一：绪论

国际机器人联合会 (IFR)：机器人是一种半自主或全自主工作的机器，它能完成有益于人类的工作，应用于生产过程称为工业机器人，应用于家庭或直接服务人称为服务机器人，应用于特殊环境称为特种机器人

按照应用分类：工业机器人、个人/家用服务机器人、公共服务机器人、特种机器人

串联机器人：由一系列连杆通过铰链顺序连接而成，首尾不封闭，是开式运动链机器人。特点：工作空间大，正运动学简单、逆运动学复杂，驱动及控制简单，精度较低，载荷能力较低，动力学响应速度较慢

并联机器人：上下两个平台通过至少两个独立的运动支链相连接，以并联的方式驱动的闭环机构。特点：无累积误差，末端精度较高，动态响应性好，整体结构紧凑，刚度高，承载能力大，具有较好的各向同性（完全对称的）工作空间较小

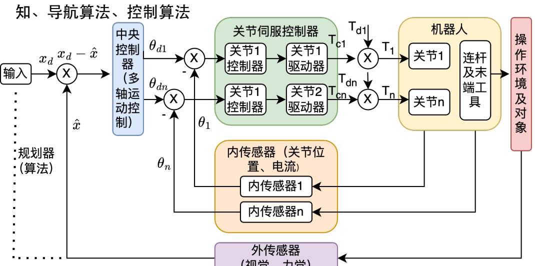
混联机器人：串联和并联机器人的组合，是一串并联构型，兼具串联机器人工作空间大和并联机器人刚度大的优点

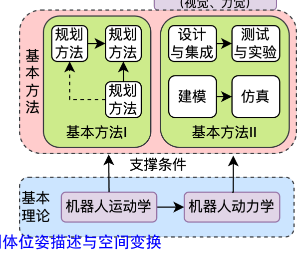
具身智能指智能体通过与物理环境的实时交互来学习、推理和决策的能力

人工智能与机器人的关系：具身智能是有物理载体的智能体，机器人 + 大模型带来生机。具身智能是第一人称智能，类似于从人第一视角获得信息、指导行动，知行合一。人形机器人是机器人的最佳实践

机器人本体 [关节（伺服电机、减速器、传感器）、结构件（臂杆、连接件）]、机器人控制柜 [主计算机、轴计算机、功率单元]、机器人示教盒 [示教盒硬件、示教盒软件]、机器人软件 [系统软件、应用软件]

三大类硬件：控制器、传感器、执行器，三大类算法：规划/制导算法、感知、导航算法、控制算法





二：刚体位姿描述与空间变换

姿态矩阵表示法：无奇异、不直观、坐标变换方便、计算量大

$R = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$ $C = R^T$

$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} R_y = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} R_z = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{-1} = R^T$ 姿态角表示法：直观、坐标变换不方便

欧拉有限转动定理：刚体在三维空间中有限旋转 ｜ 绕坐标轴依次旋转三次实现（最多三次相邻两次的转轴不同）

动轴 $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)$

定轴 $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_3(\gamma)R_2(\beta)R_1(\alpha)$

奇异：I 类 (abc):$\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ II 类:$\beta = 0/\pi$

$X_1Z_2X_3 = \begin{bmatrix} c_2 & -c_3s_2 & s_2s_3 \\ c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_3s_1 - c_1c_2s_3 \\ s_1s_2 & c_1s_3 + c_2c_3s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	$X_1Z_2Y_3 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -s_2 & c_2s_3 \\ s_1s_3 + c_1c_3s_2 & c_1c_2 & c_1s_2s_3 - c_3s_1 \\ c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 & c_1c_3 + s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
$X_1Y_2X_3 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2s_3 & c_3s_2 \\ s_1s_2 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_2c_3s_1 \\ -c_1s_2 & c_3s_1 + c_1c_2s_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	$X_1Y_2Z_3 = \begin{bmatrix} c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 \\ c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 \\ s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_3s_1 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
$Y_1X_2Y_3 = \begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_1s_2 & c_1s_3 + c_2c_3s_1 \\ s_2s_3 & c_2 & -c_3s_2 \\ -c_3s_1 - c_1c_2s_3 & c_1s_2 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 \end{bmatrix}$	$Y_1X_2Z_3 = \begin{bmatrix} c_1c_3 + s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2 - c_1s_3 & c_2s_1 \\ c_2s_3 & c_2c_3 & -s_2 \\ c_1s_2s_3 - c_3s_1 & c_1c_3s_2 + s_1s_3 & c_1c_2 \end{bmatrix}$
$Y_1Z_2Y_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 & c_3s_1 + c_1c_2s_3 \\ c_3s_2 & c_2 & s_2s_3 \\ -c_1s_3 - c_2c_3s_1 & s_1s_2 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 \end{bmatrix}$	$Y_1Z_2X_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 & c_3s_1 + c_1s_2s_3 \\ s_2 & c_2c_3 & -c_2s_3 \\ -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 & c_1c_3 - s_1s_2s_3 \end{bmatrix}$
$Z_1Y_2Z_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_3s_1 - c_1c_2s_3 & c_1s_2 \\ c_1s_3 + c_2c_3s_1 & c_1c_3 - c_2s_1s_3 & s_1s_2 \\ -c_3s_2 & s_2s_3 & c_2 \end{bmatrix}$	$Z_1Y_2X_3 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3 - c_3s_1 & s_1s_3 + c_1c_3s_2 \\ c_2s_1 & c_1c_3 + s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$
$Z_1X_2Z_3 = \begin{bmatrix} c_1c_3 - c_2s_1s_3 & -c_1s_3 - c_2c_3s_1 & s_1s_2 \\ c_3s_1 + c_1c_2s_3 & c_1c_2c_3 - s_1s_3 & -c_1s_2 \\ s_2s_3 & c_3s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	$Z_1X_2Y_3 = \begin{bmatrix} c_1c_3 - s_1s_2s_3 & -c_2s_1 & c_1s_3 + c_3s_1s_2 \\ c_3s_1 + c_1s_2s_3 & c_1c_2 & s_1s_3 - c_1c_3s_2 \\ -c_2s_3 & s_2 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

