第八章:向量代数与空间解析几何

1、向量在轴上的投影：

性质：$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$（即 $\mathrm{Prj}_u\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$），其中$\varphi$为向量$\vec{a}$与$u$轴的夹角；

$(\vec{a}+\vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$（即 $\mathrm{Prj}_u\,(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Prj}_u\,\vec{a} + \mathrm{Prj}_u\,\vec{b}$）；

$(\lambda\vec{a})_u = \lambda(\vec{a})_u$（即 $\mathrm{Prj}_u\,(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Prj}_u\,\vec{a}$）.

2、两个向量的向量积：设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$，$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

注：$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

3、二次曲面

（1） 椭圆锥面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$；

（2） 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$；（旋转抛物面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2} = z$（把把$xOz$面上的抛物线$\dfrac{x^2}{a^2} = z$绕$z$轴旋转））

（3） 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$；（旋转椭球面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$（把$xOz$面上的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$绕$z$轴旋转））

（4） 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$；（旋转单叶双曲面：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$（把$xOz$面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$绕$z$轴旋转））

（5） 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$；（旋转双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2+z^2}{c^2} = 1$

（把 xOy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转））

（6） 双曲抛物面（马鞍面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$；

（7） 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$； 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$； 抛物柱面：$x^2=ay$

4、平面方程

（1） 平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面上一点，$\vec{n}=(A,B,C)$ 为平面的一个法向量.

（2） 平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，其中 $\vec{n}=(A,B,C)$ 为平面的一个法向量.

注：由平面的一般方程可得平面的一个法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

若 D=0，则平面过原点；

若 $A=0,\begin{cases}D=0,\text{则平面过}x\text{轴}\\ D\neq 0,\text{则平面平行于}x\text{轴}\end{cases}$

若 $A=B=0,\begin{cases}D=0,\text{则平面表示}xOy\text{面}\\ D\neq 0,\text{则平面平行于}xOy\text{面}\end{cases}$

（3） 平面的截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 分别叫做平面在 x,y,z 轴上的截距.

5、两平面的夹角：$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

特殊：两平面互相垂直 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

两平面互相平行或重合 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

6、点 P（x_0,y_0,z_0）到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7、空间直线方程

（1） 空间直线的一般方程：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

（2） 空间直线的对称式（点向式）方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中

$\bar{s}=(m,n,p)$为直线的一个方向向量，$M(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点

（3） 空间直线的参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

8、两直线的夹角：$\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\cdot\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}$

特殊：两直线互相垂直$\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

两直线互相平行或重合$\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

9、直线与平面的夹角：$\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

特殊：直线与平面垂直$\Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

直线与平面平行或在平面内：$Am+Bn+Cp=0$

10、平面束的方程：

设直线L由方程组$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$所确定，其中$A_1,B_1,C_1$与$A_2,B_2,C_2$不成比例，则平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$为通过直线$L$的所有平面（不包含平面$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$）

第九章：多元函数的微分学及应用

1、内点一定是聚点；边界点不一定是聚点

2、二重极限存在是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A，因此当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，那么这个函数的极限不存在

3、偏导数：求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把其他量 $(y,z,\cdots)$ 看作常量而对 x 求导数；

求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，只要把其他量 $(x,z,\cdots)$ 看作常量而对 y 求导数；

注意：（1）偏导数都存在并不一定连续；（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 为整体，不可拆分；

