

1 実験目的

制御対象は，サーボ系とプロセス系の二種に分類できる．ここでは，過渡応答が遅いプロセス系を取り上げ，流入量および水位をそれぞれ入力および出力とした制御対象の同定実験を行い，プロセス系の理解を深める．

2 原理

まず，図 2.1 に本実験で用いるレベル系のモデルを示す．ただし，図の記号は

- u タンク 1 への流入量
- q_i タンク i からの流出量 ($i = 1, 2$)
- h_i タンク i の水位 ($i = 1, 2$)
- A_i タンク i の断面積 ($i = 1, 2$)
- R_i 流体抵抗 ($i = 1, 2$)

を意味する．

本実験では，タンク 1 への流入量 u を入力とし，タンク 2 の水位 h_2 を出力とする制御対象の同定を行う．制御対象への伝達関数は

$$\frac{H_2(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{(1 + A_1 R_1 s)(1 + A_2 R_2 s)} \quad (2.1)$$

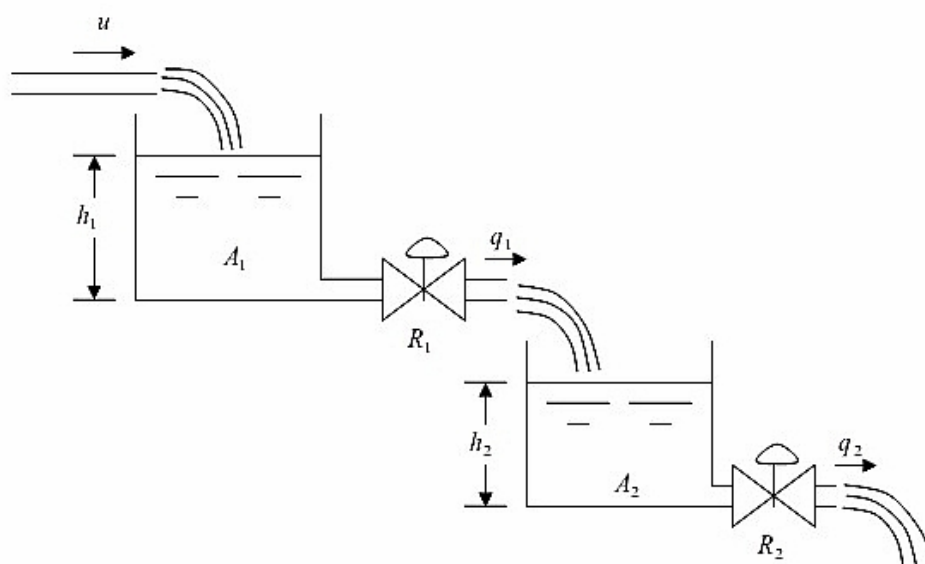


図 2.1 レベル系

となる．したがって，対象とする系は二次遅れ系である．ただし，式(2.1)の $U(s)$ 及び $H_2(s)$ は，それぞれ u 及び h_2 に対応するラプラス変換後の変数である．

次に，二次遅れ系のゲイン及び二つの時定数の決定法を述べる．まず，ゲイン K ，二つの時定数 T_1, T_2 の二次遅れ系

$$G(s) = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (2.2)$$

に，大きさ r のステップ入力を加えた時の時間応答 $h(t)$ は

$$h(t) = rK \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.3)$$

となり，また応答曲線は図 2.2 のようになる．ただし，図の点 $C = (t_c, h(t_c))$ は式(2.3)の変曲点であり，点 $A = (t_a, h_a)$ 及び点 $B = (t_b, h_b)$ はそれぞれ変曲点における接線が $h(t) = 0$ もしくは $h(\infty)$ と交わる点，また， $T_A = t_b - t_a$ ， $T_C = t_b - t_c$ である．

次に，式(2.3)より次の二式を得る．

$$\dot{h}(t) = \frac{rK}{T_2 - T_1} \left(-e^{-\frac{t}{T_1}} + e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.4)$$

$$\ddot{h}(t) = \frac{rK}{T_2 - T_1} \left(\frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (2.5)$$

ここで， $\ddot{h}(t_c) = 0$ より

$$T_2 e^{-\frac{t_c}{T_1}} = T_1 e^{-\frac{t_c}{T_2}} \quad (2.6)$$

であるので，

$$t_c = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}} \quad (2.7)$$

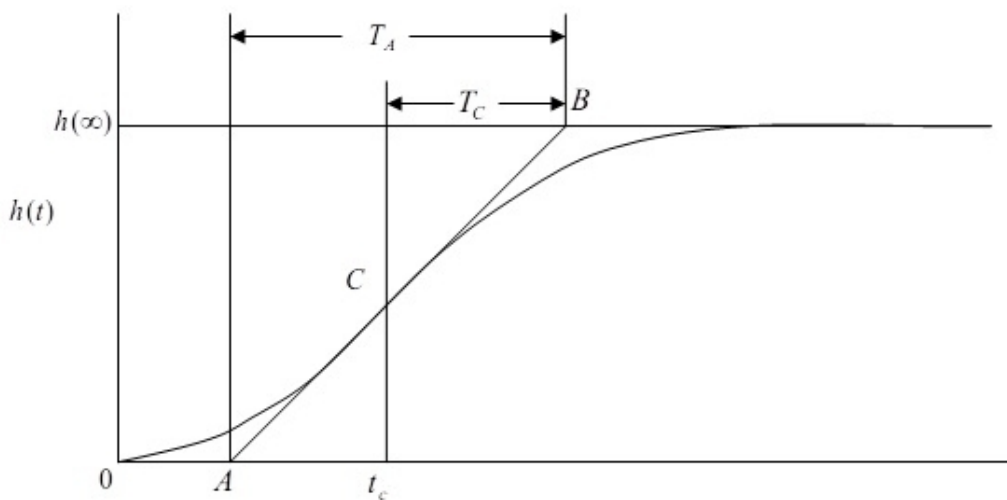


図 2.2 二次遅れ系のステップ応答

を得る．

さらに，接線を AB, CD の二つの直線に分け，それぞれの直線の傾きについて考えると，式 (2.4) と図 2.2 より，次の二式を得る．

$$\frac{rK}{T_2 - T_1} \left(-e^{-\frac{t_c}{T_1}} + e^{-\frac{t_c}{T_2}} \right) = \frac{rK}{T_A} \quad (2.8)$$

$$\frac{rK - h(t_c)}{T_C} = \frac{rK}{T_A} \quad (2.9)$$

式 (2.6), (2.8) より

$$\frac{T_A}{T_1} e^{-\frac{t_c}{T_1}} = 1 \quad (2.10)$$

となり，式 (2.10) に式 (2.7) を代入すると次式を得る．

$$\frac{T_A}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\frac{T_2}{T_2 - T_1}} = 1 \quad (2.11)$$

