

## 関数の増減とグラフ

$y = \cos 2x - 2 \sin x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) について,  $y'$ ,  $y''$  を求め, 増減表を書き, グラフを描きましょう。

### 導関数

#### 第1次導関数は

$$\begin{aligned} \cdot y' &= -2 \sin 2x - 2 \cos x \\ &= -4 \sin x \cos x - 2 \cos x \\ &= -2 \cos x (2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

#### 第2次導関数は

$$\begin{aligned} \cdot y'' &= -2(-\sin x)(2 \sin x + 1) - 2 \cos x \cdot 2 \cos x \\ &= 2 \sin x (2 \sin x + 1) - 4 \cos^2 x \\ &= 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 \cos^2 x \\ &= 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 4(1 - \sin^2 x) \\ &= 8 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 \end{aligned}$$

### 極値・変曲点・増減表

・  $y' = 0$  となるのは:

▶  $\cos x = 0$  のとき:

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

▶  $2 \sin x + 1 = 0$  すなわち  $\sin x = -\frac{1}{2}$  のとき:

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

・  $y'' = 0$  となるのは:

▶  $8 \sin^2 x + 2 \sin x - 4 = 0$  より

$$4 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

・  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  を次を満たす角とする:

$$\cdot \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot \sin \beta = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\cdot \sin \gamma = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$$

$$\cdot \sin \delta = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8} \text{ かつ } \frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi$$

#### 極小値:

・  $x = \frac{\pi}{2}$  のとき:

$$y = \cos \pi - 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = -1 - 2 = -3$$

・  $x = \frac{3\pi}{2}$  のとき:

$$y = \cos 3\pi - 2 \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) = -1 - 2(-1) = 1$$

#### 極大値:

・  $x = \frac{7\pi}{6}$  のとき:

$$y = \cos \left( \frac{7\pi}{6} \right) - 2 \sin \left( \frac{7\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} - 2 \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

・  $x = \frac{11\pi}{6}$  のとき:

$$y = \cos \left( \frac{11\pi}{6} \right) - 2 \sin \left( \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} - 2 \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

#### 変曲点

・  $x = \alpha, \beta, \gamma, \delta$  に対応する点

$$\left( \alpha, \frac{3-3\sqrt{33}}{16} \right), \left( \beta, \frac{3-3\sqrt{33}}{16} \right), \left( \gamma, \frac{3+3\sqrt{33}}{16} \right), \left( \delta, \frac{3+3\sqrt{33}}{16} \right)$$

$x$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\beta$	...	$\frac{7\pi}{6}$	...	$\gamma$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	$\delta$	...	$\frac{11\pi}{6}$	...	$2\pi$
$y'$	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$y''$	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	-
$y$	1	↘	$\frac{3-3\sqrt{33}}{16}$	↘	-3	↗	$\frac{3-3\sqrt{33}}{16}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{3+3\sqrt{33}}{16}$	↘	1	↗	$\frac{3+3\sqrt{33}}{16}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

