第一篇 力学

第一章　质点的运动

第二章　刚体的运动

第三章　机械振动及机械波

第四章　狭义相对论

我们正青春年少

第三章 机械振动及机械波

1 3.1 机械振动

2 3.2 机械波

机械振动主要研究**简谐振动**的运动及合成规律，核心问题是通过**解析法**或**旋转矢量**法求解简谐振动的**振动方程**及**合振动方程**。

克里斯蒂安·惠更斯
（1629.04.14-1695.07.08）

一、简谐振动

（1）只在与**位移或角位移**大小成正比、方向相反的**力或力矩**作用下所做的机械振动；

（2）简谐振动是一种**最简单、最基本**的机械振动；

（3）根据运动的**独立性**，任何一种机械振动都可以看成是若干个简谐振动的合成。

简谐运动 ⟷ 复杂振动

合成

分解

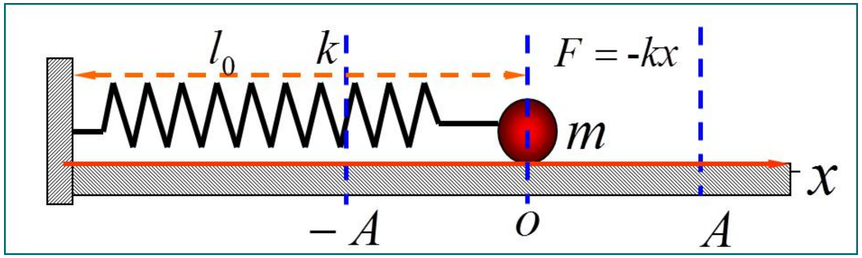
自然界中，常见的机械振动有：一切发声体、心脏跳动、海浪起伏、地震以及晶体中原子的振动等。

二、几种常见的简谐振动

（1）弹簧振子的振动

由胡克定律得 $F = -kx$

而 $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$$

令 $\psi^2 = k/m$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \psi^2 x = 0$$

$$x = A\cos(\psi t + \varphi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\psi\sin(\psi t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -A\psi^2\cos(\psi t + \varphi)$$

二、几种常见的简谐振动

（1）弹簧振子的振动

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

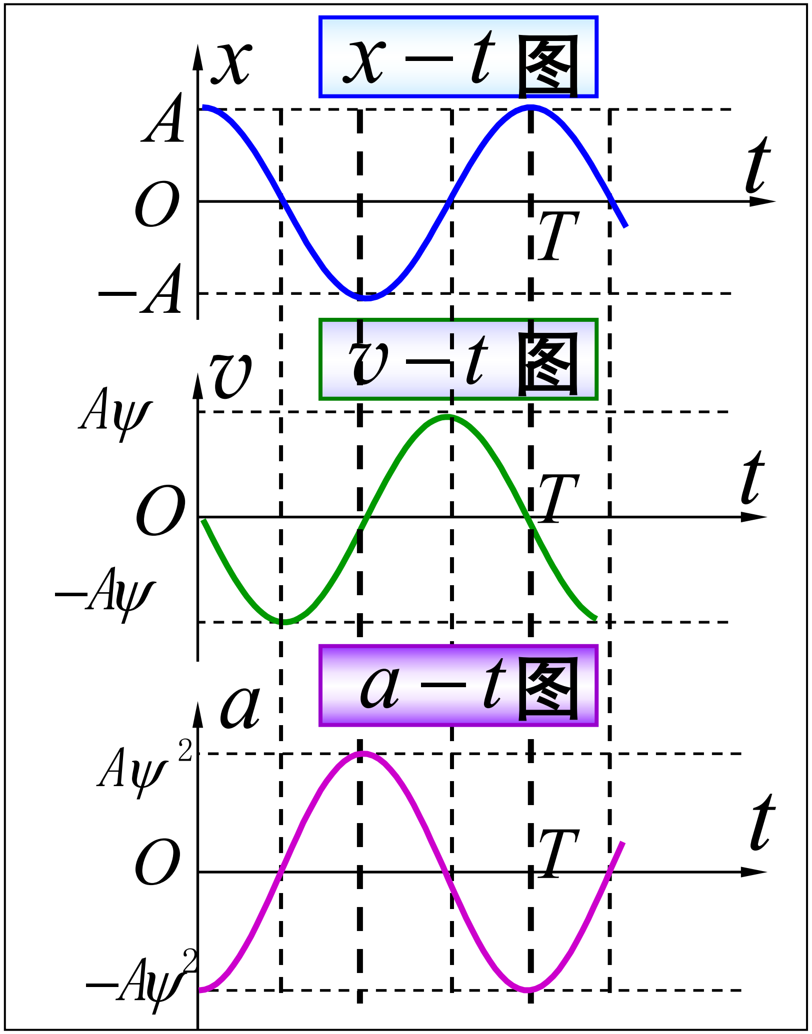
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{取} \quad \varphi = 0$$

$$\boxed{v = -A\omega\sin(\psi t + \varphi)}$$

$$= A\omega\cos(\psi t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

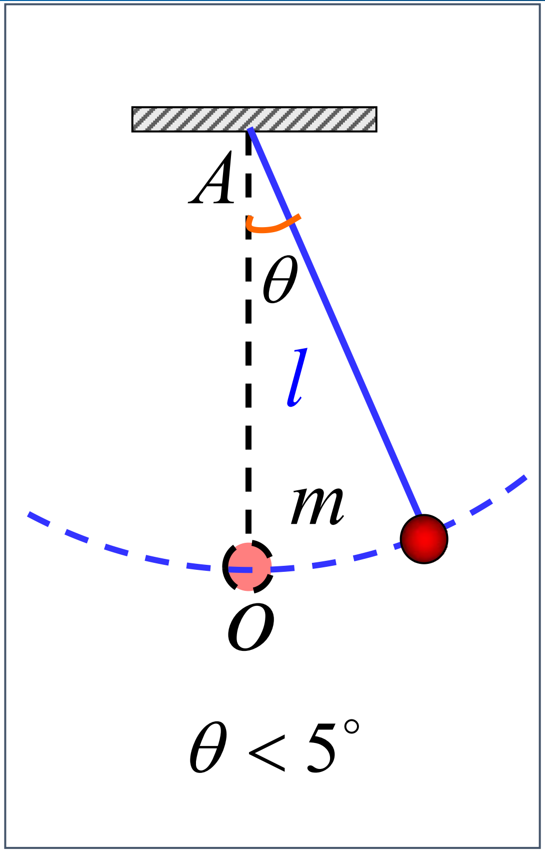
$$\boxed{a = -A\psi^{2}\cos(\psi t + \varphi)}$$

$$= A\psi^{2}\cos(\psi t + \varphi + \pi)$$



二、几种常见的简谐振动

（2）单摆的小角度摆动



$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

而 $M = J\alpha = ml^2 \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令 $\psi^2 = \dfrac{g}{l}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \psi^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\psi t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\theta_m \psi \sin(\psi t + \varphi)$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\theta_m \psi^2 \cos(\psi t + \varphi)$$