また，式 (2.3), (2.8), (2.9) より，

$$T_2 e^{-\frac{t_c}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t_c}{T_1}} = T_C e^{-\frac{t_c}{T_2}} - T_C e^{-\frac{t_c}{T_1}} \quad (2.12)$$

となるので，式 (2.12) に式 (2.6) を代入すると次式を得る．

$$T_2 + T_1 = T_C \quad (2.13)$$

したがって，式 (2.11), (2.13) を用いて， T_A, T_C から T_1, T_2 を求める事が出来る．式 (2.11), (2.13) より

$$\frac{T_A}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\frac{T_2}{T_A}}{\frac{T_2}{T_A} - \frac{T_1}{T_A}}} = 1 \quad (2.14)$$

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{T_1}{T_A} + \frac{T_2}{T_A} \quad (2.15)$$

を得るので，

$$x \equiv \frac{T_1}{T_A}, \quad y \equiv \frac{T_2}{T_A}, \quad \alpha \equiv \frac{T_C}{T_A}, \quad (2.16)$$

と定義すると，式 (2.14), (2.15) は，

$$\frac{1}{x} \left(\frac{y}{x} \right)^{-\frac{y}{y-x}} = 1 \quad (2.17)$$

$$\alpha = x + y \quad (2.18)$$

となる．また，式 (2.17) より

$$x \log x = y \log y \quad (2.19)$$

を得る．この式 (2.19) のデータを表 2.1 に示す．

式 (2.18) の α が与えられれば，図 2.3 に示すように，式 (2.18) と式 (2.19) の交点の x 座標 x_1, x_2 が得られる．したがって， x_1, x_2 を用いることにより，式 (2.16) より制御対象の二つの時定数 T_1, T_2 を求めることが出来る．

表 2.1 式 (2.19) のデータ

x	y
0	1
0.1	0.73
0.2	0.57
0.3	0.44
0.4	0.34
0.5	0.25
0.6	0.18
0.7	0.12
0.8	0.065
0.9	0.025
1	0

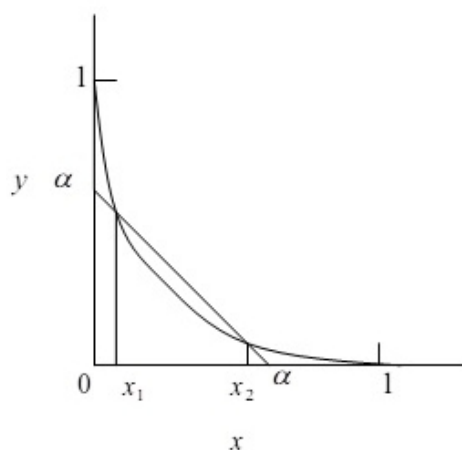


図 2.3 式 (2.18) と式 (2.19) の関係

3 実験装置

まず，図 3.1 及び表 3.1 にレベル実験装置の構成及び仕様を示す．

計算機から D/A 変換器を介して入力される電流値によって制御バルブ MV1 の開度が変化し，このバルブ開度に対応した流量の水がタンク 1 に入り手動バルブを介してタンク 2 に流入する．また，タンク 2 から制御バルブ MV3 を介して水が排出される．これら入出流量に依存するタンクの水位は差圧変換器によって計測され，D/A 変換器を介して計算機に伝送される．

表 3.1 装置の仕様

装置	数	仕様
タンク 1	1	高さ 1000 [mm] , 内径 220 [mm]
タンク 2	1	高さ 1500 [mm] , 内径 320 [mm]
電流比例制御弁	3	弁開度信号入力 : 4 ~ 20 [mA] , 全開-全閉時間 : 17 [s] 以下 , 電源 : 24 [VDC] \pm 10%
流量計	3	オープンコレクタ出力 , 0.1 [l/Pulse]
差圧変換器	2	容量 : 200 [gf/cm ²]
A/D 変換ボード	1	入力 : 8CH , 0 ~ 10 [V] , 分解能 : 12 [bit]
D/A 変換ボード	1	出力 : 4CH , 4 ~ 20 [mA] , 分解能 : 12 [bit] , 変換速度 : 10 [μ s/CH]
パルスカウンタ	1	4CH , 24 [bit] up/down counter , 外部入力 : 非絶縁 TTL 入力
コンピュータ	1	NEC PC9801RX

4 実験方法

4.1 実験準備

以下の手順で実験準備を行った。ただし、以下の手順 1 から 5 は実験指導担当者が行った。

1. 配電盤のレベル系のスイッチを入れる。
2. コンピュータの電源を入れる。
3. 実験装置の電源スイッチを入れる。
4. 給水用バルブ V_1 を開く。
5. 実験用プログラムを起動して以下の操作を行う。本実験では~/exp3 に格納されている下記の 2 種のプログラムを使用する。
 - (a) expapp : 差圧変換器特性の調査実験と流量の調整 , タンク 2 の水抜きを行う。
 - (b) step : 開ループ実験用プログラム。
6. プログラム expapp を実行し以下の操作を行う。また , 操作用コンピュータのディスプレイに表示される図中の記号の意味を表 4.1 に示す。
 - (a) 排水用電磁弁 MV3 への入力を 20 [mA] とし全開にする。
 - (b) 入水用電磁弁 MV1 への入力を 20 [mA] とし全開にする。
 - (c) 流量計の指示値が 30 [l/min] になるように手動でバルブ V_1 を調整する。