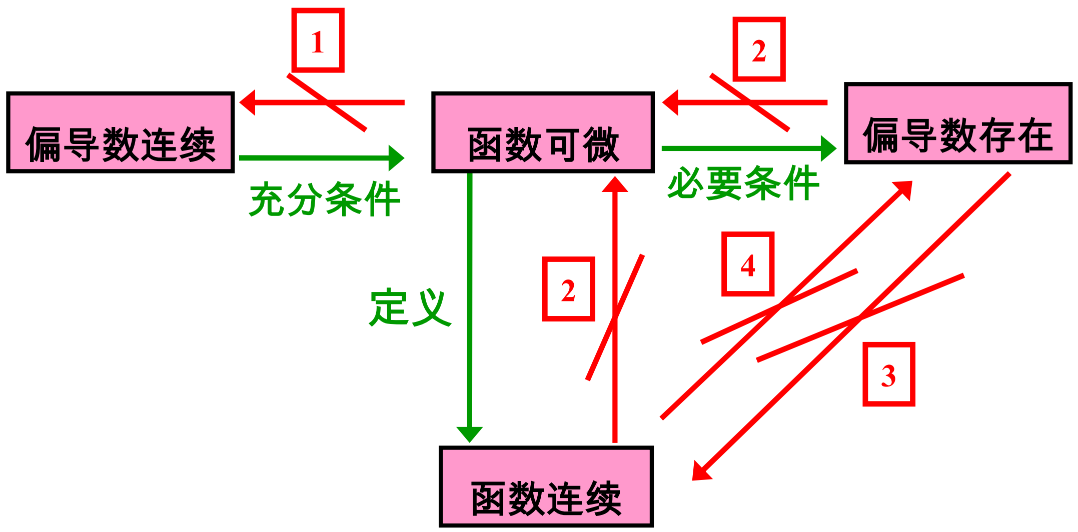
（3）分界点，不连续点处求偏导数要用定义求

4、若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

5、若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微分

6、$f(x,y)$ 连续,偏导数不一定存在，偏导数存在,$f(x,y)$ 不一定连续；

$f(x,y)$ 连续,不一定可微，但可微,$f(x,y)$ 一定连续；　可微,偏导数一定存在，偏导数存在,$f(x,y)$ 不一定可微；　可微,偏导数不一定都连续；偏导数都连续,$f(x,y)$ 一定可微



7、多元复合函数的求导法则：

（1）一元函数与多元函数符合的情形：若函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点t可导，且有$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

（2）多元函数与多元函数复合的情形：若函数$u=\varphi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)具有对x及对y的偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$； $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

（3）其他情形：若函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)具有对x及对y的偏导数，函数$v=\psi(y)$在点y可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

8、隐函数求导公式：

（1）函数$F(x,y)$：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ （2）函数$F(x,y,z)$：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

9、空间曲线的切线与法平面：设空间曲线Γ的参数方程为

$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=\omega(t), \end{cases}$ $M(x_0,y_0,z_0)$为曲线上一点

假定上式的三个函数都在$[\alpha,\beta]$上可导，且三个导数不同时为零

则向量$\vec{T}=\vec{f}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$为曲线$\Gamma$在点$M$处的一个切向量，曲线$\Gamma$在点$M$处的切线方程为：$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$，法平面方程为：

$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

如果空间曲线Γ的方程以$\begin{cases} y=\varphi(x), \\ z=\psi(x), \end{cases}$的形式给出，

则Γ在点M处的切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$，

法平面方程为：$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

如果空间曲线Γ的方程以$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$的形式给出，则$\Gamma$在点$M$处的切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_M}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_M}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_M}$

法平面方程为：$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_M(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & F_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$

10、曲面的切平面与法线：设曲面方程为$F(x,y,z)=0$，$M(x_0,y_0,z_0)$为曲面上一点，则曲面在点M处的切平面方程为：

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_o,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_o,z_0)}$

11、方向导数：若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，那么函数在该点沿任一方向l的方向导数存在，且

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_o)\cos\beta$，其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向$l$的方向余弦

12、梯度：$f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$称为函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的梯度，记作$gradf(x_0,y_o)$或$\nabla f(x_0,y_0)$，

即$gradf(x_0,y_o)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_o)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$

13、设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则

$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$

14、设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域里连续且有一阶及二阶偏导数，又

$f_x(x_0,y_o)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令

$f_{xx}(x_0,y_o)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B,f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处是否取

得极值的条件如下：

（1） $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

（2） $AC-B^2<0$ 时没有极值；

（3） $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也有可能没有极值

15、具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值求法：

第一步：解方程组 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，求得一切实数解，即可求得一切驻点；

第二步：对每一个驻点 (x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值 A,B 和 C；

第三步：定出 $AC-B^2$ 的符号，按 14 的结论判定 $f(x_0,y_0)$ 是不是极值，是极大值还是极小值

注：上述步骤是求具有二阶连续偏导数的函数得情况下，那么在考虑函数极值时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，那么对这些点也要考虑

16、拉格朗日乘数法：要找函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可以先作拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为参数.求其对 x 及 y 的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程 $\varphi(x,y)=0$ 联立起来：

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

，由这方程组解出 x,y 及 λ，这样得到的 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点

第十章：重积分及应用

1、二重积分的性质

性质 1：设α、β为常数，则

$$\iint_D[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma .$$

性质 2：如果闭区域D被有限曲线分为有限个部分闭区域，则在D上的二重积分等于在各个部分闭区域上的二重积分之和.（二重积分对于积分区域具有可加性）

性质 3：如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，则

$$\sigma=\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma$$

性质 4：如果在D上，$f(x,y)\le\varphi(x,y)$, 则有：$\iint_D(f(x,y)d\sigma\le\iint_D\varphi(x,y)d\sigma.$

特殊地，由于$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le|f(x,y)|$, 则$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D|f(x,y)d\sigma|$.

