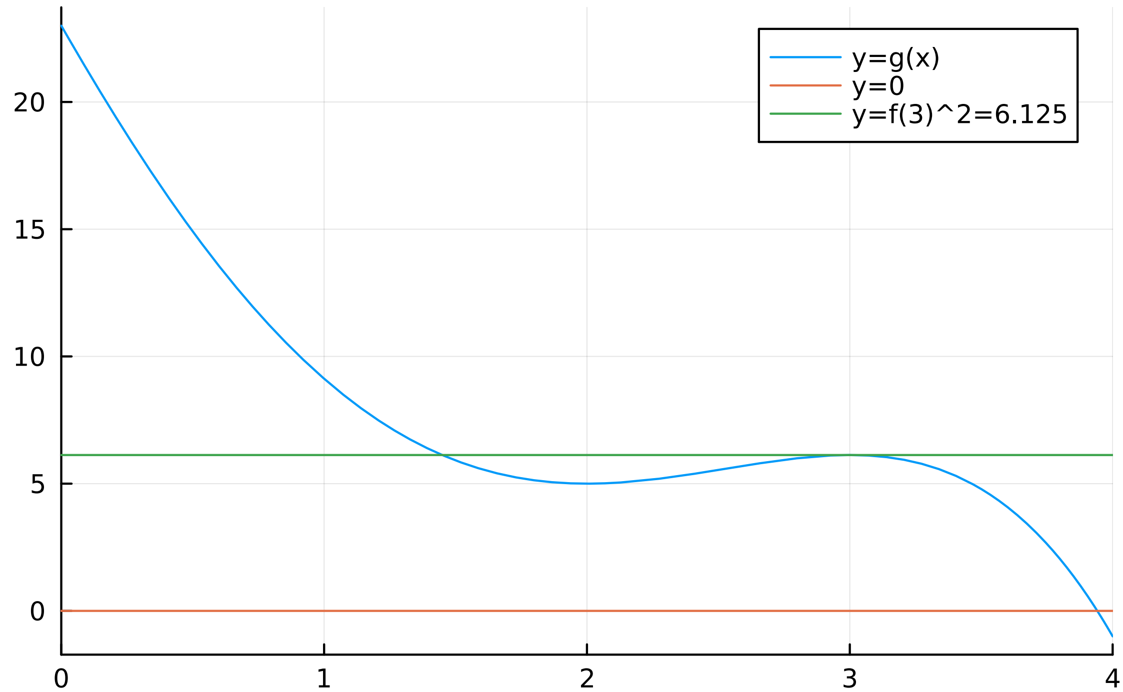


Figure 3: 関数を定義してグラフを作成

```
using Zygote , Optim
f(x) = -sqrt(2)/4 *x^2+4*sqrt(2)
c(t) = f(t)*f'(t)+t
r(t) = sqrt((t-c(t))^2+f(t)^2)
g(t) = r(t)^2-(3-c(t))^2
h(t) = -g(t)

println( optimize(g, 1.0 , 3.0))

println( optimize(h, 2.0 , 4.0))

println( optimize(g, 3.0 , 4.0))
```

```
Results of Optimization Algorithm
 * Algorithm: Brent's Method
 * Search Interval: [1.000000, 3.000000]
 * Minimizer: 2.000000e+00
 * Minimum: 5.000000e+00
 * Iterations: 15
 * Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16):
true
 * Objective Function Calls: 16
Results of Optimization Algorithm
```

```
 * Algorithm: Brent's Method
 * Search Interval: [2.000000, 4.000000]
 * Minimizer: 3.000000e+00
 * Minimum: -6.125000e+00
 * Iterations: 12
 * Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16):
true
 * Objective Function Calls: 13
Results of Optimization Algorithm
 * Algorithm: Brent's Method
 * Search Interval: [3.000000, 4.000000]
 * Minimizer: 4.000000e+00
 * Minimum: -9.999988e-01
 * Iterations: 33
 * Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16):
true
 * Objective Function Calls: 34
```

第 5 問

第 5 問・問題

座標空間内に 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$をとり, D を線分 AC の中点とする. 三角形 ABD の周および内部を x軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ.