二、几种常见的简谐振动

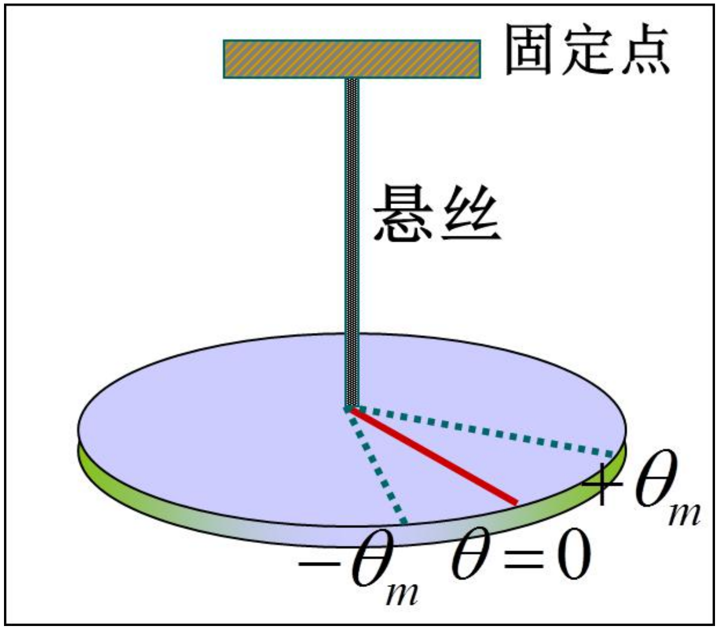
（3）角简谐振子的转动

$$M = -k\theta$$

而 $M = J\alpha = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{J}\theta = 0$$

令 $\psi^2 = k/J$



$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \psi^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\psi t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\theta_m\psi\sin(\psi t + \varphi)$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\theta_m\psi^2\cos(\psi t + \varphi)$$

三、振幅 周期 相位

（1）振幅

物体偏离平衡位置最大位移或角位移的绝对值，即 $A=|x_{\max}|$ 或 $\theta_m=|\theta_{\max}|$，由物体的初始条件决定。

（2）周期和频率

物体发生一次全振动所经历的时间定义为周期，用T表示，单位是s。

物体单位时间内发生全振动的次数定义为频率，用 ν 表示，单位是*Hz*。

$$T=\frac{1}{\nu}$$

我们正青春年少

三、振幅　周期　相位

（2）周期和频率

弹簧振子：

$$T=\frac{2\pi}{\psi}=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

单摆：

$$T=\frac{2\pi}{\psi}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

角简谐振子：

$$T=\frac{2\pi}{\psi}=2\pi\sqrt{\frac{J}{k}} \qquad \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}}$$

周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关。

三、振幅　周期　相位

（3）相位 $\boxed{\psi t + \varphi_0}$

1）相位是决定简谐振动运动状态的物理量；

2）相位在$0 \sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2k\pi$ (k 为整数)质点运动状态全同(周期性)；

3）初相位φ_0 $(t=0)$描述质点初始时刻的运动状态；

$(\varphi_0$ 取 $[-\pi \to \pi]$ 或 $[0 \to 2\pi])$

4）相位可用于比较两个简谐振动之间在振动步调上的差异，两个简谐振动相位之差称为相位差。

三、振幅　周期　相位

（4）振幅和初相位的确定

弹簧振子:

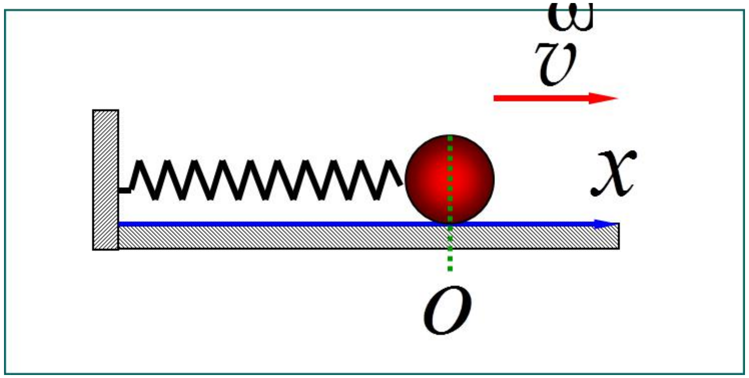
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\psi A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\psi^2}} \\ \varphi = \arctan\dfrac{-v_0}{\psi x_0} \end{cases}$$

单摆和角简谐振子:

$$\begin{cases} \theta_0 = \theta_m\cos\varphi \\ \omega_0 = -\psi\theta_m\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \dfrac{\omega_0^2}{\psi^2}} \\ \varphi = \arctan\dfrac{-\omega_0}{\psi\theta_0} \end{cases}$$

例 已知弹簧振子的振幅和角频率分别为 A和 ψ，当 $t=0$时，$x=0$， $v>0$，求该弹簧振子的振动方程。

解： 由已知条件得



$$\begin{cases} A\cos\varphi = 0 \\ v_0 = -A\psi\sin\varphi > 0 \end{cases}$$

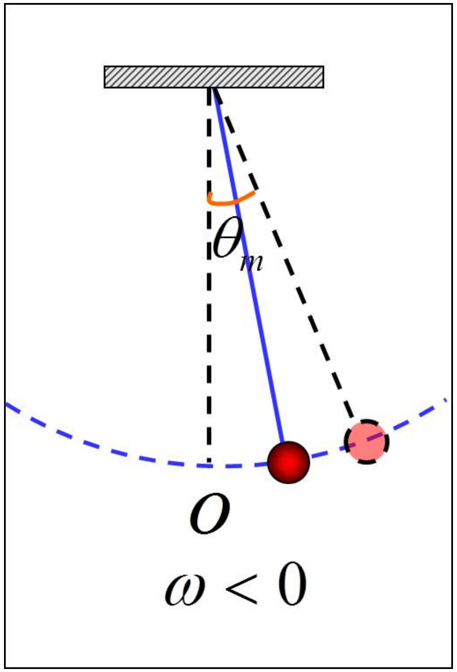
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

则该弹簧振子的振动方程为：$x = A\cos(\psi t - \dfrac{\pi}{2})$

例　对于绳长为 L 大小可以忽略不计的单摆，$t=0$时刻 $\theta=\frac{1}{2}\theta_m$，$\omega L<0$，求该单摆的振动方程。

解： 由已知条件得

$$\begin{cases} \theta_m \cos\varphi = \frac{1}{2}\theta_m \\ \omega = -\psi\theta_m \sin\varphi < 0 \end{cases}$$