RPY 角:$R_{RPY} = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi)$

轴角表示法：直观、坐标变换不直观、有奇异、适合 $[0,\pi]$

$Rot(k,\phi) = \begin{bmatrix} c_\phi & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & c_\phi \end{bmatrix} + (1-c_\phi)\begin{bmatrix} k_x^2 & k_xk_y & k_xk_z \\ k_xk_y & k_y^2 & k_yk_z \\ k_xk_z & k_yk_z & k_z^2 \end{bmatrix} + s_\phi\begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$，即：$c_\phi I + (1-c_\phi)kk^T + s_\phi k^\times$

其中，$k^\times = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$

R 求轴角：$\phi = \pm\arccos\frac{tr(R)-1}{2}$

$k = \frac{1}{2\sin\phi}[R_{32}-R_{23}, R_{13}-R_{31}, R_{21}-R_{12}]^T$

当 $tr(R) = 3$ 时，姿态奇异，相当于没转

当 $tr(R) = -1$ 时，$R = -I$

$k = \left[\sqrt{\frac{R_{11}+1}{2}}, \sqrt{\frac{R_{22}+1}{2}}, \sqrt{\frac{R_{33}+1}{2}}\right]^T$

单位四元数表示法：无奇异、不直观、适合全局

乘法：$Q_1 \circ Q_2 = \{\eta_1\eta_2 - \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2, \eta_1\varepsilon 2 + \eta_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\times\varepsilon_2\}$

共轭：$Q^* = \{\eta, -\varepsilon\}$ 倒数：$Q^{-1} = Q^*/||Q||^2$，与轴角的关系：$Q = \{\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\}$。坐标变换

${}^Ap_a = {}^Ap_{ab} + {}^AR_B\ {}^Bp_b$

$T^{-1} = ({}^BT_A)^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^Tp \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

三：刚体速度描述与微分运动学

旋转矩阵求导：$\dot R = [\dot n, \dot o, \dot a] = \omega^\times R$，因此$\omega^\times = \dot R R^T$

可计算出角速度,$\omega^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$

欧拉角姿态运动学：

$\omega = J_{Euler}\dot\psi$(由欧拉角速度，总能得到刚体角速度)

${}^A\omega = [k_{(1)}, R_1(\alpha)k_{(2)}, R_1(\alpha)R_2(\beta)k_{(3)}][\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma]^T$

$k_{(i)}$ 为第 i 个旋转轴对应的基向量。

$J_{Euler} = [k_{(1)}, R_1(\alpha)k_{(2)}, R_1(\alpha)R_2(\beta)k_{(3)}]$

步骤:${}^Ak_1 = k_{(1)}; {}^A\omega_1 = {}^Ak_1\dot\alpha; {}^AR_2 = R_?(\alpha)$

${}^Ak_2 = {}^AR_2(\alpha)k_{(2)}; {}^A\omega_2 = {}^Ak_2\dot\beta; {}^AR_3 = R(\alpha)R_?(\beta)$

${}^Ak_3 = {}^AR_3(\alpha)R_2(\beta)k_{(3)}; {}^A\omega_3 = {}^Ak_3\dot\gamma$

当奇异时（条件为 I 类 (abc):$\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ II 类:$\beta = 0/\pi$），$\dot\alpha$ 和 $\dot\gamma$ 为无穷大

小角度下，将 $c_\phi = 1, s_\phi = \phi, s_\phi^2 = 0$ 代入旋转矩阵和欧拉雅可比。

$J_{xyzEuler} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, J_{zxzEuler} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

对于绕 k 微量角 d_ϕ 的微分转动，令 $\delta_\phi = k_d\phi, \bar{Rot}(k,d_\phi) = \begin{bmatrix} I+\delta_\phi^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

微分平动：$\bar{Trans}(d_x,d_y,d_z) = \begin{bmatrix} I & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

相对定系（先转后移往左乘）：$T(t+\Delta t) = \bar{Trans}(d_x,d_y,d_z)\bar{Rot}(k,d_\phi) = T(t) = \delta_T T(t)$

合成齐次变换矩阵 $\delta_T = \begin{bmatrix} I+\delta_\phi^\times & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

微分算子 $\Delta = \delta_T - I$ 齐次变换矩阵微分（微分运动量）: $dT = \Delta T(t)$

相对动系（先移后转往右乘）: $dT = T(t)^B\Delta, T(t+\Delta t) = T(t)^B\delta_T$

二者关系：${}^B\Delta = T^{-1}\Delta T$

旋转矩阵表示：$\delta_R = \begin{bmatrix} {}^aE11 & {}^aE12 & {}^aE13 \\ {}^aE21 & {}^aE22 & {}^aE23 \\ {}^aE31 & {}^aE32 & {}^aE33 \end{bmatrix} \rightarrow k = \frac{1}{2sind_\phi}\begin{bmatrix} {}^aE32 - {}^aE23 \\ {}^aE13 - {}^aE31 \\ {}^aE21 - {}^aE12 \end{bmatrix}$

考虑小角度条件，得误差矢量为：$\delta_\phi = kd_\phi \approx ksind_\phi = (\delta_R)_E$

将 R_c、R_d 代入得：$e_o = \delta_\phi \approx \frac{1}{2}(n_c\times n_d + o_c\times o_d + a_c\times a_d)$

三轴控制力矩设计为：$\tau_c = K_{op}e_o + K_{oi}\int e_o dt + K_{od}\dot e_o$ 欧拉角表示：$\Delta\psi = [\Delta\alpha\ \Delta\beta\ \Delta\gamma]^T, e_o = \delta_\phi = J_{Euler}\Delta\psi$

四：机器人位置级正运动学

关节空间（臂型空间/位型空间/构型空间）：由机器人关节变量所有可能值组成的集合，$S_J = \{q = [q_1, \dots q_n]^T : q_i \in [q_{i\_min}, q_{i\_max}]\}$ 维数：机器人关节数/机器人自由度数。