Julia 言語で回転体を見てみよう

- パラメータを$0 \leqq k \leqq 1, 0 \leqq \theta < 2\pi$とする。
- 内側の曲面
  - $0 \leqq k \leqq \frac{1}{3}$のとき

$$(x,y,z) = \left(k, \sqrt{(1-2k)^2 + k^2}\cos\theta, \sqrt{(1-2k)^2 + k^2}\sin\theta\right)$$

  - $\frac{1}{3} \leqq k \leqq 1$のとき

$$(x,y,z) = \left(k, \frac{1-k}{\sqrt{2}} \cdot \cos\theta, \frac{1-k}{\sqrt{2}} \cdot \sin\theta\right)$$

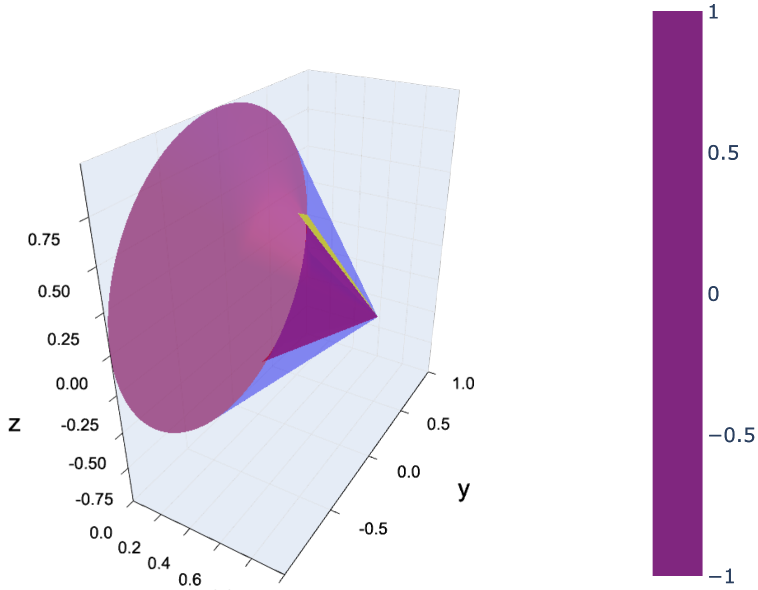
- 外側の曲面

$$(x,y,z) = (k,(1-k)\cos\theta,(1-k)\sin\theta)$$

```
using Plots
plotlyjs()

A = [1,0,0]
B = [0,1,0]
C = [0,0,1]
f(u,v) = A+(u/2 *(C-A)+(1-u)*(B-A))*v
us = vs = range(0, 1, length=10)

x = [f(u,v)[1] for u in us , v in vs]
y = [f(u,v)[2] for u in us , v in vs]
z = [f(u,v)[3] for u in us , v in vs]

surface(x,y,z,xlabel="x",ylabel="y",zlabel="z",size=(700,500),color=:yellow)

function uchigawa(k,θ)
    if 0≤k≤1/3
        [k,sqrt((1-2k)^2+k^2)*cos(θ),sqrt((1-2k)^2+k^2)*sin(θ)]
```

```
    elseif 1/3≤k≤1
        [k,(1-k)/sqrt(2) *cos(θ),(1-k)/sqrt(2) *sin(θ)]
    end
end

n=100
ks = range(0, 1, length=n)
θs = range(0 ,2π,length=n)

x = [uchigawa(k,θ)[1] for k in ks , θ in θs]
y = [uchigawa(k,θ)[2] for k in ks , θ in θs]
z = [uchigawa(k,θ)[3] for k in ks , θ in θs]


surface!
(x,y,z,xlabel="x",ylabel="y",zlabel="z",size=(700,500),alpha=0.7,color=:red)

sotogawa(k,θ) = [k,(1-k)*cos(θ),(1-k)*sin(θ)]
n=100
ks = range(0, 1, length=n)
θs = range(0 ,2π,length=n)

x = [sotogawa(k,θ)[1] for k in ks , θ in θs]
y = [sotogawa(k,θ)[2] for k in ks , θ in θs]
z = [sotogawa(k,θ)[3] for k in ks , θ in θs]


surface!
(x,y,z,xlabel="x",ylabel="y",zlabel="z",size=(700,500),alpha=0.5,color=:blue)
```

```
WebIO._IJuliaInit()
```


0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
z
0.0
0.2
0.4
0.6
1.0
0.5
0.0
-0.5
y
1
0.5
0
−0.5
−1

第 6 問

第 6 問・問題

2以上の整数で, 1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という. 以下の問いに答えよ.

(1)　$f(x)=x^3+10x^2+20x$とする. $f(n)$が素数となるような整数 nをすべて求めよ.