性质 5：设M,m分别是$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有$m\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma$.

性质 6（二重积分的中值定理）：设函数$f(x,y)$在闭区域D连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η),使得$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\sigma$.

2、二重积分直角坐标的计算法：

（1）若积分区域 D 可用不等式$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$，$a\le x\le b$（X 型）来表示，其中$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[a,b]$上连续. 则$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy.$

（2）若积分区域 D 可用不等式$\phi_1(x)\le x\le\phi_2(x)$，$a\le y\le b$（Y 型）来表示，其中$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$在区间$[c,d]$上连续. 则$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)dx.$

注：确定次序原则：函数原则：内层积分可以积出；

（1） 区域原则；少分块原则.

3、二重积分极坐标的计算法：（极坐标系中的面积元素：$\rho d\rho d\theta$）

若积分区域 D 可用不等式$\varphi_1(x) \le \rho \le \varphi_2(x)$，$\alpha \le \theta \le \beta$来表示，其中$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$在区间$[\alpha, \beta]$上连续.则：

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 4、确定上下限原则：

（1）每层下限小于上限；　（2）内层一般是与外层积分变量的有关的函数，也可以是常数；　（3）外层一定为常数.

6、直角坐标三重积分的计算：

（1）先一后二：若$\Omega = \{(x,y,z) | z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}$，闭区域$D_{xy} = \{(x,y) | y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b\}$，则：

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_2(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$（详见 P158,159）

（2）先二后一（截面法）：　S1：将Ω向某轴投影，如z轴，$z \in [c_1, c_2]$；

S2：对$z \in [c_1, c_2]$，用平行于xoy面的平面截Ω，截出部分记为D_z；

S3：计算$\iint\limits_{D_z} f(z)dxdy$；

S4：计算$\int_{c_1}^{c_2} F(x,y)dz$

若空间区域$\Omega = \{(x,y,z) | (x,y) \in D_z, c_1 \le z \le c_2\}$，其中$D_z$是竖坐标为$z$的平面截闭区域$\Omega$所得到的一个平面闭区域，则：

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

7、柱面坐标三重积分的计算：

$0 \le \rho < +\infty$；$0 \le \theta \le 2\pi$；$-\infty < z < +\infty$

ρ=常数，即以z轴为轴的圆柱面；θ=常数，即过z轴的半平面；

z=常数，即与xoy面平行的平面$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

柱面坐标系中的体积元素：$dv = \rho d\rho d\theta dz$

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$，其中 $F(\rho,\theta,z)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$

再化为三次积分计算

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho d\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)}F(\rho,\theta,z)dz$，其中 $z_1(\rho,\theta)$， $z_2(\rho,\theta)$ 为沿

典例：求由曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2a$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成立体体积（利用三种坐标系求解）解： $x^2+y^2+z^2\le 2a$ 表示球心在原点，半径为 $\sqrt{2a}$ 的球体，$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 表示 xoy 上半面圆锥体

直角坐标：$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^a dz\iint\limits_{D_1}dxdy+\int_a^{\sqrt{2}a}dz\iint\limits_{D_1}dxdy=\int_0^a \pi z^2dz+\int_a^{\sqrt{2}a}\pi(2a^2-z^2)dz=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3$

柱面坐标：$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho d\rho\int_{\rho}^{\sqrt{2a^2-\rho^2}}dz$

十一章：曲线积分及曲面积分

1、对弧长的曲线积分的计算法：

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$，$(\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t)$，$\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在，且 $\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}dt\ \ (\alpha<\beta)$

同理：空间曲线 Γ：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$

$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$

2、对坐标的曲线积分的计算方法：

设 $P(x,y)$ 、 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$，当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，$\varphi(t)$，$\phi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且

