第十章 机械的运转及其速度波动的调节

徐鹏
哈尔滨工业大学（深圳）

本章主要内容

1. 单自由度机械系统的等效动力学模型

2. 单自由度机械系统的运动规律

3. 机械系统的周期性速度波动及其调节方法

要求：熟练掌握其原理并会应用

10-1 概 述

一、研究机械系统动力学的目的、意义

运动分析时，认为主动机的运动规律已知，且假设它做等速运动。

实际机器的运动规律由各构件的质量(mass)、转动惯量(moment of inertia)和作用于各构件上的力等多方面因素决定的。

作用在机械上的各种力都会影响机械的运转状态。为了便于研究机械的运转过程，通常将重力、惯性力以及摩擦力等忽略，而主要考虑作用在机械上的驱动力和工作阻力的变化规律。正是这两类力的共同作用，确定了机械的运转过程和运动规律。

- 机械系统动力学研究的**基本问题**

  1） 逆动力学问题

  2）正动力学问题

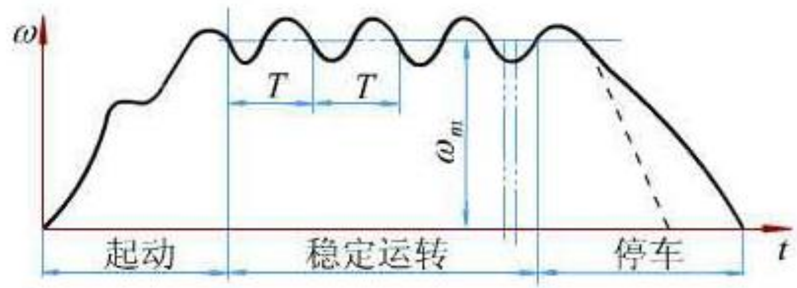
- 机械系统动力学研究**解决的问题**

  1）在力作用下，真实的运动规律

  2）研究周期速度波动及其调节原理

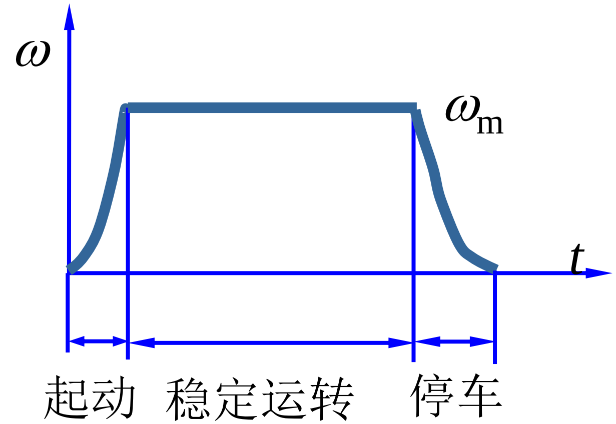
- 研究对象—单自由度机械系统
- 基本原理—动能定理：$dW=dE$　　$Ndt=dE$

哈爾濱工業大學
Harbin Institute of Technology



二、机械运转过程的三个阶段

阶段名称	运动特征	功能关系
起动	角速度ω由零逐渐上升至稳定运转时的平均角速度ω_m	$W_d > W_r$ $\Delta E > 0$
稳定运转	角速度ω在某一平均值ω_m上、下作周期性波动。在特殊条件下ω=常值。	在一个周期内 $W_d = W_r$ $\Delta E = 0$
停车	角速度ω由ω_m逐渐减小至零。	$W_d < W_r$ $\Delta E < 0$

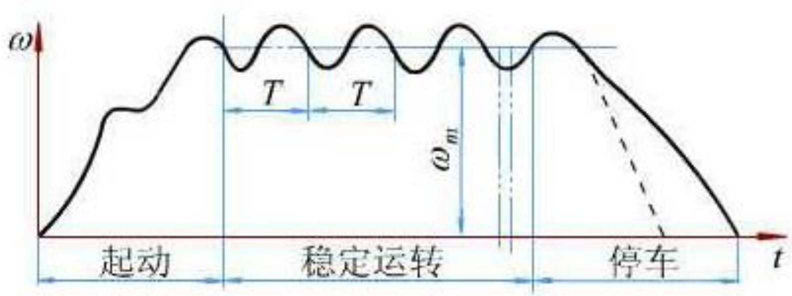


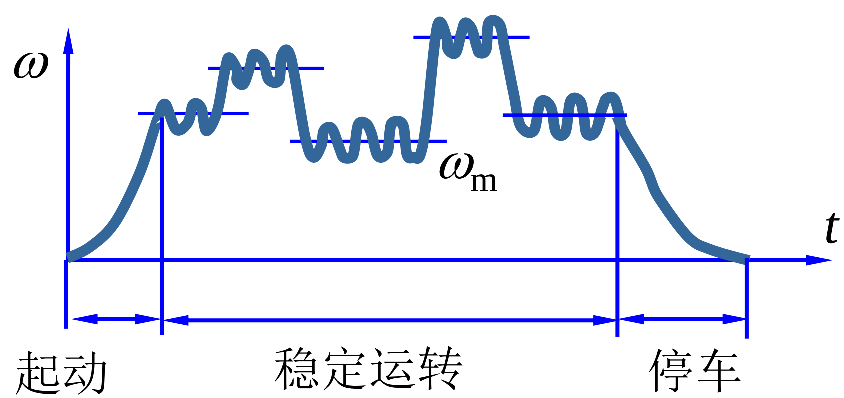
稳定运转阶段的状况有：

①匀速稳定运转：ω = 常数

②周期变速稳定运转：$\omega(t)=\omega(t+T)$ 注意:$W_d = W_r$

③非周期变速稳定运转





三、作用在机械上的外力

驱动力和工作阻力，其余外力常忽略不计。

驱动力：

常用的原动机有：电动机、液压或气压泵、内燃机等。

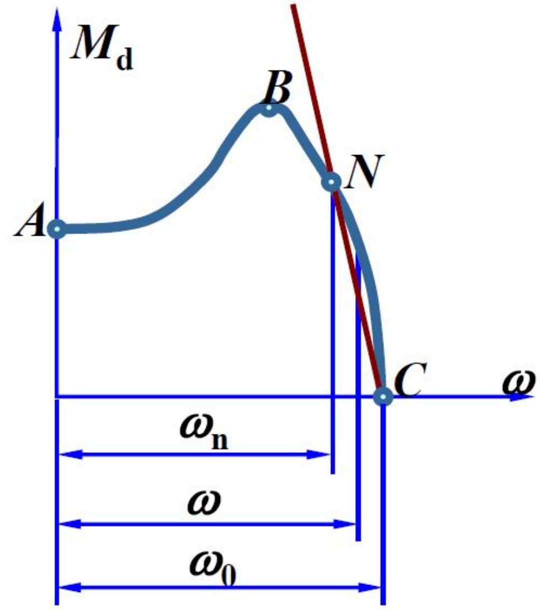
□ 原动机输出的驱动力与某些运动参数的函数关系—称为**原动机的机械特性。一般用图形曲线表示，称为特性曲线。**

常数 如重力 $F_d=C$
位移的函数 如弹簧力 $F_d=F_d(s)$
速度的函数 如电动机驱动力矩 $M_d=M_d(\omega)$

ω_0 - 同步角速度

ω_n - 额定角速度

ω - 工作角速度



$$M_d = M_n \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_n}$$

交流异步电动机的机械特性曲线

工作阻力：

常数 如起重机的生产阻力

执行机构位置的函数 如曲柄压力机、活塞式压缩机的生产阻力

执行构件速度的函数 如鼓风机、离心泵的生产阻力

时间的函数 如揉面机、球磨机的生产阻力

10-2 机械系统的等效动力学模型

已知外力求解机械真实运动？

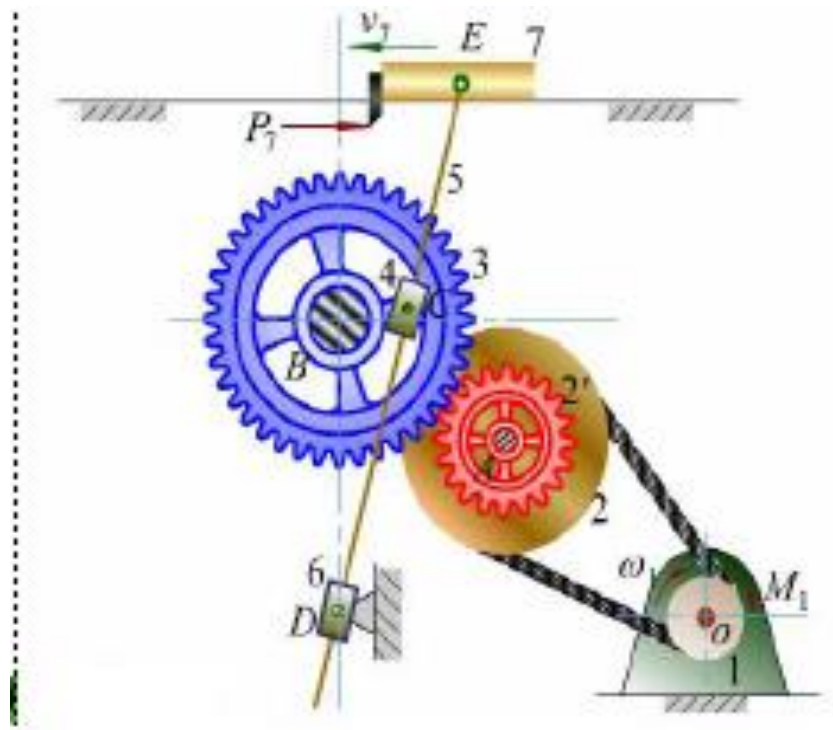
建立作用在机械上的力和力矩、构件上的质量、转动惯量和运动参数之间的函数关系式。

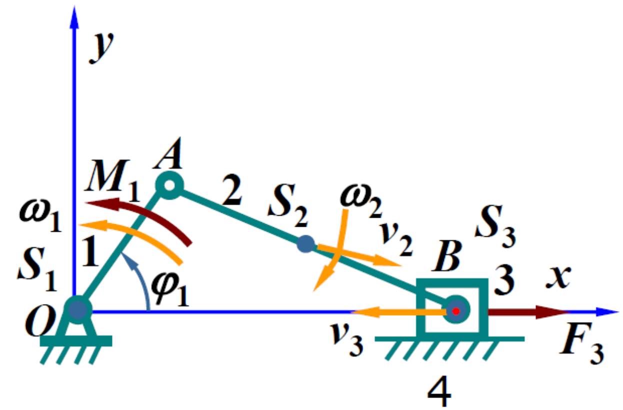
——机械运动方程(motion equation of machinery)

基本原理—动能定理：dW=dE　　Ndt=dE

研究对象的简化

对于单自由度机械系统，只要知道其中一个构件的运动规律，其余所有构件的运动规律就可随之求得。因此，可以把复杂的机械系统简化成一个构件，即等效构件，建立最简单的等效动力学模型。





已知： $J_1, m_2, J_{S2}, m_3, M_1, F_3$

求：系统的运动规律?

