第一篇
力学

第二章 刚体的运动

刚体运动学主要研究刚体的运动规律。涵盖两类问题，第一类求导问题是已知刚体的运动方程通过求导运算求解刚体任意时刻的角速度和角加速度，第二类积分问题是已知刚体任意时刻的角加速度、角速度和初始条件通过积分运算求解刚体的运动方程。

莱昂哈德·欧拉

（1707.4.15-1783.9.18）

一、刚体

（1）在任何情况下形状和大小都保持不变的物体-理想化模型；

（2）可视为无数个连续分布的质点组成的质点系；

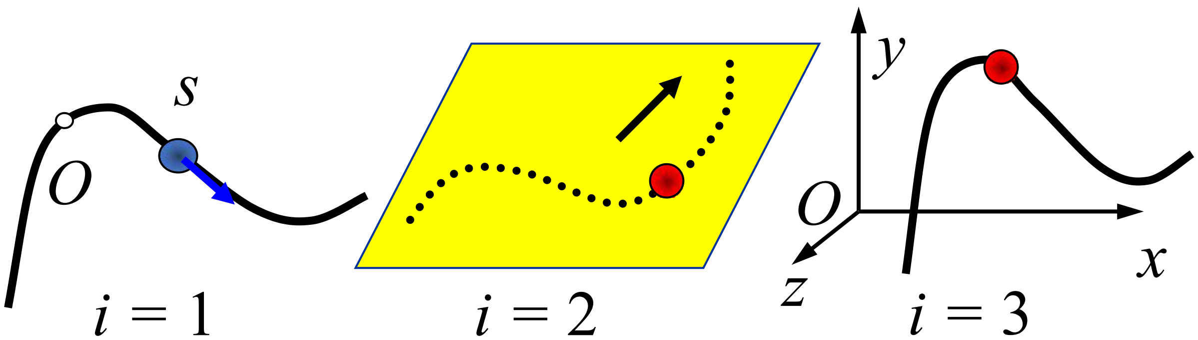
（3）刚体上任意两点间的距离保持不变。

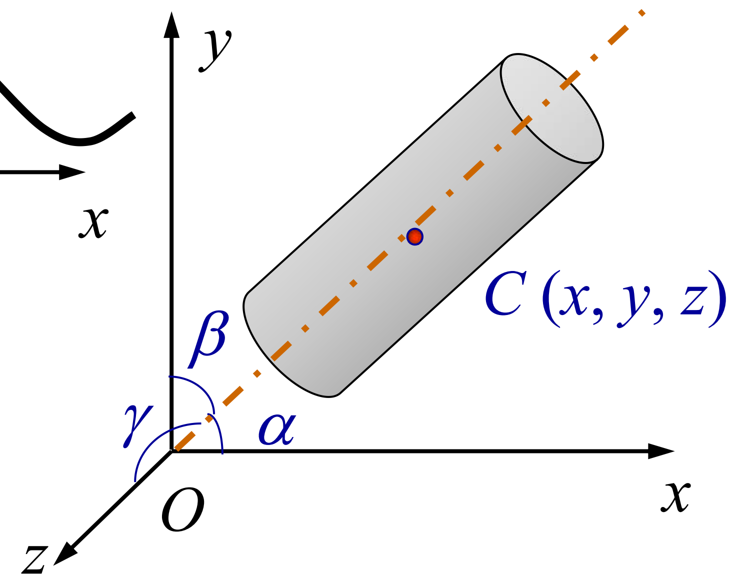
$$\text{质点} \xrightarrow{\text{集合}} \text{质点系} \xrightarrow{\text{特例}} \text{刚体}$$

组成刚体的每个质点称为刚体的一个质量元，每个质量元都服从质点力学规律。

二、自由度

确定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标数目。





质心C：　$(x、y、z)$

质心轴：　$(\alpha、\beta)$

绕轴转动：　(θ)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\boxed{\text{6个自由度！}}$