$\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在，且

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}dt$（下限$\alpha$对应于$L$的起点，上限$\beta$对应于$L$的终点）同理：空间曲线$\Gamma$：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_L\{P[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\phi'(t)+R[\varphi(t),\phi(t),\omega(t)]\}dt$$

3、平面曲线L上两类曲线积分的联系：

$\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha(x,y,z),\beta(x,y,z)$为有向曲线弧$L$在点$(x,y)$处的切向量方向角$\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}}$，$\cos\alpha=\dfrac{\phi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\phi'^2(t)}}$

同理：空间曲线Γ上两类曲线积分的联系：

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

4、格林公式：

设闭区域D由分段光滑曲线L围城，函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_L Pdx+Qdy$，其中$L$是D的取正向的边界曲线

注：取$P=-y,Q=x$，则$2\iint_D dxdy=\oint_L xdy-ydx$，左端表示闭区D的面积A的两倍，因此，$A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

5、设D为单连通区域，函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则下列四个命题等价：

（1）沿D内任一条光滑曲线有$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

（2）对D内任一条分段光滑曲线L曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与路径无关

（3）存在$u(x,y)\in D$，使得$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

（4）在D内没一点都有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

6、对面积的曲面积分的计算法：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+{z_x}^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+{y_x}^2(x,z)+y_z^2(x,z)}dxdz$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+{x_y}^2(y,z)+x_y^2(y,z)}dydz$$

7、对坐标的区面积分的计算法：

$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，等式右端符号取决于积分曲面上下侧

$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，等式右端符号取决于积分曲面左右侧

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{D_{xy}} P[x(x,y),y,z]dydz$，等式右端符号取决于积分曲面前后侧

8、两类曲面积分之间的联系：

$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$，

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$时有向曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦

9、高斯公式：

设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ所围城的，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有：

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

第十二章 无穷级数

（一） 常数项级数

1、 定义：1）无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

部分和：$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$，正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \ge 0$

交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$，$u_n \ge 0$

2）级数收敛：若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

3）条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散；绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛。

1） 性质：改变有限项不影响级数的收敛性；级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛；

2） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则任意加括号后仍然收敛；必要条件：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.（注意：不是充分条件！）

2、 审敛法

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \ge 0$ 定义：$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在；$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ 有界；

1） 比较审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，且 $u_n \le v_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

2） 比较法的推论：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若存在正整数 m，当 $n > m$

时，$u_n \le kv_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若存在正整数 m，当 $n > m$ 时，$u_n \ge kv_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3）比较法的极限形式：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l < +\infty)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

4）比值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；则当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当 $l = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

5）根值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$，则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；则当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当 $l = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

6）极限审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} n \cdot u_n > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} n \cdot u_n = +\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若存在 $p > 1$，使得 $\lim_{n\to\infty} n^p \cdot u_n = l \quad (0 \le l < +\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

交错级数：

莱布尼茨审敛法：交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$，$u_n \ge 0$ 满足：$u_{n+1} \le u_n \quad (n = 1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛。

任意项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

常见典型级数：几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 收敛, & |q|<1 \\ 发散, & |q|\geq 1 \end{cases}$ ；ρ-级数：

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 收敛, & p>1 \\ 发散, & p\leq 1 \end{cases}$

（二） 函数项级数

1、 定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，收敛域，收敛半径，和函数；

2、 幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

3、 收敛半径的求法：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ ，则收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ 0, & \rho=+\infty \\ +\infty, & \rho=0 \end{cases}$

4、 泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

展开步骤：（直接展开法）求出 $f^{(n)}(x), \quad n=1,2,3,\cdots$ ；

1） 求 出 $f^{(n)}(x_0), \quad n=0,1,2,\cdots$ ； 写 出 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ； 验 证 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ 是否成立。

间接展开法：（利用已知函数的展开式）

1）$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \quad x\in(-\infty,+\infty)$ ；2）$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$ ；

3）$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty)$ ；4）$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad x\in(-1,\ 1)$ ；

5）$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad x\in(-1,\ 1)$ 6）$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, \quad x\in(-1,\ 1]$

7）$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,\ 1)$ 8）$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$

5、 傅里叶级数

1） 定义：正交系：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx\cdots$ 函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上积分为零。傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

系数：$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases}$

2） 收敛定理：(展开定理)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

3） 傅里叶展开：

①求出系数：$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases}$；

②写出傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$；

③根据收敛定理判定收敛性。