新疆大学 2018-2019 学年二学期
课程考试试卷答案(A 卷)

课程名称：线性代数　考试时间：120 分钟　年级：xxx 级

专业：　xxx

题目部分，（卷面共有 27 题，100 分，各大题标有题量和总分）

一、选择题（5 小题，共 10 分）

1、 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $\left||A|A^T\right|=$（　　）。

A. 2^n　B. 2^{n-1}　C. 2^{n+1}　D. 4

答案：C

2、设 A 是 4 阶矩阵且 $|A|=\frac{1}{2}$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $\left|A^*-(2A)^{-1}\right|=$（　）

A. -1；　B. 2；　C. 1；　D. 0

答案：D

3、已知 n 元线性方程组 $Ax=b$，其增广矩阵为 $\overline{A}$，当（ ）时，线性方程组有解。

A．$R(\overline{A})=n$，　B．$R(\overline{A})\neq n$；　C．$R(\overline{A})=R(A)$；　D．$R(A)\neq R(\overline{A})$

答案：　C

4、设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,1,2)$, $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=$　(　).

A. (1, 0, 5, 4)　B. (1, 0, -5, 4)　C. (-1, 0, 5, 4)　D. (1, 0, 5, -6)

答案：A

5、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$，则以下向量中是 A 的特征向量的是（　　）

A．$(1,1,1)^T$　B．$(1,1,3)^T$　C．$(1,1,0)^T$　D．$(1,0,-3)^T$

答案：A

二、判断（5 小题，共 10 分）

1、以数 k 乘行列式 D，等于用数 k 乘行列式的某一行（或某一列）.　（　）

答案：√

2、n 阶矩阵就是 n 阶行列式.　（　　）

答案：×

3、若线性方程组 $Ax=b$ 的方程的个数大于未知量的个数，则 $Ax=b$ 一定无解.　(　　)

答案：×

4、设 A 为 4 阶方阵，且 r(A)=2，则齐次线性方程组 AX=0 的基础解系包含的解向量的个数为 2.　（　　）

答案：√

5、设 X_1 与 X_2 是 A 的任意两个特征向量，则 X_1+X_2 也是其特征向量（　　）

答案：×

三、填空题（10 小题，共 20 分）

1、设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=4$，则 $\left|(\frac{1}{2}A)^2\right|=$_________

答案：$\frac{1}{4}$

2、设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|$=-2，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3)$，其中 $\boldsymbol{A}_j\ (j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_1,\ 3\boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_1)$,则$|\boldsymbol{B}|$=_____.

答案：6

3、$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=$________________

答案：$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4、设 A 为n阶矩阵，$|A|=2$，A^*是 A 的伴随矩阵，则$|A^*|=$__________

答案：2^{n-1}

5、矩阵$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[1\quad -1\quad 1]$的秩为_______.

答案：1

6、设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+\qquad\quad 3x_4=3\\2x_1+5x_2+2x_3+4x_4=4\\x_1+3x_2+2x_3+\quad x_4=t\end{cases}$有解，则 $t=$______.

答案：1

7、设向量（2，-3，5）与向量（-4，6，a）线性相关，则 a=________.

答案：-10

8、若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\dots$，α_s线性无关，且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\dots$，β_t线性表出，则 s _____t。（填≥或≤）

答案：≤

9、设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\4&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为______________。

答案：-2,2,2

10、. 设 A 为正交矩阵，则$|A^TA|=$ ______

答案：1

四、计算（5 小题，共 50 分）

1、求行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$的值.

答案：解：$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix}$

$= xy\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$=x^2y^2$.

2、设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足关系式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{2B}$，且已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$。

答案：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix}=\mathbf{13}\neq\mathbf{0}$，所以$\boldsymbol{A}$可逆。由条件$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{2B}$知，

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{2E})^{-1}\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{2E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

3、求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4, \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0. \end{cases}$的通解.

答案：解：$(A,\vec{b})=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4}\\x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4}\\x_3=\quad x_3\\x_4=\qquad\quad x_4\end{cases}$ ∴方程组的通解 $\vec{x}=c_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-3\\7\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$

4、求向量组：$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\5\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\5\\-7\\-4\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\6\\17\\9\end{bmatrix}$的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量通过该极大线性无关组表示出来.

答案：解：向量组对应的矩阵为

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&5&5&6\\-1&2&-7&17\\-1&-1&-4&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵的秩为 3, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一组极大无关组

$$\alpha_3=-5\alpha_1+\alpha_2$$

5、设 **A**=$\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$,求 **P** 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为对角矩阵.

答案：解：由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 0 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda=(1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$$

得 A 的特征值为：$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$。

当 $\lambda_1=-2$ 时，$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

求得特征向量：$\xi_1=\begin{pmatrix}0.5\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，同理求得：$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\ -0.5\\ 1\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$。

令 $P=\begin{pmatrix}0.5 & -1 & 2\\ 1 & -0.5 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=diag(-2,1,4)$。

五、证明（2 小题，共 10 分）

1、设$\boldsymbol{\eta}_0$是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ_1，ξ_2，…，ξ_r是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.

试证明：$\boldsymbol{\eta}_0$，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_1$，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_r$线性无关。

答案：证明：考虑 $l_0\boldsymbol{\eta}_0+l_1$（$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_1$）+…+$l_r$（$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_r$）$=\mathbf{0}$，

即　（$l_0+l_1+\ldots+l_r$）$\boldsymbol{\eta}_0+l_1\xi_1+\ldots+l_r\xi_r=\mathbf{0}$.

则 $l_0+l_1+\ldots+l_r=0$，否则$\boldsymbol{\eta}_0$将是 **Ax=0** 的解，矛盾。

所以 $l_1\xi_1+\ldots+l_r\xi_r=\mathbf{0}$.

又由假设，ξ_1，…，ξ_r线性无关，

所以 $l_1=0$，…，$l_r=0$，从而　$l_0=0$.

所以$\boldsymbol{\eta}_0$，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_1$，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_0+\xi_r$线性无关。

2、设A为$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$实矩阵，E为n阶单位矩阵，已知矩阵 $\mathrm{B}=\lambda\mathrm{E}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$，试证：当$\lambda>0$时，矩阵B为正定矩阵

答案：

证明：因为$B^T=(\lambda E+A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B$

所以B为n阶实对称矩阵.

对任意的实n维向量x，有

$$\begin{aligned} x^TBx &= x^T(\lambda E+A^TA)x \\ &= \lambda x^Tx+x^TA^TAx \\ &= \lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax) \end{aligned}$$

当$x\neq 0$时$x^Tx>0,(Ax)^T(Ax)\geq 0$

因此，当$\lambda>0$时，对任意$x\neq 0$,有$x^TBx>0$

B为正定矩阵.