4.2 差圧変換器特性の調査実験

以下の手順で差圧変換器特性の調査実験を行った。以降、この実験を実験 1 と呼称する。

1. プログラム expapp を起動する。

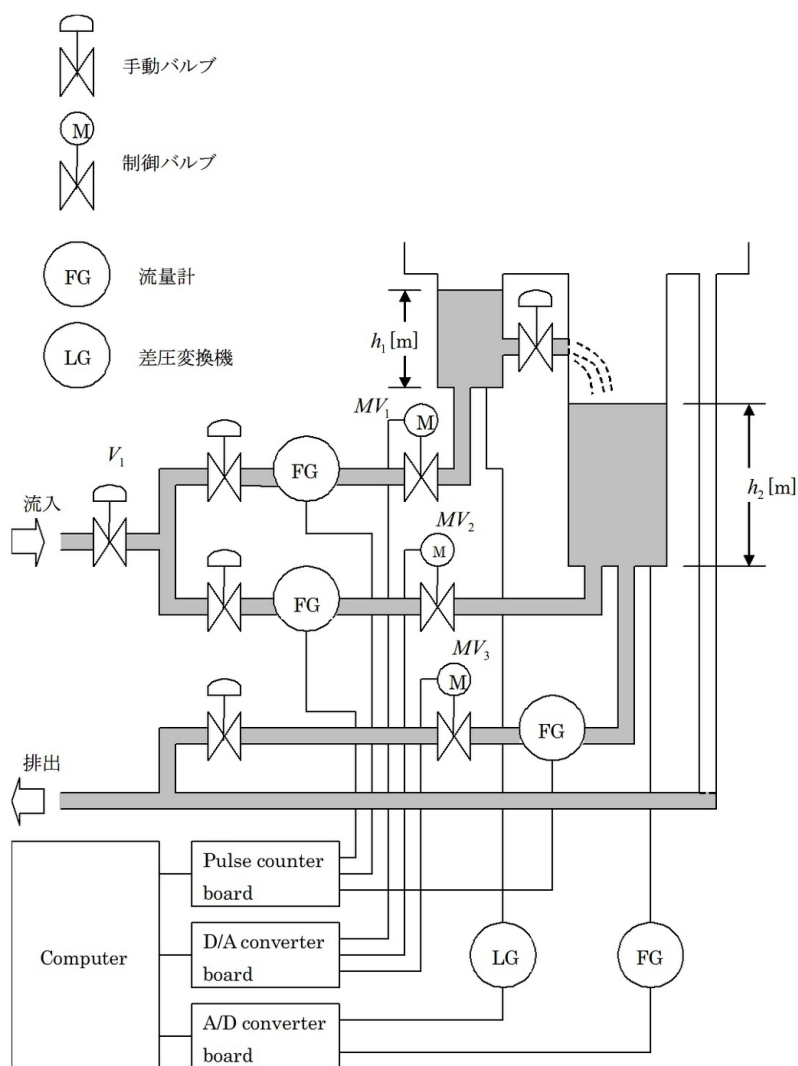


図 3.1 実験装置の構成

2. タンク 2 の定常水位が目的の初期水位となるよう入水用制御弁 MV_2 を調整する。
3. 目的の定常水位におけるタンク 2 の差圧変換器出力電圧を記録する。
4. 手順 (2) と (3) を水位がおよそ 60 [cm] となるまで繰り返す。
5. 差圧変換器の出力電圧と水位の関係のグラフを描く。

4.3 ステップ応答実験

以下の手順でステップ応答実験を行った。以降、この実験を実験 2 と呼称する。

1. プログラム step を起動する。
2. プログラムの指示に従い (1) 制御弁の初期値, (2) 変化量, (3) サンプル周期を入力する。
3. [APPLY AND START] をクリックして実験を開始する。
4. タンク 2 の水位が定常値に収束した後に [Recording Start] をクリックする。10 サンプル

表 4.1 expapp における表示の意味

表記	意味	備考
MV1	タンク 1 注水用電磁バルブ指令電流値	4 [mA] から 20 [mA]
MV2	タンク 2 注水用電磁バルブ指令電流値	4 [mA] から 20 [mA]
MV3	タンク 2 排水用電磁バルブ指令電流値	4 [mA] から 20 [mA]
SAMPLING	サンプリング時間	1 [s] から 3 [s] まで三段階で設定可能
APPLY	設定値の変更を適用	
SV* [mA]	電磁バルブ指令電流の設定値	実験前に表示
PV* [mA]	電磁バルブ指令電流の現在地	実験中に表示
* [l/min]	流量値	
* [V]	差圧変換器出力	
IN	入水経路	
OUT	排水経路	

ステップの後に手順 (2) で与えた変化量の値だけさらに制御弁が開き，タンク 2 の差圧変換器出力の計測が開始される．

5. 差圧変換器出力が定常値に収束した後に [STOP] をクリックし，データを保存する．

5 実験結果

実験 1，実験 2 について，それぞれの結果を以下に示す．

5.1 実験 1：差圧変換器特性

タンク 2 の水位と差圧変換器の出力電圧を 2 [cm] から 57 [cm] まで 5 [cm] 刻みで計測した．得られたデータを表 5.1 に示し，またそのデータからプロットした差圧変換器出力-タンク水位のグラフを図 5.1 に示す．

5.2 実験 2：ステップ応答

制御弁の初期値 8 [mA]，変化量 1 [mA]，サンプリング周期 5 [sec] としてタンク 2 への流入量及び差圧変換器の出力を計測した．得られたデータを表 5.2 に示し，またそのデータからプロットした流入量-時間のグラフを図 5.2 に，差圧変換器出力-時間のグラフを図 5.3 に示す．なお，表 5.2 に関しては，総計測時間が 30 分を超えデータ量が膨大であったため，表では 100 秒毎のデータに改めている．元データは付録として添付した．

表 5.1 実験 1 より得られたデータ

タンク水位 [cm]	差圧変換器出力 [V]
2	0.061
7	0.579
12	1.170
17	1.678
22	2.190
27	2.708
32	3.236
37	3.753
42	4.295
47	4.828
52	5.365
57	5.907