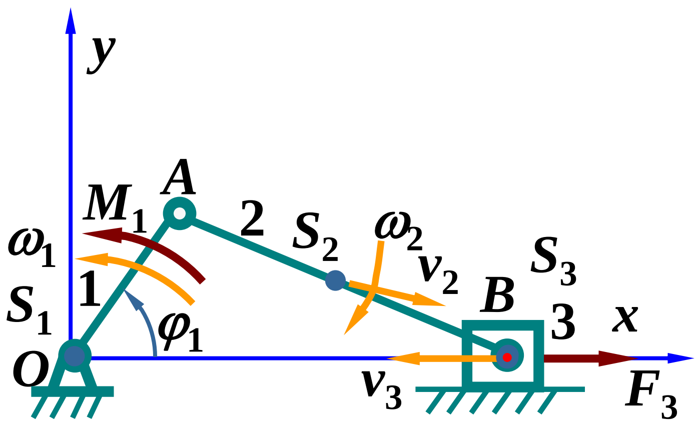
Ndt=dE

驱动力之功	工作阻力之功	1件的动能	2件的转动动能	2件的移动动能	3件的动能

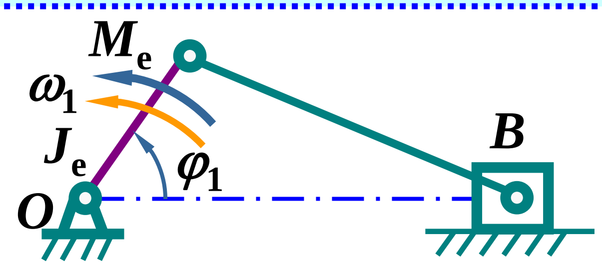
$$M_1\omega_1\,\mathrm{d}t - F_3 v_3\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{J_1\omega_1^2}{2} + \boxed{\frac{J_{S2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_{S2}^2}{2}} + \frac{m_3 v_3^2}{2}\right)$$

构件1　构件2　构件3

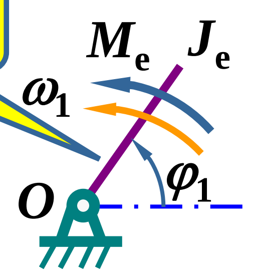
等效转动惯量与力矩



对一个单自由度机械系统的研究，可以简化为对一个具有等效转动惯量J_e，在其上作用有等效力矩M_e 的假想构件的研究。



等效构件



等效动力学模型

选1为等效构件，φ_1为独立的广义坐标，改写公式

$$\mathrm{d}\left\{\frac{\omega_1^2}{2}\Big[\underbrace{J_1+J_{S2}\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^2+m_2\Big(\frac{v_{S2}}{\omega_1}\Big)^2+m_3\Big(\frac{v_3}{\omega_1}\Big)^2}_{\text{具有转动惯量的量纲}\,—\,J_e}\Big]\right\}=\omega_1\Big[\underbrace{M_1-F_3\Big(\frac{v_3}{\omega_1}\Big)}_{\text{具有力矩的量纲}\,—\,M_e}\Big]\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\Big[J_e\frac{\omega_1^2}{2}\Big]=M_e\omega_1\,\mathrm{d}t$$

定义

J_e— 等效转动惯量

M_e— 等效力矩

以等效定轴转动构件为例：

等效原则：

等效转动惯量——等效构件具有的转动惯量，使其动能等于原机械系统所有构件动能之和。

等效力矩——作用在等效构件上的力矩，其瞬时功率等于作用在原机械系统上所有外力在同一瞬时的功率之和。

具有等效转动惯量，其上作用有等效力矩的等效转动构件称为等效动力学模型(dynamically equivalent model)。

等效转动惯量一般表达式

$$\frac{1}{2}J_e\omega^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_{Si}^2+\frac{1}{2}J_{Si}\omega_i^2$$

$$J_e=\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{v_{Si}}{\omega}\right)^2+J_{Si}\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2\right]$$

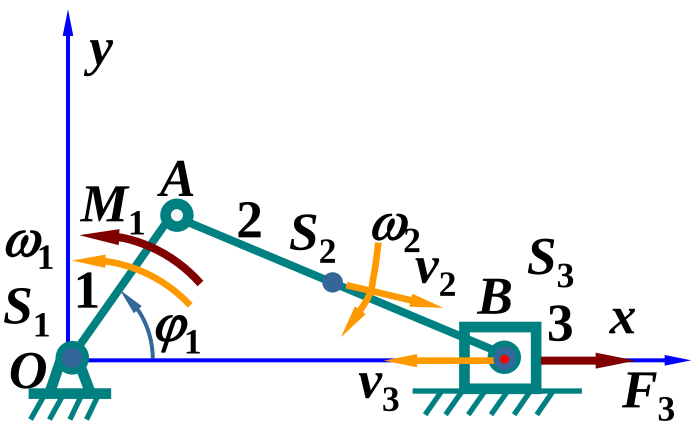
等效力矩一般表达式

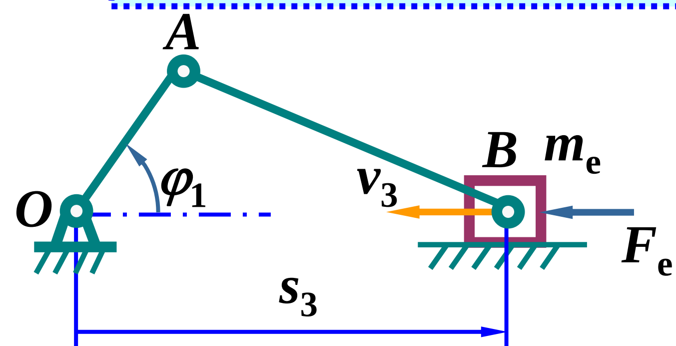
$$M_e\omega=\sum_{i=1}^{n}\left[F_i v_i\cos\alpha_i\pm M_i\omega_i\right]$$

$$M_e=\sum_{i=1}^{n}\left[F_i\cos\alpha_i\left(\frac{v_i}{\omega}\right)\pm M_i\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)\right]$$

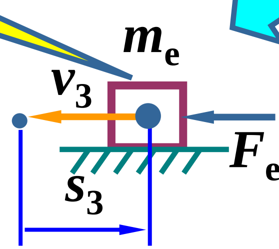
等效质量与力

对一个单自由度机械系统的研究，可以简化为对一个具有等效质量m_e，在其上作用有等效力F_e的假想构件的研究。





等效构件



等效动力学模型

选3为等效构件， 位移s_3为独立的广义坐标，改写公式

$$\mathrm{d}\{\frac{v_3^2}{2}\underbrace{[J_1(\frac{\omega_1}{v_3})^2+J_{S2}(\frac{\omega_2}{v_3})^2+m_2(\frac{v_{S2}}{v_3})^2+m_3]}\}=v_3\underbrace{[M_1(\frac{\omega_1}{v_3})-F_3]}\mathrm{d}t$$

具有质量的量纲 — m_e　　　具有力的量纲 —F_e

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}[m_e\frac{v_3^2}{2}]=F_e v_3\,\mathrm{d}t$$

定义

m_e— 等效质量　　F_e— 等效力

等效质量、等效力的一般表达式

$$m_{\mathrm{e}}=\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\left(\frac{v_{Si}}{v}\right)^2+J_{Si}\left(\frac{\omega_i}{v}\right)^2\right]$$

$$F_{\mathrm{e}}=\sum_{i=1}^{n}\left[F_i\cos\alpha_i\left(\frac{v_i}{v}\right)\pm M_i\left(\frac{\omega_i}{v}\right)\right]$$