Table 1: 増減表

# グラフ

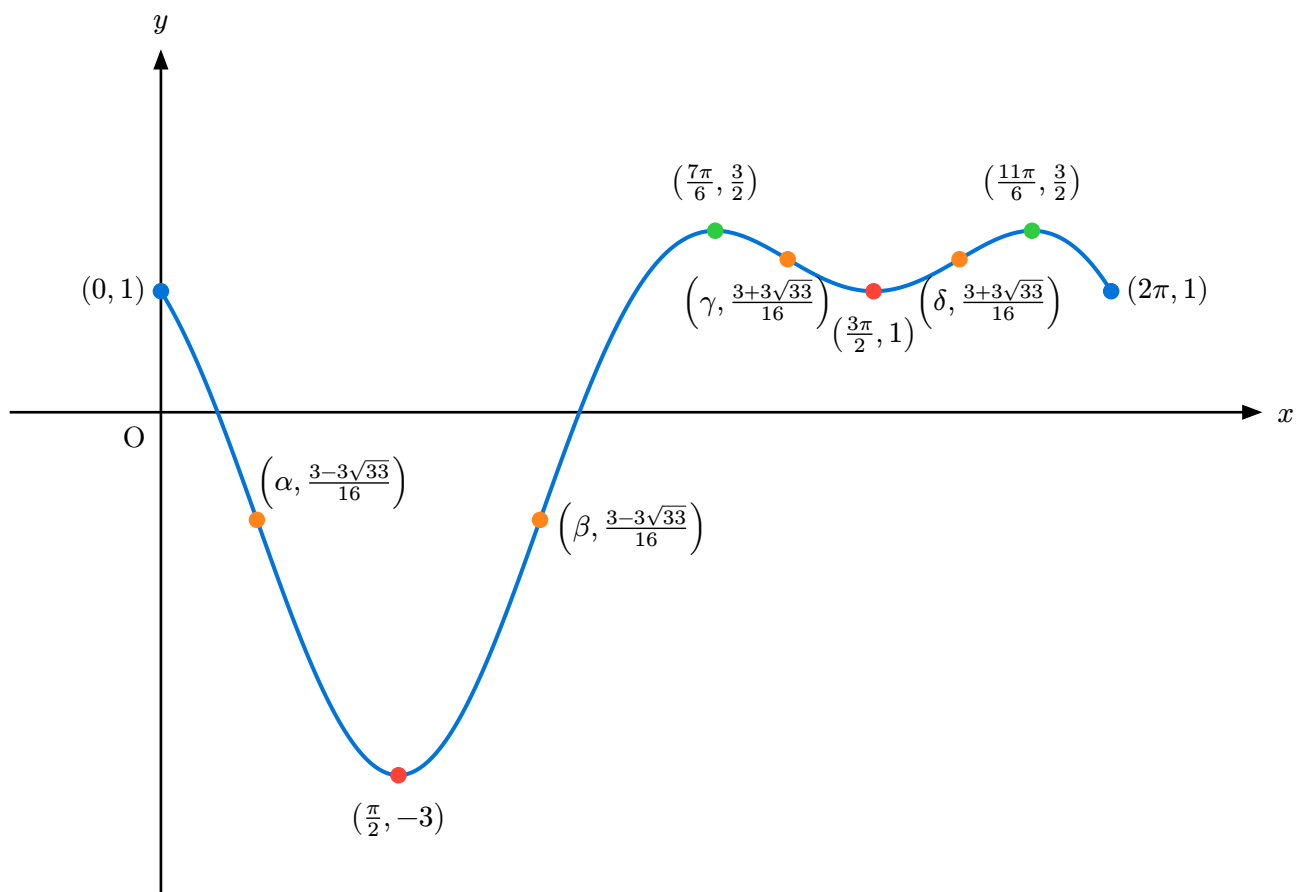


Figure 1:  $y = \cos 2x - 2 \sin x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフ

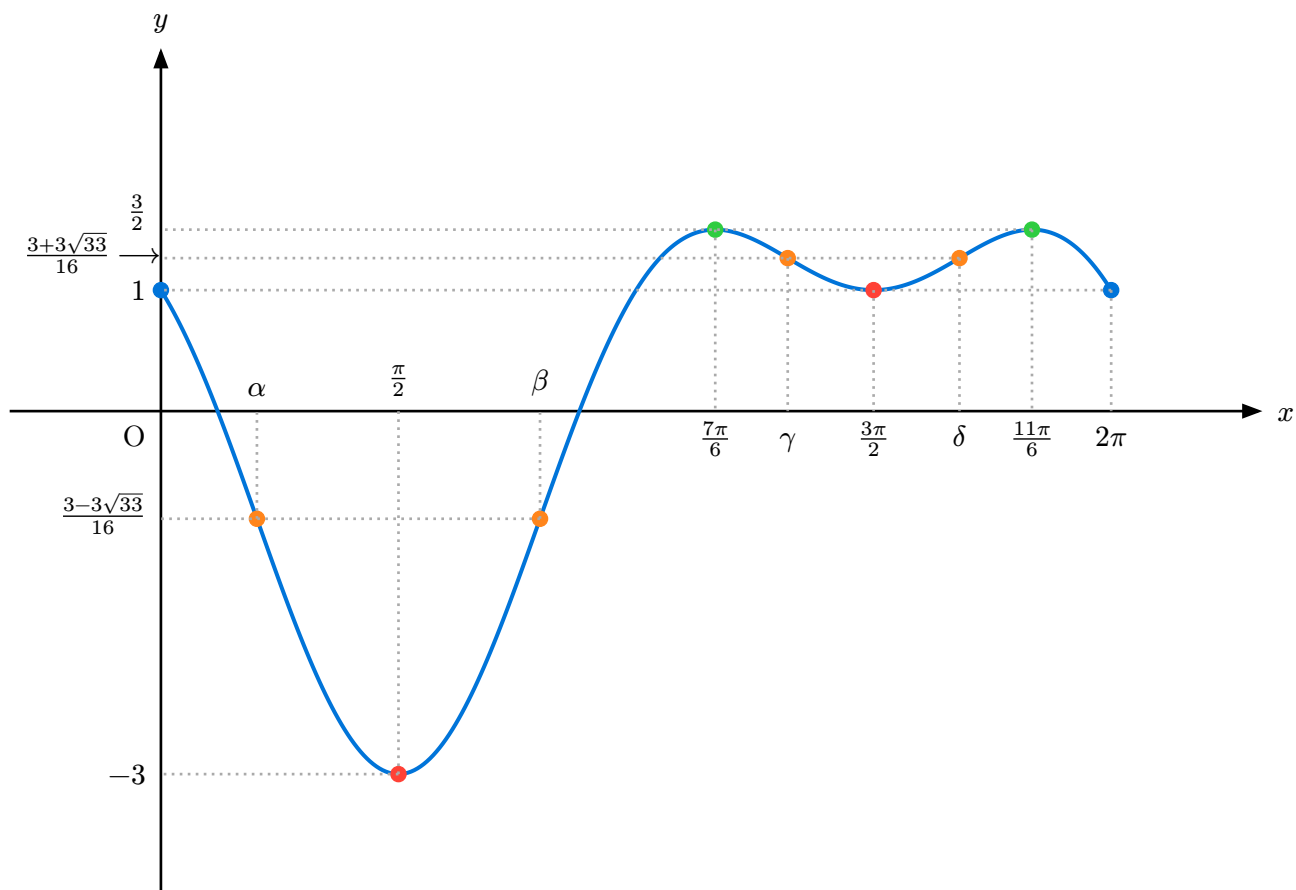


Figure 2:  $y = \cos 2x - 2 \sin x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフ (軸ラベル付き)