

関数の増減とグラフ

$y = \cos 2x - 2 \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) について、 y' , y'' を求め、増減表を書き、グラフを描きましょう。

導関数

第1次導関数は

$$\begin{aligned} \cdot y' &= -2 \sin 2x - 2 \cos x \\ &= -4 \sin x \cos x - 2 \cos x \\ &= -2 \cos x(2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

第2次導関数は

$$\begin{aligned} \cdot y'' &= -2(-\sin x)(2 \sin x + 1) - 2 \cos x \cdot 2 \cos x \\ &= 2 \sin x(2 \sin x + 1) - 4 \cos^2 x \\ &= 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 \cos^2 x \\ &= 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 4(1 - \sin^2 x) \\ &= 8 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 \end{aligned}$$

極値・変曲点・増減表

- $y' = 0$ となるのは：
- $\cos x = 0$ のとき：

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

- $2 \sin x + 1 = 0$ すなわち $\sin x = -\frac{1}{2}$ のとき：

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

- $y'' = 0$ となるのは：

- $8 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 = 0$ より

$$4 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

x	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$	…	β	…	$\frac{7\pi}{6}$	…	γ	…	$\frac{3\pi}{2}$	…	δ	…	$\frac{11\pi}{6}$	…	2π
y'	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
y''	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	
y	1	↘	$\frac{3-3\sqrt{33}}{16}$	↘	-3	↗	$\frac{3-3\sqrt{33}}{16}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{3+3\sqrt{33}}{16}$	↘	1	↗	$\frac{3+3\sqrt{33}}{16}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

Table 1: 増減表

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を次を満たす角とする：

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sin \alpha &= \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \blacktriangleright \sin \beta &= \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \\ \blacktriangleright \sin \gamma &= \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2} \\ \blacktriangleright \sin \delta &= \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi \end{aligned}$$

極小値:

- $x = \frac{\pi}{2}$ のとき：

$$y = \cos \pi - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2 = -3$$

- $x = \frac{3\pi}{2}$ のとき：

$$y = \cos 3\pi - 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - 2(-1) = 1$$

極大値:

- $x = \frac{7\pi}{6}$ のとき：

$$y = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

- $x = \frac{11\pi}{6}$ のとき：

$$y = \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

変曲点

- $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ に対応する点

$$\left(\alpha, \frac{3-3\sqrt{33}}{16}\right), \left(\beta, \frac{3-3\sqrt{33}}{16}\right), \left(\gamma, \frac{3+3\sqrt{33}}{16}\right), \left(\delta, \frac{3+3\sqrt{33}}{16}\right)$$