总结：

等效构件：是系统中的一个构件；

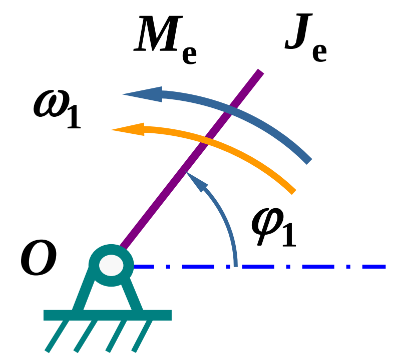
具有真实角速度(速度)；

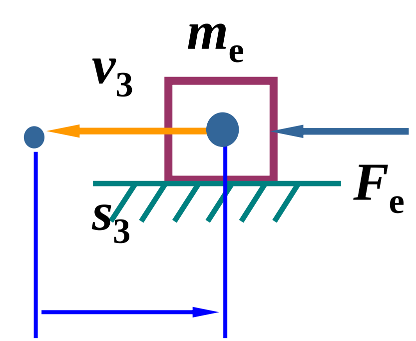
具有假想的J_e（ m_e ）；

作用有假想的$M_e(F_e)$；

具有与真实系统相同的动能和外力功。

只求单自由度系统的一个构件的真实规律。





等效量的计算：

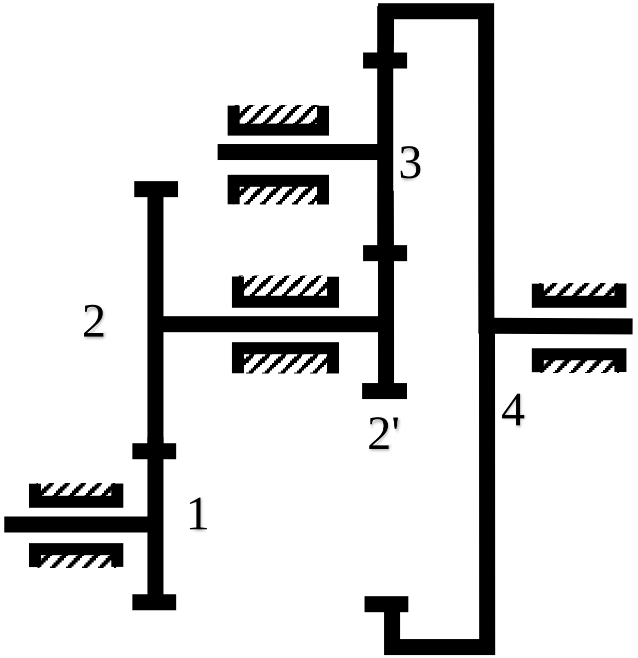
$M_e(F_e)$计算原则：功率相等；

等效力(矩)的功率=系统中所有外力(矩)的功率

$J_e(m_e)$计算原则：动能相等。

等效构件的动能＝系统动能

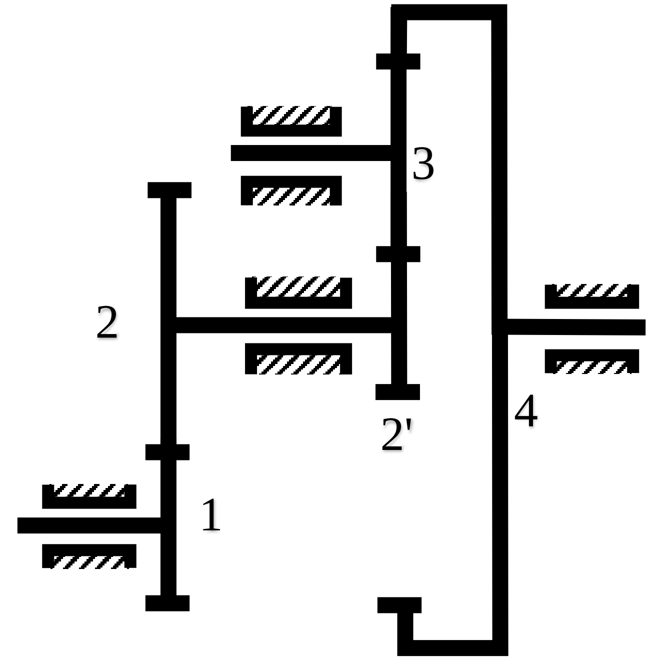
【例题1】 图示轮系各构件的质心均在其转轴上，轮1上作用有驱动力矩M_1，轮4上作用有阻力矩M_4，又知各构件的齿数和转动惯量，以构件1为等效构件，求J_e及M_e。



【解】 1.求J_e

$$\frac{1}{2}J_e\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}J_4\omega_4^2$$

$$J_e = J_1 + J_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + J_4\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2$$



$$J_e = J_1 + J_2 i_{21}{}^2 + J_3 i_{31}{}^2 + J_4 i_{41}{}^2$$

$$\boldsymbol{i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{z_1}{z_2}} \qquad \boldsymbol{i_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{z_{2'} z_1}{z_3 z_2}}$$

$$\boldsymbol{i_{41} = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{z_{2'} z_1}{z_4 z_2}}$$

$$J_e = J_1 + J_2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{Z_{2'} Z_1}{Z_3 Z_2}\right)^2 + J_4\left(\frac{Z_{2'} Z_1}{Z_4 Z_2}\right)^2$$

$$J_e = J_1 + J_2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{z_{2'} z_1}{z_3 z_2}\right)^2 + J_4\left(\frac{z_{2'} z_1}{z_4 z_2}\right)^2$$

$$J_e = J_1 + J_2\left(\frac{20}{40}\right)^2 + J_3\left(\frac{20\times 20}{40\times 40}\right)^2 + J_4\left(\frac{20\times 20}{100\times 40}\right)^2$$

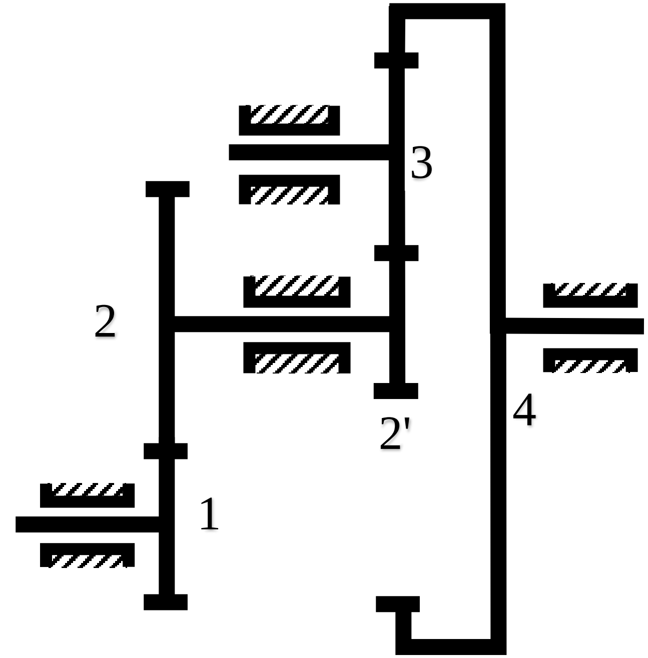
$$= J_1 + \frac{J_2}{4} + \frac{J_3}{16} + \frac{J_4}{100}$$

2.求M_e

$$M_e\omega_1 = M_1\omega_1 - M_4\omega_4$$

$$M_e = M_1 - M_4\frac{\omega_4}{\omega_1} = M_1 - M_4\frac{z_1 z_{2'}}{z_4 z_2} = M_1 - \frac{M_4}{10}$$

$$J_e = J_1 + \frac{J_2}{4} + \frac{J_3}{16} + \frac{J_4}{100}$$



讨论：

- **高速级构件的J(或m)在J_e中的比重大；**
- **低速级构件的J(或m)在J_e中的比重很小，有时可以忽略之；**
- **系统中定比传动部分的J_e为常数;**
- **系统中所有驱动力(矩)的等效值定义为等效驱动力(矩)M_{ed}；系统中所有阻力(矩)的等效值定义为等效阻力(矩) M_{er}；**

$M_e = M_{ed} - M_{er}$

【例题2】图示机床工作台传动系统，已知各齿轮的齿数分别为：z_1=20，z_2=60，$z_{2'}$=20，z_3=80。齿轮3与齿条4啮合的节圆半径为r'_3，各轮转动惯量分别为J_1、J_2、$J_{2'}$和J_3，工作台与被加工件的重量和为G，齿轮1上作用有驱动矩M_d，齿条的节线上水平作用有生产阻力F_r。求以齿轮1为等效构件时系统的等效转动惯量和等效力矩。

解

等效转动惯量

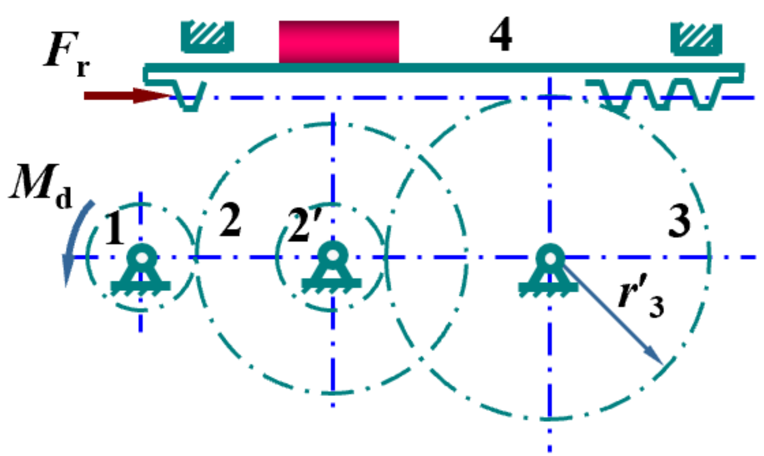
$$J_e = J_1 + (J_2 + J_{2'})\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + J_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + \frac{G}{g}\left(\frac{v_4}{\omega_1}\right)^2$$

$$= J_1 + (J_2 + J_{2'})\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + J_3\left(\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}\right)^2 + \frac{G}{g}\left(\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3} r_3'\right)^2$$

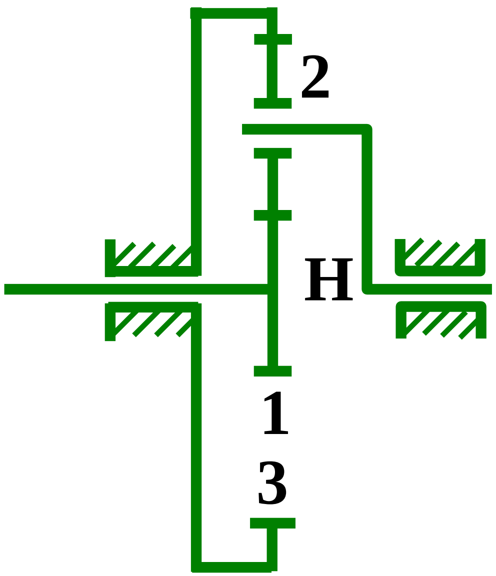
等效阻力矩

$$M_{er} = -F_r r_3'\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) = -F_r r_3'\left(\frac{z_1 z_{2'}}{z_2 z_3}\right)$$

$$M_e = M_{ed} + M_{er}$$



【习题1】



已知：$z_1 = z_2 = 30, z_3 = 90$

$m = 12$

各运动构件的质心均在相对回转轴线上，转动惯量为：

$$J_1 = J_2 = 0.02\text{kg}\cdot\text{m}^2, J_H = 0.32\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