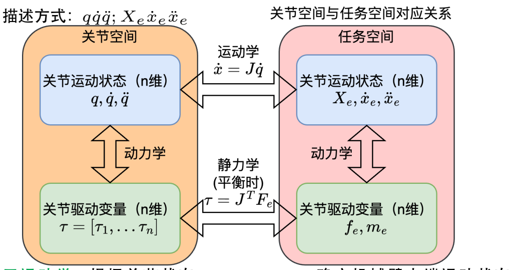
驱动空间：由作为驱动源的电机位置变量组成的集合称为驱动空间。对于直驱的情况，驱动空间 = 关节空间

操作空间（任务空间/笛卡尔空间）：机器人所有臂型对应的末端执行器的所有位姿组成的集合，$S_T = \{X_e = f(q) : q \in S_J \subset R^6\}$ 维数：6

工作空间：机器人所有臂型对应的末端执行器的所有位置组成的集合，$S_W = \{P_e = f_p(q) : q \in S_J \subset R^3\}$ 维数：3

可达工作空间：最大工作空间范围，不考虑姿态是否满足条件。灵巧工作空间：以任何姿态均可达到的工作空间范围。

描述方式：$q\dot q\ddot q$; $X_e\dot x_e\ddot x_e$



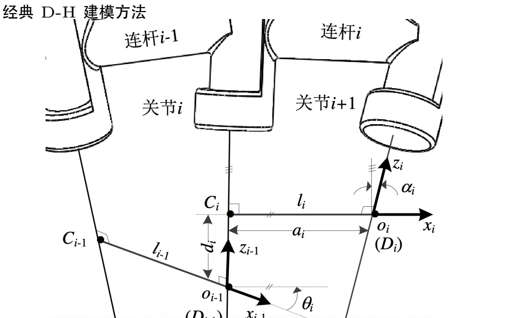
正运动学：根据关节状态 $q, \dot q, \ddot q$，确定机械臂末端运动状态 $(X_e, \dot x_e, \ddot x_e)$ 的问题

一般表达式：$X_e = fkine(q)/T_e = Fkine(q)$

逆运动学：根据机械臂末端的运动状态 $(X_e, \dot x_e, \ddot x_e)$，确定关节运动状态 $(q, \dot q, \ddot q)$ 的问题

一般表达式：$q = ikine(X_e)/q = Ikine(T_e)$

经典 D-H 建模方法



坐标系建立（对于坐标系 i-1）：z_{i-1} 轴为关节 i 轴，x_{i-1} 轴为连杆 i-1 延长线（指向关节 i+1），O_{i-1} 为杆 i-1 与关节轴 i 交点

特殊情况：1. 与下一关节平行。原点为下一根杆 i 与关节轴交点。2. 相邻两轴相交。x 轴为关节轴 i-2 与 i-1 的叉乘。

连杆参数：

θ_i从 x_{i-1} 轴到 x_i 轴的夹角（绕 z_{i-1} 轴），即公垂线的夹角

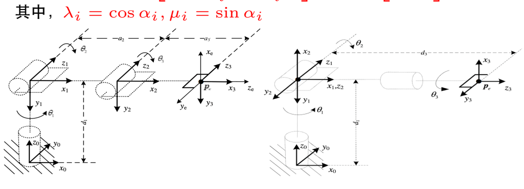
d_i从 O_{i-1} 到 C_{i-1} 轴沿 z_{i-1} 轴测量的距离，即公垂线之间沿关节轴方向的距离

a_i从 z_{i-1} 轴到 z_i 沿 x_i 测量的距离，即公垂线的距离

α_i从 z_{i-1} 轴到 z_i 轴的夹角（绕 x_i 轴），即关节轴的夹角

相邻连杆：${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} c_i & -\lambda_is_i & \mu_is_i \\ s_i & \lambda_ic_i & -\mu_ic_i \\ 0 & \mu_i & \lambda_i \end{bmatrix}, {}^{i-1}p = \begin{bmatrix} a_ic_i \\ a_is_i \\ d_i \end{bmatrix}$

其中，$\lambda_i = \cos\alpha_i, \mu_i = \sin\alpha_i$



空间 3R 肘 DH：$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$

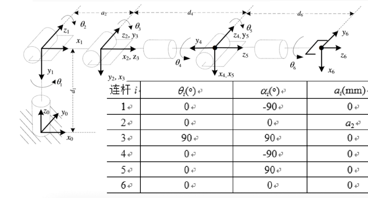
$\alpha_1 = -90^\circ$ $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $a_1 = 0$ $a_2 = a_2$

$a_3 = a_3$ $d_1 = d_1$ $d_2 = d_3 = 0$

空间 3R 腕 DH：$\theta_1 = \theta_3 = 0, \theta_2 = -90^\circ$

$\alpha_1 = \alpha_2 = -90^\circ$; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$d_1 = d_1$ $d_2 = 0$ $d_3 = d_3$



连杆 i	θ_i(°)	α_i(°)	a_i(mm)	d_i(mm)
1	0	-90	0	d_1
2	0	0	a_2	0
3	90	90	0	0
4	0	-90	0	d_4
5	0	90	0	0
6	0	0	0	d_6

基于位置级正运动学的工作空间计算方法：几何法、数值法（遍历法）、蒙特卡洛法（统计模拟法）

DH 和 MDH 区别：${}^{i-1}T_i$ 的旋转矩阵的 0 在左下角还是右上角

五：机器人位置级逆运动学

空间 6R 存在解析逆运动学解的条件：三个相邻关节轴交于一点/三个相邻关节轴相互平行（Piper 准则）；个数：8 个

一般 6R 机械臂的逆运动学解的个数：最多有 16 组解

不满足 piper 法则的情况可以使用：1. 代数法（解析法），析配消元法，通用、可得完全解，但求解过程复杂。2. 数值法，通过数值迭代的思路进行求解，需要基于微分运动学，具有通用性，但只能得到相应于迭代初值的一组值。3. 改变偏置法，通过改变偏置项、构造具有解析解的构型。可得部分解，但仅适合于部分结构简单的机械臂