グラフ

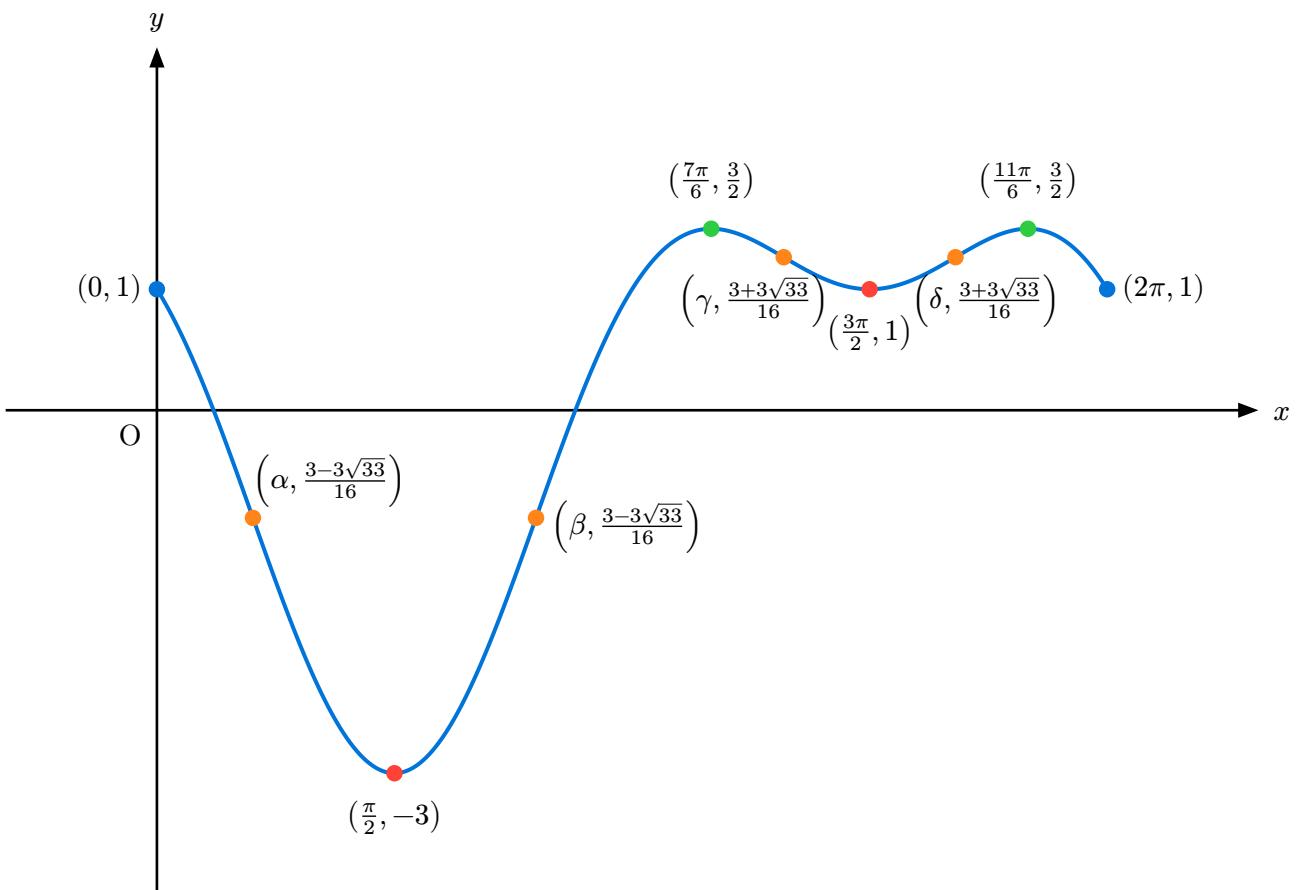


Figure 1: $y = \cos 2x - 2 \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) のグラフ

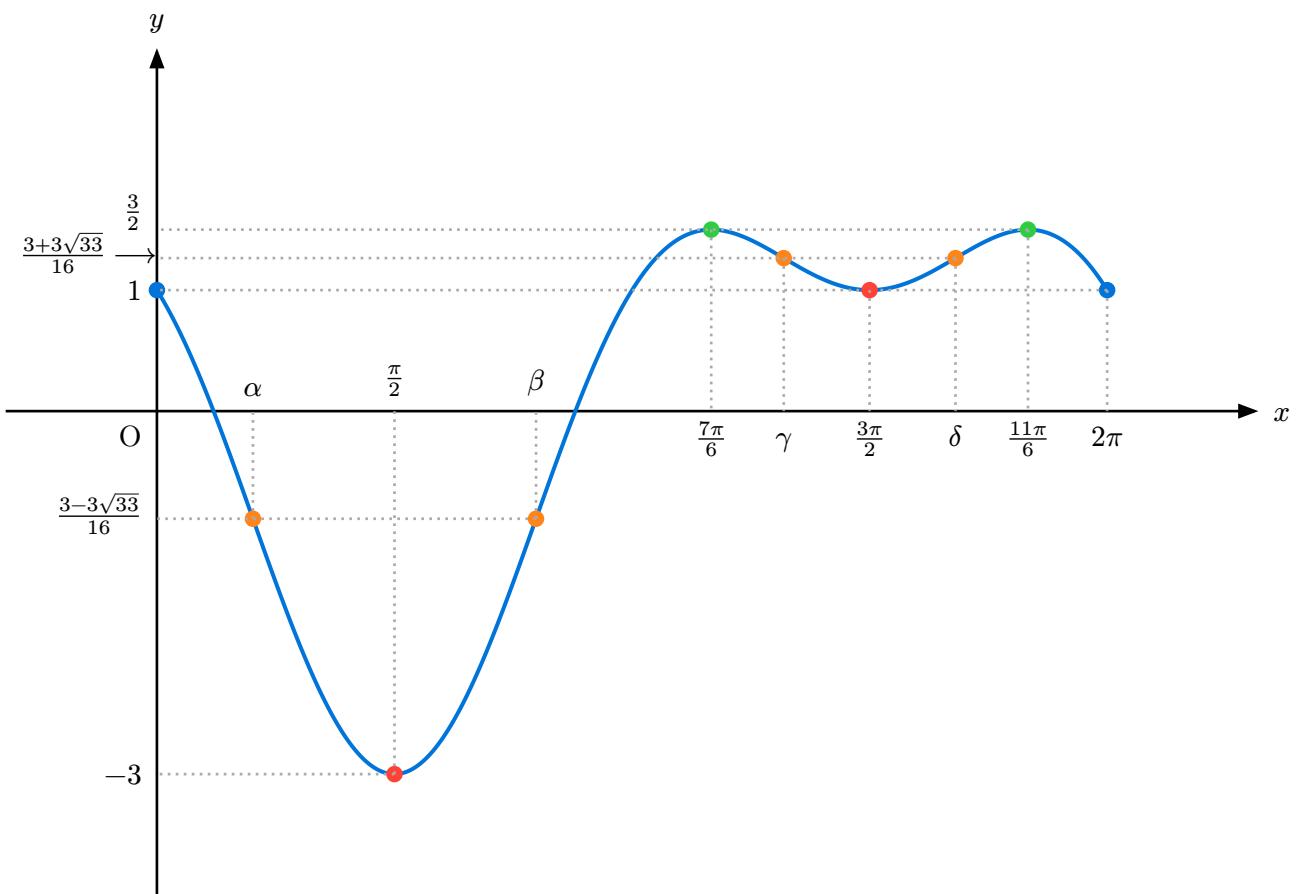


Figure 2: $y = \cos 2x - 2 \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) のグラフ (軸ラベル付き)