行星轮的质量：$m_2 = 4\text{kg}$

作用在系杆上的外力矩：$M_H = 80\text{N}\cdot\text{m}^2$

求：以太阳轮1为等效构件时系统的等效转动惯量及等效力矩

$$\frac{1}{2}J_e w_1^2 = \frac{1}{2}J_1 w_1^2 + \frac{1}{2}J_2 w_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}J_H w_H^2 \quad ①$$

$$v_2 = l_H w_H$$

$$J_e = J_1 + J_2\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 + (m_2 l_H^2 + J_H)\left(\frac{w_H}{w_1}\right)^2$$

$$l_H = \frac{m(z_1+z_2)}{2} = \frac{12\times(30+30)}{2} = 360\,mm$$

$$i_{13}^H = \frac{w_1 - w_H}{w_3 - w_H} = 1 - \frac{w_1}{w_H} = -\frac{z_3}{z_1} = -3$$

$w_3 = 0$

$$\frac{w_1}{w_H} = 4$$

$$\boxed{i_{1H} = 1 - i_{1n}^H}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = ?$$

$$i_{H12} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \frac{\omega_1}{4}}{\omega_2 - \frac{\omega_1}{4}} = -1$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -2$$

$$J_e = 0.0774\,kg \cdot m^2$$

(2) $M_{er}\omega_1 = M_H \omega_H$ $\qquad M_{er} = M_H \left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)$

$M_{er} = \cancel{80 \times \frac{1}{4} = 20N \cdot m}$

$$M_e = M_1 - M_{er}$$

10-3 在已知力作用下机械的真实运动

上述建立了单自由度机械系统的等效动力学模型

已知：

- **等效力或等效力矩**
- **等效质量或转动惯量**

未知：

- **机械的真实运动**

机械系统的真实运动：求解等效构件的运动规律即可。

一、 等效构件（转动）运动方程式的建立

1、能量形式的运动方程

dW=dE

$$d\left(\frac{1}{2}J\omega^{2}\right)=(M_{d}-M_{r})d\varphi$$

——能量微分形式

$$\frac{1}{2}J_{1}\omega_{1}^{2}-\frac{1}{2}J_{0}\omega_{0}^{2}=\int_{\varphi_{0}}^{\varphi_{1}}(M_{d}-M_{r})d\varphi$$

——能量积分形式

$$J_{e}=\sum_{i=1}^{n}\left[m_{i}\left(\frac{v_{Si}}{\omega}\right)^{2}+J_{Si}\left(\frac{\omega_{i}}{\omega}\right)^{2}\right]$$

2、力矩（力）形式的运动方程

$$\frac{d(\frac{1}{2}J\omega^2)}{d\varphi} = M_d - M_r$$

$$J\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\boxed{\frac{dJ}{d\varphi}} = M_d - M_r \qquad \text{——力矩形式}$$

2、力矩（力）形式的运动方程

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\left(F_d-F_r\right)ds$$

$$m\frac{dv}{dt}+\frac{v^2}{2}\boxed{\frac{dm}{ds}}=F_d-F_r$$

——力形式

二、 机械的真实运动规律

$$J\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega^2}{2}\frac{dJ}{d\varphi}=M_d-M_r$$

- 等效转动惯量一般为等效构件**位置函数**
- 等效力/力矩可能为**位置**、**速度**和**时间**的参数。

（关注点：位置？ 速度？ 还是加速度？）

$$J\ddot{\varphi}+\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\frac{dJ(\varphi)}{d\varphi}=M_d(\varphi,\dot{\varphi},t)-M_r(\varphi,\dot{\varphi},t)$$

分情况讨论

1、等效力矩、等效转动惯量为构件位置函数

$$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}J_0\omega_0^2+\int_{\varphi_0}^{\varphi}[M_d(\varphi)-M_r(\varphi)]d\varphi$$

$$\omega=\sqrt{\frac{J_0}{J}\omega_0^2+\frac{2}{J}\int_{\varphi_0}^{\varphi}[M_d(\varphi)-M_r(\varphi)]d\varphi} \Rightarrow \omega=f_\omega(\varphi)$$

$$\omega(\varphi)=\frac{d\varphi}{dt}\Rightarrow dt=\frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

积分 $$t=t_0+\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \Rightarrow t=f_t(\varphi)$$

$$\boxed{\omega=f_{\omega t}(t)}$$

哈爾濱工業大學
Harbin Institute of Technology

2、等效转动惯量为常数，等效力矩为构件速度函数

$$J\frac{d\omega}{dt}=M_d(\omega)-M_r(\omega)$$

$$dt=\frac{J}{M_d(\omega)-M_r(\omega)}d\omega$$

$$t=t_0+J\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{M_d(\omega)-M_r(\omega)}$$

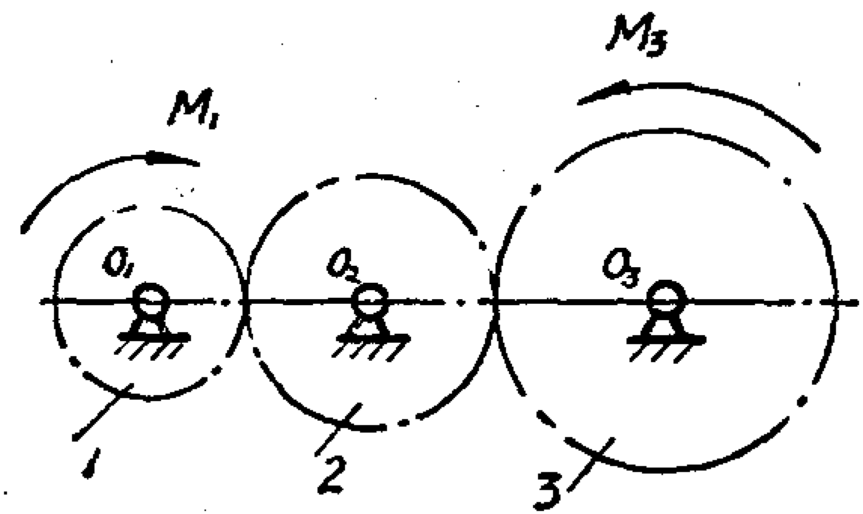
$$t=f(\omega)$$

$$\downarrow$$

$$\omega=f_{\omega t}(t)$$

【例题3a】图示的轮系中，已知加于轮1和轮3上的力矩

$$M_1 = 80\mathrm{N \cdot m} \quad M_3 = 100\mathrm{N \cdot m}$$



各轮的转动惯量 $J_1 = 0.1\mathbf{kg \cdot m^2}$

$$J_2 = 0.225\mathbf{kg \cdot m^2} \quad J_3 = 0.4\mathbf{kg \cdot m^2}$$

各轮的齿数

$$z_1 = 20 \quad z_2 = 30 \quad z_3 = 40$$

在开始的瞬时，齿轮1的角速度等于零。
求在运动开始后经过0.5秒时，轮1的角加速度 α_1 和角速度 ω_1 。

解：取轮1为等效构件，则其等效传动惯量为

$$J_e = J_1 + J_2(\frac{\omega_2}{\omega_1})^2 + J_3(\frac{\omega_3}{\omega_1})^2 = J_1 + J_2(\frac{z_1}{z_2})^2 + J_3(\frac{z_1}{z_3})^2$$

$$= 0.1 + 0.225\left(\frac{20}{30}\right)^2 + 0.4\left(\frac{20}{40}\right)^2 = 0.3\text{kg} \bullet \text{m}^2$$

而其等效力矩为

$$M_e = M_1 - M_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) = M_1 - M_3\left(\frac{z_1}{z_3}\right) = 80 - 100\left(\frac{20}{40}\right) = 30\text{N} \bullet \text{m}$$

步骤一：等效动力学模型的建立

由力矩形式的机械运动方程式

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_d(\omega) - M_r(\omega)$$

$$t = t_0 + J_e\int_{\omega_0}^{\omega_1}\frac{1}{M_e}d\omega$$

$$= t_0 + \frac{J_e}{M_e}(\omega_1 - \omega_0)$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{M_e}{J_e}(t - t_0)$$

$$\omega_1 = \frac{M_e}{J_e}t = \frac{30}{0.3}\times 0.5 = 50\text{rad/s}$$

步骤二：真实运动规律的求解

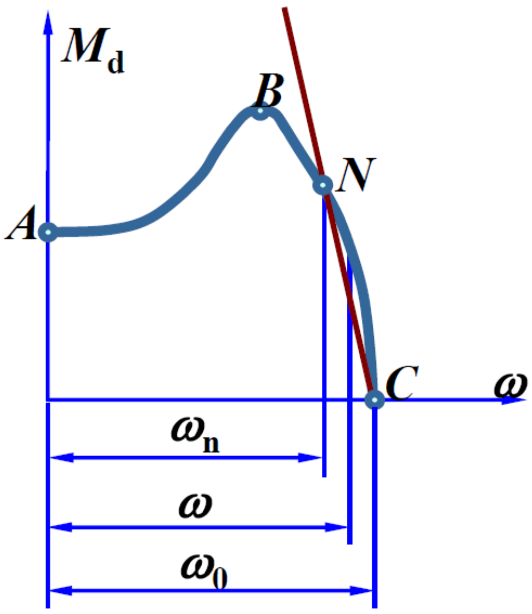
【例题3b】 教材例题10-2。

$$M_d(\omega) = 10000 - 100\omega\,(\mathrm{N \cdot m})$$

$$M_r = 8000\,\mathrm{N \cdot m}$$

$$J = 8\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_d(\omega) - M_r(\omega)$$



$$M_d = M_n \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_n}$$

10-4 机械速度波动及其调节方法

机械系统的速度波动

$$\omega = f\left(J_e, M_e, t\right)$$

1）构件质量不变，**等效转动惯量也按一定的规律周期性的重复变化**。
2）**等效力矩**的变化也具有周期性，系统的等效构件将作周期性的变速运动。否则，系统的主轴将作无规律的变速运动。