(2)　a,bを整数の定数とし, $g(x)=x^3+ax^2+bx$とする. $g(n)$が素数となるような整数 nの個数は 3個以下であることを示せ.

(1)(2)を調べてみよう。

- 素数パッケージ `Primes.jl` を利用
- (1) は$-100 \leqq n \leqq 100$で調べました。
- (2)は素数となるものが 3 つであるa, b, nを列挙しました。

```
using Primes


f(x) = x^3+10x^2+20x

n=100
p=[]
for i = -n:n
    if f(i) |>  isprime
        append!(p,i)
    end
end

p
```

```
3-element Vector{Any}:
 -7
 -3
  1
```

```
using Primes

g(a,b,x) = x^3+a*x^2+b*x
```

```
n=20
p=[]
for a = -n:n , b = -n:n
    t = [a,b]
    for i = -n:n
        if g(a,b,i) |>  isprime
            append!(t,i)
        end
    end
    push!(p,t)
end

for j =1:length(p)
    if p[j] |>length == 5
        println(p[j])
    end
end
```

```
[-9, 15, 1, 2, 7]
[-7, 11, 1, 2, 5]
[-5, 7, 1, 2, 3]
[2, -1, -2, -1, 1]
[3, -1, -3, -1, 1]
[5, -1, -5, -1, 1]
[5, 5, -3, -2, 1]
[7, -1, -7, -1, 1]
[7, 9, -5, -2, 1]
[8, 14, -5, -3, 1]
[9, 13, -7, -2, 1]
[10, 20, -7, -3, 1]
[11, -1, -11, -1, 1]
[13, -1, -13, -1, 1]
[17, -1, -17, -1, 1]
[19, -1, -19, -1, 1]
```

東京大(文系)2024・数学

第 1 問

第 1 問・問題

座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

(1) a, b, c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ。

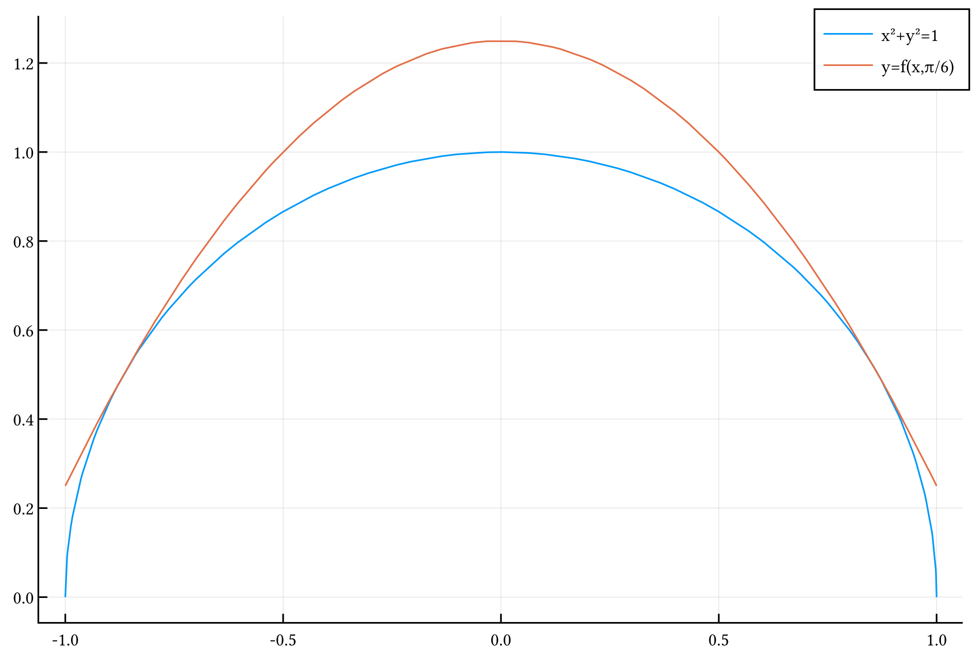
(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