七：微分运动学和雅可比矩阵

速度级运动学（微分运动学）方程为：描述关节速度和末端速度之间的关系的方程

一般表达式：$\dot x_e = J(q)\dot q$，雅可比矩阵：$J(q) = \frac{\partial x_e}{\partial q}$

物理意义：列向量表示关节 i 速度到末端广义速度的传动比，行向量表示关节速度对第 j 个方向的（角）速度的影响

特点：对 3D 空间 n 自由度机器人而言，同时考虑线速度与角速度时，J 是 $6\times n$ 的矩阵；反应运动的几何特性，因此又称为几何雅可比矩阵；是关节变量 q 的函数；速度级正运动学总有解，逆运动学存在奇异情况，可通过雅可比是否满秩判断

基座雅可比和末端雅可比转换关系：

${}^nJ(q) = \begin{bmatrix} {}^nR_0 & 0 \\ 0 & {}^nR_0 \end{bmatrix} {}^0J(q)$，两矩阵的行列式和秩相同

构造法求解基座雅可比：

对于雅可比的第 i 列，首先求出关节轴单位矢量 ξ_i 和关节 i 指向末端点的位置矢量 $\mathbf{p}_{i\to n}$

当为旋转关节时：$J_i = \begin{bmatrix} \xi_i \times p_{i\to n} \\ \xi_i \end{bmatrix}$ 当为平移关节时：$J_i = \begin{bmatrix} \xi_i \\ 0 \end{bmatrix}$

对于基座雅可比，${}^0T_{i-1}$ 的第三列得到 ${}^0z_{i-1}$，第四列得到 ${}^0p_{i-1}$，再通过 ${}^0T_n$ 第四列得到 ${}^0p_n$

然后求得${}^0\xi_i = {}^0z_{i-1}; {}^0p_{i\to n} = {}^0p_n - {}^0p_{i-1}$

对于末端雅可比，${}^nT_{i-1} = ({}^{i-1}T_n)^{-1}$ 的第三列得到 ${}^nz_{i-1}$，第四列得到 ${}^np_{i-1}$，此时 ${}^np_n = [0;0;0]^T$

然后求得 ${}^n\xi_i = {}^nz_{i-1}; {}^np_{i\to n} = {}^np_n - {}^np_{i-1}$

运动学奇异处理：雅可比奇异值分解：$J = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^m \sigma_i u_i v_i^T$

雅可比矩阵的广义逆为：$J^+ = J^T(JJ^T)^{-1} = V\Sigma^+U^T, \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_1^{-1} = diag(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_m})$

关节速度与末端速度关系为：$\sigma_m \le \frac{\|\dot x_e\|}{\|\dot q\|} \le \sigma_1$

基于广义逆的奇异处理：$\dot q_d = J^+(q)\begin{bmatrix} \dot v_{ed} \\ \dot\omega_{ed} \end{bmatrix}$ 实际上是求满足下列条件的最优解：$\dot q_d : \min_{\dot q_d}(\|\dot x_{ed} - J(q)\dot q_d\|^2)$

阻尼最小方差法 (DLS)：$J^\# = (J^TJ + \lambda^2 I)^{-1}J^T$

$\dot q_d = J^\#(q)\dot x_{ed} = \sum_{i=1}^n \left\{\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\lambda^2} v_i u_i^T \dot x_{ed}\right\}$

八：运动学奇异分析与性能评价

运动学奇异：当 J 不满秩时，根据 $\dot q = J^{-1}(q)\dot x_e$ 求解的角速度将为无穷大，此时的现象叫做运动学奇异

3R 肘机械臂：

${}^0J_v(\theta) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & c_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2+a_3c_{23}) & s_1(a_2s_2+a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & -(a_2c_2+a_3c_{23}) & -a_3s_{23} \end{bmatrix}$

${}^nJ_v(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & a_2s_3 & 0 \\ 0 & a_3+a_2c_3 & a_3 \\ a_2c_2+a_3c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

奇异条件：$s_3 = 0$，肘部奇异，损失 x_n 方向，即沿臂方向平动自由度;$a_2c_2 + a_3c_{23} = 0$ 肩部奇异，损失 z_n 方向，即垂直于臂方向平动自由度

3R 腕机械臂 ${}^0J_\omega(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -c_1s_2 \\ 0 & c_1 & -s_1s_2 \\ 1 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}$ ${}^nJ_\omega(\theta) = \begin{bmatrix} -s_2c_3 & -s_3 & 0 \\ s_2s_3 & -c_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

奇异条件：$s_2 = 0$，腕部奇异，损失 $\pm(z_2\times z_3)$ 或 $\pm(z_2\times z_1)$ 方向的转动自由度

最小奇异值：σ_m

条件数：$k(q) = \|J(q)\|\ \|J^+(q)\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \ge 1$

当条件数越小，机械臂灵巧度越好，$k = 1$ 时各向同性，所有奇异值相等

可操作度：$\omega(q) = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m = \sqrt{det(J(q)J(q)^T)}$

当 J 为方阵时：$\omega(q) = |det(J(q))|$

定义：若关节速度范数 $\|\dot q\|^2 = \dot q^T\dot q \le 1$，可推导出如下关系：$(\frac{\dot x_{u1}}{\sigma_1})^2 + (\frac{\dot x_{u2}}{\sigma_2})^2 + \cdots + (\frac{\dot x_{um}}{\sigma_m})^2 \le 1$ 即末端速度在 U 空间的投影为 m 维广义椭球，体积为 $V = d\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$

灵巧度/调节指数 (KCI)引入原因：前述指标以下不足：1. 尺度/单位相关。2. 量纲相关。3. 无界性。定义：整个工作空间中条件数最小值的倒数。意义：机器人在工作空间内某点上末端姿态的调节能力