机械运转速度产生波动的原因　作用在机械上的外力或外力矩的变化。

机械速度波动类型

- **周期性速度波动(periodic speed fluctuation)**
- **非周期性速度波动(aperiodic speed fluctuation)**

10-4 机械速度波动及其调节方法

有害影响

主轴速度过大的波动变化会影响机器的正常工作，增大运动副中的**动载荷**，加剧运动副的**磨损**，降低机器的**工作精度和传动效率**，缩短机器的**使用寿命**。周期性的速度波动还会激发机器**振动**，产生**噪声**，甚至引起机器**共振**，造成意外事故。

造成系统主轴周期性波动的重要原因

等效构件的等效转动惯量(等效质量)和作用在等效构件上的等效力矩(等效力)的周期性变化。

➢ 周期性速度波动及其调节

作用在机械上的驱动力矩M_d (φ)和阻力矩M_r (φ)往往是原动机转角的周期性函数。

在一个运动循环内，驱动力矩和阻力矩所作的功分别为：

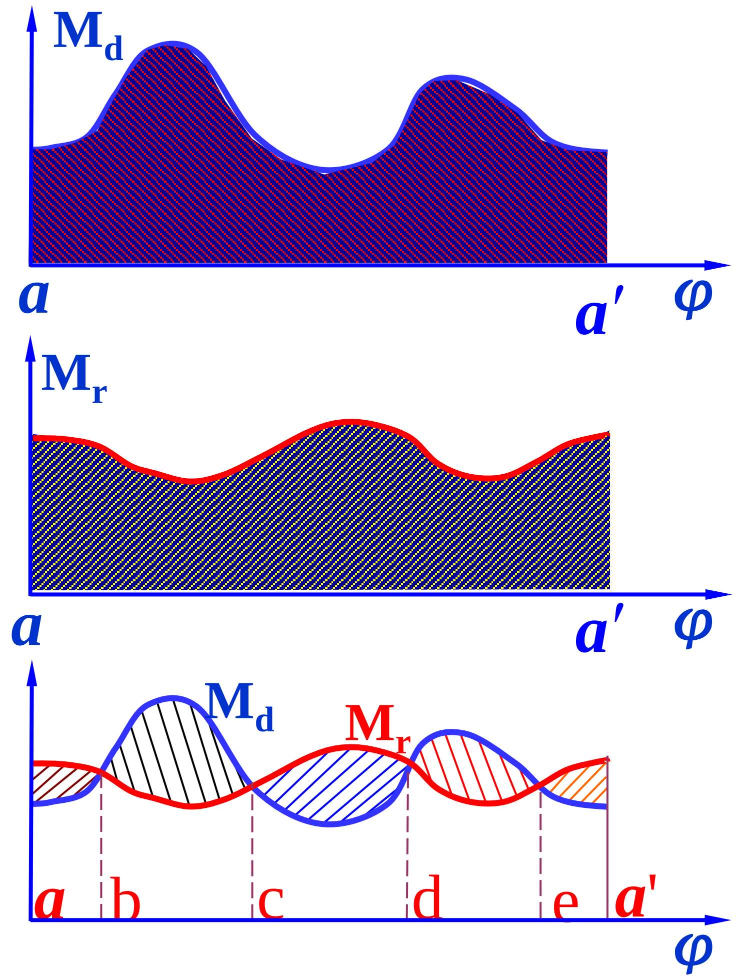
$$W_d(\varphi) = \int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} M_d(\varphi) d\varphi$$

$$W_r(\varphi) = \int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} M_r(\varphi) d\varphi$$

动能增量

$$\Delta E = W_d(\varphi) - W_r(\varphi)$$

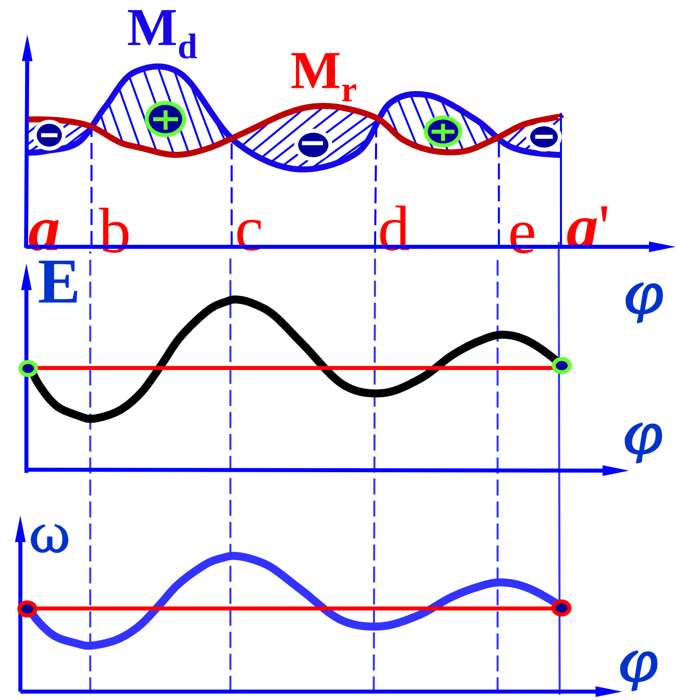
$$= \int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}} [M_d(\varphi) - M_r(\varphi)] d\varphi = \frac{1}{2} J_{a'} \omega^2_{a'} - \frac{1}{2} J_a \omega_a^2$$



若在一个循环内：$W_d=W_r \quad \triangle E=0$

即：$\Delta E=\int_{\varphi_a}^{\varphi_{a'}}(M_d-M_r)d\varphi$

$$=\frac{1}{2}J_{a'}\omega_{a'}^2-\frac{1}{2}J_a\omega_a^2=0$$



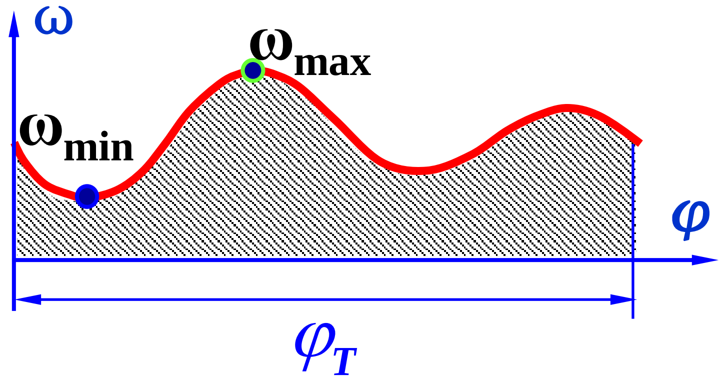
这说明经过一个运动循环之后，机械又回复到初始状态，其运转速度呈现周期性波动。

力矩所作功及动能变化:

区 间	a-b	b-c	c-d	d-e	e-a’
外力矩所作功	$M_d<M_r$ 亏功 -	$M_d>M_r$ 盈功 +	$M_d<M_r$ 亏功 -	$M_d>M_r$ 盈功 +	$M_d<M_r$ 亏功 -
主轴的ω	↓	↑	↓	↑	↓
动能E	↓	↑	↓	↑	↓

机械运转的平均速度和不均匀系数

已知主轴角速度：$\omega=\omega(\varphi)$



平均角速度：$\omega_m = \dfrac{1}{\varphi_T}\int_0^{\varphi_T} \omega \mathrm{d}\varphi$

工程上常采用算术平均值近似计算为：

$$\omega_m \approx (\omega_{max} + \omega_{min})/2$$

$\omega_{max}-\omega_{min}$ 表示了机器主轴速度波动范围的大小，称为**绝对不均匀度**。

定义： $\delta = (\omega_{max} - \omega_{min}) / \omega_m$ 为机器运转**速度不均匀系数，**它表示了机器速度波动的程度。

由$\omega_m = (\omega_{max} + \omega_{min})/2$ 以及上式可得：

$$\omega_{max} = \omega_m(1+\delta/2)$$

$$\omega_{min} = \omega_m(1-\delta/2)$$

$$\omega^2_{max} - \omega^2_{min} = 2\delta\omega^2_m$$

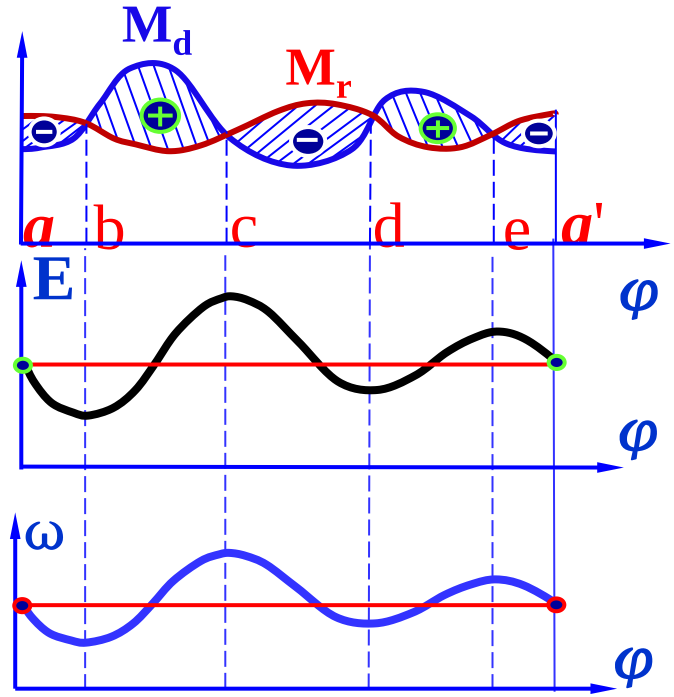
可知，当ω_m一定时，δ愈小，则差值$\omega_{max} - \omega_{min}$也愈小，说明机器的运转愈平稳

对于不同的机器，因工作性质不同而取不同的值[δ]