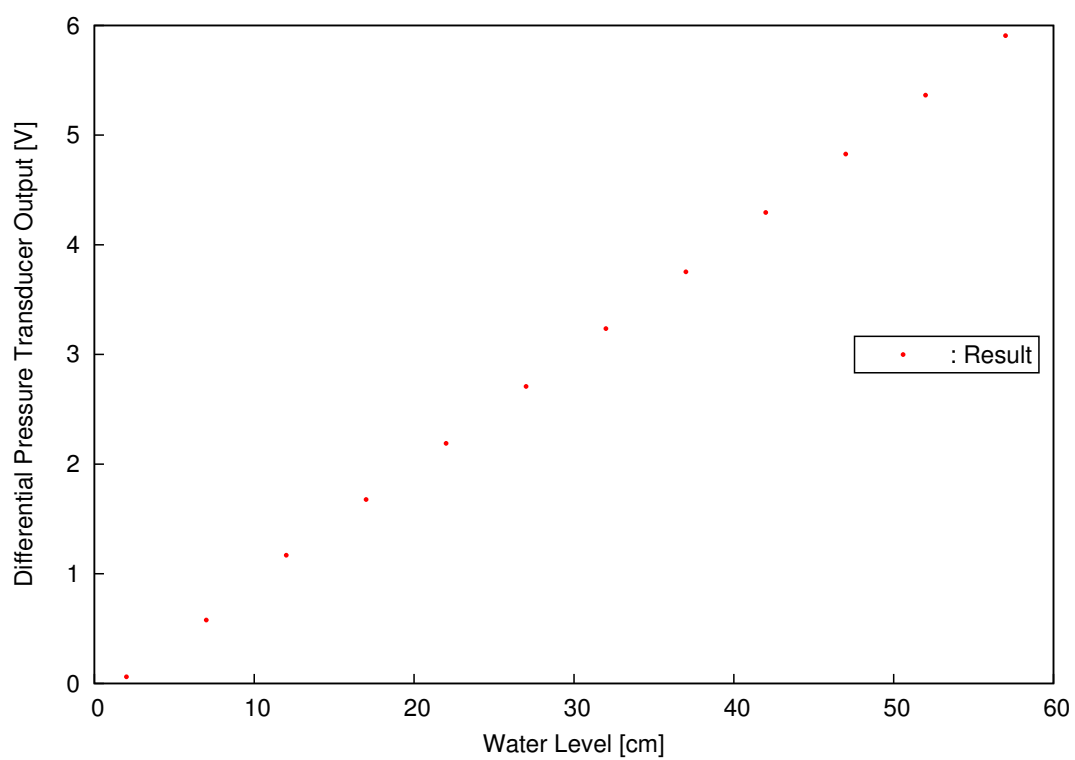


図 5.1 実験 1 : 差圧変換器出力-タンク水位のグラフ

表 5.2 実験 2 より得られたデータ

時間 [5sec]	流入量 [l/min]	差圧変換器出力 [V]
0.000	16.800	1.707
20.000	24.000	1.932
40.000	24.000	2.742
60.000	24.000	3.475
80.000	24.000	3.998
100.000	24.000	4.354
120.000	24.000	4.584
140.000	24.000	4.745
160.000	24.000	4.842
180.000	24.000	4.906
200.000	22.800	4.950
220.000	22.800	4.979
240.000	22.800	5.013
260.000	24.000	5.013
280.000	22.800	5.033
300.000	22.800	5.053
320.000	24.000	5.053
340.000	24.000	5.057
360.000	22.800	5.043
380.000	24.000	5.038
400.000	24.000	5.033
420.000	22.800	5.043

