



哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY



第三章 平面机构的运动分析

徐鹏
哈尔滨工业大学（深圳）



本章讨论的问题

- 速度瞬心法（分析速度）（重点）
- 机构的运动分析（杆组法）（用于课程设计）



3-1 研究机构运动分析的目的和方法

机构的运动分析：就是对机构中构件上点的**位移、速度**和**加速度**进行计算、分析，或者对机构中构件的角位移、角速度和角加速度进行计算、分析。

一、机构运动分析的目的

位移分析可以：

1、转动副 (00)

- ◆确定构件运动空间，进行构件干涉校验；
- ◆确定构件的位置、行程或构件上某点的轨迹；

2、典型机构 (00)

速度、加速度分析可以：

3、牛头刨床 (00)

- ◆满足机器的工作需要及生产率要求；
- ◆确定机构的惯性力、振动等，满足机器的动力学要求。



位移、速度和加速度 表示方式：

常用直角坐标系下的**曲线**来对机构的运动性能进行分析和比较。以横坐标表示主动构件的角位移，纵坐标表示从动件的(角)位移、(角)速度和(角)加速度。

位移线图(displacement diagram)

速度线图(velocity diagram)

加速度线图(acceleration diagram)

统称为运动线图(motion diagram)。



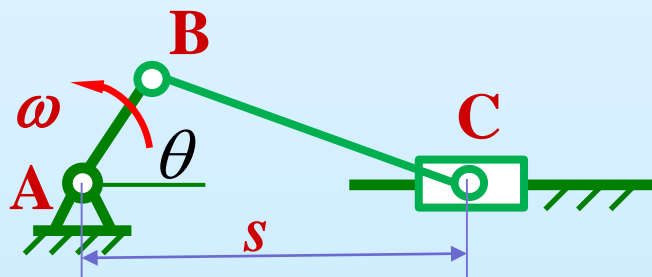
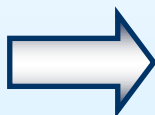
对心式曲柄滑块机构

$$l_{AB}=0.2\text{m}$$

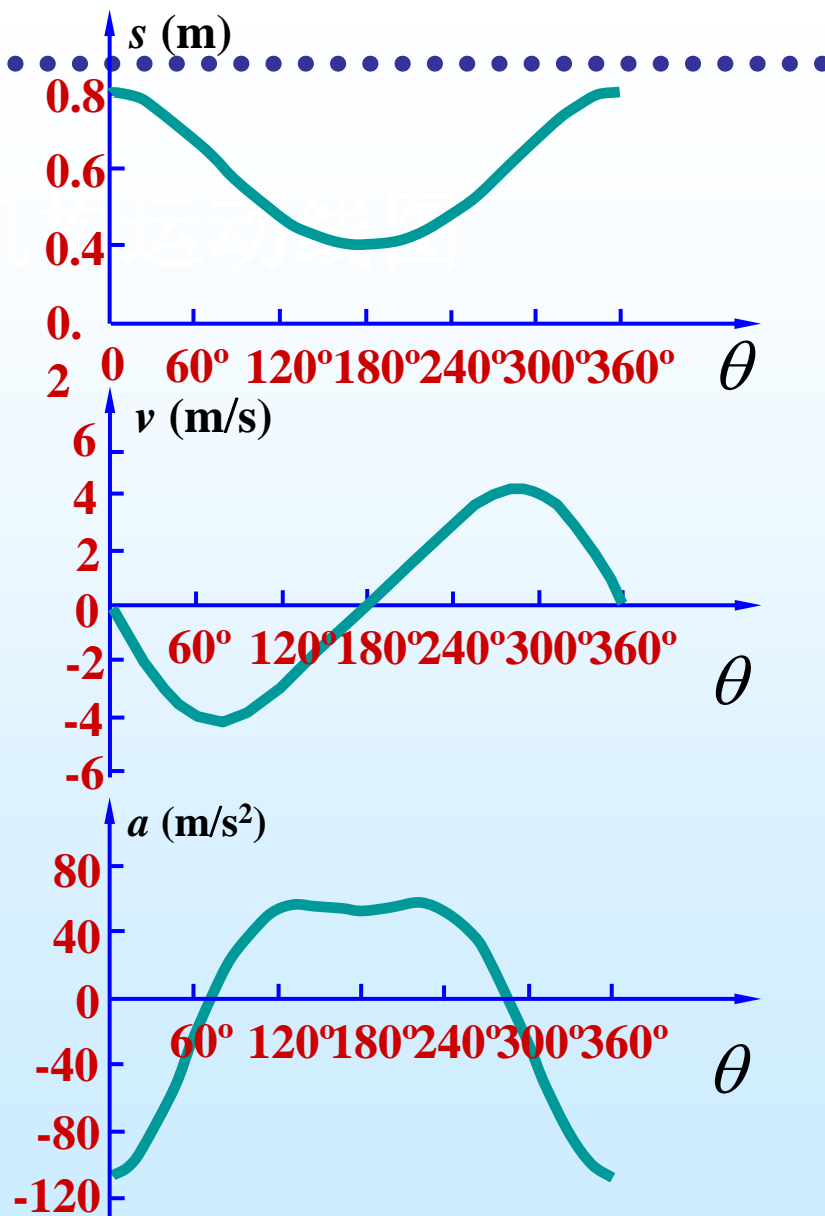
$$l_{BC}=0.6\text{m}$$

$$\omega=20\text{rad/s}$$

机构运动线图



曲柄滑块机构 (00)



规格严格

功夫到家



二、机构运动分析的方法

◆图解法

形象直观，适用于构件数目少的简单的平面机构，但其精度不高，而且当对机构**一系列位置**进行运动分析时，需要反复作图，过程很繁琐。图解法又包括**速度瞬心法**和**相对速度图解法**。

◆解析法

根据机构的已知参数和应求的未知参数建立数学模型，并进行求解，从而可获得精确的计算结果。



解析法可分为

按机构运动分析的运动学模型分有

(1) 以机构为单元建立的运动学模型

该方法编程简单，但每种机构都要单独编程，通用性差。

(2) 把机构视为一个质点系建立的运动学模型

该方法通用性很强，但计算程序相对复杂。

(3) 以基本杆组为单元建立的运动学模型

这种方法称为杆组法，对各种不同类型的平面连杆机构都适用。

按建立数学模型的方法分为

(1) 复数矢量法

(2) 矩阵法

(3) 矢量方程法等



3-2 用速度瞬心法对平面机构作速度分析

一、绝对速度瞬心（单构件）

1 定理：一般情况，在每一个瞬时，平面刚体上都唯一存在一个速度为零的点。

如果点C在 v_A 垂直线上（如图所示），
C点的速度计算公式为：

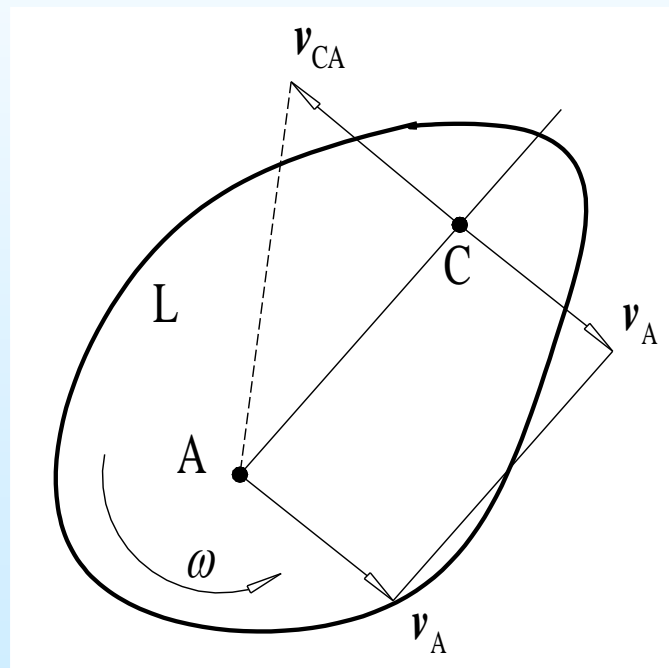
$$v_C = v_A + v_{CA}$$

v_A, v_{CA} 方向相反，故 v_C 的大小为

$$v_C = v_A - \omega \times \overline{AC}$$

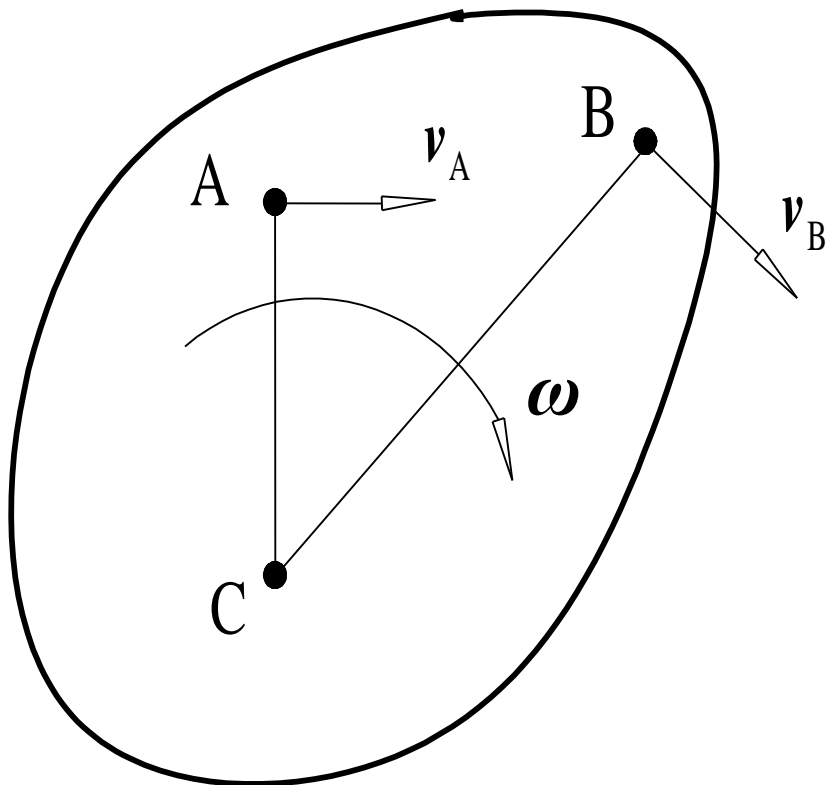
可以找到一点C，瞬时速度等于零，令

$$\overline{AC} = \frac{v_A}{\omega}$$





瞬时刚体内各点速度分布



平面刚体各点速度在某瞬时分布情况，与刚体绕定轴转动时各点速度分布情况类似，在瞬时可以看成绕瞬心的瞬时转动

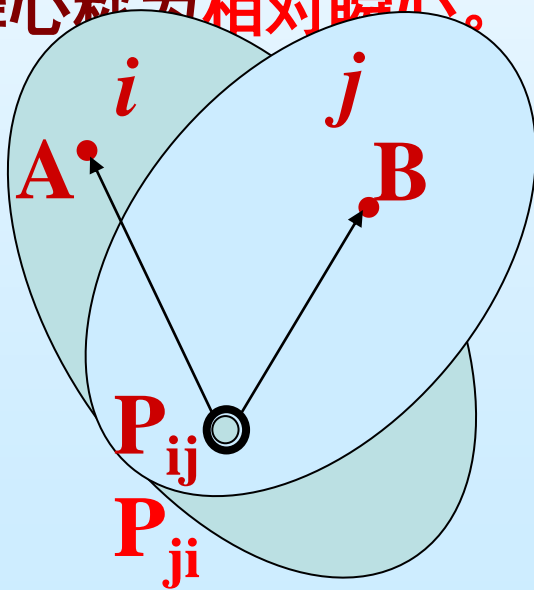
注意：瞬心不是固定点，在不同的瞬时，其位置可能不同。



二、相对速度瞬心（两构件）

作平面运动的两个构件上**瞬时相对速度等于零**的点或**瞬时绝对速度相等**的点（等速重合点），称为速度瞬心。

绝对速度为零的瞬心称为**绝对瞬心**，绝对速度不等于零的瞬心称为**相对瞬心**。



绝对瞬心 $V_{P_{ij}}=0$

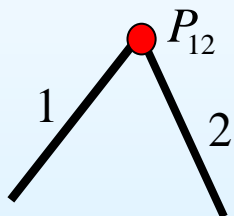
相对瞬心 $V_{P_{ij}}\neq 0$

瞬心 P_{ij} (i, j 代表构件编号)