设计时要求： $\delta \leqslant [\delta]$

机械运转速度不均匀系数δ的取值范围,见教材P277，表10-1

如何抑制速度的波动？



在位置b处，动能和角速度为：

E_{min}、ω_{min}

而在位置c处为：E_{max}、ω_{max}

在b-c区间处盈亏功和动能增量达到最大值：

$$\Delta W_{\max} = \Delta E = E_{\max} - E_{\min}$$
$$= J\left(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2\right)/2$$
$$= J\omega_m^2\delta$$

$$\delta = \frac{\Delta W_{\max}}{J\omega_m^2}$$

对于具体机械系统, $\Delta W_{\max}$, ω_m是确定的，若加装一转动惯量为J_F的飞轮，可使速度不均匀系数降低：

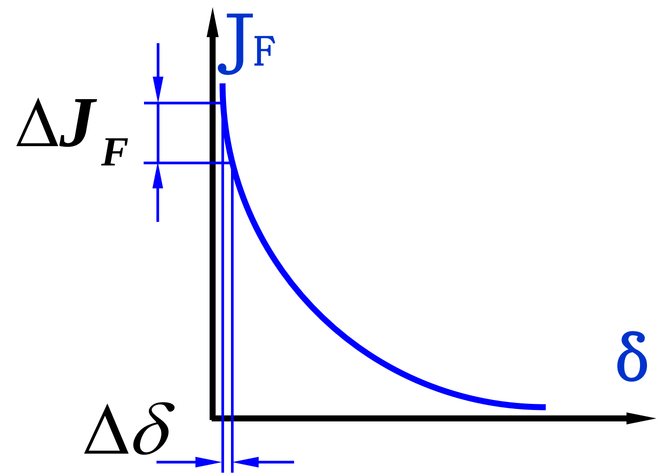
$$\boxed{\delta = \frac{\Delta W_{\max}}{(J + J_F)\omega_m^2}}$$

要使 $\boxed{\delta \le [\delta]}$ 必须有：

$$\boxed{J_F \ge \frac{\Delta W_{\max}}{\omega_m^2[\delta]} - J}$$

【实例】

$$J_F = \frac{\Delta W_{max}}{\omega_m^2[\delta]}$$



分析：

1）当δ很小时， δ↓→ J↑↑

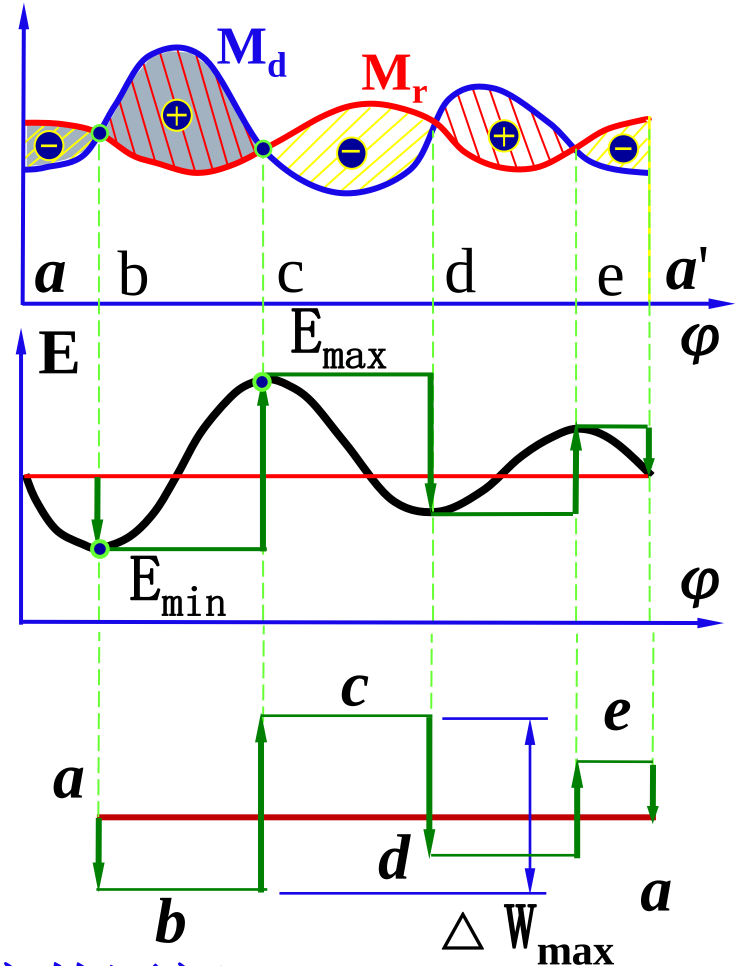
过分追求机械运转速度的平稳性，将使飞轮过于笨重。

2) 由于$J_F \neq \infty$，而$\triangle W_{max}$和ω_m又为有限值，故δ不可能为“0”，即使安装飞轮，机械总是有波动。

3）J_F与ω_m的平方成反比，即平均转速越高，所需飞轮的转动惯量越小。

➢ ΔW_{max} 的确定方法

$$\boxed{\Delta W_{max} = E_{max} - E_{min}}$$



E_{max}，E_{min}出现的位置：在曲线 M_d与 M_r的交点处。

$E(\varphi)$曲线上从一个交点跃变到另一个交点的高度，正好等于两点之间的阴影面积(盈亏功)。

作图法（能量指示图）求$\triangle W_{max}$：

1）任意绘制一水平线，并分割成对应的区间；

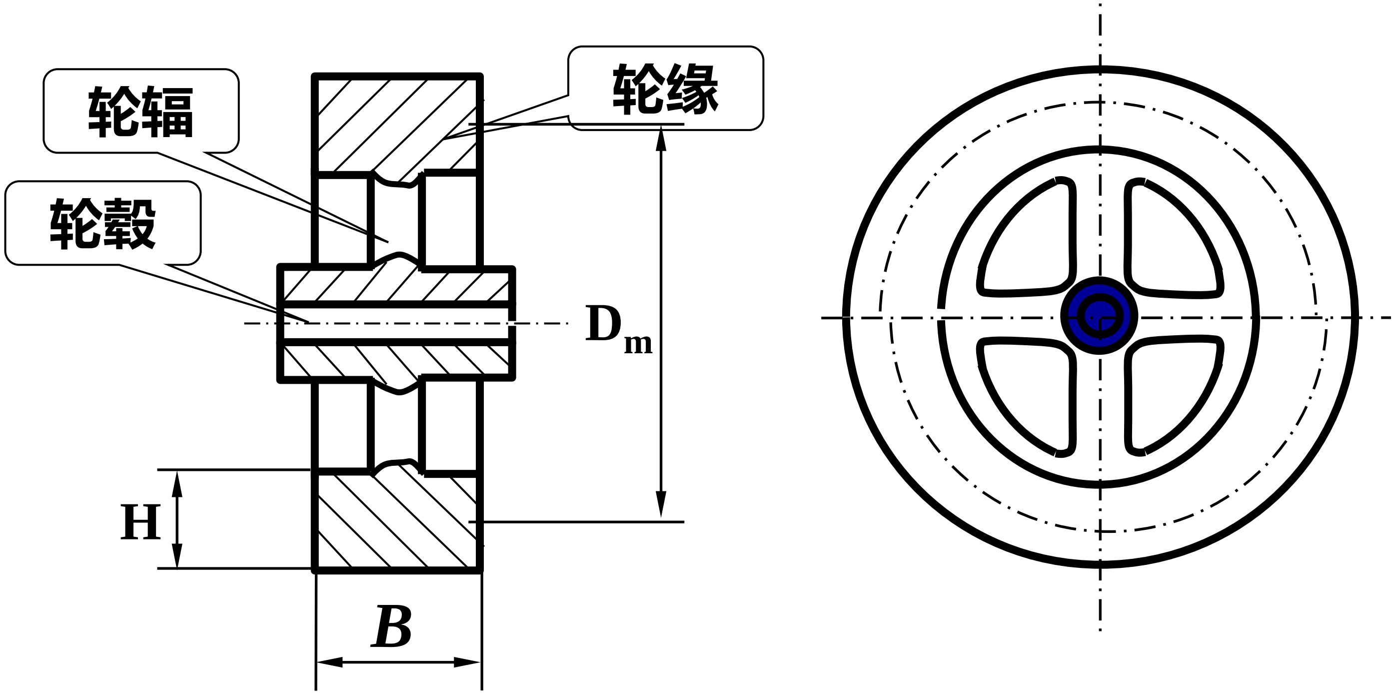
2）从左至右依次，向下画箭头表示亏功，向上画箭头表示盈功，箭头长度与阴影面积相等。（由于循环始末的动能相等，故能量指示图为一个封闭的台阶形折线。）