当刚体受到某些限制时自由度将减少。

一、刚体的平动

（1）刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行。

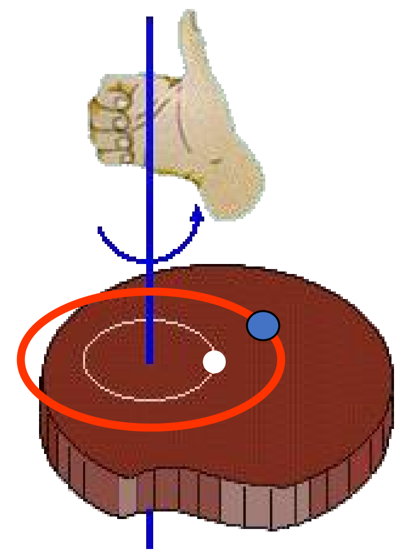
（2）刚体的平动可以看成是质点的运动，质点的运动规律完全适用于刚体的平动。

二、刚体的转动

（1）定轴转动

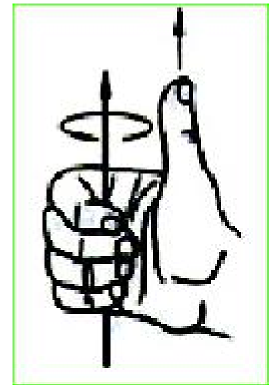
刚体上所有质点都绕同一直线（转轴）作圆周运动

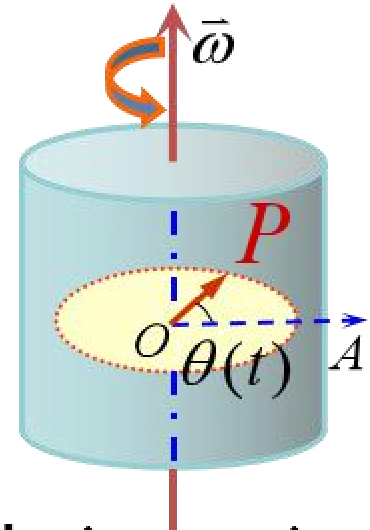
其角位移、角速度和角加速度都相同。



二、刚体的转动

（1）定轴转动





角坐标: θ 单位：弧度（rad）

角位移: $\Delta\theta$, $\mathrm{d}\theta$

角速度的大小: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 单位：弧度/秒（rad·s^{-1}）

角速度$\vec{\omega}$ 的方向：右手螺旋法则

线速度与角速度之间的关系： $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

角加速度矢量: $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ 单位：弧度/秒的平方（rad·s^{-2}）

加速度： $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \boxed{= \alpha r \vec{e}_{\tau} + \omega^2 r \vec{e}_{n}}$

二、刚体的转动

（1）定轴转动

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

二、刚体的转动

（2）刚体的定点转动

刚体做定点转动时，刚体上任意一点的转动可以看成是绕自身对称轴的**定轴转动**和对称轴绕竖直轴的**进动**。

三、刚体的一般运动

刚体的一般运动：

质心的平动

＋

绕质心的转动

六、刚体运动学中的两类问题

刚体运动学的核心任务就是描述刚体的运动规律，即确定刚体的运动状态随时间的变化规律。

（1）求导问题

运动学方程 → 角速度 → 角加速度

（2）积分问题

角加速度 → 角速度 → 运动学方程

例 一飞轮在时间t内转过角度 $\theta = at^3 - bt^2 + ct - d$ (SI)， 式中 a、b、c、d都是常量，求它的角速度及角加速度。

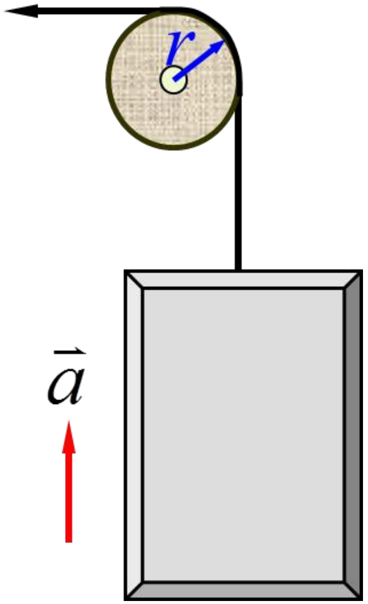
解：(1) 由角速度的定义式

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3at^2 - 2bt + c$$

(2) 由角加速度的定义式

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6at - 2b$$

例 一条细绳索绕过一定滑轮升降一升降机，滑轮半径为 r，如果升降机从静止开始以加速上升，试求：(1)滑轮的角加速度；(2)时刻滑轮的角速度及转过的圈数。



解：(1) 根据题意

$$a_t = a$$

$$a_t = r\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r}$$

(2) 由角加速度和角速度的定义式

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r} \Rightarrow \int_0^\omega d\omega = \int_0^t \frac{a}{r} dt \Rightarrow \omega = \frac{a}{r} t$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{a}{r} t \Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \frac{a}{r} t dt \Rightarrow \theta = \frac{a}{2r} t^2 \Rightarrow N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{4\pi r} t^2$$