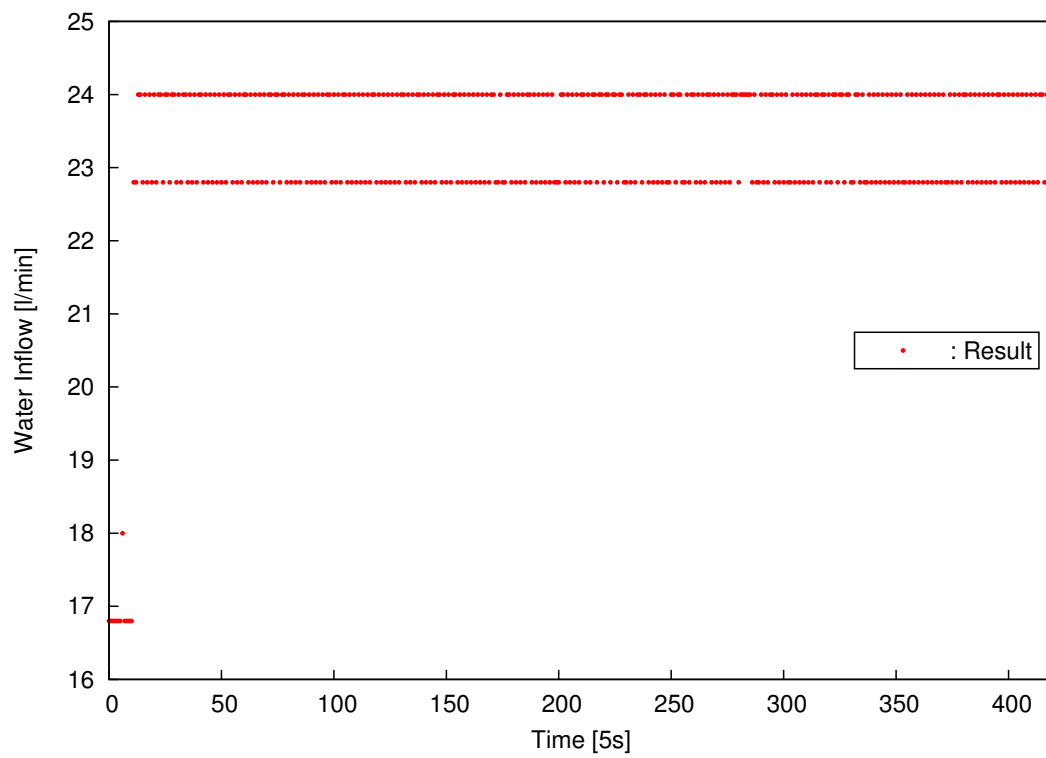


図 5.2 実験 2 : 流入量-時間のグラフ

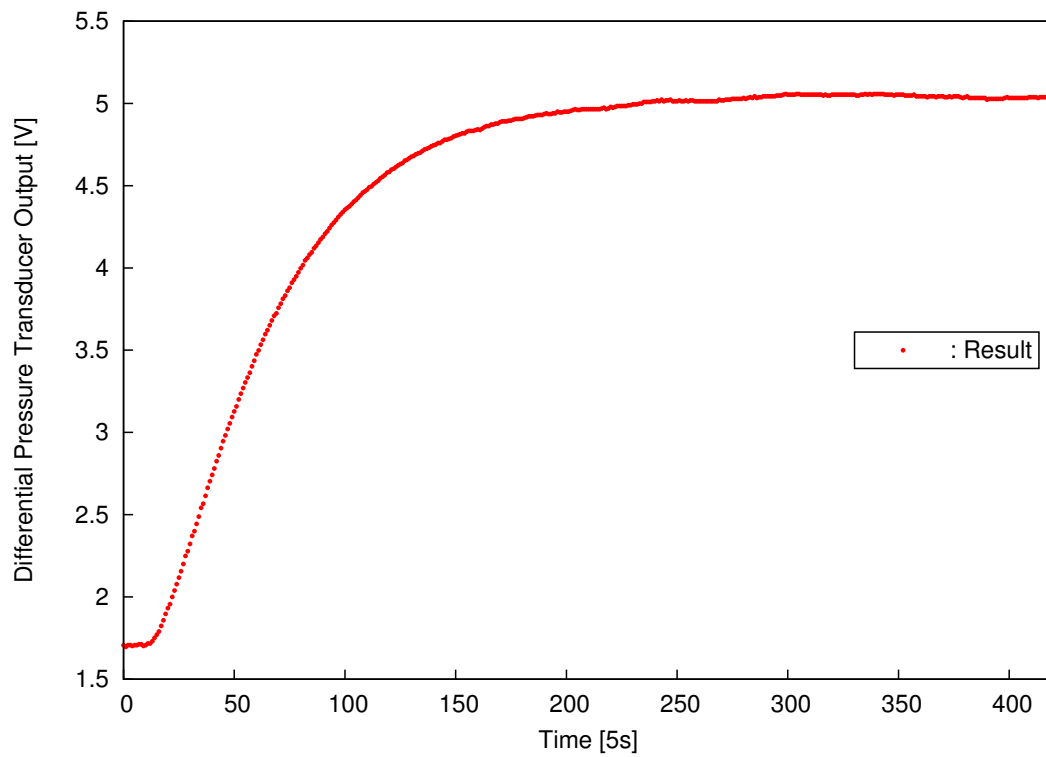


図 5.3 実験 2 : 差圧変換器出力-時間のグラフ

6 課題と考察

6.1 差圧変換器特性と水位の関係式

実験 1 の結果から，最小二乗法を用いて差圧変換器-水位特性の関係式を求める．図 5.1 のグラフについて $y = ax + b$ とおくと，最小二乗法より a , b はそれぞれ以下のように表せる．

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.1)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6.2)$$

これらの式より， $a \approx 1.058$, $b \approx -0.1402$ となり，差圧変換器出力-水位特性の関係式は，

$$y = 1.058x - 0.1402 \quad (6.3)$$

つまり，

$$v(t) = 1.058h(t) - 0.1402 \quad (6.4)$$

と求まる．実験 1 のデータ点と共に式 (6.3) をグラフに表したものを図 6.1 に示す．

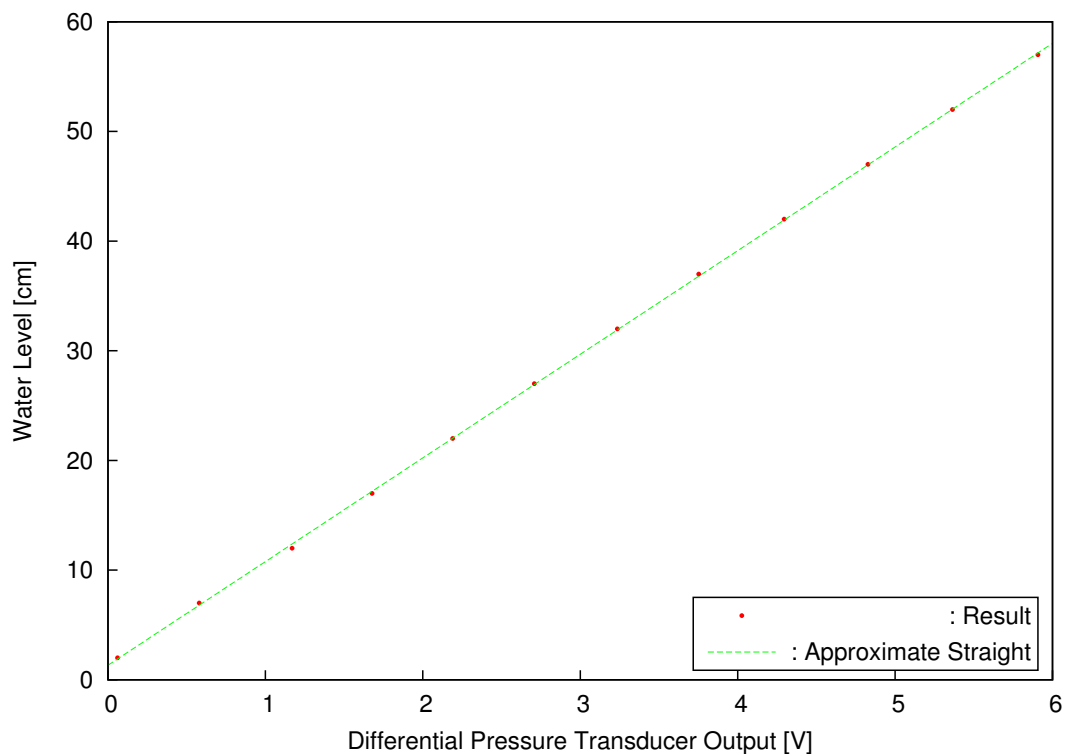


図 6.1 差圧変換器出力と水位の関係式

6.2 流入量から差圧変換器出力への伝達関数

実験 2 の結果から，流入量を入力，差圧変換器出力を出力とした伝達関数 $G_1(s)$ を求める．図 5.3 が二次遅れ系の応答を示していることから，流入量から差圧変換器出力への伝達関数 $G_1(s)$ は式 (2.2) から次のようにおける．