3）最大动能增量及最大盈亏功等于指示图中最低点到最高点之间的高度值。

飞轮主要尺寸的确定（设计）

辐板式飞轮：由轮毂、轮辐和轮缘三部分组成。

主要尺寸：宽度B、轮缘厚度H、平均值径D_m



其轮毂和轮辐的转动惯量较小，可忽略不计。其转动惯量为：

$$J = m\left[\frac{D_m}{2}\right]^2 = \frac{mD_m^2}{4}$$

按照机器的结构和空间位置选定（设计值）D_m之后，可得飞轮质量：

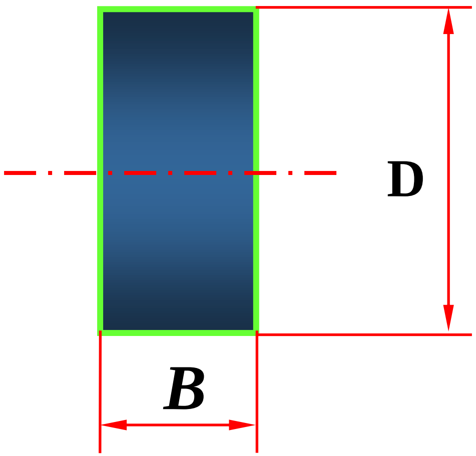
$$m = V\rho = \pi D_m H B \rho$$

ρ为材料密度

选定飞轮的材料和比值（设计值） H/B之后，可得飞轮截面尺寸。

盘形飞轮：

$$J = \frac{1}{2} m \left[\frac{D}{2} \right]^2 = \frac{mD^2}{8}$$



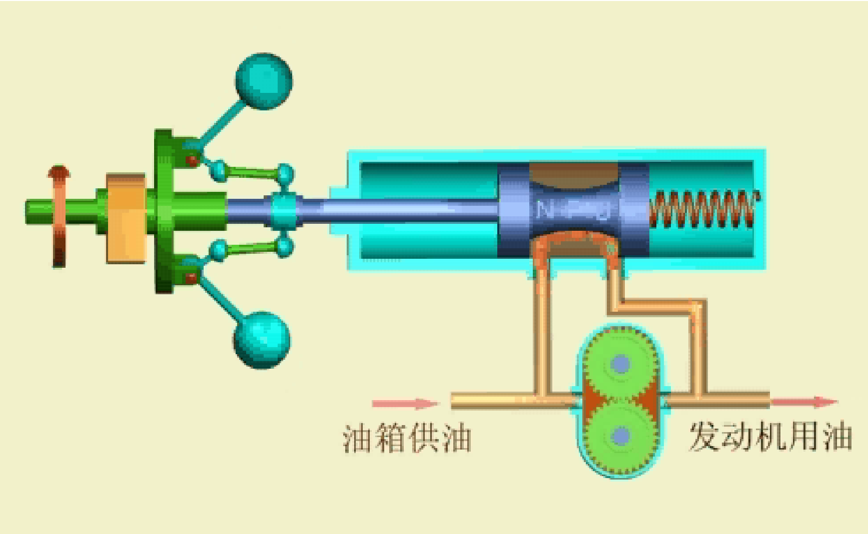
选定圆盘直径D，可得飞轮的质量：

$$m = V\rho = \frac{\pi D^2 B \rho}{4}$$

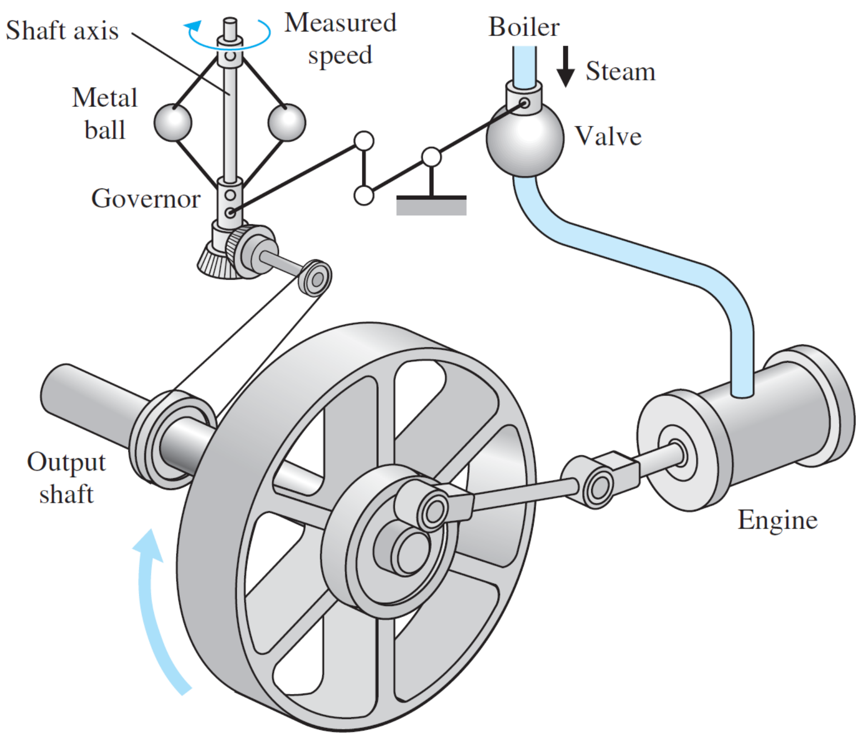
选定飞轮的材料之后，可得飞轮的宽度B。

非周期性速度波动调节的方法

需采用专门的调速器才能调节



离心式调速器的工作原理



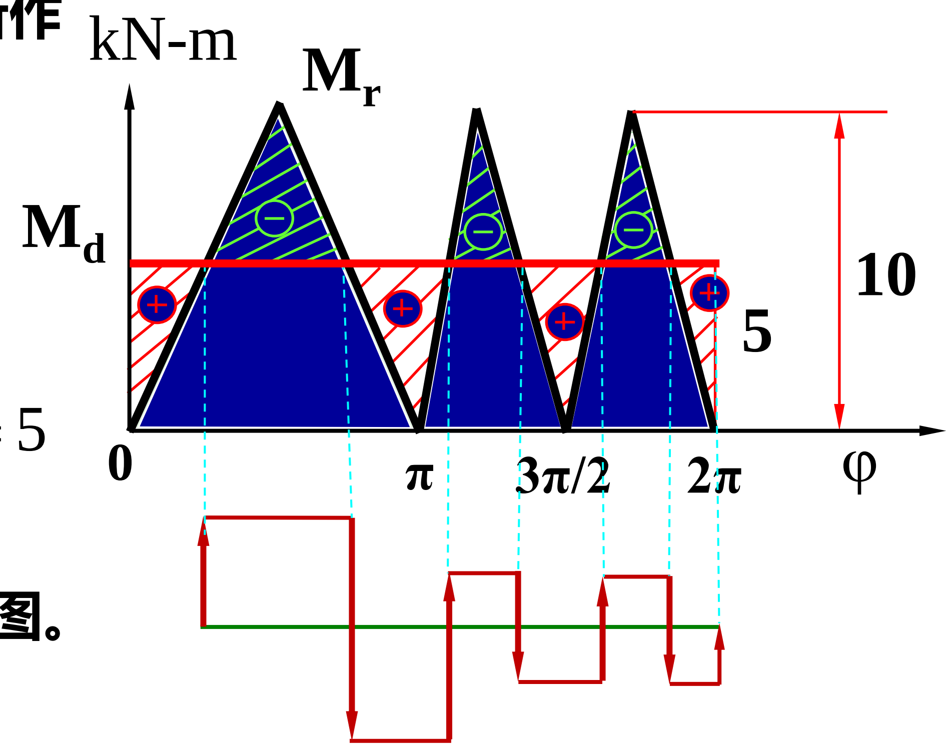
【例题4】已知驱动力矩为常数，阻力矩如图所示，主轴的平均角速度为：ω_m=25 rad/s, 不均匀系数[δ] = 0.05，求主轴飞轮的转动惯量J。

解：1)求M_d，在一个循环内，M_d和M_r所作的功相等，于是：

$$M_d = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_r d\varphi$$

三个三角形面积之和

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 10 + 2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 10)] = 5$$



作代表 M_d的直线如图。

作能量指示图

2) △ W_{max}

各阴影三角形的面积分别为：

区间	0～π/4	π/4～3π/4	3π/4～9π/8	9π/8～11π/8	11π/8～13π/8	13π/8～15π/8	15π/8～2π
面积	10π/16	-10π/8	15π/16	-5π/8	10π/16	-5π/8	5π/16

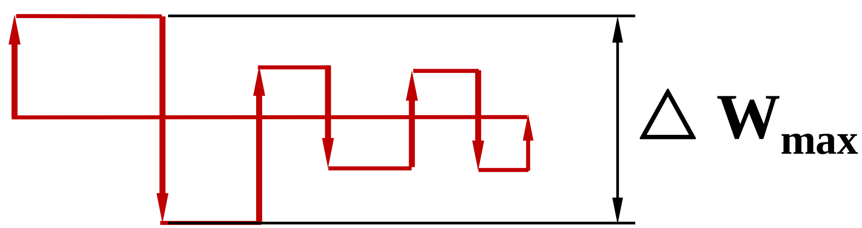
由能量指示图，得：

$$\triangle W_{max} = 10\pi/8 = 3.93 \quad KN\text{-}m$$

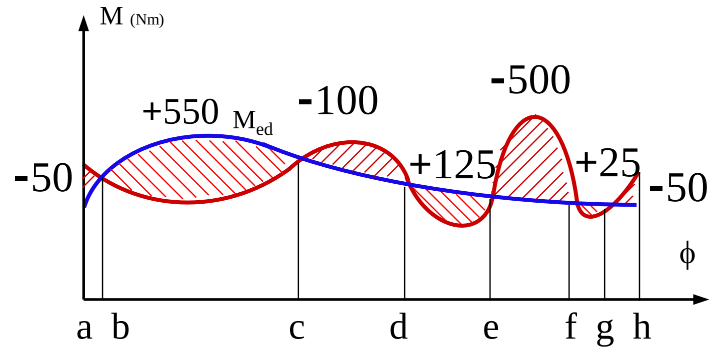
$$J = \triangle W_{max} /[\delta]\omega^2{}_m$$

$$= 3.93 \times 10/(0.05 \times 25^2)$$

$$= 126 \quad kg.m^2$$



【例题5】右图为某内燃机曲柄轴上的等效驱动力矩和等效阻抗力矩，在一个工作循环的变化曲线。对应 M_{ed} 与 M_{er} 间所包含的面积 (盈亏功) 如图所示.设曲柄的 n = 120 r/min，机器的 $[\delta]$ = 0.06。试求安装在曲柄上的 J_F .