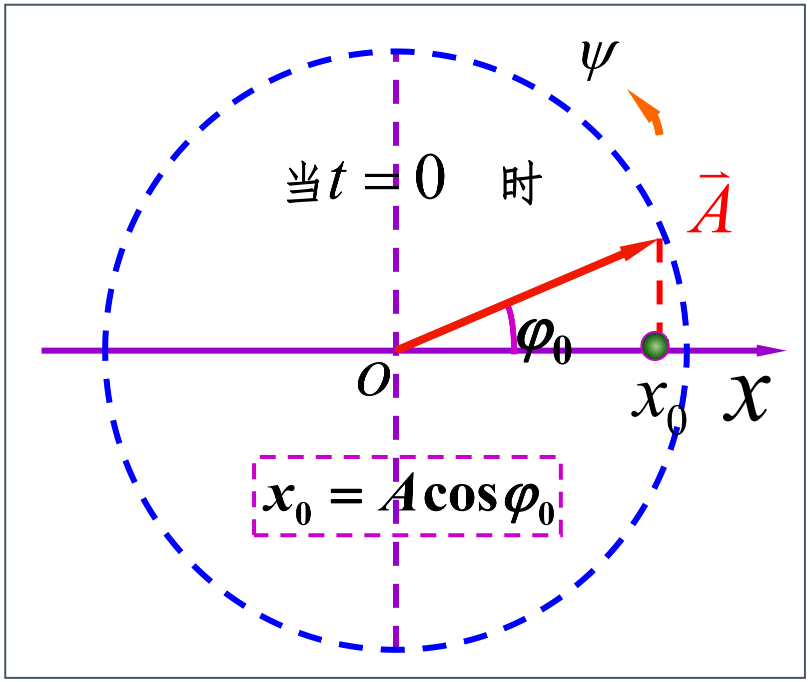


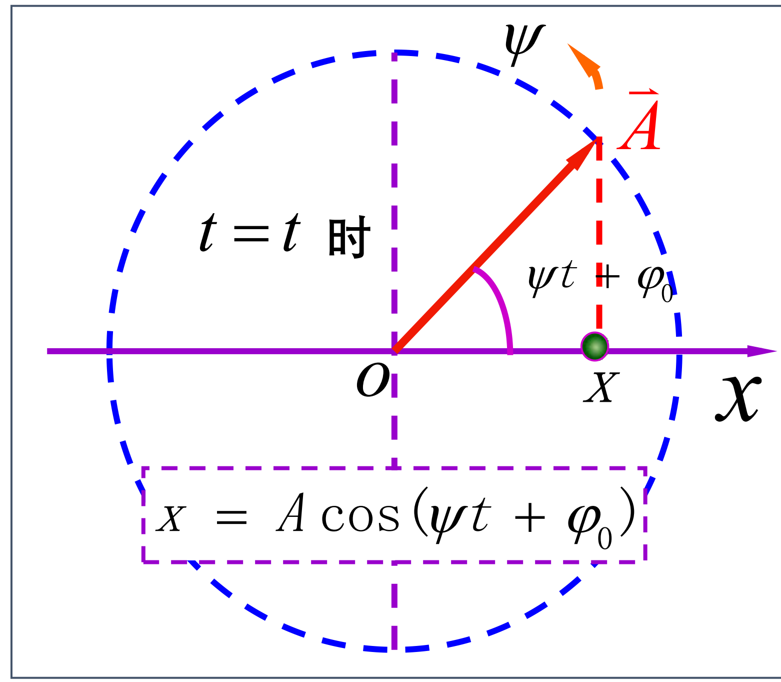
$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

则该单摆振动方程为： $\theta=\theta_m\cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t+\frac{\pi}{3})$

3.1.2 旋转矢量

通过引入**旋转矢量**可以形象的描述简谐振动的运动规律。

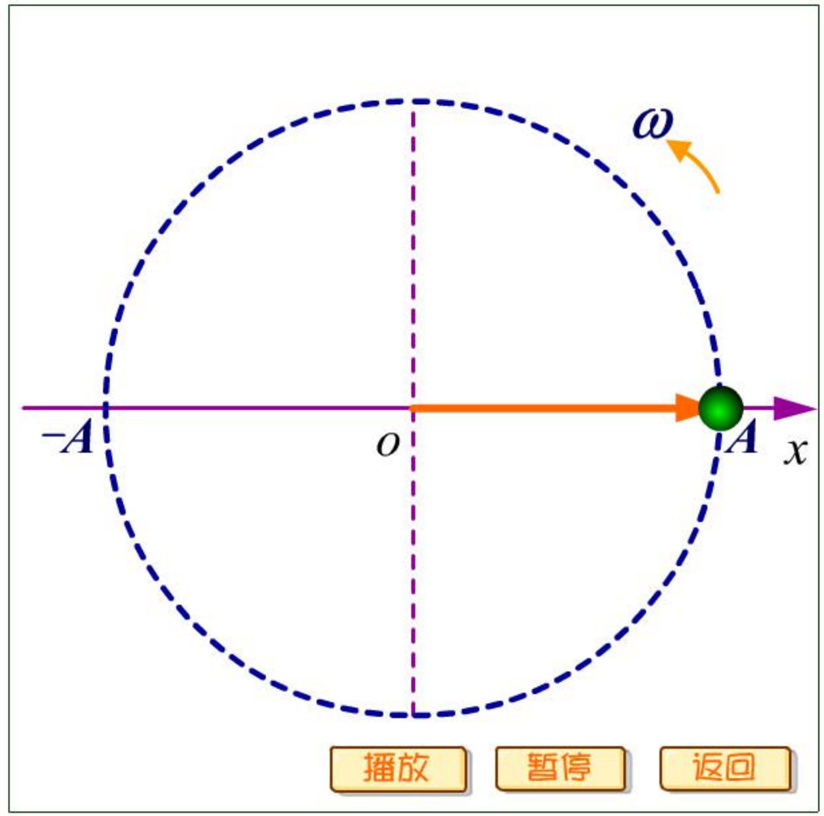




以O为原点旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动。

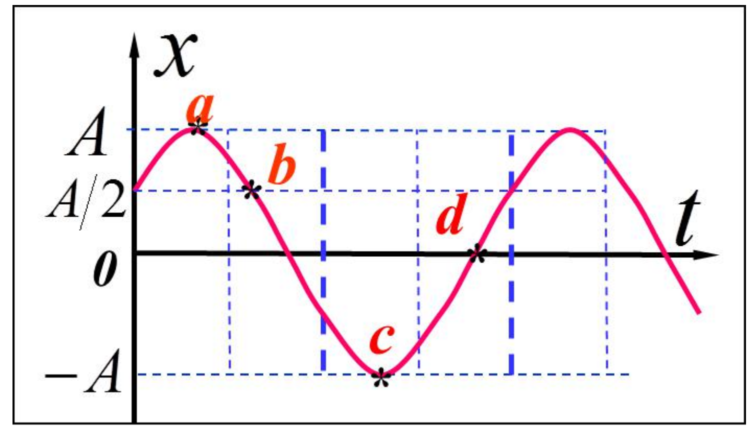
旋转矢量的 $\vec{A}$ 端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动。