九：机器人轨迹规划

路经：物理对象所经过的所有位置的集合，只有几何属性，与时间无关

轨迹：每个时刻、每个状态的位移、速度和加速度，与时间相关

路经表示：$s(x,y,z) = 0$，轨迹表示：

$x = f(a_1, .., a_n, t)$; $y = g(b_1, .., b_n, t)$; $z = h(c_1, .., c_n, t)$

纯线形插值:启停速度无穷大，冲击电机；梯形速度插值:加速度曲线不连续

三次多项式插值:$q_i(\tau) = a_{i0} + a_{i1}\tau + a_{i2}\tau^2 + a_{i3}\tau^3$

$a_{i0}=q_{i0}; a_{i1}=\dot q_{i0}; a_{i2}=\frac{3}{\tau_f^2}(q_{if}-q_{i0})-\frac{2}{\tau_f}\dot q_{i0}-\frac{1}{\tau_f}\dot q_{if}; a_{i3}=-\frac{2}{\tau_f^2}(q_{if}-q_{i0})+\frac{1}{\tau_f^2}(\dot q_{if}+\dot q_{i0})$

五次: $q_i(\tau)=a_{i0}+a_{i1}\tau+a_{i2}\tau^2+a_{i3}\tau^3+a_{i4}\tau^4+a_{i5}\tau^5$

$a_{i0}=q_{i0}; a_{i1}=\dot q_{i0}; a_{i2}=\frac{\ddot q_{i0}}{2}$

$a_{i3}=\frac{20(q_{if}-q_{i0})-(8\dot q_{if}+12\dot q_{i0})\tau_f+(\ddot q_{if}-3\ddot q_{i0})\tau_f^2}{2\tau_f^3}$

$a_{i4}=\frac{30(q_{if}-q_{i0})+(14\dot q_{if}+16\dot q_{i0})\tau_f+(2\ddot q_{if}-3\ddot q_{i0})\tau_f^2}{2\tau_f^4}$

$a_{i5}=\frac{12(q_{if}-q_{i0})-(6\dot q_{if}+6\dot q_{i0})\tau_f+(\ddot q_{if}-\ddot q_{i0})\tau_f^2}{2\tau_f^5}$

笛卡尔轨迹生成的两种途径：先求逆运动学，再在关节空间进行规划：无需处理多解问题、精度较低、计算量小

先在笛卡尔空间规划，再求逆运动学:需处理多解问题、精度较高、计算量大

空间直线轨迹轨迹规划步骤：1.路径参数化：$x_e=x(\lambda); y_e=y(\lambda); z_e=z(\lambda)$。2.参数时序化：$\lambda(t)=f(a,t)$3.时间归一化(可选)$\tau=\frac{t-t_0}{t_f-t_0}$

代入三次多项式的边界条件后为：$\lambda=(\bar\tau)=3\bar\tau^2-2\bar\tau^3$

平面圆弧轨迹规划：平面圆弧进行参数化：$x(\phi)=c_x+Rcos\phi, y(\phi)=c_y+Rsin(\phi)$，然后对 ϕ 进行插值，将 xy 求导得线速度

空间圆弧规划：构建圆面坐标系，$x_c=C\vec P_0 z_c=C\vec P_f\times C\vec P_0$，然后按平面进行规划

驱动变换：$D(\lambda)=L(\lambda)R_a(\lambda)R_o(\lambda)$

第一次进行平移，第二次绕 $z_{i-1}\times z_i$ 旋转 $\lambda\theta$ 对齐 z 轴（a 矢量），第三次绕 z 轴旋转 $\lambda\phi$ 对齐 y 轴（o 矢量）

$$R_a=Rot(k,\lambda\theta)\begin{bmatrix} s_\phi^2(1-c_{\lambda\theta})+c_{\lambda\theta} & s_\phi c_\phi(1-c_{\lambda\theta}) & c_\phi s_{\lambda\theta}\\ -s_\phi c_\phi(1-c_{\lambda\theta}) & c_\phi^2(1-c_{\lambda\theta})+c_{\lambda\theta} & s_\phi s_{\lambda\theta}\\ -c_\phi s_{\lambda\theta} & -s_\phi s_{\lambda\theta} & c_{\lambda\theta}\end{bmatrix}$$

$$R_o=R_z(\lambda\phi)=\begin{bmatrix} c_{\lambda\phi} & -s_{\lambda\phi} & 0\\ s_{\lambda\phi} & c_{\lambda\phi} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

姿态轨迹规划关键：姿态驱动矩阵 ΔR_i，定轴：$R_i={}^0\Delta R_i\cdot R_{i-1}$；动轴：$R_i=R_{i-1}\cdot{}^{i-1}\Delta R_i$

定义姿态驱动函数：$D_R(\lambda)=Rot(k,\lambda\phi)$ 需满足：$D_{Ri}(0)=1_3; D_{Ri}(1)=R_{i-1}^TR_i$

十：机器人静力学与动力学

静力学概念：机器人系统处于平衡状态，此时主要关心处于平衡条件下关节驱动力与末端所受环境力之间的关系，即 τ 与 F_e 之间的关系，相应的问题为静力学问题。一般表达式：$\tau=J^T(q)F_e$

正运动学：关节空间到任务空间的速度映射

正静力学：任务空间到关节空间的静力映射

力雅可比矩阵是速度雅可比矩阵的转置，因此运动学与静力学之间存在对偶关系，称为运动-静力对偶性或二元性

对偶关系应用：平衡点附近的运动分析，近似看成“广义弹簧单元”，$\tau=K_J\Delta q, F_e=K_e\Delta x_e$ 可得末端位移与关节位移的近似关系：$\Delta q=K_J^{-1}J^TK_e\Delta x_e$

K_J：广义弹性系数矩阵，对角阵；K_e末端广义弹性系数矩阵，对角阵

应用：在数值迭代法求逆、笛卡尔轨迹控制方面具有重要应用；好处：避免雅克比矩阵求逆引起的奇异问题。坏处：收敛情况与 K 有关，可能导致不收敛或收敛慢逆静力学，根据 n 和 m 维的不同关系进行求解：1. 若 n=m，即全自由度机器人 $F_e=(J^T)^{-1}\tau$;2. 若 n<m，欠自由度机器人，静力学为欠定方程，伪逆求最小范数解 $F_e=(JJ^T)^{-1}J\tau$;3. 若 n>m，冗余机器人，静力学为超定方程，伪逆求最小二乘解 $F_e=(J^TJ)^{-1}J\tau$