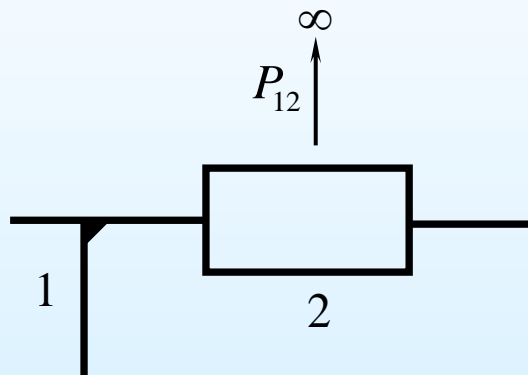


机构中速度瞬心位置的确定

(1) 通过运动副直接连接的两个构件



转动副连接
的两个构件



移动副连接
的两个构件



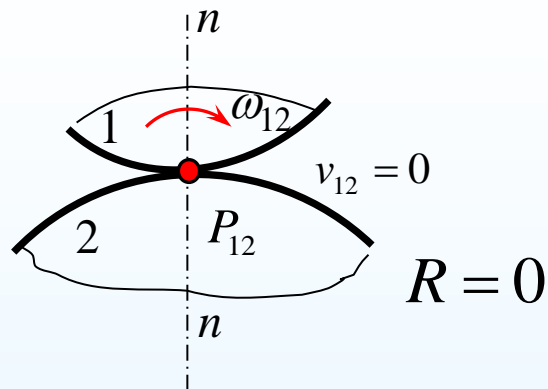
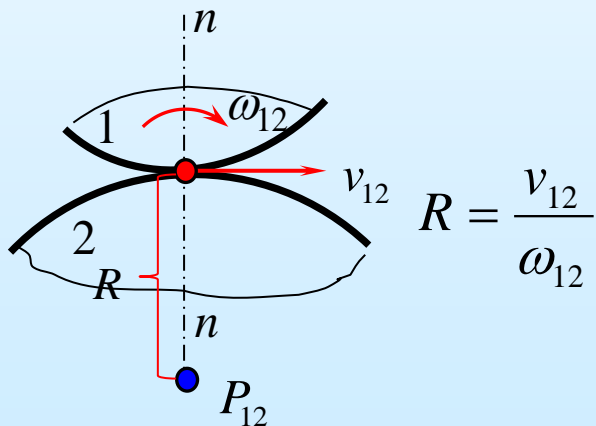
通过高副连接的两个构件

$$\omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 = -v_{12}$$

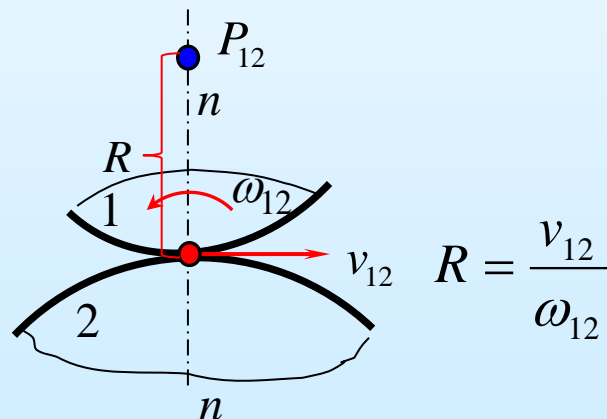
$$\omega_1 (r_1 + R) = \omega_2 (r_2 - R)$$

$$\Rightarrow \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 = -(\omega_1 + \omega_2) R$$

$$\Rightarrow R = \frac{v_{12}}{\omega_{12}}$$



高副连接的两个构件 (纯滚动)

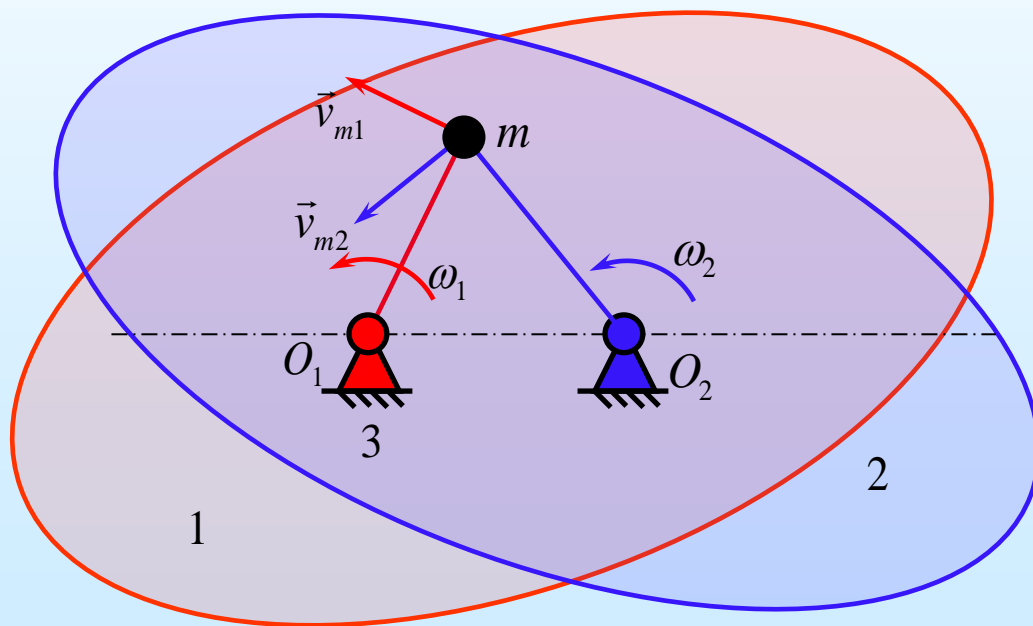


高副连接的两个构件 (存在滚动和滑动)



(2) 不直接构成运动副的两个构件

三心定理：三个作平面运动构件的三个速度瞬心必在同一条直线上。



什么时候

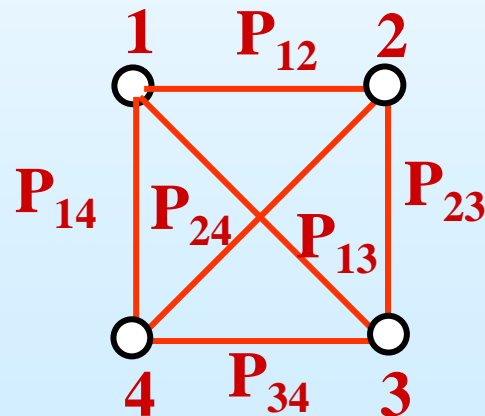
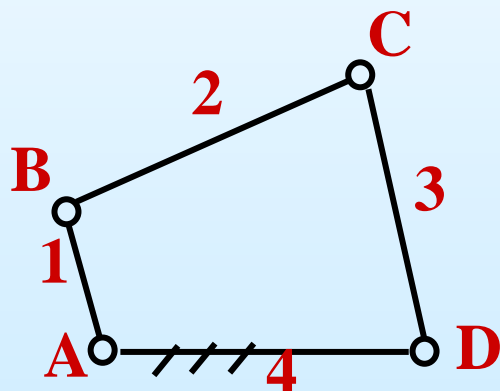
$$\vec{v}_{m1} = \vec{v}_{m2}$$





设机构有 m 个构件，任何一个构件均与其他任意构件形成一个速度瞬心，因此，速度瞬心的总数为：

$$K = \frac{m(m-1)}{2}$$





[例1] 找出机构的瞬心

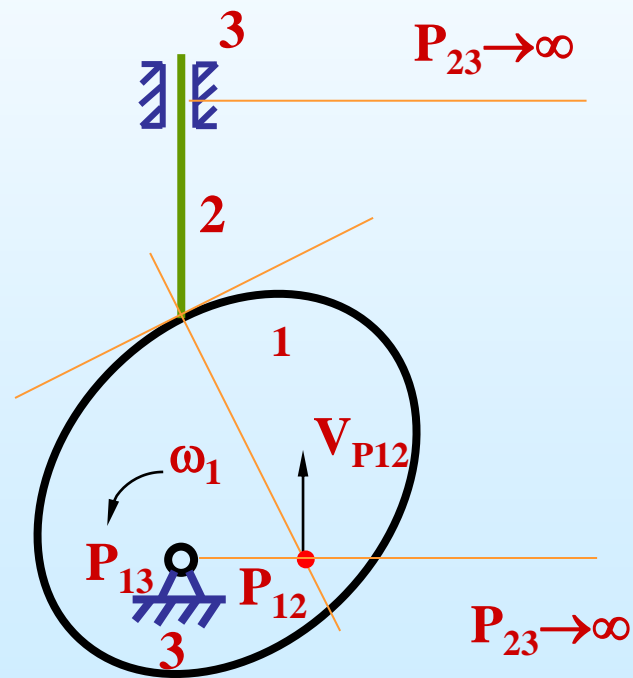
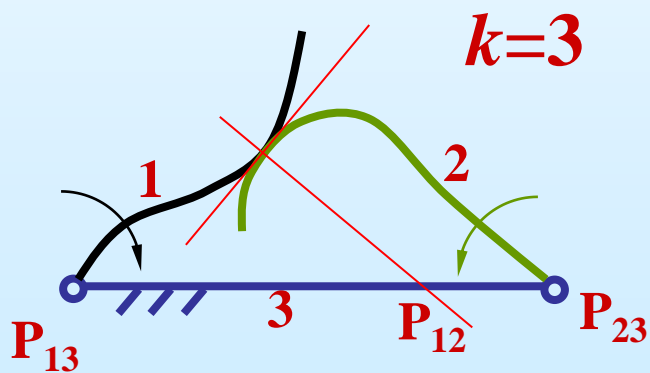
解：瞬心数目 $K = ?$ $K = 3$ 个

P_{13}

P_{23}



P_{12}

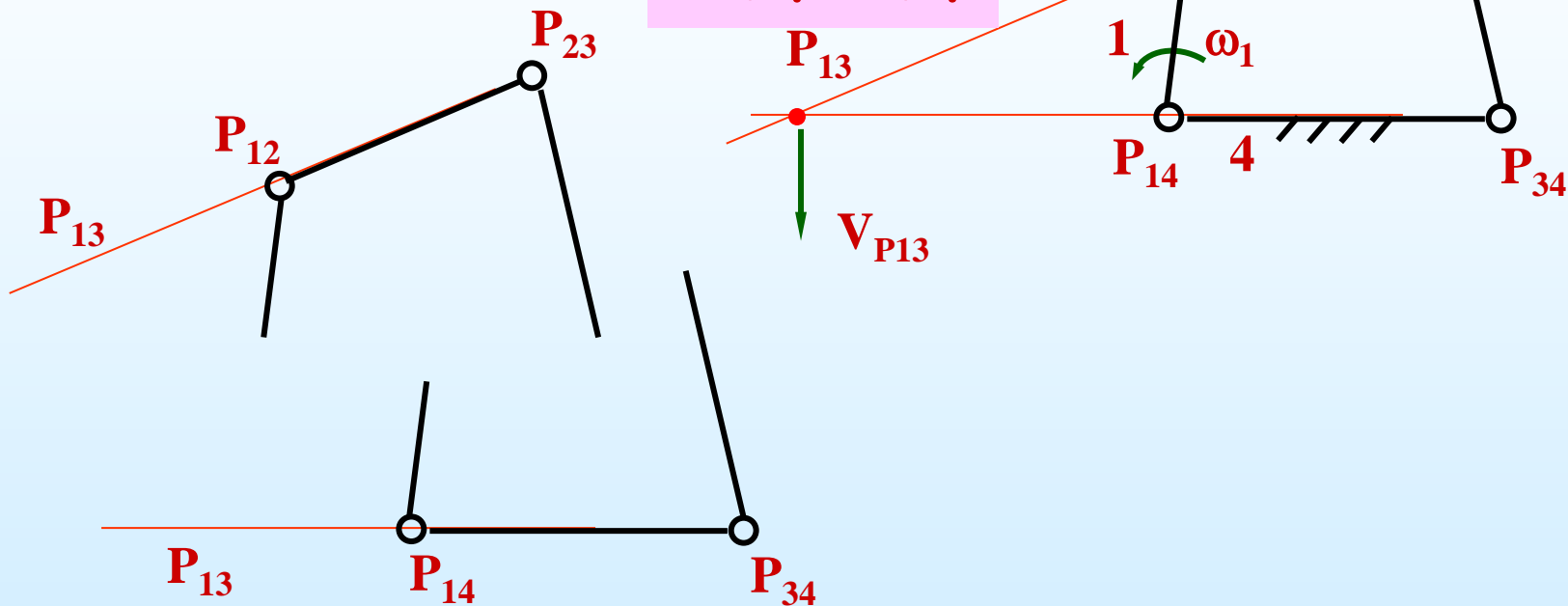




[例2] 找出四杆机构的瞬心

解：瞬心数目 $K = ?$ $K = 6$ 个

绝对？相对？



$$1-2-3 (P_{12}P_{23}) \rightarrow P_{13}$$

$$P_{24} ? (P_{12}P_{14}) \rightarrow P_{24}$$

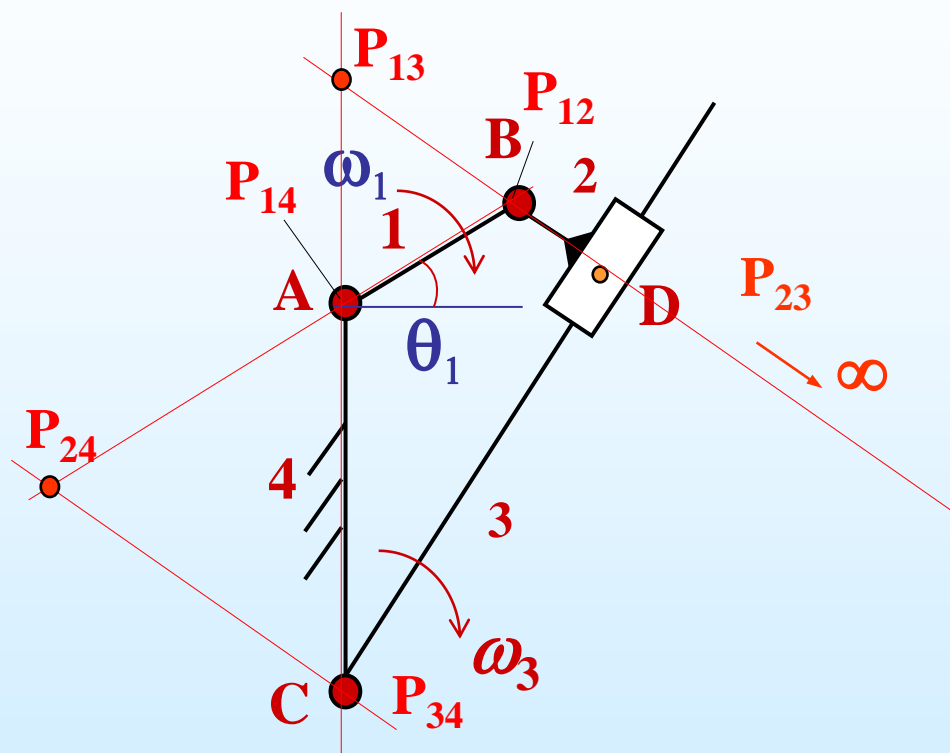
$$1-4-3 (P_{34}P_{14}) \rightarrow P_{13}$$