$$x = A\cos(\psi t + \varphi_0)$$



3.1.2 旋转矢量

例 已知简谐振动的振幅 A 和周期 T，试求：（1）简谐振动方程；（2）到达 a、b 、c、d点运动状态所需的时间。

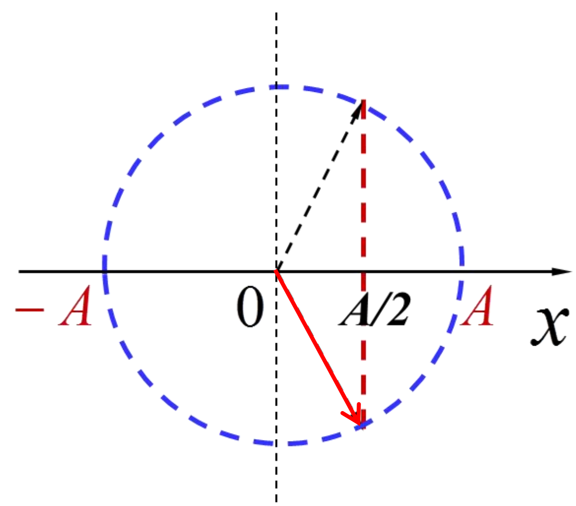


解： (1)由旋转矢量法得

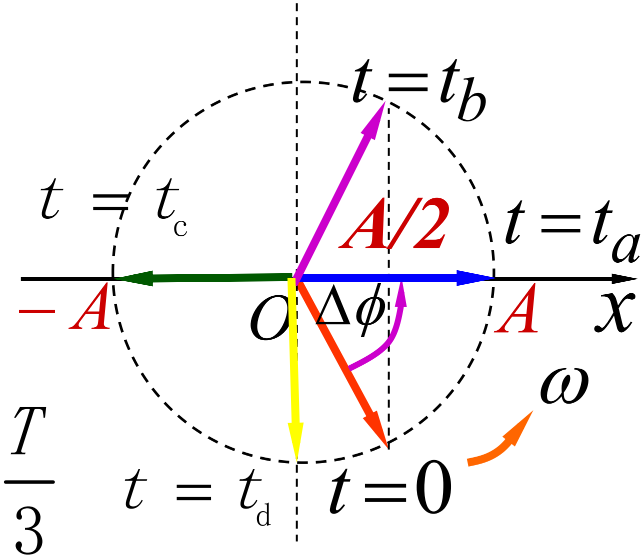
$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 得：

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{3})$$



（2）由旋转矢量法得



$$\Delta\varphi_a = 0-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} \qquad t_a = \frac{\Delta\varphi_a}{2\pi}T = \frac{T}{6}$$

$$\Delta\varphi_b = \frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} \qquad t_b = \frac{\Delta\varphi_b}{2\pi}T = \frac{T}{3}$$

$$\Delta\varphi_c = \pi-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3} \qquad t_c = \frac{\Delta\varphi_c}{2\pi}T = \frac{2}{3}T$$

$$\Delta\varphi_d = \frac{3\pi}{2}-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{11}{6}\pi \qquad t_d = \frac{\Delta\varphi_d}{2\pi}T = \frac{11}{12}T$$

一、弹簧振子

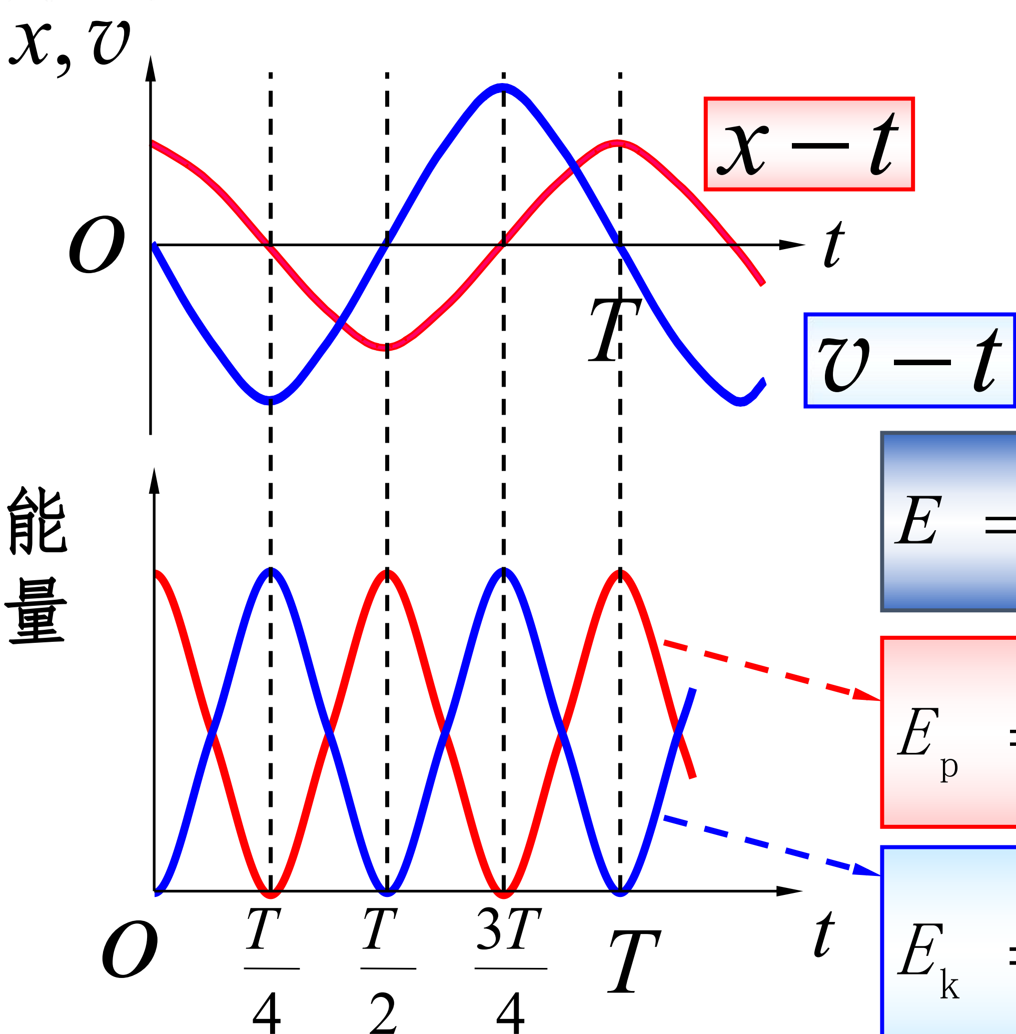
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\psi^2 \sin^2(\psi t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\psi t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\psi t + \varphi)$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\psi t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\psi t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$

弹簧振子系统只有保守力弹性力做功，实现动能和势能的相互转化，而机械能始终保持守恒。

一、弹簧振子



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\psi t$$

$$v = -A\psi\sin\psi t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\psi t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\psi^2A^2\sin^2\psi t$$