不与环境接触时：$D(q)\ddot q+h(q,\dot q)+G(q)=\tau$

与环境接触时：$D(q)\ddot q+h(q,\dot q)+G(q)=\tau-J^T(q)F_e$

$$D(\theta)=\begin{bmatrix}\frac13 m_1l_1^2+\frac13 m_2l_2^2+m_2l_1l_2c_2 & \frac13 m_2l_2^2+\frac12 m_2l_1l_2c_2\\ \frac13 m_2l_2^2+\frac12 m_2l_1l_2c_2 & \frac13 m_2l_2^2\end{bmatrix}$$

$$h(q,\dot q)=\begin{bmatrix}-m_2l_1l_2s_2\dot\theta_1\dot\theta_2-\frac12 m_2l_1l_2s_2\dot\theta_2^2\\ \frac12 m_2l_1l_2s_2\dot\theta_1^2\end{bmatrix}$$

$$G(q)=\begin{bmatrix}\frac12 m_1gl_1c_1+m_2g(l_1c_1+\frac{l_2}{2}c_{12})\\ \frac12 m_2gl_2c_{12}\end{bmatrix}$$

$D(q)$ 为惯性矩阵，$h(q,\dot q)$ 为科氏力和离心力，$G(q)$ 为重力项，τ 为关节驱动力，F_e 为末端执行器所受外力

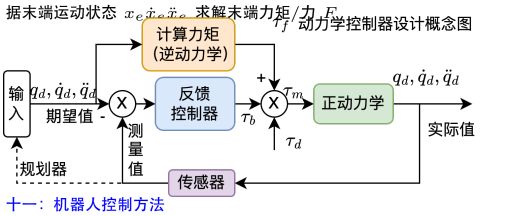
$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_{111} & h_{122}\\ h_{211} & h_{222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1^2\\ \dot\theta_2^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_{112} & h_{121}\\ h_{212} & h_{221}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\dot\theta_2\\ \dot\theta_2\dot\theta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}$$

$D_{11}D_{22}$分别为绕关节 1 和关节 2 转动的等效转动惯量，$D_{11}\ddot\theta_1 D_{22}\ddot\theta_2$关节 i 的加速度在关节 i 上产生的惯性力，$D_{12}D_{21}$分别为杆 1 对杆 2、杆 2 对杆 1 的耦合惯量，$D_{12}\ddot\theta_2 D_{21}\ddot\theta_2$为关节 1、2 的加速度在关节 2、1 上产生的惯性力，h_{ijj}为向心加速度系数，对应关节 j 的速度在关节 i 上产生的向心力，h_{ijk}为科氏加速度系数，对应关节 j、k 的速度在关节 i 上产生的科氏力，G_1G_2分别为连杆 1 和连杆 2 的重力在关节 1 处产生的重力矩，以及连杆 2 的重力在关节 2 处产生的重力矩

正动力学：根据机器人的关节力矩/力来解关节运动状态 $q\dot q\ddot q$，或根据末端力矩/力 F 求解末端运动状态 $x_e\dot x_e\ddot x_e$

逆运动学：根据机器人的关节运动状态 $q\dot q\ddot q$ 求解关节力矩/力 τ，或根据末端运动状态 $x_e\dot x_e\ddot x_e$ 求解末端力矩/力 F

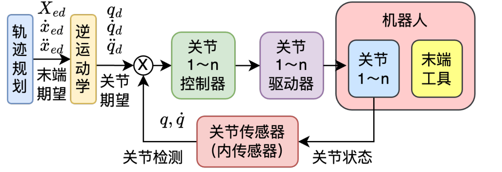
动力学控制器设计概念图



十一：机器人控制方法

控制定义：根据作业任务要求对机器人施加力/力矩作用，使其运动状态按期望轨迹改变，进而完成作业任务

基于被控对象状态类型分类：运动控制（位置控制、速度控制、加速度控制）、柔顺控制（直接力控制、阻抗控制、力位混合控制）、视觉控制（基于位置、基于图像、位置图像混合）



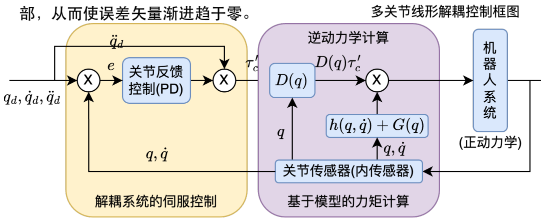
多关节解耦控制原理：动力学方程的改写 $\tau(q)=D(q)\ddot q+h(q,\dot q)+G(q)\rightarrow\tau=\alpha\ddot q+\beta$，其中,$\alpha=D(q),\beta=h(q,\dot q)+G(q)$

整个系统作为多输入多输出（MIMO）非线性系统考虑，构造完全解耦的单位质量系统 $\tau'=\ddot q=[\ddot q_1,\dots,\ddot q_n]^T\rightarrow\tau=\alpha\tau'+\beta$ 对解耦的单质量系统采用加速度（即力矩）前馈的 PD 控制 $\tau_c'=\ddot q_d+K_Pe+K_D\dot e$,

将上述解耦力矩代入动力学方程后得到总的控制力矩 $\tau_c=\alpha\tau_c'+\beta=D(q)(\ddot q_d+K_Pe+K_D\dot e)+h(q,\dot q)+G(q)$