$$G_1(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (6.5)$$

ただし，流入量を $u(t)$ ，差圧変換器出力を $v(t)$ とし， $U(s)$ 及び $V(s)$ はそれぞれ $u(t)$ ， $v(t)$ に対応するラプラス変換後の変数である．

まず，この伝達関数 $G_1(s)$ について時定数 T_1, T_2 を求める．実験 2 の結果（表 5.2 および図 5.3）についてグラフの変曲点を求めるため，各データ値とその次のデータ値との差分を求めた．これをグラフに表したものを図 6.2 に示す．図 6.2 より最も差分の大きな点，つまり，図 5.3 の変曲点は明らかである．この点を変曲点 $t_c = 170 [\text{sec}]$ とした．なお，この時の差圧変換器出力は $2.488 [\text{V}]$ である．

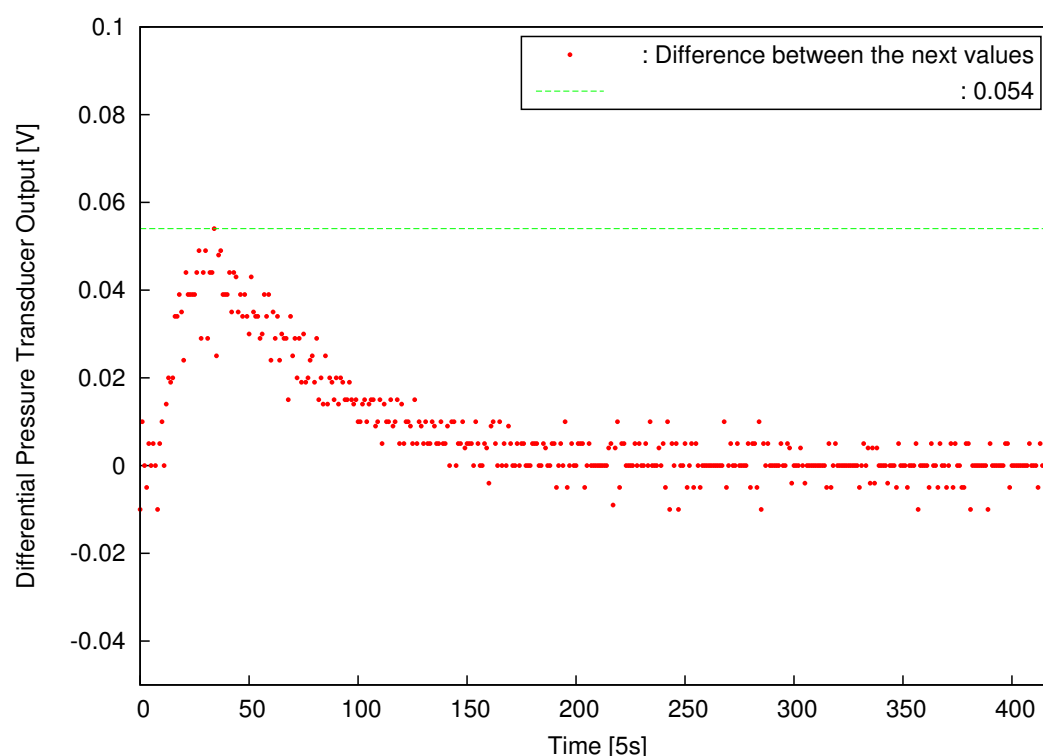


図 6.2 差圧変換器出力各データ値の次の値との差分

ここで，図 5.3 における変曲点 $(170, 2.488)$ を通る傾き a の直線は $y = ax + 2.488 - 34a$ とおける．ここから最も点 $(170, 2.488)$ の接線に相応しいと思われる傾き a を設定し，それと $y = 1.707$ ，

$y = 5.043$ との交点をそれぞれ t_a, t_b とする．傾き $a = 0.04$ と設定することで $t_a = 14.475 \times 5 \approx 72$, $t_b = 97.875 \times 5 \approx 489$ となり，これから T_A, T_C は以下のように求まった．