绝对？相对？ $(P_{23}P_{34}) \rightarrow P_{24}$



[例3]

确定瞬心数目 $K=?$ $K=6$



$$(P_{12}P_{14}) \rightarrow P_{24}$$

$$(P_{23}P_{34}) \rightarrow P_{24}$$

$$(P_{12}P_{23}) \rightarrow P_{13}$$

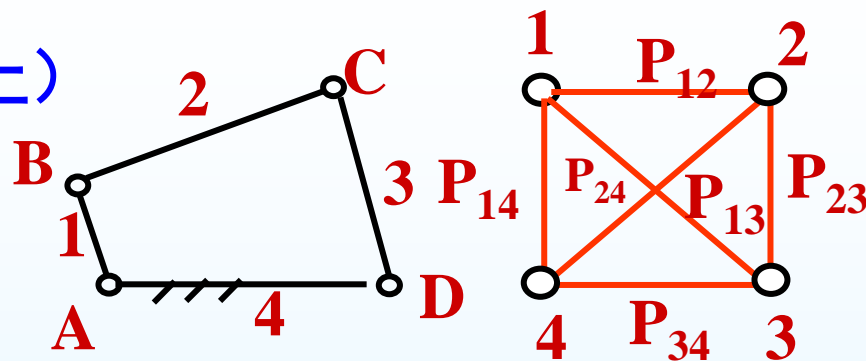
$$(P_{34}P_{14}) \rightarrow P_{13}$$



(3) 多构件机构（构件数5个以上）

瞬心多边形法。

设某机构的构件数为 m ,



- (1) 按构件数目画凸 m 边形的 m 个顶点，每个顶点代表一个构件，并按顺序标注顶点号1、2、 \dots 、 m ，两个顶点间的连线代表一个以该两顶点号为下标的两构件的瞬心。
- (2) 三个顶点连线构成的三角形的三条边表示三瞬心共线。
- (3) 利用两个三角形的公共边可求未知瞬心，即未知瞬心位于能与该瞬心组成三角形的其它两已知瞬心的连线上。

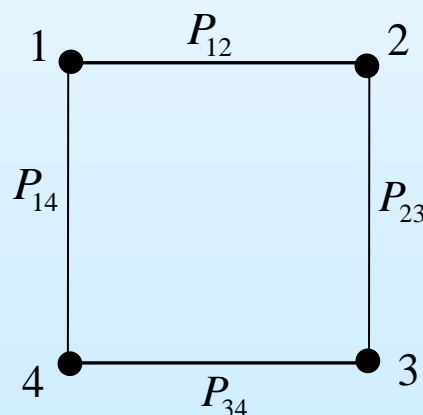
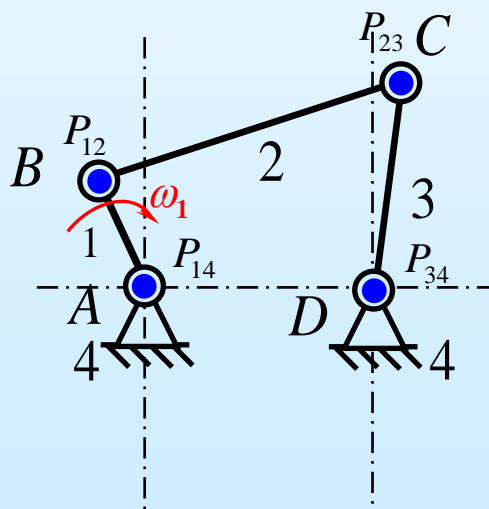


速度瞬心在平面机构速度分析中的应用举例

1. 平面四杆机构的速度分析

(1) 确定相邻构件的速度瞬心

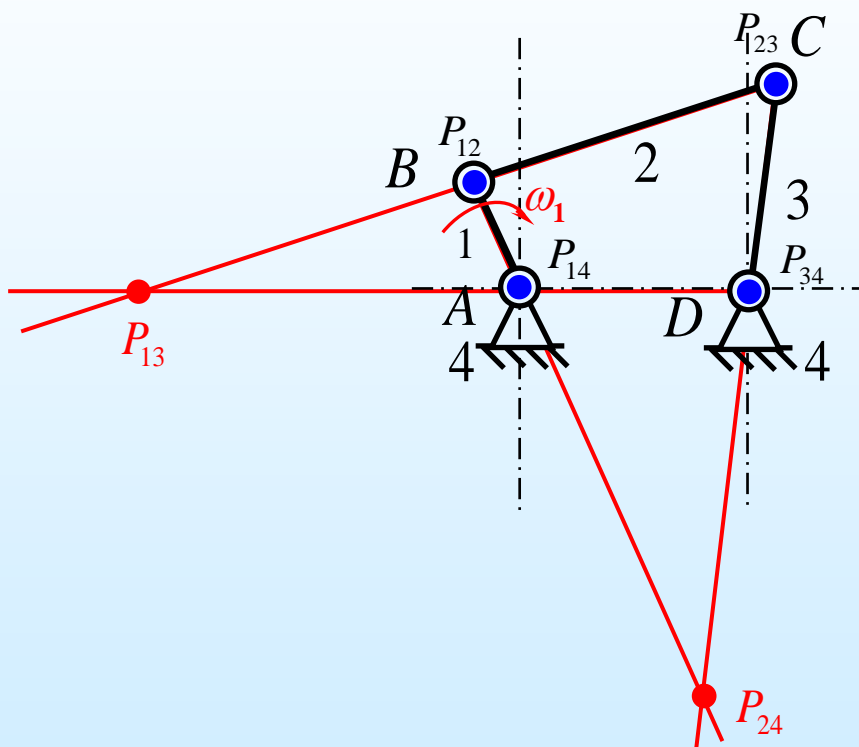
$$K = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$$



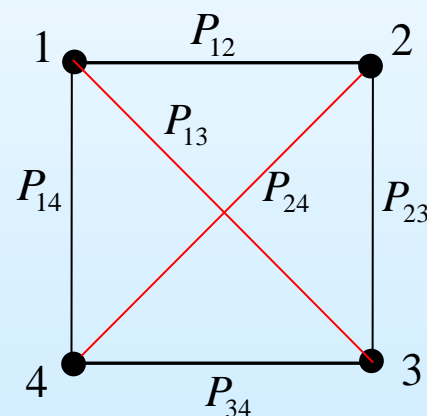
瞬心多边形



(2) 确定不相邻构件的速度瞬心



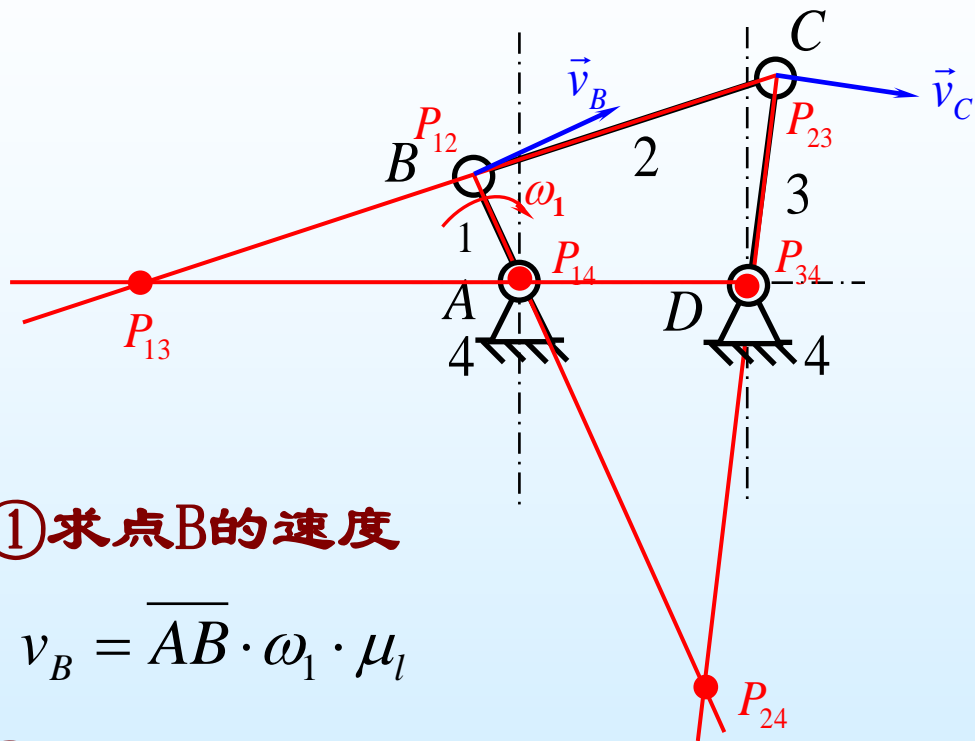
体会“三心定理”与
“瞬心多边形”的应用。



瞬心多边形



(3) 求各点的速度



①求点B的速度

$$v_B = \overline{AB} \cdot \omega_1 \cdot \mu_l$$

②求点C的速度

◆求构件2的角速度

利用速度瞬心 P_{24}

$$\omega_2 = \frac{v_B}{\overline{P_{24}B} \cdot \mu_l}$$

◆求点C的速度

$$v_C = \overline{P_{24}C} \cdot \omega_2 \cdot \mu_l$$

③求构件3的角速度

直接求 $\omega_3 = \frac{v_C}{\overline{DC} \cdot \mu_l}$

利用速度瞬心 P_{13}

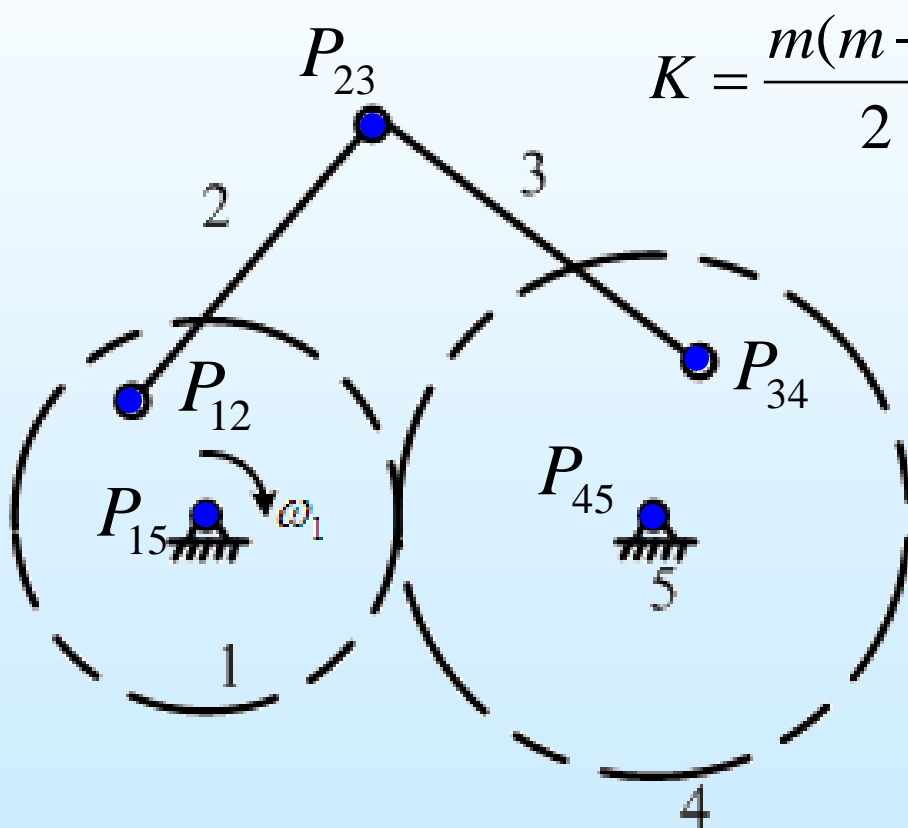
$$\overline{AP_{13}} \omega_1 = \overline{DP_{13}} \omega_3$$