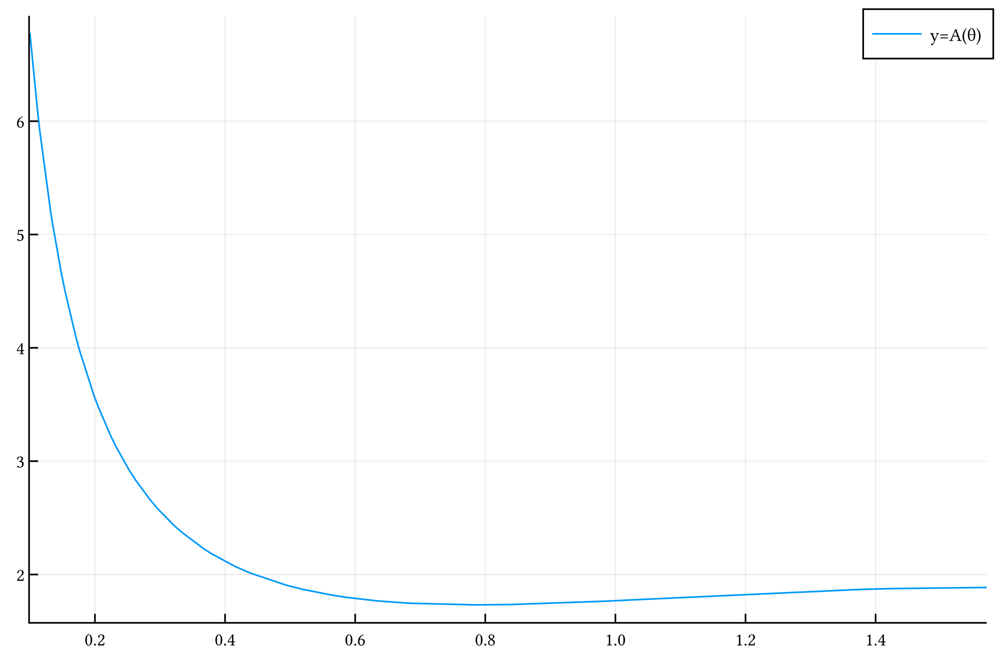
変化を見てみよう

- $f(x,\theta) = -\frac{1}{2\sin\theta}x^2 + \frac{\sin^2\theta+1}{2\sin\theta}$
- $A(\theta) = 2\int_0^{\cos\theta} f(x)dx$
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

```
using Plots

f(x , θ) = -x^2/(2sin(θ)) +(sin(θ)+1/sin(θ))/2

plot(x->sqrt(1-x^2),aspectratio=true,label="x²+y²=1")
plot!(x->f(x,π/6),label="y=f(x,π/6)")
```




```
using QuadGK,Plots

f(x , θ) = -x^2/(2sin(θ)) +(sin(θ)+1/sin(θ))/2
Aa(θ) = 2 * quadgk(x-> f(x,θ),0,sqrt(sin(θ)^2+1))[1]

plot(x->Aa(x),xlim=(0.1,π/2),label="y=A(θ)")
```




```
using Optim,QuadGK

f(x , θ) = -x^2/(2sin(θ)) +(sin(θ)+1/sin(θ))/2
Aa(θ) = 2 * quadgk(x-> f(x,θ),0,sqrt(sin(θ)^2+1))[1]

minA = optimize(Aa, 0.1, 1.4)
```

```
Results of Optimization Algorithm
 * Algorithm: Brent's Method
 * Search Interval: [0.100000, 1.400000]
 * Minimizer: 7.853982e-01
 * Minimum: 1.732051e+00
 * Iterations: 12
 * Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16):
true
 * Objective Function Calls: 13
```

第 2 問

第 2 問・問題

以下の問に答えよ。必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

(1)　$5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ.

桁数を調べてみよう。

- $f(m) = 5^m + 4^m$
- $g(m) = \lfloor \log_{10} f(m) \rfloor + 1$

```
f(m) = (BigInt(5))^m+(BigInt(4))^m

g(m) =floor(log10(f(m)))+1 |>Int

k =1
while g(k) < 20
    k += 1
end
k
```

```
28
```

第 3 問

第 3 問・問題

座標平面上に 2 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(0,1)$ をとる。x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(p,0), \mathrm{Q}(q,0)$が，次の条件(i)，(ii)をともに満たすとする。