二、角简谐振子

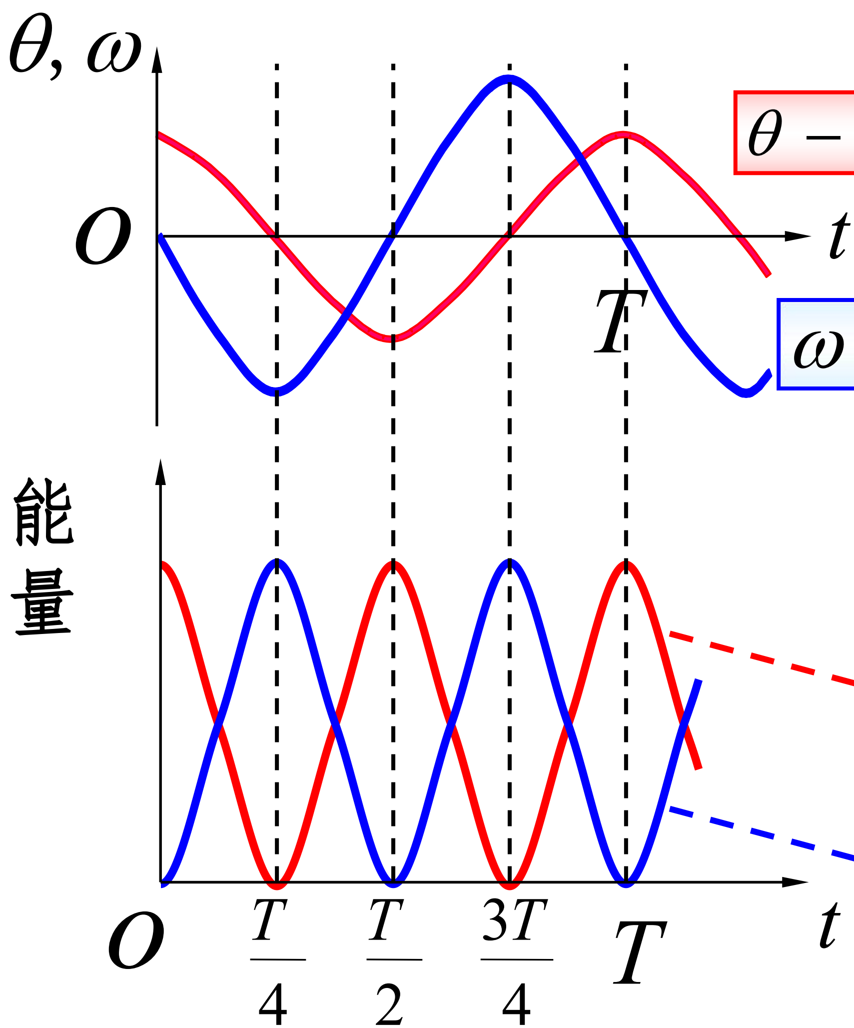
$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\theta_{\max}{}^2\psi^2\sin^2(\psi t+\varphi) = \frac{1}{2}k\theta_{\max}{}^2\sin^2(\psi t+\varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}k\theta_{\max}{}^2\cos^2(\psi t+\varphi)$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}k\theta^2 = \frac{1}{2}k\theta_{\max}{}^2\sin^2(\psi t+\varphi) + \frac{1}{2}k\theta_{\max}{}^2\cos^2(\psi t+\varphi) = \frac{1}{2}k\theta_{\max}{}^2$$

角简谐振子系统只有保守力弹性力做功，实现动能和势能的相互转化，而机械能始终保持守恒。

二、角简谐振子



$$\varphi = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos \psi t$$

$$\omega = -\theta_m \psi \sin \psi t$$

$$E = \frac{1}{2} k \theta_m^2$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k \theta_m^2 \cos^2 \psi t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} J \psi^2 \theta_m^2 \sin^2 \psi t$$

例 质量为$0.5kg$的物体，以振幅$2.0\times10^{-2}m$作简谐振动，其最大加速度为$8.0m\cdot s^{-2}$，试求：（1）振动周期；（2）机械能；（3）动能和势能相等的位置。

解： (1) 由 $a_{\max} = A\psi^{2}$

$$\psi = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20s^{-1} \qquad T = \frac{2\pi}{\psi} = 0.314s$$

(2) $$E = \frac{1}{2}kA^{2} = \frac{1}{2}m\psi^{2}A^{2} = 4\times10^{-2}J$$

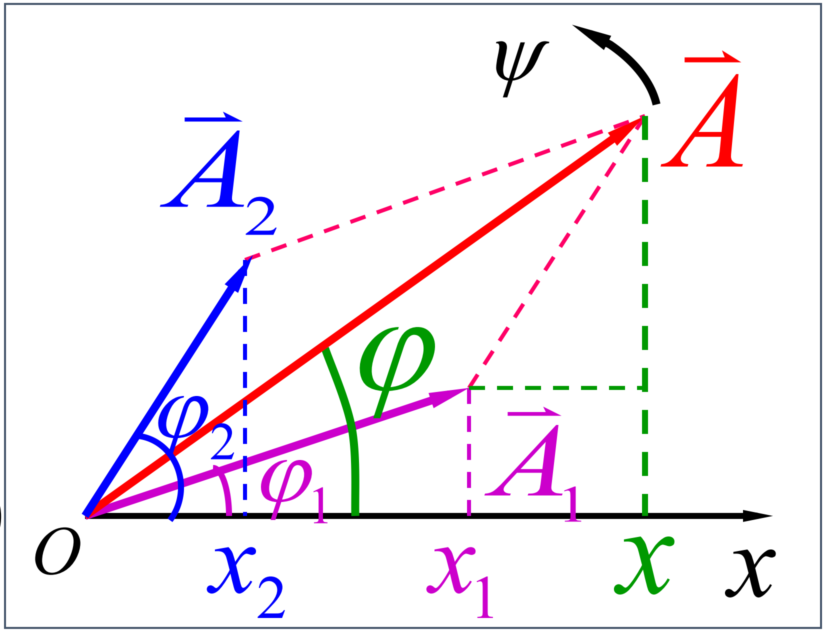
(3) $$E_{p} = \frac{1}{2}kx^{2} = \frac{1}{2}m\psi^{2}x^{2} = 2\times10^{-2}J \qquad x = \pm0.0141m$$

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

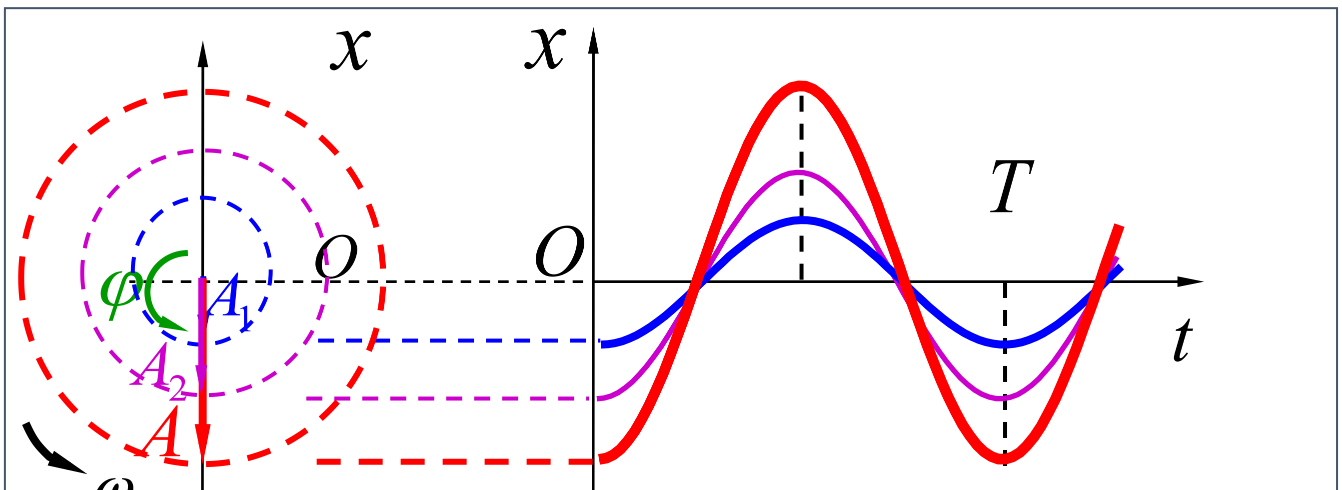
两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐振动