$$\omega_3 = \frac{\overline{AP_{13}}}{\overline{DP_{13}}} \omega_1$$

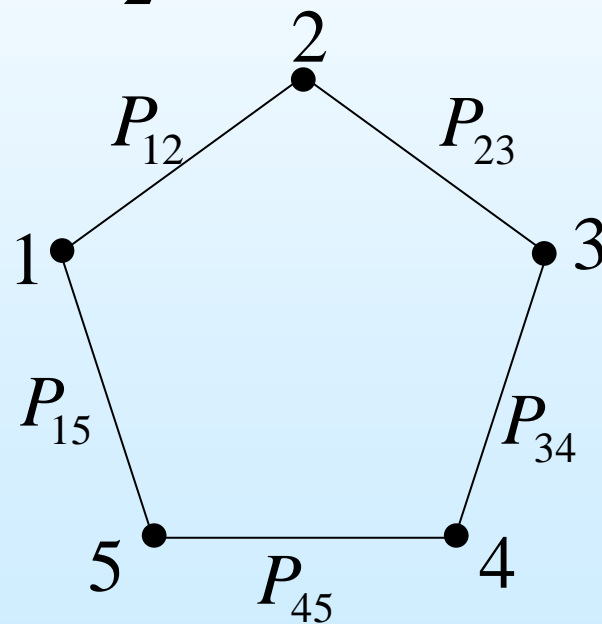


2. 齿轮-连杆机构的速度分析

(1) 确定相邻构件的速度瞬心



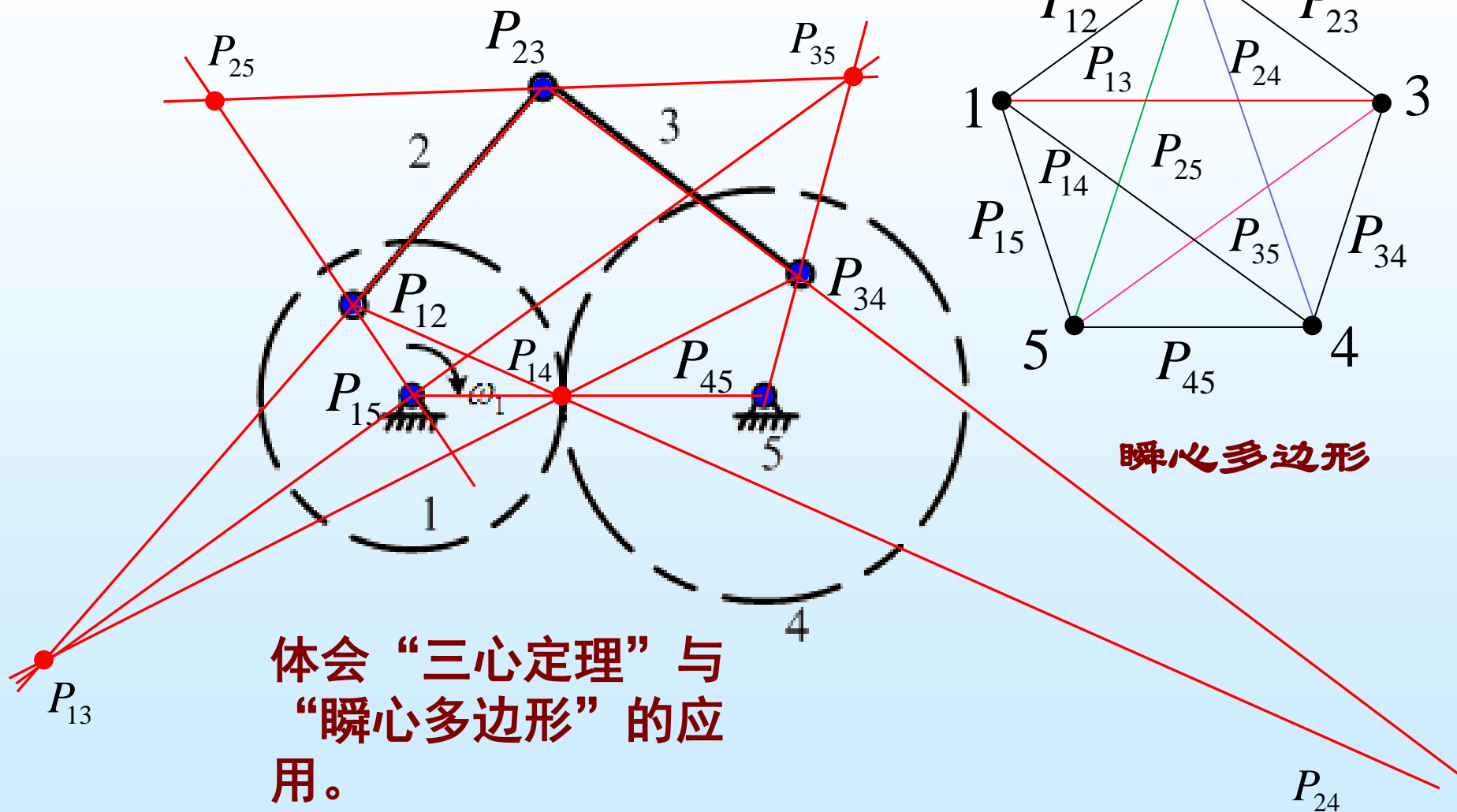
$$K = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{5 \times (5-1)}{2} = 10$$



瞬心多边形



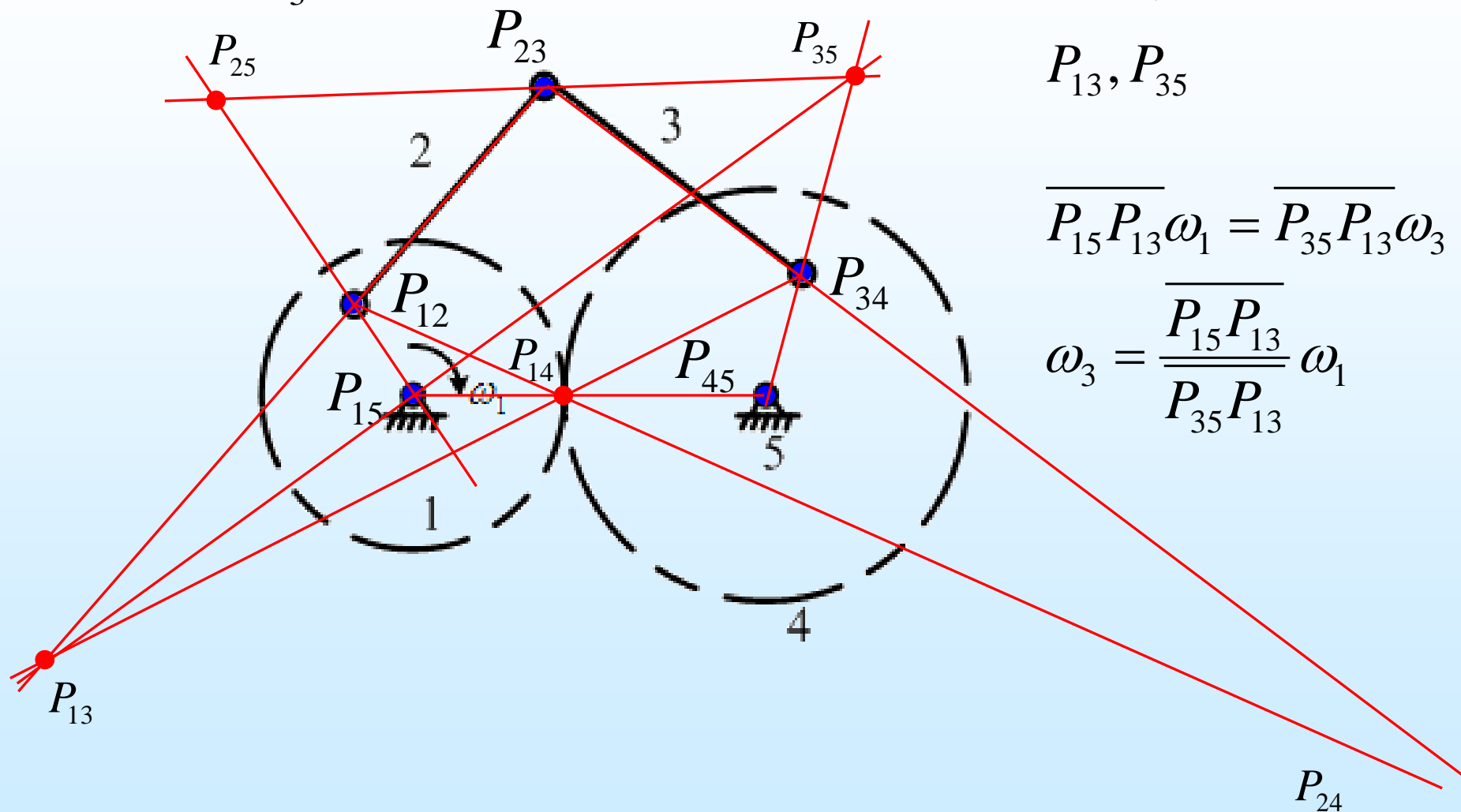
(2) 确定不相邻构件的速度瞬心





(3) 求 ω_3

应用速度瞬心的性质



$$P_{13}, P_{35}$$

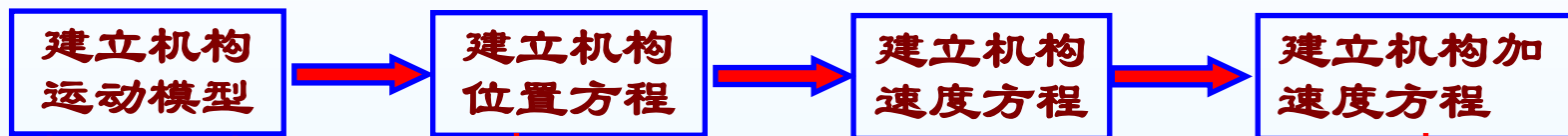
$$\overline{P_{15}P_{13}}\omega_1 = \overline{P_{35}P_{13}}\omega_3$$

$$\omega_3 = \frac{\overline{P_{15}P_{13}}}{\overline{P_{35}P_{13}}}\omega_1$$

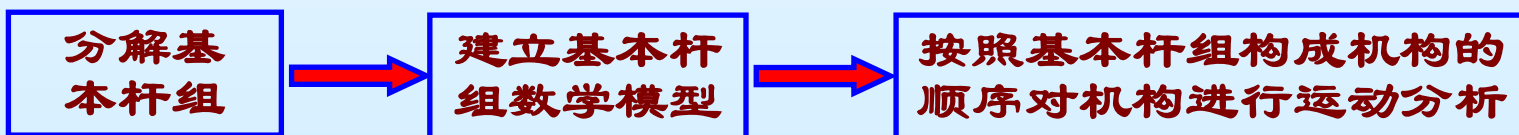


3-3 用杆组法对平面机构作运动分析

一、解析法运动分析的逻辑过程



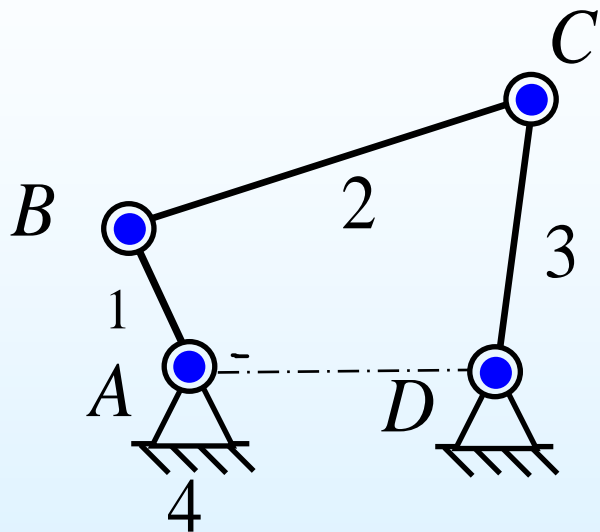
机构运动分析杆组法的逻辑过程



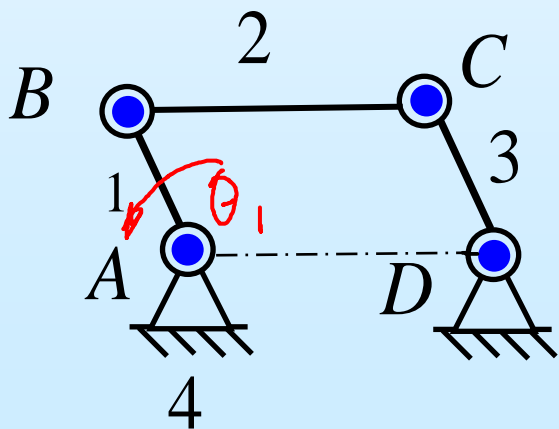
典型机构动画 (00)

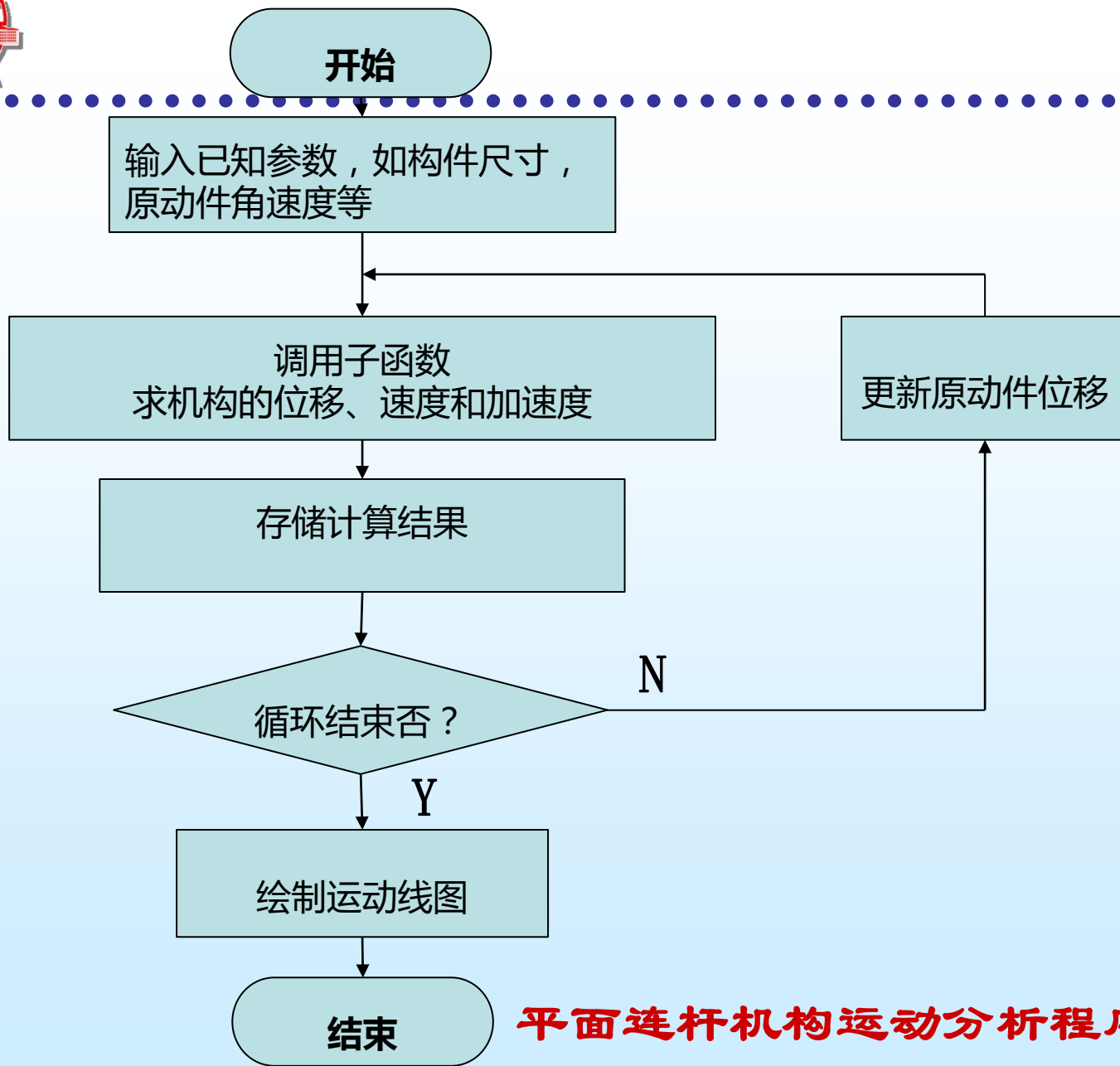


【例】解析法运动分析



$$A = \begin{bmatrix} -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix}$$