(i)　$0<p<1$ かつ $p<q$

(ii)　線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$

(1)　q を p を用いて表せ。

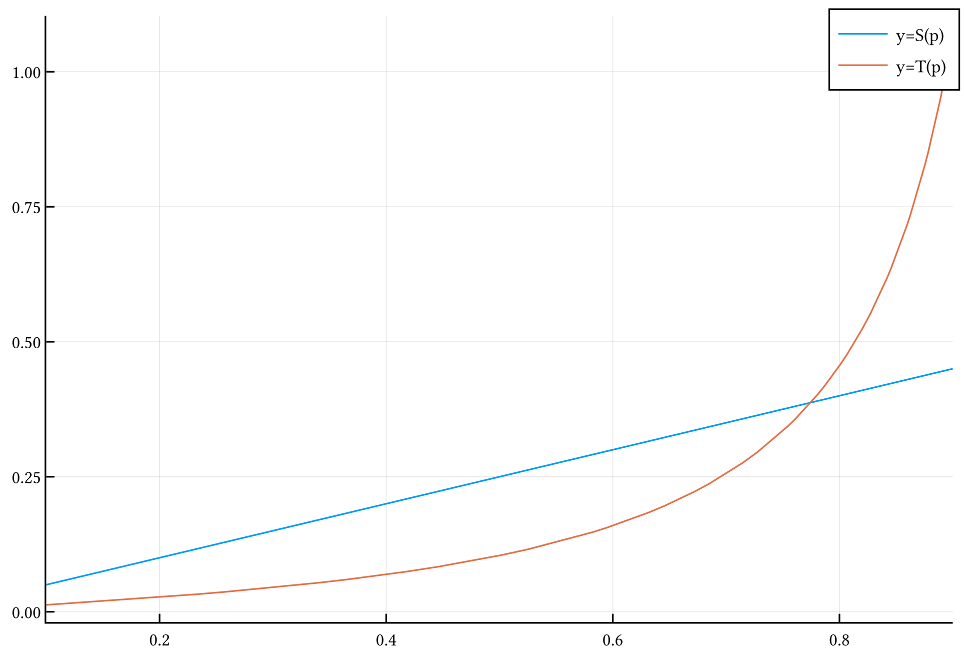
(2)　$q=\frac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3)　$\triangle$ OAP の面積を S，$\triangle$ PMQ の面積を T とする。$S>T$ となる p の範囲を求めよ。

変化を見てみよう。

- $q=\frac{3p-p^3}{2(1-p^2)}$
- $S=\frac{1}{2}p$
- $T=\frac{1}{4}(q-p)$
- $f(p)=S-T$

```
using Plots

q(p) = (3p-p^3)/2/(1-p^2)

S(p) =p/2

T(p) = (q(p)-p)/4

plot(S,xlim=(0.1,.9),label="y=S(p)")
plot!(T,xlim=(0.1,.9),label="y=T(p)")
```




```
using Optim

q(p) = (3p-p^3)/2/(1-p^2)

S(p) =p/2

T(p) = (q(p)-p)/4

f(p) = S(p) - T(p)

minf = optimize(x->abs(f(x)),.6,.8)
```

```
Results of Optimization Algorithm
 * Algorithm: Brent's Method
 * Search Interval: [0.600000, 0.800000]
 * Minimizer: 7.745967e-01
 * Minimum: 1.984967e-09
 * Iterations: 24
 * Convergence: max(|x - x_upper|, |x - x_lower|) <= 2*(1.5e-08*|x|+2.2e-16):
true
 * Objective Function Calls: 25
```

第 4 問

第 4 問・問題

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

確率を求める数列を作ってみよう。

- 円周上から 4 点選ぶ。
- この 4 点から 3 点選んで三角形を作ったとき，1 つでも鋭角三角形ができれば OK。
- 4 点を反時計回りに順番をつけ，最初と最後の点の差（4 つある）がすべて$n/2$より大きいとき，四角形の内部に中心が含まれる。
- コンビネーションパッケージ `Combinatorics.jl` を利用

```
using Combinatorics

function N(n)
    X = [i for i = 0:n-1]
    Y = combinations(X,4) |> collect
    p=0
    for y in Y
        k = [
            mod(y[4]-y[1],n)
            mod(y[1]-y[2],n)
            mod(y[2]-y[3],n)
            mod(y[3]-y[4],n)
            ]
        if minimum(k) > n/2
            p += 1
        end
    end
    p//length(Y)
end

for i=5:2:21
    println("正",i,"角形のとき，確率は",N(i))
end
```

```
正 5 角形のとき，確率は 1//1
正 7 角形のとき，確率は 4//5
正 9 角形のとき，確率は 5//7
正 11 角形のとき，確率は 2//3
正 13 角形のとき，確率は 7//11
正 15 角形のとき，確率は 8//13
正 17 角形のとき，確率は 3//5
正 19 角形のとき，確率は 10//17
正 21 角形のとき，確率は 11//19
```