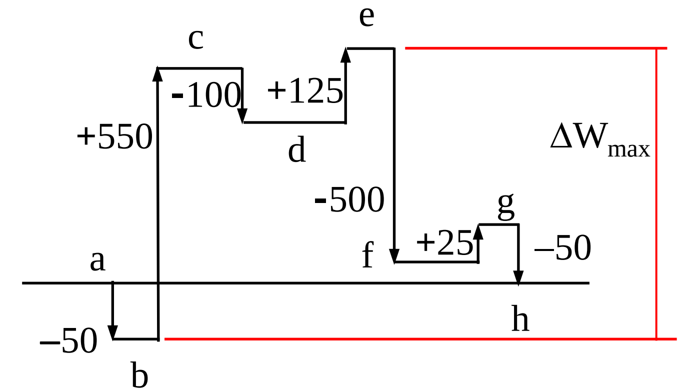


解:

1. 某区间的盈亏功:

2. 用能量指示图求 ΔW_{max}

由能量指示图:



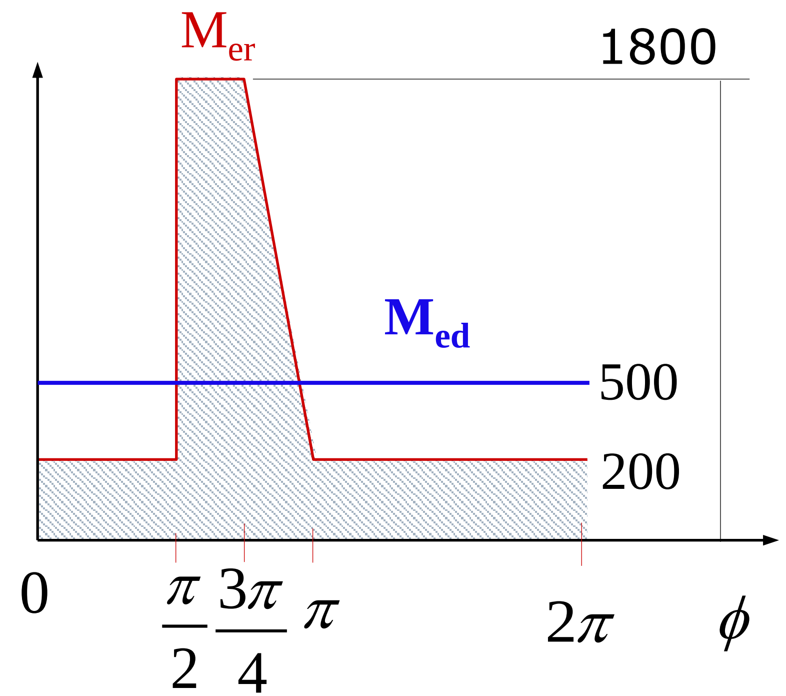
$$\Delta W_{max} = \Delta W_{eb}$$
$$= \Delta W_{cb} + \Delta W_{dc} + \Delta W_{ed}$$
$$= 550 + (-100) + 125$$
$$= 575\ (\mathrm{Nm})$$

3. 计算飞轮的转动惯量

$$J_F = \frac{\Delta W_{max}}{[\delta]\omega_m^2} = \frac{\Delta W_{max}}{[\delta]\left(\frac{2\pi n_m}{60}\right)^2} = \frac{900\Delta W_{max}}{\pi^2 n^2 [\delta]}$$

$$= \frac{900 \bullet 575}{\pi^2 \bullet 120^2 \bullet 0.06} = 60.159(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)$$

【例题6】由电动机驱动的某机械系统,已知电动机的转速为 n=1440 r/min ,转化到电动机轴上的等效阻抗力矩M_{er}的变化情况如图所示。设等效力矩 M_{ed}为常数,各构件的转动惯量略去不计。机械系统运转的许用不均匀系数[δ]=0.05 .试确定安装在电动机轴上的飞轮的转动动惯量 J_F .



解: 1. M_{er} 所作的功:

$$W_{er} = \int_0^{2\pi} M_{er} d\phi = 1000\pi (\mathrm{N} \bullet \mathrm{m})$$

2. M_{ed} 因 M_{ed} 为常数，且其所作的功 $W_{ed} = W_{er}$.

$$M_{ed} \bullet 2\pi = W_{er} = 1000\pi$$

从而得: M_{ed}= 500 (N.m) .

3. ΔW_{max} 的求取

① 求 M_{ed} 与 M_{ec} 间包含的面积.

$\Delta W_{ba} = \cdots\cdots = 150\pi \quad (N.m)$

$\Delta W_{cb} = \cdots\cdots = -457\pi \quad (N.m)$

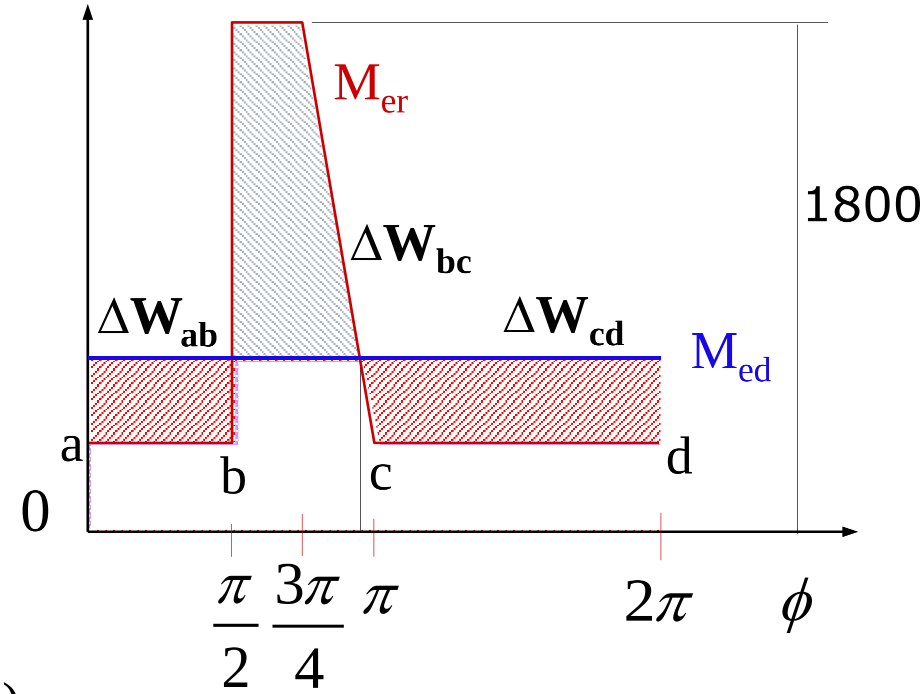
$\Delta W_{dc} = \cdots\cdots = 307\pi \quad (N.m)$

② 画能量指示图

③ 求 ΔW_{max}

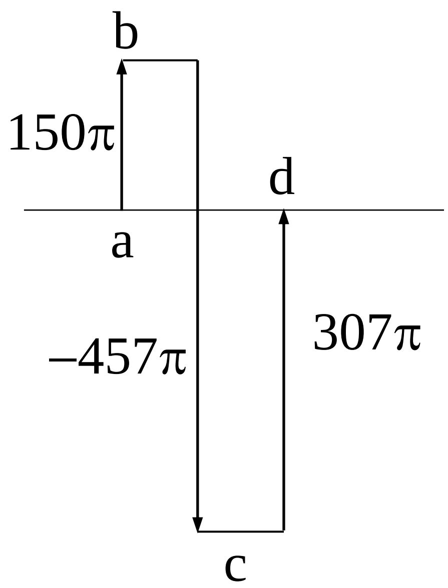
由能量指示图可得：

$\Delta W_{max} = \Delta W_{bc} = -\Delta W_{cb} = 457\pi \quad (N.m)$



4. 求 J_F

$$J_F = \frac{900\Delta W_{max}}{\pi^2 n^2 [\delta]} = \frac{900 \bullet 457\pi}{\pi^2 \bullet 1440^2 \bullet 0.05} = 1.263(kg.m^2)$$



【例题7】牛头刨床：切削行程H=0.5m，切削力F=4000N，切削行程对应的曲柄转角φ_1=1.2π (K=1.5)，曲柄角速度ω=8.38rad/s，[δ]=0.05。若飞轮装在曲柄上，电机的等效力矩为常数，求J_F 。

【解】切削功=M_{er}的功

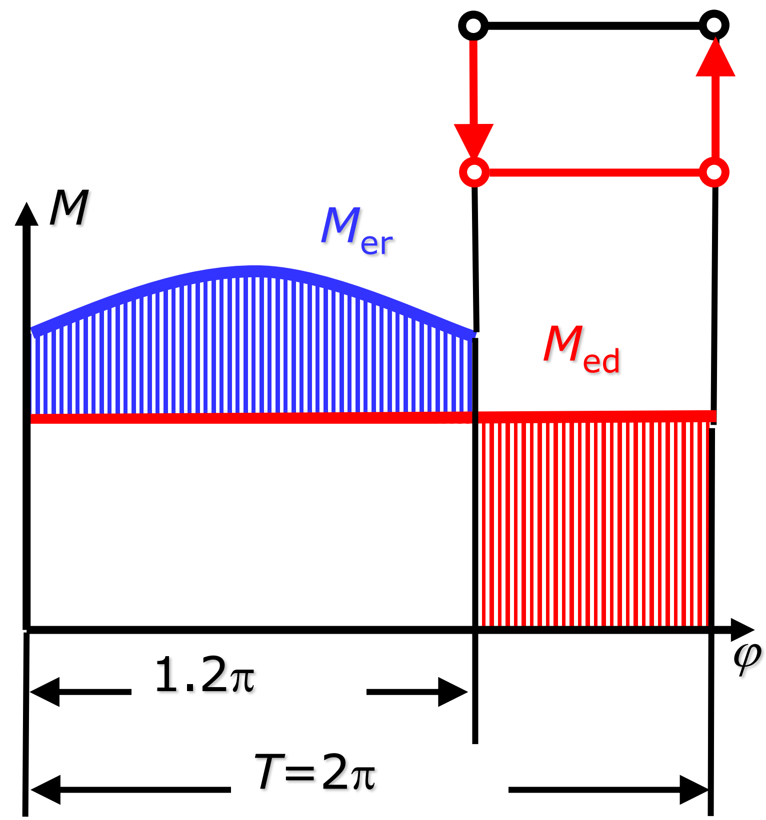
$$W_{er}=FH=4000\times0.5=2000(\mathrm{N}\bullet\mathrm{m})$$

T 内:M_{ed}的功=M_{er}的功

$$M_{ed}=\frac{W_{er}}{2\pi}=318.31(\mathrm{N.m})$$

$$\Delta W_{max}=W_{er}-1.2\pi M_{ed}=800(\mathrm{N}\bullet\mathrm{m})$$

$$J_F=\frac{\Delta W_{max}}{\omega_m^2[\delta]}=\frac{\Delta W_{max}}{\omega_m^2[\delta]}=227.8(\mathrm{kg}\bullet\mathrm{m}^2)$$



谢谢