平面连杆机构运动分析程序设计流程



二、杆组法运动分析的数学模型

(1) 同一构件上点的运动分析

输入: $A(\underline{x_A}, \underline{y_A}, \underline{\dot{x}_A}, \underline{\dot{y}_A}, \underline{\ddot{x}_A}, \underline{\ddot{y}_A})$
 $\underline{l_i}$
 $\underline{\varphi_i}, \underline{\dot{\varphi_i}}, \underline{\ddot{\varphi_i}}$

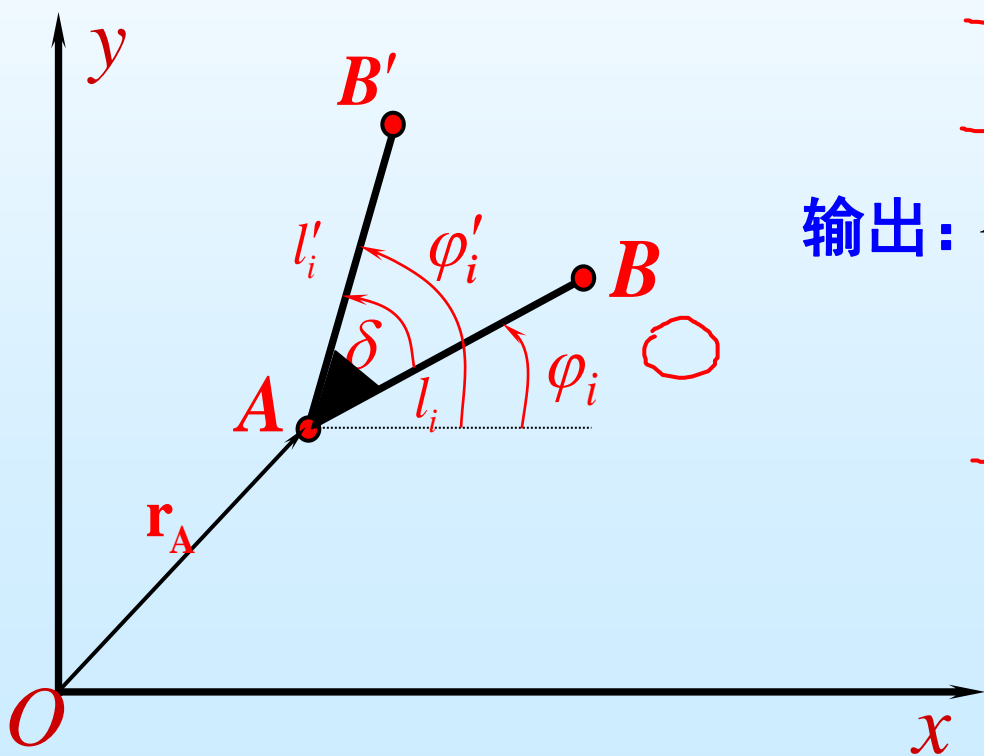
输出: $B(\underline{x_B}, \underline{y_B}, \underline{\dot{x}_B}, \underline{\dot{y}_B}, \underline{\ddot{x}_B}, \underline{\ddot{y}_B})$

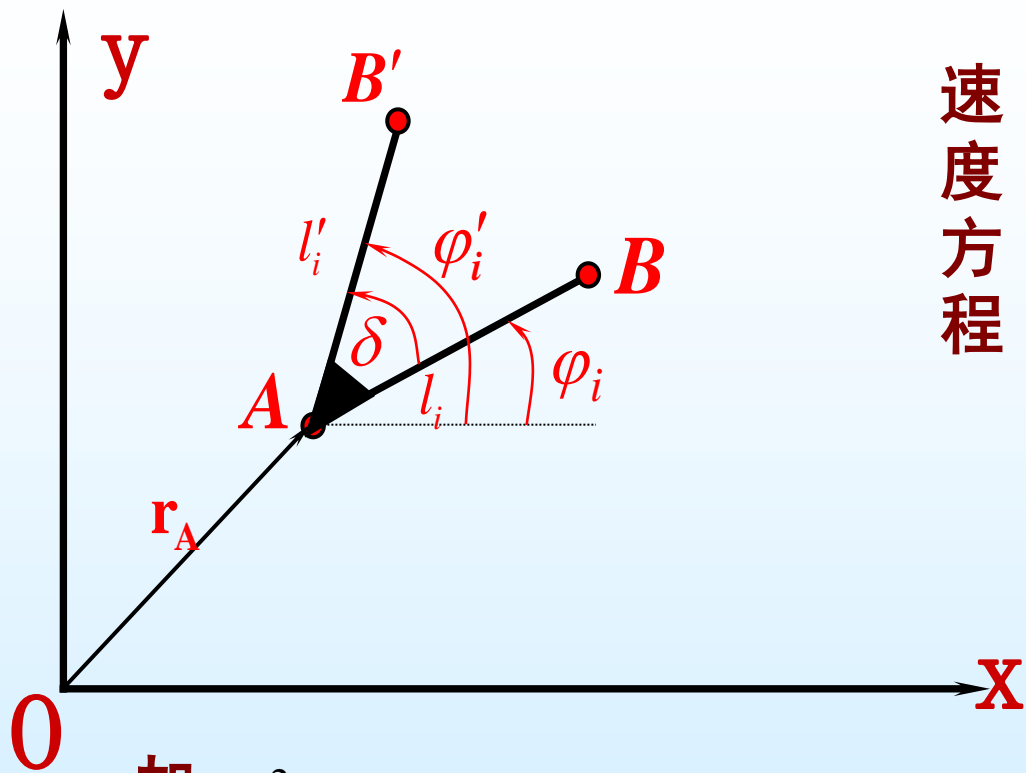
位置方程:

$$\underline{x_B} = \underline{x_A} + \underline{l_i} \cos \underline{\varphi_i}$$

$$\underline{y_B} = \underline{y_A} + \underline{l_i} \sin \underline{\varphi_i}$$

根据该方程确定B点的位置。





速度方程

$$\frac{dx_B}{dt} = \dot{x}_B = \dot{x}_A - \dot{\varphi}_i l_i \sin \varphi_i$$

$$\frac{dy_B}{dt} = \dot{y}_B = \dot{y}_A + \dot{\varphi}_i l_i \cos \varphi_i$$

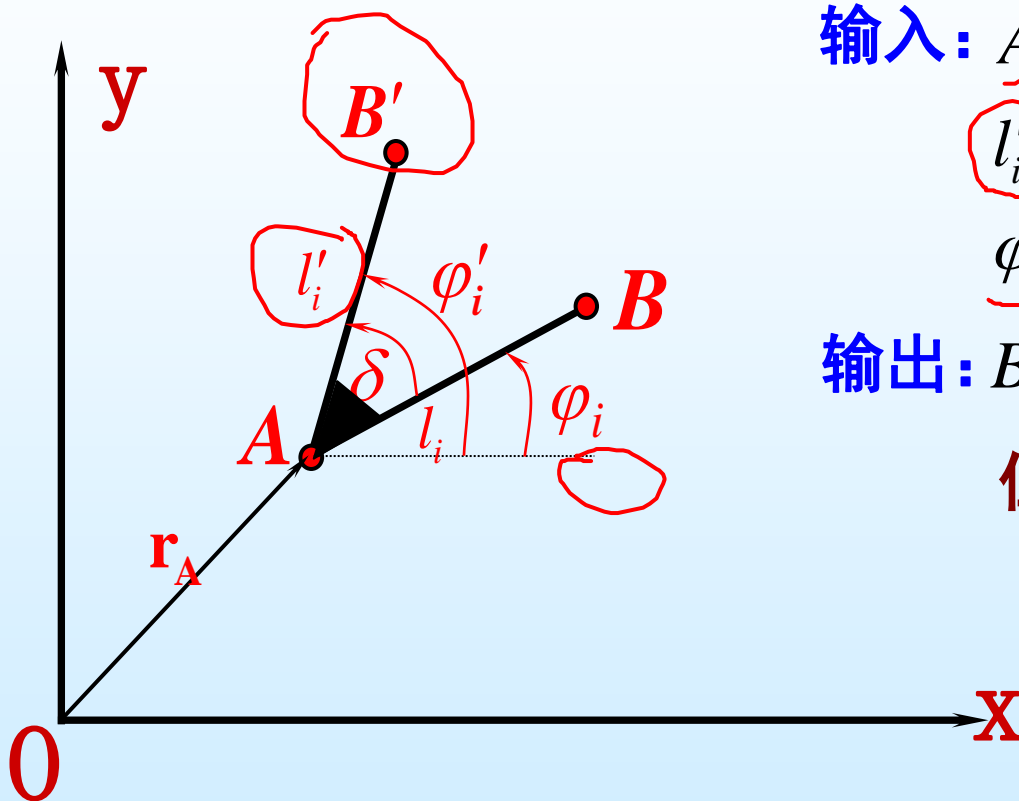
根据该方程确定B点的速度。

加速度方程

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} = \ddot{x}_B = \ddot{x}_A - \dot{\varphi}_i^2 l_i \cos \varphi_i - \ddot{\varphi}_i l_i \sin \varphi_i$$

$$\frac{d^2 y_B}{dt^2} = \ddot{y}_B = \ddot{y}_A - \dot{\varphi}_i^2 l_i \sin \varphi_i + \ddot{\varphi}_i l_i \cos \varphi_i$$

根据该方程确定B点的加速度。



输入: $A(x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A)$

$l'_i, \delta,$

$\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i$

输出: $B'(x_{B'}, y_{B'}, \dot{x}_{B'}, \dot{y}_{B'}, \ddot{x}_{B'}, \ddot{y}_{B'})$

位置方程:

$$x_{B'} = x_A + l'_i \cos \varphi'_i$$

$$y_{B'} = y_A + l'_i \sin \varphi'_i$$

$$\varphi'_i = \varphi_i + \delta$$

根据该方程确定点
 B' 的位置。



速度方程

$$\frac{dx_{B'}}{dt} = \dot{x}_{B'} = \dot{x}_A - \dot{\varphi}'_i l'_i \sin \varphi'_i$$

$$\frac{dy_{B'}}{dt} = \dot{y}_{B'} = \dot{y}_A + \dot{\varphi}'_i l'_i \cos \varphi'_i$$

根据该方程确定
点 B' 的速度。

$$\frac{d\varphi'_i}{dt} = \frac{d(\varphi_i + \delta)}{dt} \rightarrow \dot{\varphi}'_i = \dot{\varphi}_i$$

加速度方程

$$\frac{d^2 x_{B'}}{dt^2} = \ddot{x}_{B'} = \ddot{x}_A - \dot{\varphi}'_i{}^2 l'_i \cos \varphi'_i - \ddot{\varphi}'_i l'_i \sin \varphi'_i$$