一、两个同方向同频率简谐振动的合成

讨　论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1) 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)$$

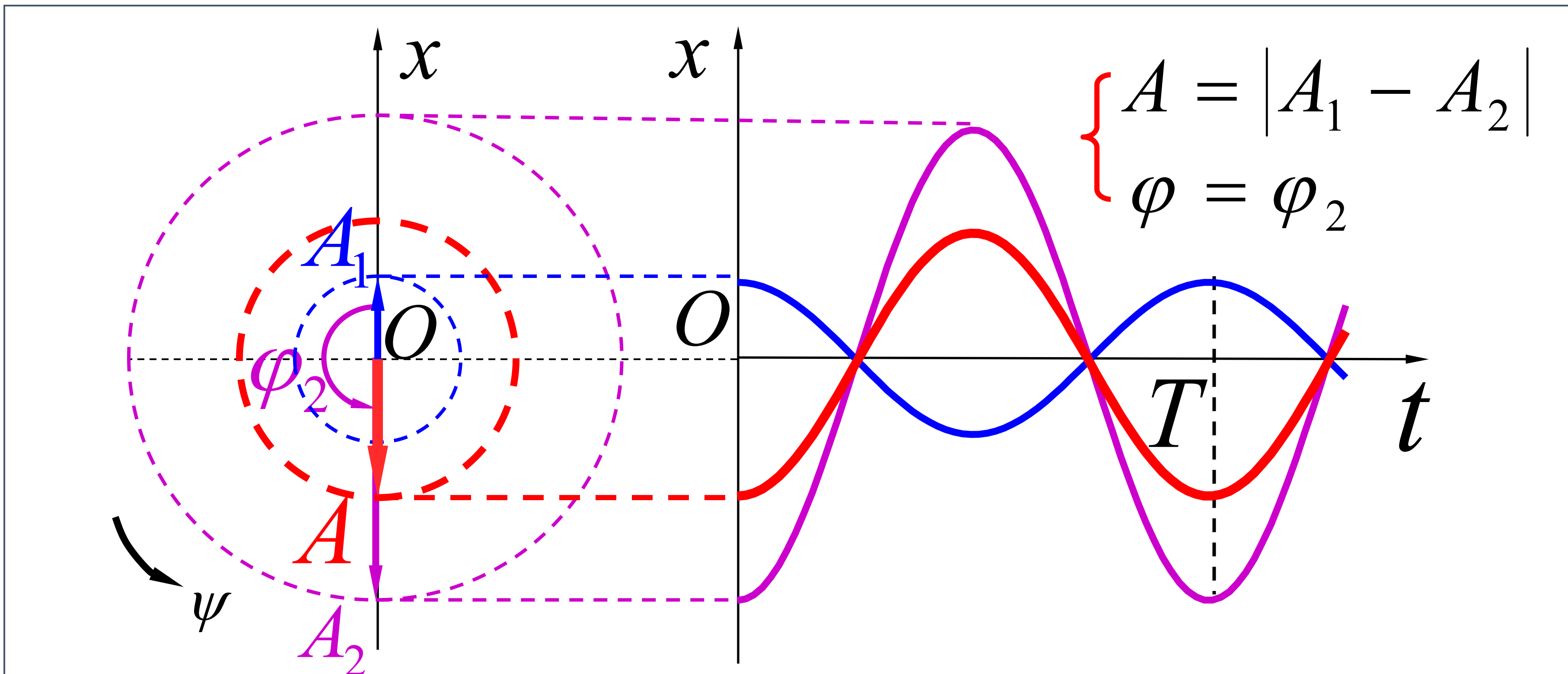
$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

讨　论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(2) 相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\psi t+\varphi_2)}$$



3.1.4 一维简谐振动的合成

讨 论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1) 相位差 $\Delta\varphi = 2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$

相互加强

(2) 相位差 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi \qquad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A = \left|A_1 - A_2\right|$$

相互减弱

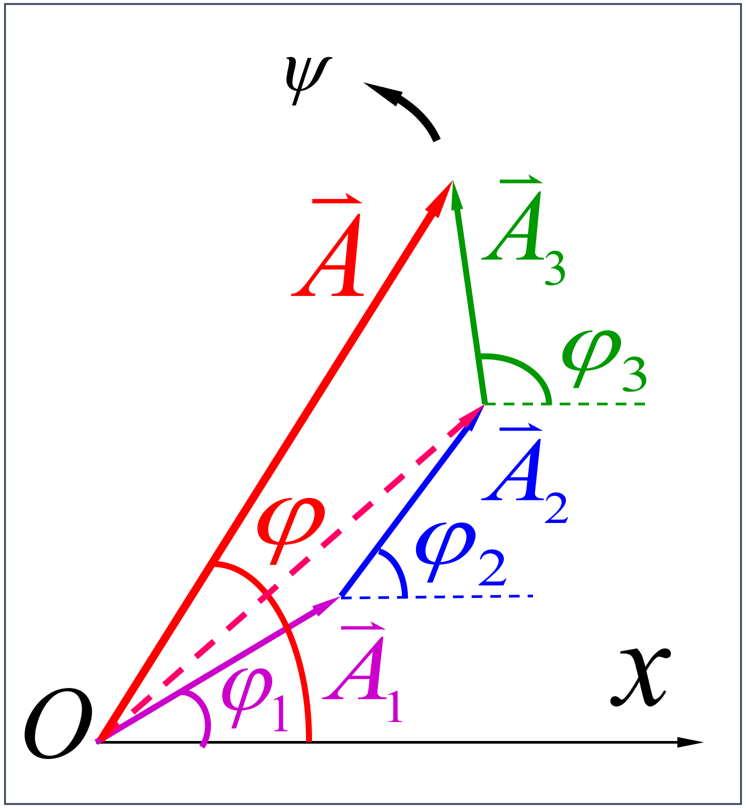
(3) 一般情况 $A_1 + A_2 > A > \left|A_1 - A_2\right|$

二、多个同方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\psi t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\psi t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\psi t+\varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\psi t+\varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