$$T_A = t_b - t_a = 489 - 72 = 417 \quad (6.6)$$

$$T_C = t_b - t_c = 489 - 170 = 319 \quad (6.7)$$

以上の接線について，図 6.3 に示す．

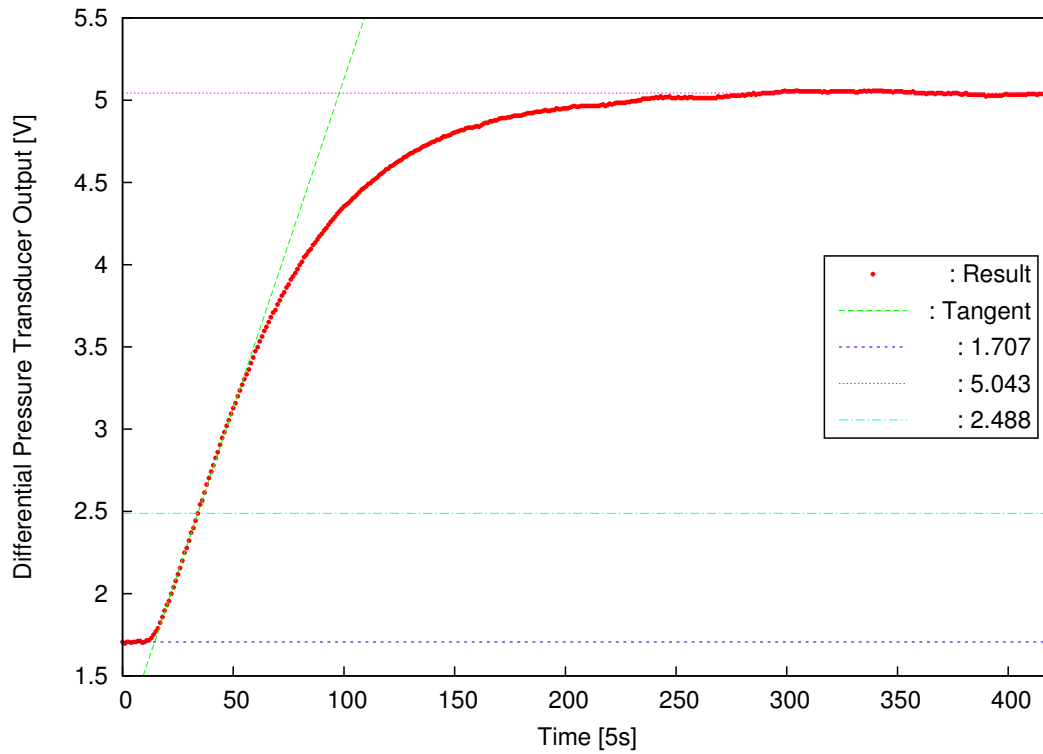


図 6.3 変曲点および接線の推定

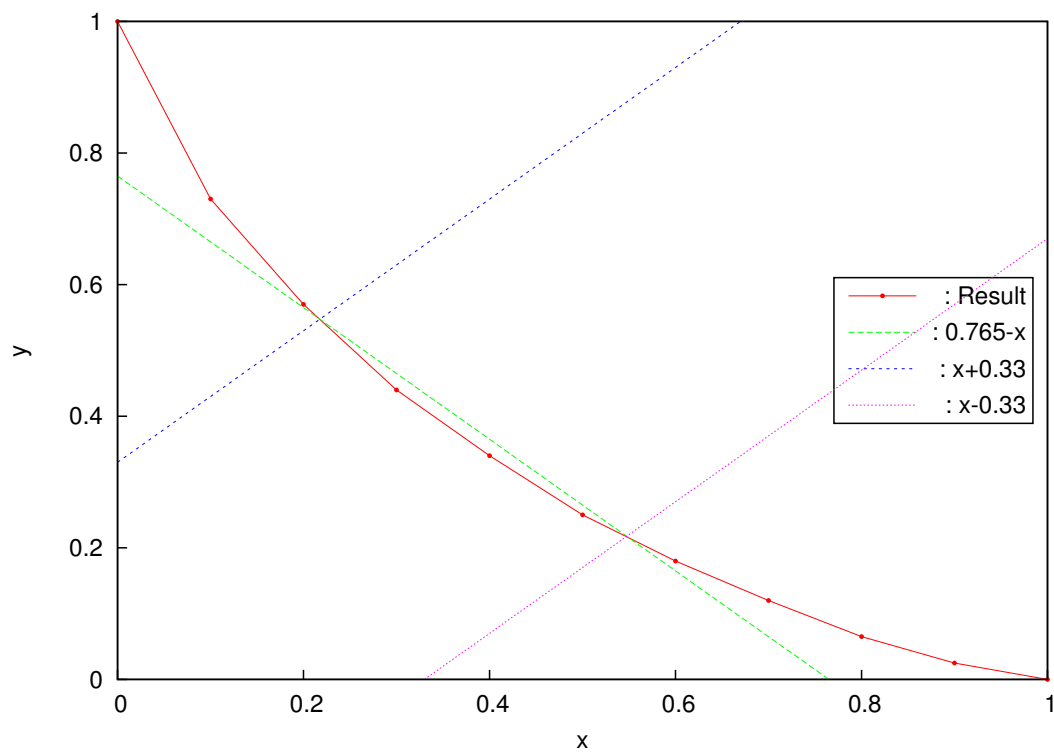
さらに，式 (2.16) のように定義すると $\alpha \approx 0.765$ となる．式 (2.18), (2.19) より，これらの交点座標 x_1, x_2 を用いることで T_1 と T_2 は次のように求まる．

$$T_1 = T_A \times x_1 \quad (6.8)$$

$$T_2 = T_A \times x_2 \quad (6.9)$$

ここで，式 (2.19) は解析的に解を求めることが出来ないため，表 2.1 のデータをプロットし， $y = 0.765 - x$ との交点座標 x_1, x_2 は以上の式を満たすよう目分量にて決定した．交点座標 x_1, x_2 の決定について，推定の補助として用いた直線と式 (2.18), (2.19) をグラフに表したものを図 6.4 に示す．

図 6.4 中の直線より，交点座標は $x_1 = 0.2175, x_2 = 0.5475$ と求まり， $T_1 = 90.6975 \approx 90.70$, $T_2 = 228.3075 \approx 228.3$ である．

図 6.4 交点座標 x_1, x_2 の推定

次に，伝達関数 $G_1(s)$ のゲイン K を求める．大きさ r のステップ入力を加えた時の時間応答 $h(t)$ は式 (2.3) より

$$h(t) = rK \left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (6.10)$$

である． $t \rightarrow \infty$ とすると，図 6.3 より

$$h(\infty) = rK = 5.043 - 1.707 = 3.696 \quad (6.11)$$

となり，また $r = (23.5 - 16.9) \div 60 = 0.11$ であることから，ゲイン K は

$$K = 3.696 \div 0.11 = 33.6 \quad (6.12)$$

である．

よって求める伝達関数 $G_1(s)$ は

$$G_1(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{33.6}{(1 + 90.70s)(1 + 228.3s)} \quad (6.13)$$