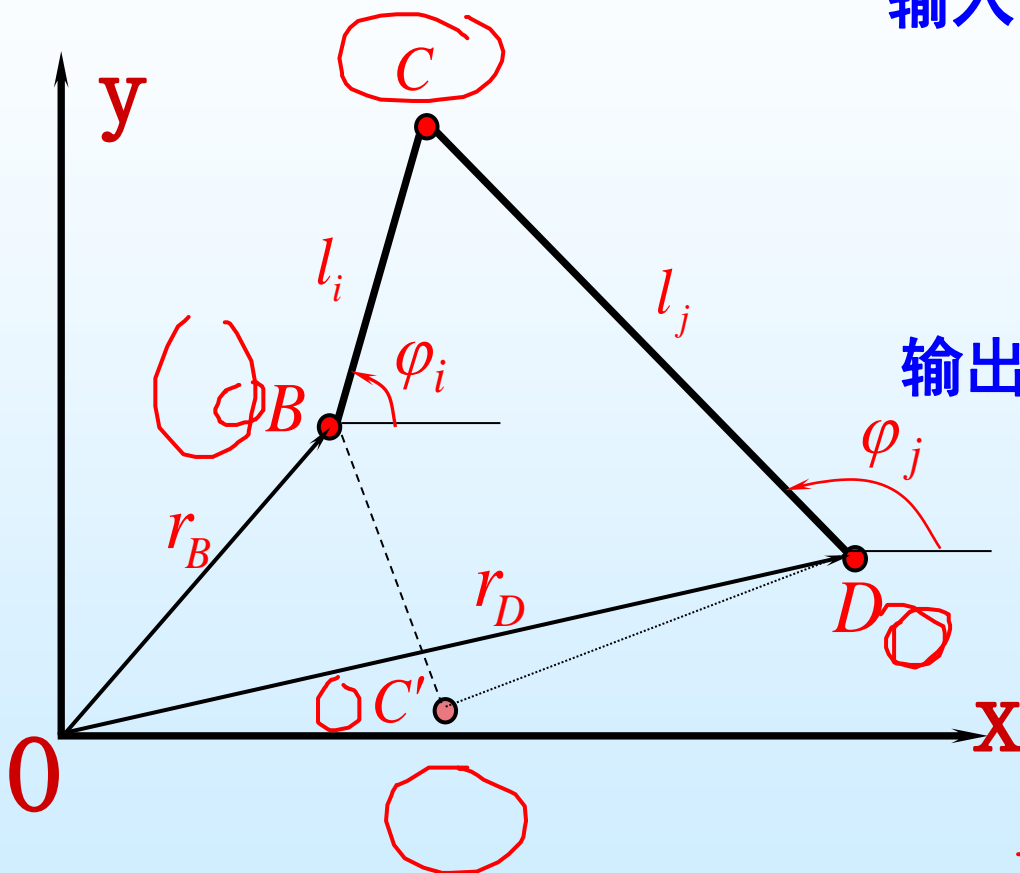
$$\frac{d^2 y_{B'}}{dt^2} = \ddot{y}_{B'} = \ddot{y}_A - \dot{\varphi}'_i{}^2 l'_i \sin \varphi'_i + \ddot{\varphi}'_i l'_i \cos \varphi'_i$$

根据该方程确定
点 B' 的加速度。

$$\frac{d\dot{\varphi}'_i}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}_i}{dt} \rightarrow \ddot{\varphi}'_i = \ddot{\varphi}_i$$



(2) RRR II级杆组的运动分析



输入: $B(x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$
 $D(x_D, y_D, \dot{x}_D, \dot{y}_D, \ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$

l_i, l_j

flag

输出:

$C(x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C)$

$(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i)$

$(\varphi_j, \dot{\varphi}_j, \ddot{\varphi}_j)$

位置方程:

$$x_C = x_B + l_i \cos \varphi_i = x_D + l_j \cos \varphi_j$$

$$y_C = y_B + l_i \sin \varphi_i = y_D + l_j \sin \varphi_j$$



位置方程求解过程：

$$\begin{aligned}x_C &= x_B + l_i \cos \varphi_i = x_D + l_j \cos \varphi_j \\y_C &= y_B + l_i \sin \varphi_i = y_D + l_j \sin \varphi_j\end{aligned}$$

首先根据该
方程求解

代入该方程求
解C点位置。

φ_i, φ_j

非线性方程组求解

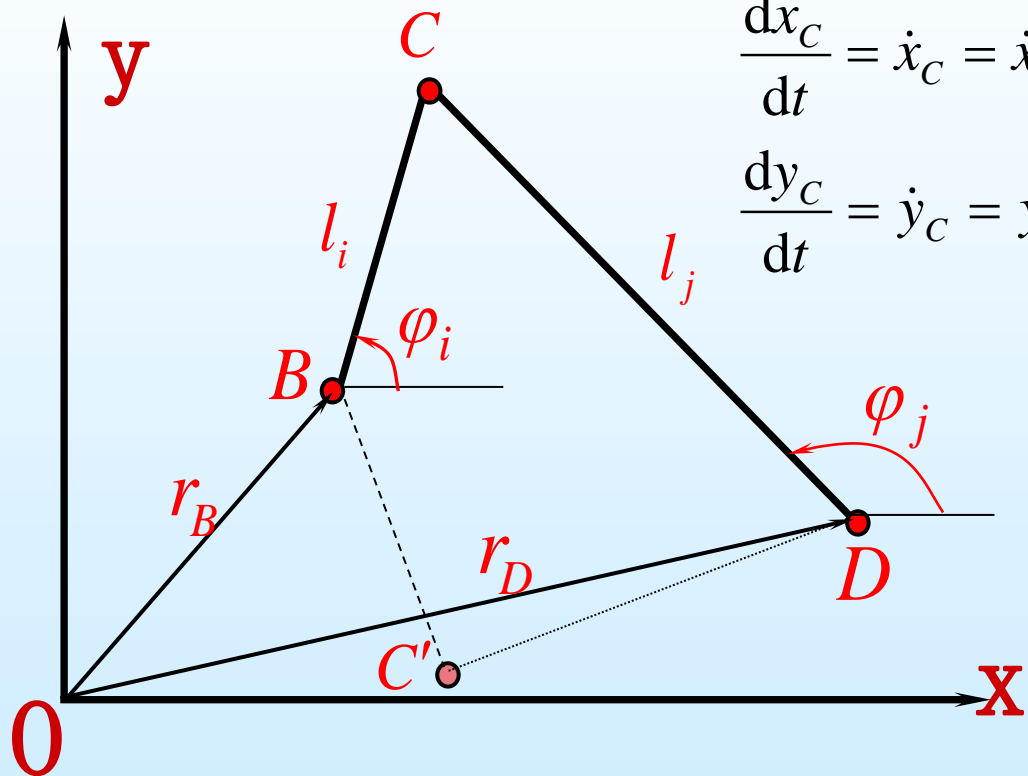
(3-5')

$$u = \tan \alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos 2\alpha = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$



速度方程：



$$\frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_C = \dot{x}_B - \dot{\phi}_i l_i \sin \varphi_i = \dot{x}_D - \dot{\phi}_j l_j \sin \varphi_j$$

$$\frac{dy_C}{dt} = \dot{y}_C = \dot{y}_B + \dot{\phi}_i l_i \cos \varphi_i = \dot{y}_D + \dot{\phi}_j l_j \cos \varphi_j$$



速度方程求解过程：

$$\frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_C = \dot{x}_B - \dot{\phi}_i l_i \sin \varphi_i = \dot{x}_D - \dot{\phi}_j l_j \sin \varphi_j$$

✓ ? ✓ ✓ ✓ ? ✓ ✓

$$\frac{dy_C}{dt} = \dot{y}_C = \dot{y}_B + \dot{\phi}_i l_i \cos \varphi_i = \dot{y}_D + \dot{\phi}_j l_j \cos \varphi_j$$

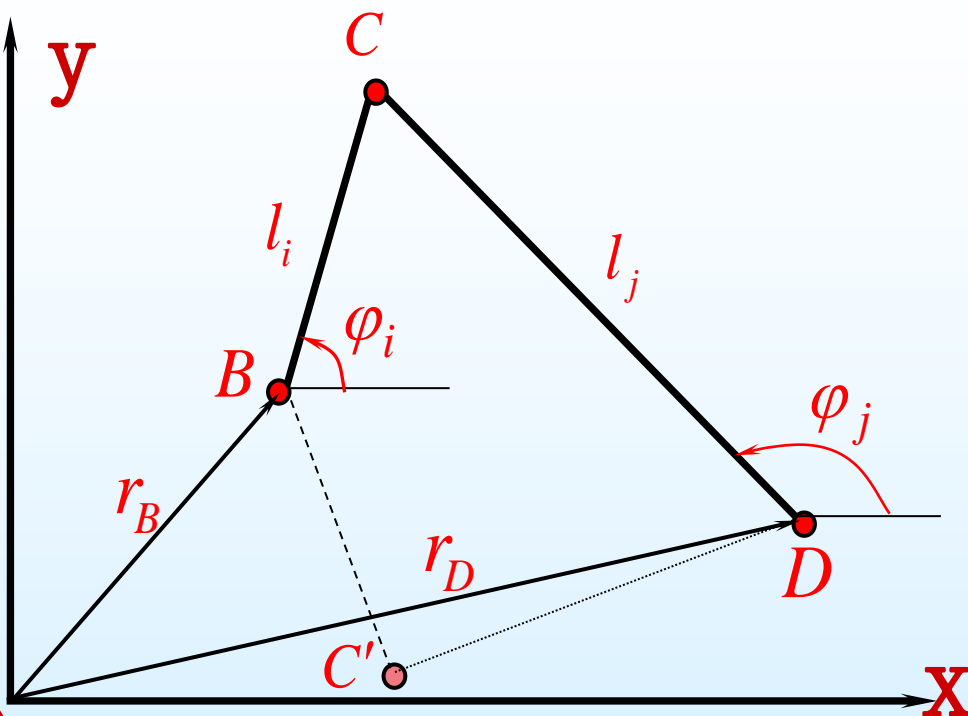
✓ ? ✓ ✓ ✓ ? ✓ ✓

首先根据该
方程求解

$\dot{\phi}_i, \dot{\phi}_j$

代入该方程
求解C点速度。

线性方程组求解



0 加速度方程:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \ddot{x}_C = \ddot{x}_B - \ddot{\phi}_i l_i \sin \phi_i - \dot{\phi}_i^2 l_i \cos \phi_i = \ddot{x}_D - \ddot{\phi}_j l_j \sin \phi_j - \dot{\phi}_j^2 l_j \cos \phi_j$$

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \ddot{y}_C = \ddot{y}_B + \ddot{\phi}_i l_i \cos \phi_i - \dot{\phi}_i^2 l_i \sin \phi_i = \ddot{y}_D + \ddot{\phi}_j l_j \cos \phi_j - \dot{\phi}_j^2 l_j \sin \phi_j$$

规格严格 功夫到家

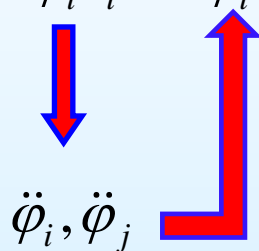


加速度方程求解过程：

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \ddot{x}_C = \ddot{x}_B - \ddot{\varphi}_i l_i \sin \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 l_i \cos \varphi_i = \ddot{x}_D - \ddot{\varphi}_j l_j \sin \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 l_j \cos \varphi_j$$

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \ddot{y}_C = \ddot{y}_B + \ddot{\varphi}_i l_i \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i^2 l_i \sin \varphi_i = \ddot{y}_D + \ddot{\varphi}_j l_j \cos \varphi_j - \dot{\varphi}_j^2 l_j \sin \varphi_j$$

首先根据该
方程求解

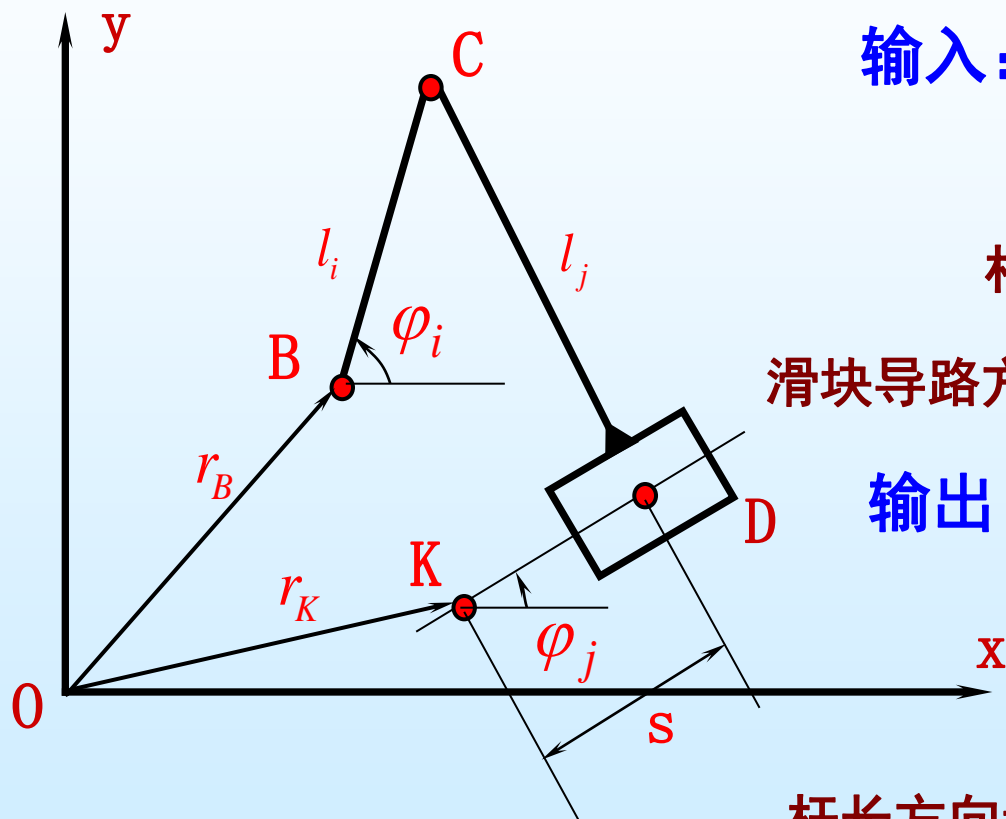


代入该方程求
解C点加速度。

线性方程组求解



(3) RRP II级杆组的运动分析 请自行分析



输入: $B(x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$
 $K(x_K, y_K, \dot{x}_K, \dot{y}_K, \ddot{x}_K, \ddot{y}_K)$

杆长: (l_i, l_j)

滑块导路方向: $(\varphi_j, \dot{\varphi}_j, \ddot{\varphi}_j)$

输出:

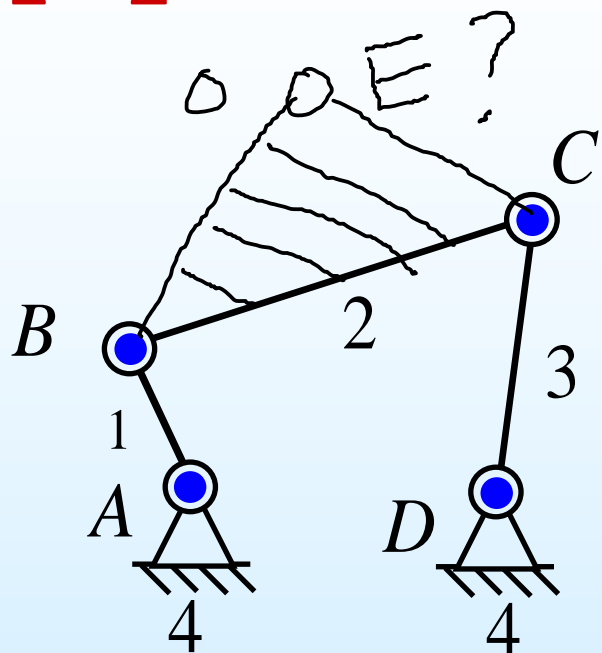
$C(x_C, y_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C)$
 $D(x_D, y_D, \dot{x}_D, \dot{y}_D, \ddot{x}_D, \ddot{y}_D)$

杆长方向参数: $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i)$

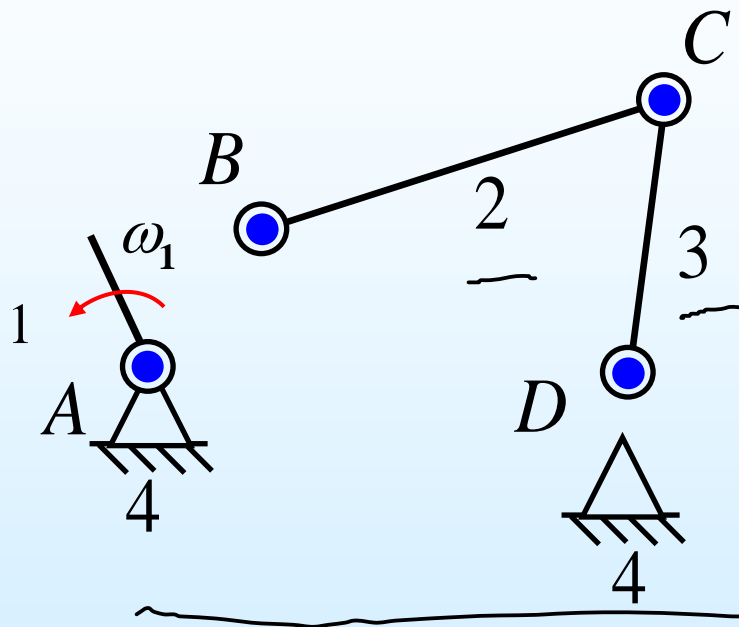
滑块位移: (s, \dot{s}, \ddot{s})



【例】利用杆组法分析铰链四杆机构运动



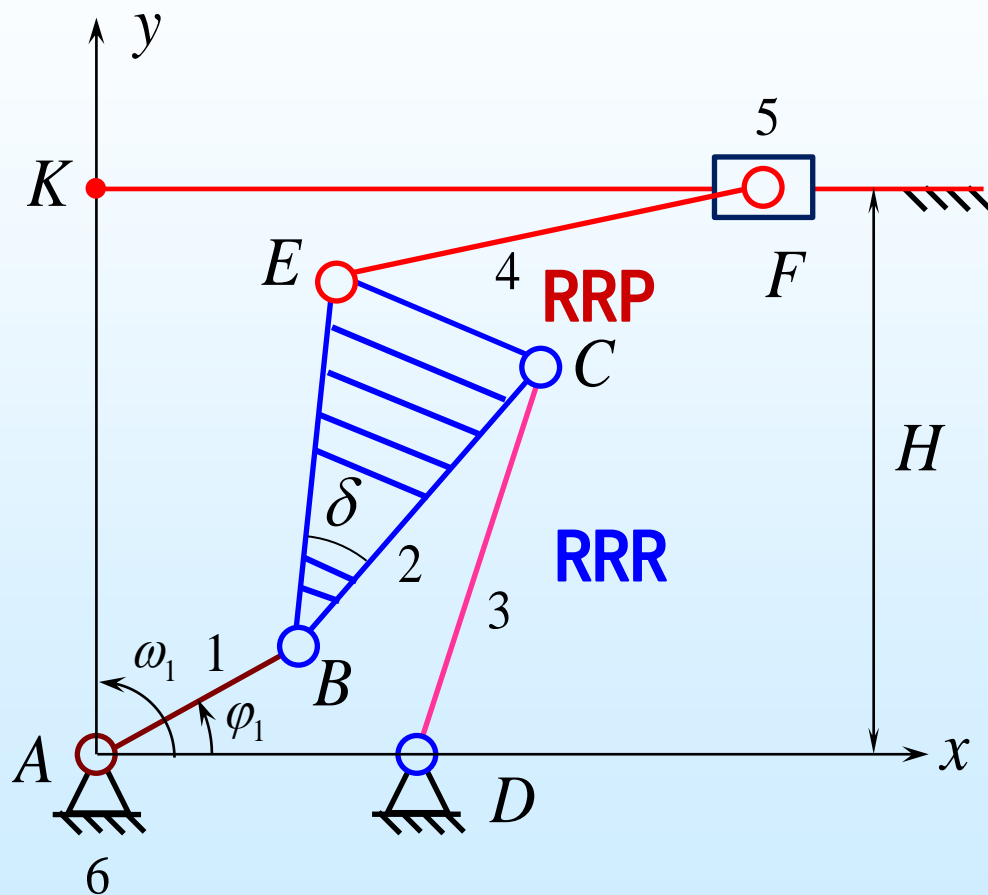
R-RRR



RR - RRR - RR



【例3-1】 利用杆组法分析六杆机构运动步骤

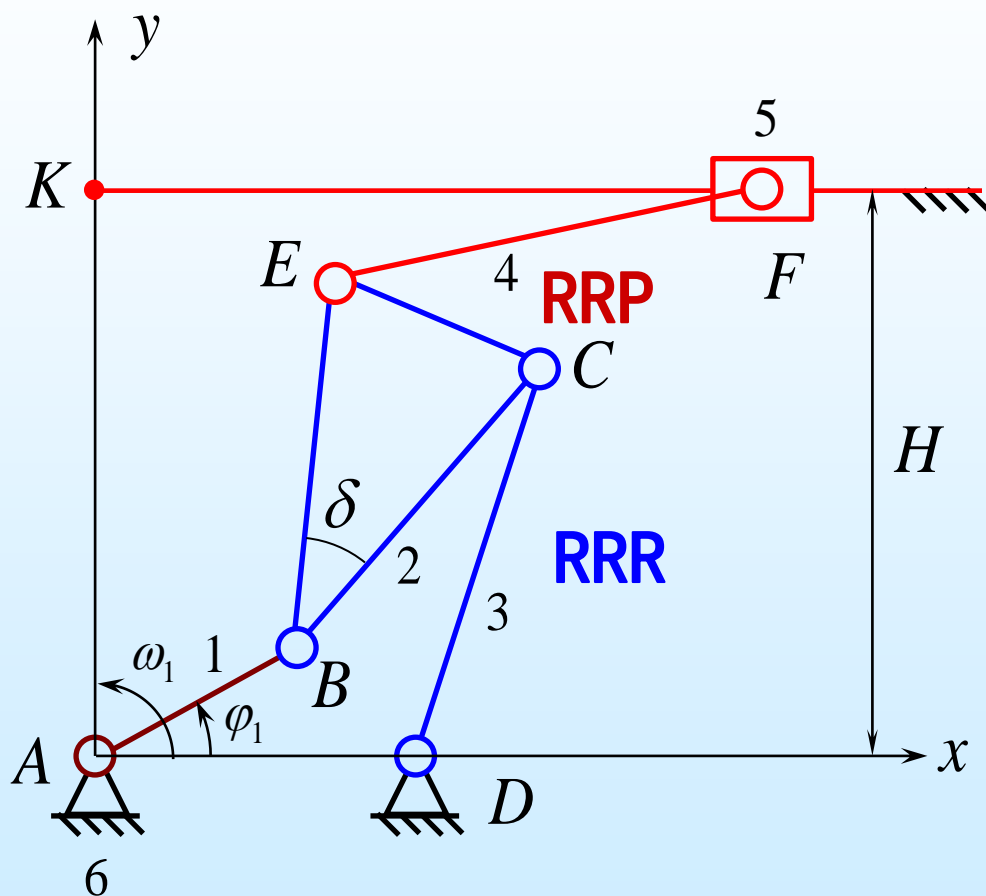


输入已知的参数：

- 1) 原动件的角速度
- 2) 各构件的尺寸
- 3) A, D固定铰链的位置参数。



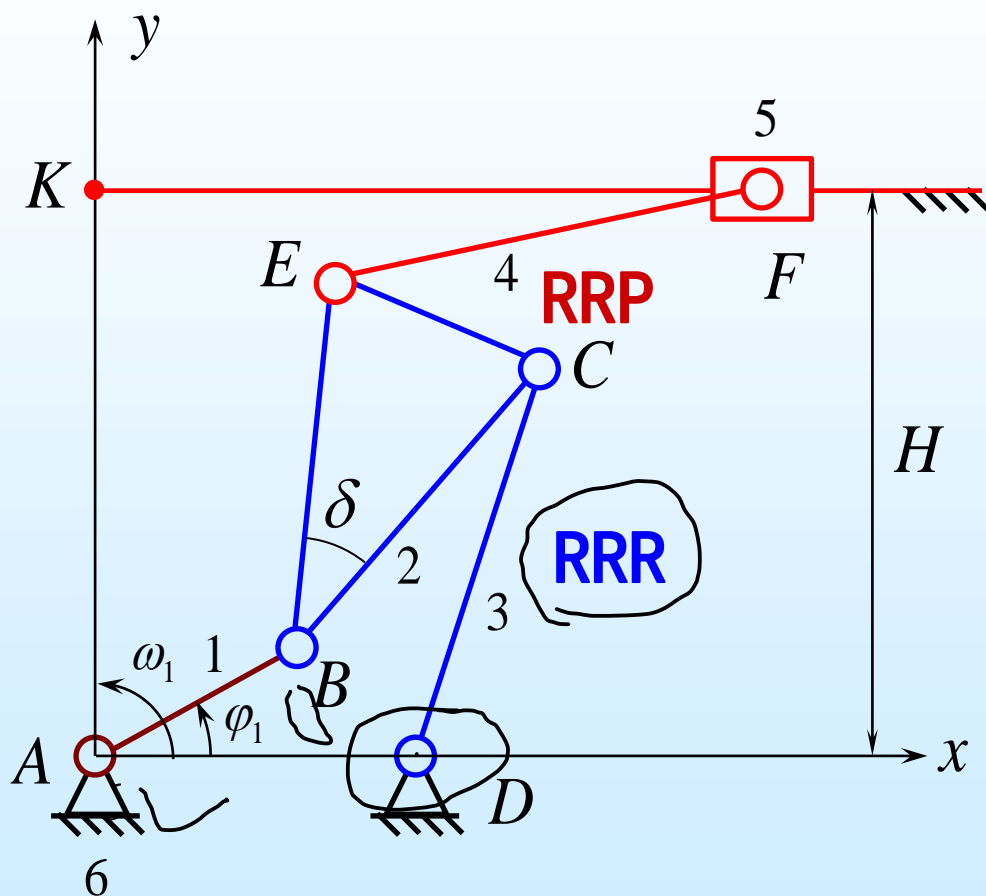
3. 杆组法运动分析的步骤



步骤1：分解基本杆组
RRPII级杆组，RRRII级
杆组，I级机构；

步骤2：建立坐标系A- x, y ；

步骤3：确定滑块5的运动
参考点K；



步骤4: 根据I级机构数学模型计算点B的运动;