二、多个同方向同频率简谐振动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \psi t \\ x_2 = A_0 \cos(\psi t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\psi t + 2\Delta\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\psi t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$

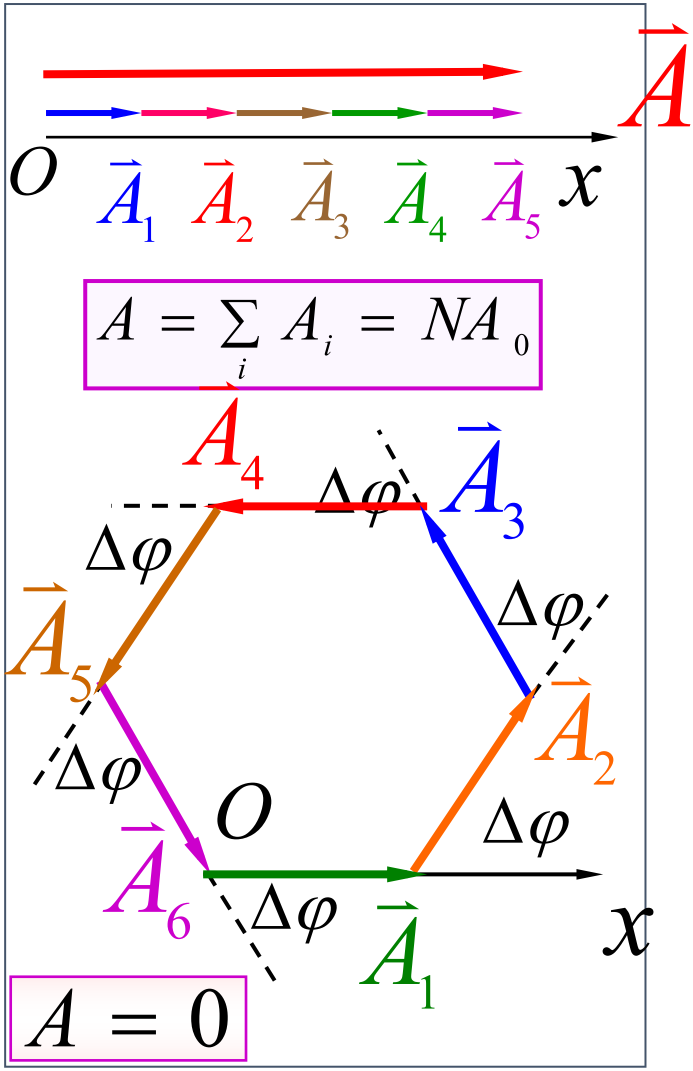
讨论

(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$



我们正青春年少

三、两个同方向不同频率简谐振动的合成

（1）解析法

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos\psi_1 t = A_1\cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2\cos\psi_2 t = A_2\cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos 2\pi\nu_1 t + A_2\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \underbrace{\left(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)}_{\text{振幅部分}}\cos 2\pi\underbrace{\frac{\nu_2+\nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}}t$$

三、两个同方向不同频率简谐振动的合成

（1）解析法

$$x = \underbrace{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

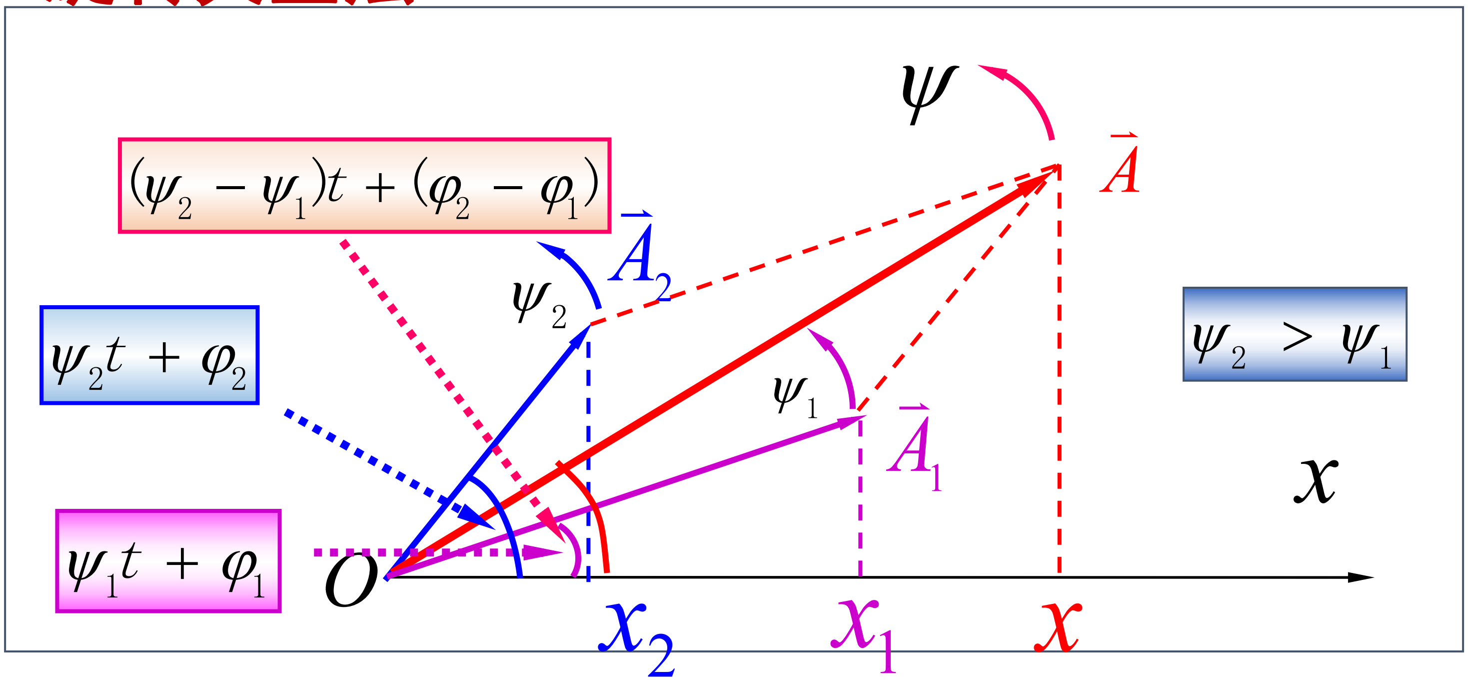
振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

$$\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$ ⇐ 拍频（振幅变化的频率）

三、两个同方向不同频率简谐振动的合成

（2）旋转矢量法



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \qquad \varphi_1=\varphi_2=0$$