である．

6.3 流入量から水位への伝達関数

実験 1 および 2 の結果から，流入量を入力，タンク 2 の水位を出力とした伝達関数 $G_2(s)$ を求める．伝達関数は初期値を 0 と置くため，式 (6.4) より

$$v(t) = 0.1058h(t) \quad (6.14)$$

とおける．この式をラプラス変換することで

$$V(s) = 0.1058H(s) \quad (6.15)$$

を得る．ただし， $H(s)$ 及び $V(s)$ はそれぞれ $h(t)$ ， $v(t)$ に対応するラプラス変換後の変数である．以上より，伝達関数 $G_2(s)$ は

$$G_2(s) = \frac{H(s)}{U(s)} = \frac{H(s)}{V(s)} G_1(s) \approx \frac{317.6}{(1 + 90.70s)(1 + 228.3)} \quad (6.16)$$

である．

6.4 同定した伝達関数の妥当性

以上で同定した伝達関数の妥当性について検討する．前項で求めた伝達関数 $G_2(s)$ に大きさ $r = 0.11$ のステップ入力を加えた時の時間応答は，初期値を考慮して，

$$h(t) = 34.94(1 + 0.6592e^{-\frac{t}{90.7}} - 1.659e^{-\frac{t}{228.3}}) + 17.61 \quad (6.17)$$

である．式 (6.4) と実験 2 より得られたデータを用いて求めた時間-水位の実験結果と，式 (6.17) の時間応答についてグラフに表したものを図 6.5 に示す．また，100 秒毎のそれぞれの値と相対誤差を表 6.1 に示す．

図と表から，相対誤差は過渡状態で非常に大きくなった後，定常状態付近ではおよそ 6% 程度に収まっていることが読み取れる．このことから，同定した伝達関数は実際よりもゲインが大きく，即応性が過度に高い，つまり時定数も実際より大きいことが分かる．

ゲインに誤差が生じた原因については，実験 1 の測定結果自体が殆ど線形であることから，実験装置，つまり水位の測定に用いたメジャーの不備が挙げられる．実際，実験装置に備え付けられていたメジャーはタンク 2 に対し完全に垂直であると言い難く，ここで誤差が生じることは実験中の時点で危惧されていたことである．

時定数に誤差が生じた原因については，図 5.3 に対し目測で接線を設定したこと，計算に用いた式 (2.19) に解析解がないためデータ点を用いたこと，また，そのグラフと直線の交点を目測で求めたことなど，人為的誤差が積み重なった結果だと考えられる．

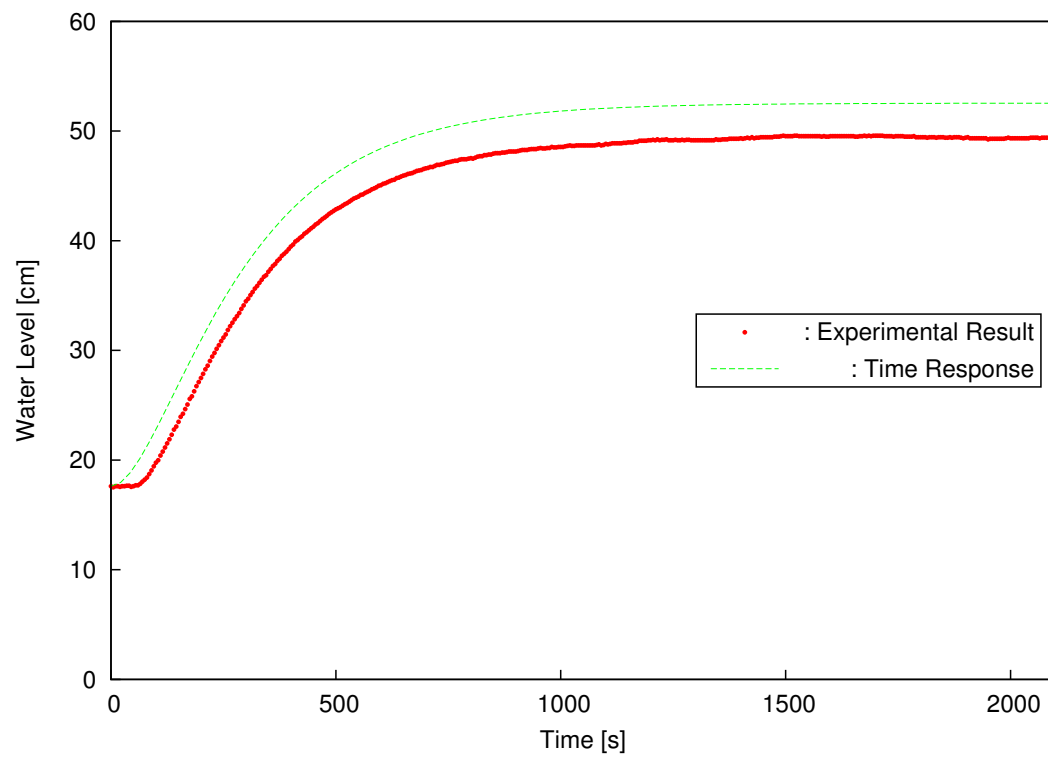


図 6.5 実験値と同定結果の比較

7 結論

レベル系の流入量を入力，水位を出力とした二次遅れ系の同定実験を行うことで，プロセス系への理解が十分に深まった．

表 6.1 実験値と同定結果の相対誤差

時間 [sec]	水位 [cm]	同定結果 [cm]	相対誤差 [%]
0	17.61	17.62	0.02
100	19.76	22.79	15.34
200	27.49	30.95	12.60
300	34.48	37.82	9.67
400	39.47	42.78	8.38
500	42.87	46.16	7.67
600	45.06	48.39	7.39
700	46.60	49.86	7.00
800	47.52	50.81	6.91
900	48.14	51.43	6.84
1000	48.55	51.82	6.73
1100	48.83	52.08	6.66
1200	49.16	52.25	6.29
1300	49.16	52.35	6.50
1400	49.35	52.42	6.24
1500	49.54	52.47	5.92
1600	49.54	52.50	5.98
1700	49.58	52.52	5.93
1800	49.44	52.53	6.24
1900	49.39	52.54	6.36
2000	49.35	52.54	6.47
2100	49.44	52.54	6.27