输入:

$$A(x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A)$$

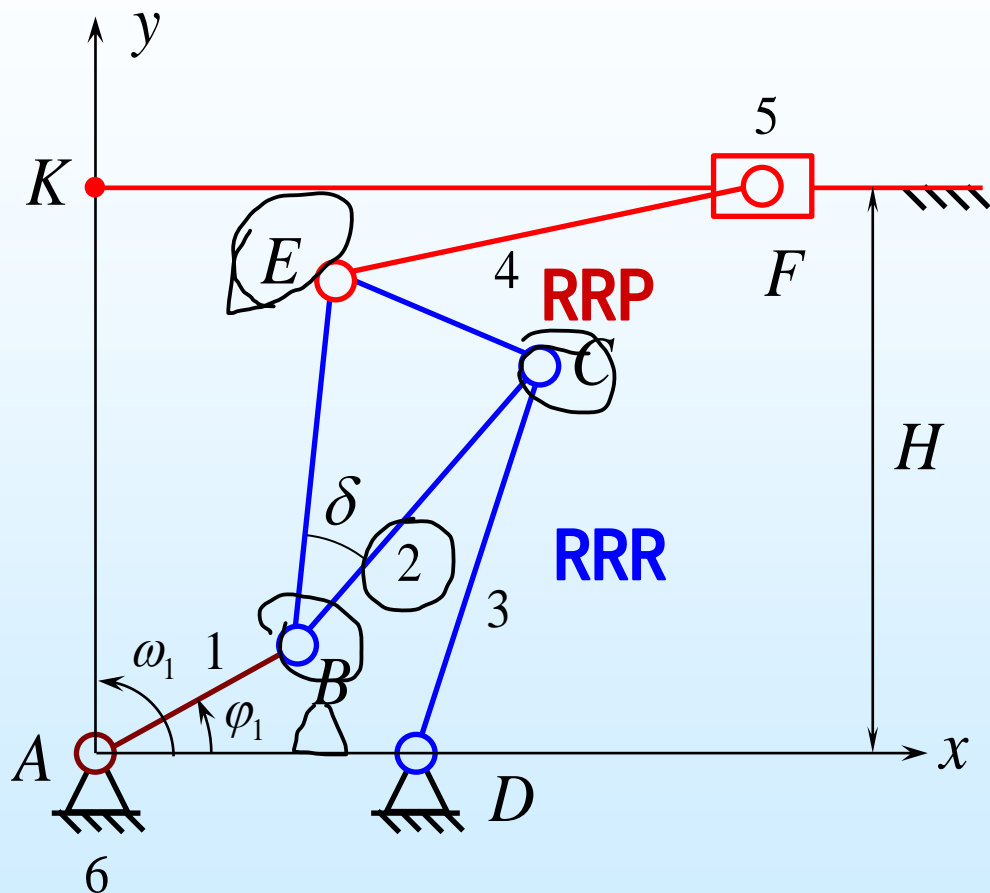
$$l_{AB}$$

$$\varphi_1, \dot{\varphi}_1$$

调用RR函数

输出:

$$\underline{B(x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B)}$$



输入：

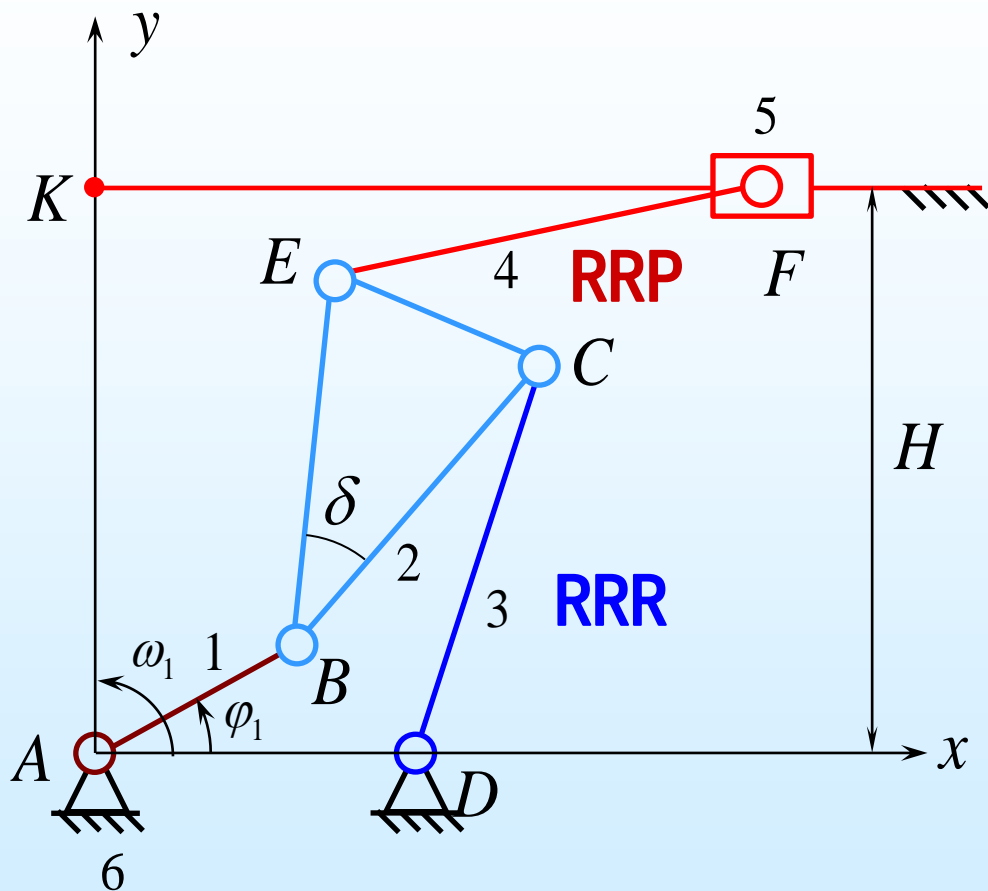
$$flag = 0$$

调用RRR函数

输出：

$$(\varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2)$$

$$(\varphi_3, \dot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_3)$$



步骤6: 根据同一构件不同点运动数学模型计算点E的运动;

输入:

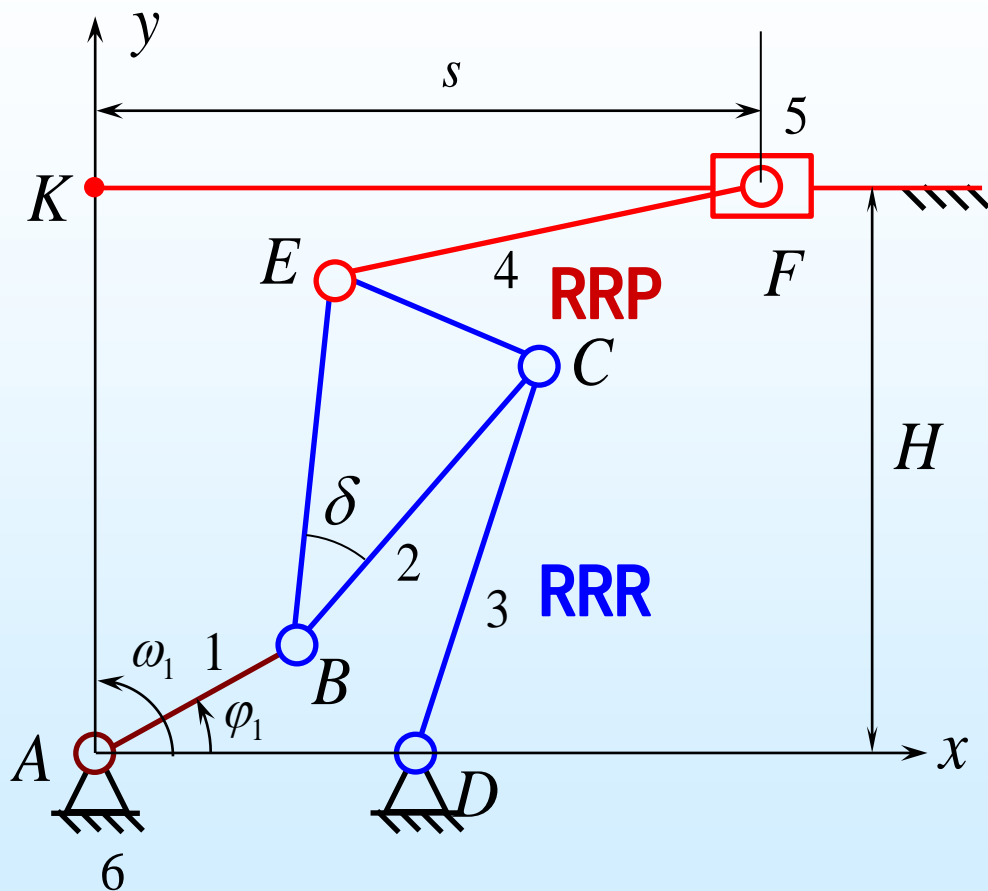
$$B(x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B)$$
$$(\varphi'_2, \varphi'_2, \ddot{\varphi}'_2)$$

$$l_{BE}$$

调用RR函数

输出:

$$E(x_E, y_E, \dot{x}_E, \dot{y}_E, \ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$$



步骤7：根据RRPII级杆组数学模型计算点F的运动；

输入：

$$E(x_E, y_E, \dot{x}_E, \dot{y}_E, \ddot{x}_E, \ddot{y}_E)$$

$$K(x_K, y_K, \dot{x}_K, \dot{y}_K, \ddot{x}_K, \ddot{y}_K)$$

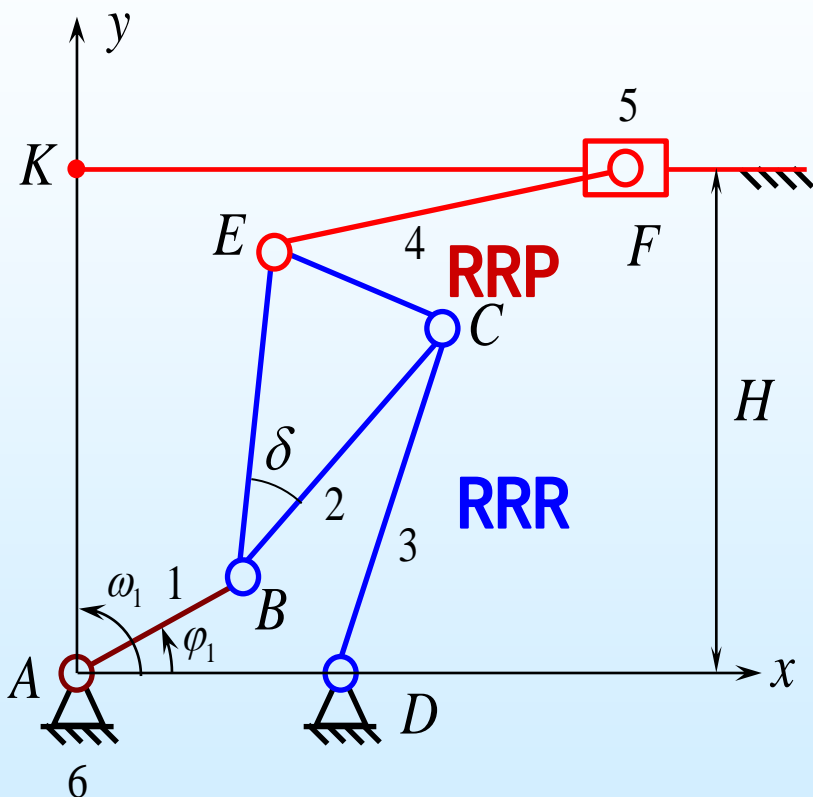
$$l_{EF}$$

调用RRP函数

输出：

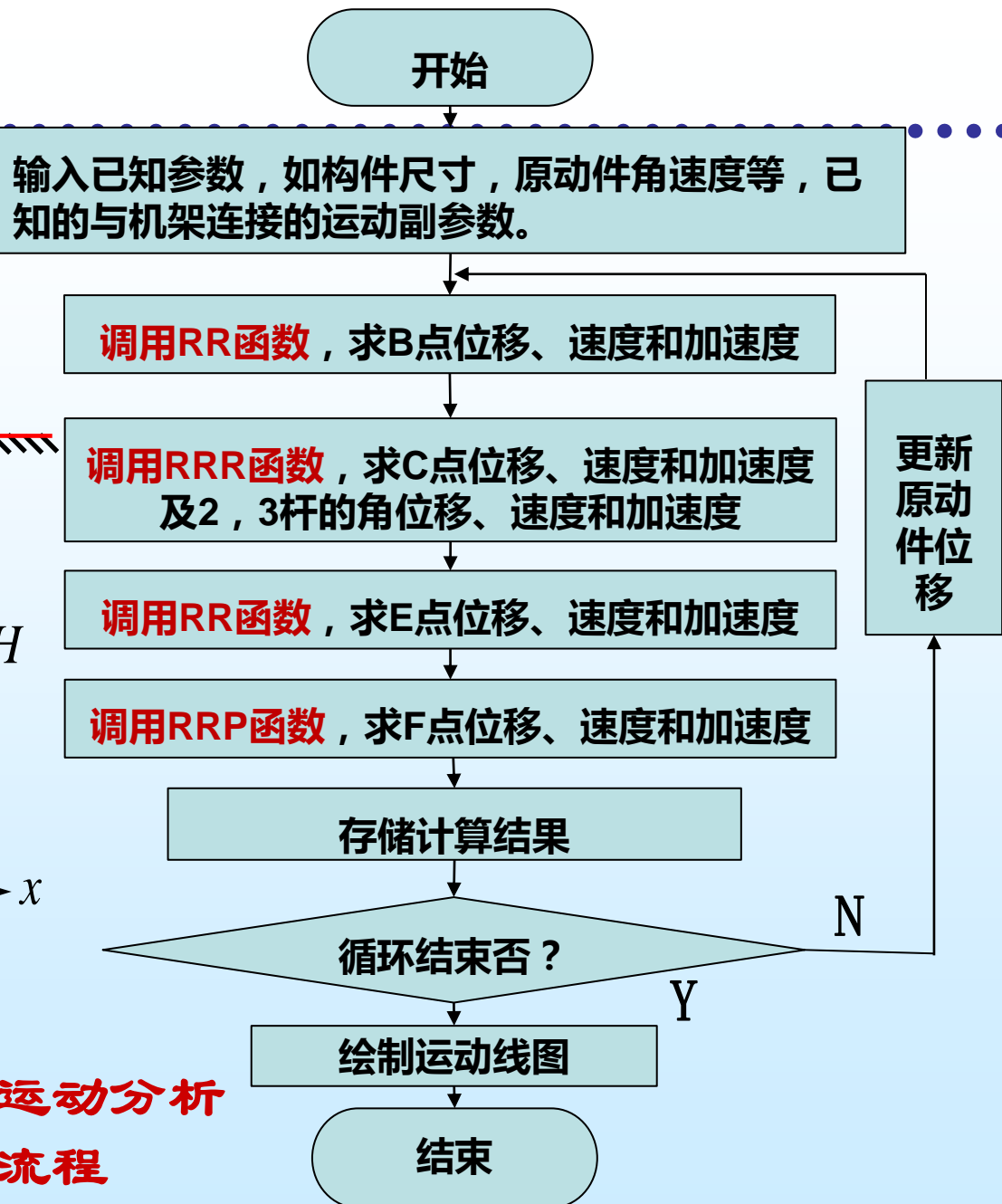
$$s, \dot{s}, \ddot{s}$$

以上步骤，以原动件角度为循环变量，在循环体内重复以上步骤。



六杆机构运动分析 程序设计流程

规格严格 功夫到家





谢谢!



规格严格 功夫到家