通过选择合适的 K_PK_D，可使误差方程（二阶系统）的特征根具有负实部，从而使误差矢量渐进趋于零。

多关节线形解耦控制框图



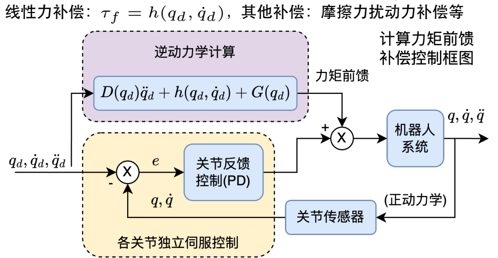
原理：采用反馈 ＋ 前馈补偿的复合控制方式，即在闭环控制的基础上进行预估力矩的补偿。通过反馈 ＋ 前馈获得符合控制力矩：$\tau_c=\tau_b+\tau_f=k_p(q_d-q)+k_i\int(q_d-q)dt+k_d(\dot q_d-\dot q)+D(q_d)\ddot q_d+h(q_d,\dot q_d)+G(q_d)$

计算力矩控制属于动力学控制，也是多关节位置控制。补偿精度取决于:1. 动力学模型的准确性；2. 模型参数的准确性；3. 数值计算（特别是积分）精度。计算效率（计算量大小）取决于:1. 所采用算法的效率（如解析法、迭代法）；2. 模型的简化程度。

结论：在实际中需要注意分析补偿精度，否则可能会产生更坏的效果（如极性相反、时延过大导致补偿时序错乱）。同时尽量考虑重要因素，对模型进行化简，并采用高效率的数值算法。

简化补偿：惯性力补偿：$\tau_f=D(q_d)\ddot q_d$，近似惯性力补偿：$\tau_f=D_{11}\ddot q_{d1}+D_{22}\ddot q_{d2}+\dots+D_{nn}\ddot q_{dn}$，重力补偿：$\tau_f=G(q_d)$，非线性力补偿：$\tau_f=h(q_d,\dot q_d)$，其他补偿：摩擦力扰动力补偿等

计算力矩前馈补偿控制框图

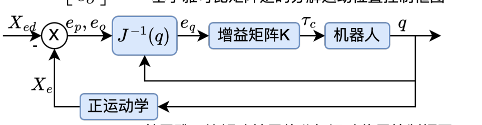


分解运动控制原理：将机器人末端在笛卡尔空间的运动分解为各关节的运动，通过各关节的联合运动实现末端沿笛卡儿坐标的运动。

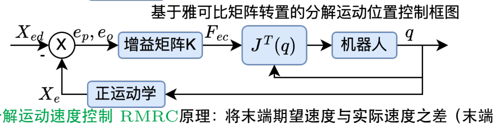
分解运动位置控制 RMPC原理：借助于速度级逆运动学方程，将末端位姿误差转换为关节误差，然后在关节空间进行控制律设计。

公式：$\dot e_q=\Delta q=J^{-1}(q)\begin{bmatrix}\dot e_p\\ \dot e_o\end{bmatrix}$，$\tau_c=Ke_q=KJ^{-1}(q)\begin{bmatrix}\dot e_p\\ \dot e_o\end{bmatrix}$

基于雅可比矩阵逆的分解运动位置控制框图



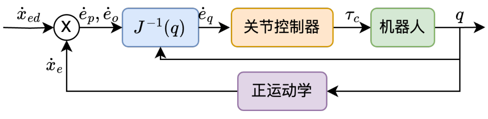
基于雅可比矩阵转置的分解运动位置控制框图



分解运动速度控制 RMRC原理：将末端期望速度与实际速度之差（末端速度误差）转换为各关节速度误差，然后分别对各关节进行速度控制。

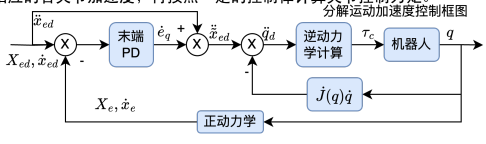
公式：$\dot e_q=\Delta\dot q=J^{-1}(q)\begin{bmatrix}\dot e_p\\ \dot e_o\end{bmatrix}$

分解运动速度控制框图



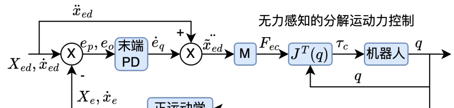
分解运动加速度控制（RMAC 或 RAC）原理：将末端期望加速度分解为相应的各关节加速度，再按照一定的控制律计算关节控制力矩。

分解运动加速度控制框图

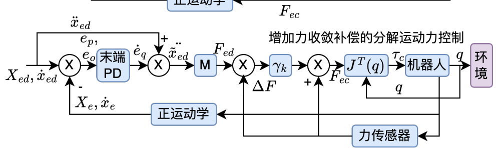


分解运动力控制 RMFC，原理：得到期望的末端加速度后，通过等效质量矩阵与其相乘得到末端控制力，再通过力雅可比矩阵将其映射为关节控制力。

无力感知的分解运动力控制



增加力收敛补偿的分解运动力控制



柔顺控制：机器人能够顺应接触环境的能力被称为柔顺性(compliance)，与之对应的控制方式即为柔顺控制。又叫顺应控制或依从控制。

应用:机器人在末端与环境有接触时采用柔顺控制实现安全可靠的控制。任务包括装配，打磨，铸件打毛刺，转曲柄，开关带铰链的门或盖，拧螺钉等

分类：直接力控制、阻抗控制、力位混合控制

柔顺控制必要性1. 接触时力感知高敏感度、力控高精度、设备更安全：末端与环境有接触时，末端力的变化比末端位姿的变化更敏感：微小的位姿变化会导致较大的力变化（取决于刚度），若采用传统的位置控制模式，微小的控制误差会导致较大的末端力，破坏作业对象（如鸡蛋、玻璃）

2. 可及时处理障碍回避问题：当机器人末端与障碍接触碰撞时，通过力控制可以回避障碍，或降低碰撞产生的损害(保护机器人，操作对象，操作员)

3. 可实现拖拽示教：用手直接拖动机器人末端，进行示教操作，简单方便

阻抗控制：1. 将力/力矩误差转换为位置/姿态误差

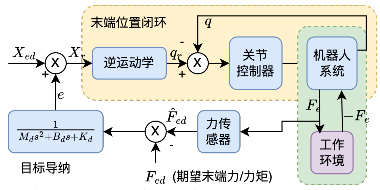
$$\Delta X(s)=\frac{F_d(s)-F_e(s)}{Ms^2+Bs+K}\xrightarrow[\text{映射关系不同}]{\text{力-位置 力矩-姿态角}}\begin{cases}\Delta p=\dfrac{f_d(s)-f_e(s)}{M_fs^2+B_fs+K_f}\\ J_{Euler}(\Psi_e)\Delta\Psi_e=\dfrac{T_d(s)-T_e(s)}{M_Ts^2+B_Ts+K_T}\end{cases}$$

2. 将位姿误差作为补偿量校正原期望位姿，得到参考位姿 X_r

$X_r(t)=X_d(t)+\Delta X(t)\rightarrow$ $\begin{matrix}p_r=p_{ed}+e_p\\ \Psi_r=\Psi_{ed}+J_{Euler}^{-1}(\Psi_e)e_o\end{matrix}$

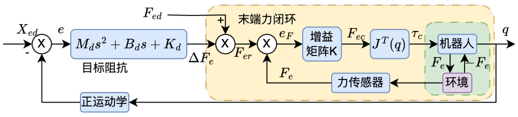
3. 以 X_r 作为新的位姿期望，设计笛卡尔位置控制律

基于位置的阻抗控制框图



基于力的阻抗1. 将位置误差转换为力的误差 $\Delta F_e(s)=(Ms^2+Bs+K)(X_{ed}(s)-X_e(s))$;2. 将力误差作为补偿量校正原期望力，得到修正后的期望力 $F_{er}=F_{ed}+\Delta F_e$;3. 采用力闭环进行力控制，并转换为关节力矩 $\tau_c=J^TK(F-er-F_e)$

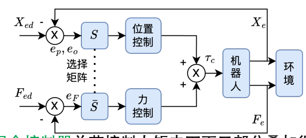
基于力的阻抗控制



力位混合控制：根据任务的具体需要，对不同方向的位置或力分别进行控制，构成包含：期望位置、期望力的混合控制器。

要实现力/位混合控制，需要首先对每个方向进行选择，以确定该方向是进行力控制还是位置控制，然后分别设计位置控制律和力控制律。

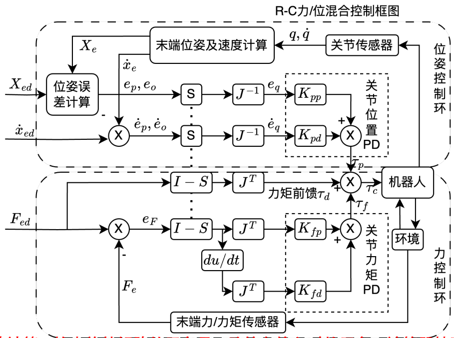
力位混合控制框图



R-C 力/位混合控制器关节控制力矩由下面三部分叠加得到:τ_p 关节位置 PD 产生的控制力矩,τ_f 关节力矩 PD 产生的控制力矩,τ_d 关节前馈力矩

一部分自由度进行位置控制（由选择矩阵 S 确定），其余自由度进行力控制（由 I-S 矩阵确定）

R-C力/位混合控制框图



矩阵计算：~~检查旋转矩阵的正负号、欧拉角输入时的正负；计算器抄到纸~~上时注意负号；$\alpha\beta\gamma$ 顺序不要写反；计算 β 时考虑多解：(aba 时考虑 $\pi-\beta$,abc 时考虑 $-\beta$)，计算 α/γ 时先计算正弦余弦的正负号，然后用反正切来算（两个解只能 $\pm180°$，不能直接改变正负号）

为什么要研究刚体的空间位姿? 1. 机器人是由多个杆件和关节组成的多刚体系统。2. 作业中通过关节的运动改变各刚体在空间中的状态。3. 刚体在空间中状态的描述是机器人学的基础

欧拉角总共有 12 种，选择旋转顺序的原则：明确的物理意义，便于测量与控制，遵循工程界习惯。末端状态 X_e 后三个元素是欧拉角，$\dot x_e$ 后三个元素是角加速度，因此大小写不同。

平面 3R 位置级正解：$\begin{bmatrix}p_{ex}\\ p_{ey}\\ \psi_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1c_1+l_2c_{12}+l_3c_{123}\\ l_1s_1+l_2s_{12}+l_3s_{123}\\ \theta_1+\theta_2+\theta_3\end{bmatrix}$

逆解：$\theta_2=\pm\arccos\frac{(p_{ex}-l_3c_{\psi_e})^2+(p_{ey}-l_3s_{\psi_e})^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}$

$\theta_1=atan2(m_y,m_x)$

$m_y=-l_2s_2(p_{ex}-l_3c_{\psi_e})+(l_1+l_2c_2)(p_{ey}-l_3s_{\psi_e})$

$m_x=l_2s_2(p_{ey}-l_3s_{\psi_e})+(l_1+l_2c_2)(p_{ex}-l_3c_{\psi_e})$

$\theta_3=\psi_e-(\theta_1-\theta_2)$

$$\begin{bmatrix}\dot p_{ex}\\ \dot p_{ey}\\ \dot\psi_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1s_1-l_2s_{12}-l_3s_{123} & -l_2s_{12}-l_3s_{123} & -l_3s_{123}\\ l_1c_1+l_2c_{12}+l_3c_{123} & l_2c_{12}+l_3c_{123} & l_3c_{123}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot\theta_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot\theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{c_{12}}{l_1s_2} & \dfrac{s_{12}}{l_1s_2} & \dfrac{l_3s_3}{l_1s_2}\\ -\dfrac{l_2c_{12}+l_1c_1}{l_1l_2s_2} & -\dfrac{l_2s_{12}+l_1s_1}{l_1l_2s_2} & -\dfrac{l_3(l_1s_{32}+l_2s_3)}{l_1l_2s_2}\\ \dfrac{c_1}{l_2s_2} & \dfrac{s_1}{l_2s_2} & \dfrac{l_3s_{32}+l_2s_2}{l_2s_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot p_{ex}\\ \dot p_{ey}\\ \dot\psi_e\end{bmatrix}$$