$$\Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$$

三、两个同方向不同频率简谐振动的合成

（2）旋转矢量法

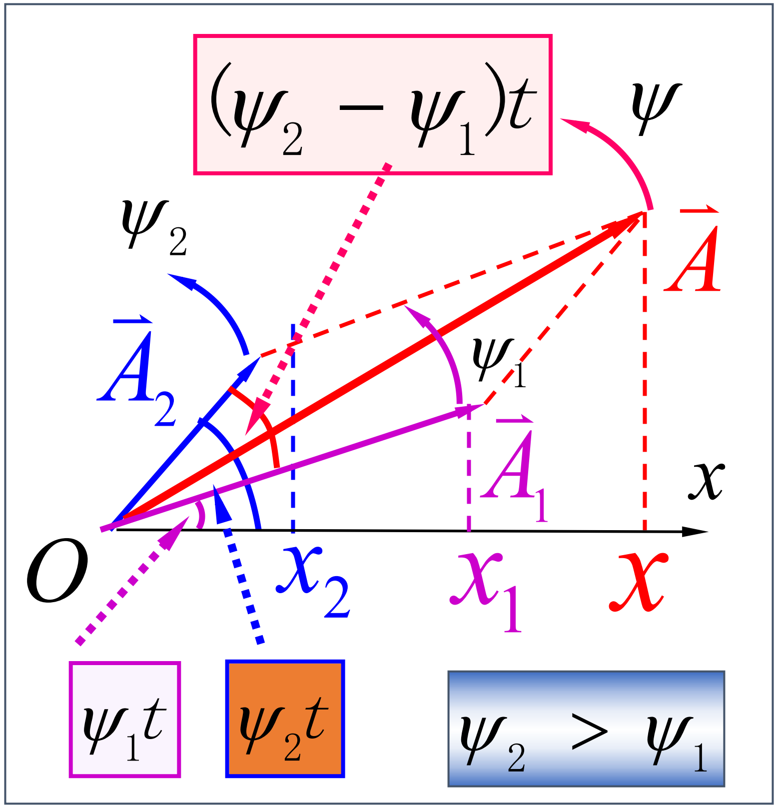
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=(\psi_2-\psi_1)t$$

$$A=A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$$

$$=\left|2A_1\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}t\right)\right|$$

拍频 ⇨ $\nu=\nu_2-\nu_1$



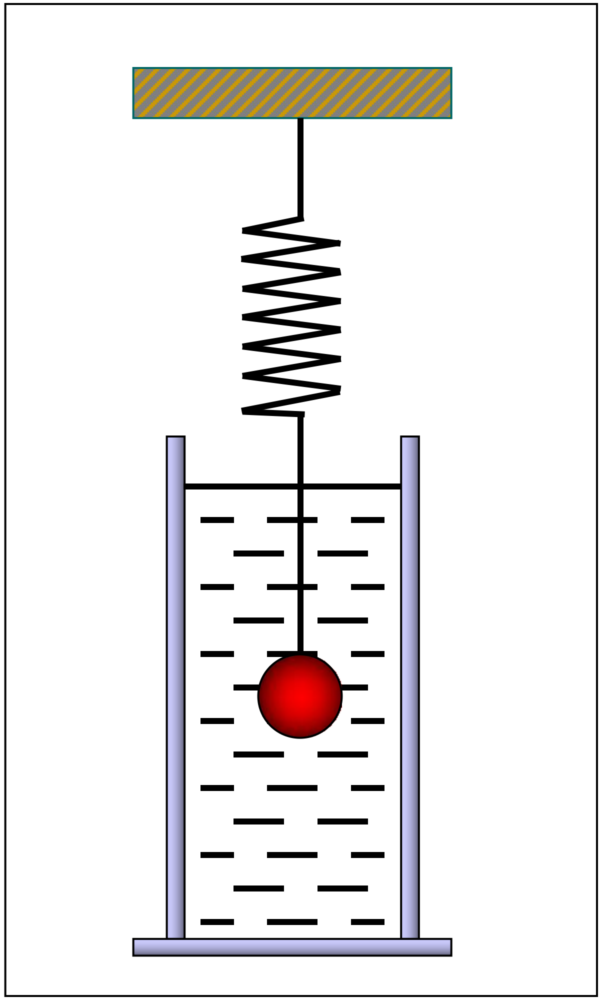
拍现象在声学和无线电技术中有广泛应用。

一、阻尼振动

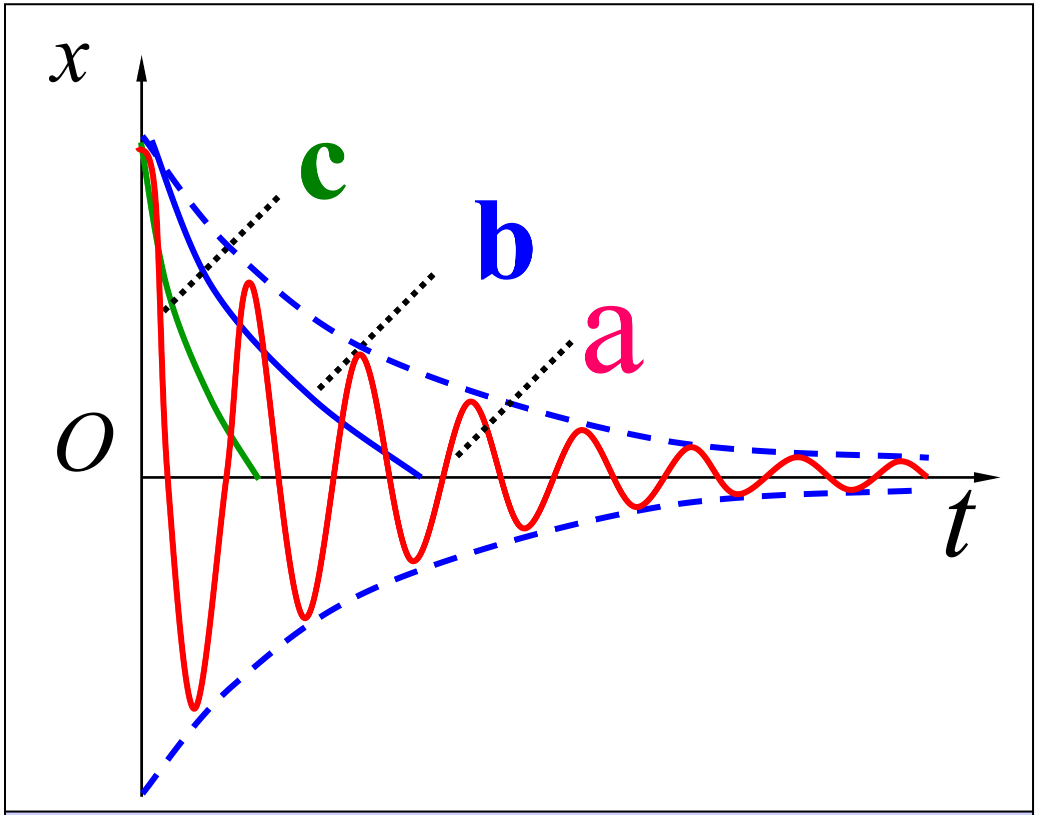
振动物体不受任何阻力的影响，只在回复力作用下所作的振动，称为**无阻尼自由振动**。

在回复力和阻力共同作用下的振动称为**阻尼振动**。

阻尼：消耗振动系统能量的原因。



一、阻尼振动

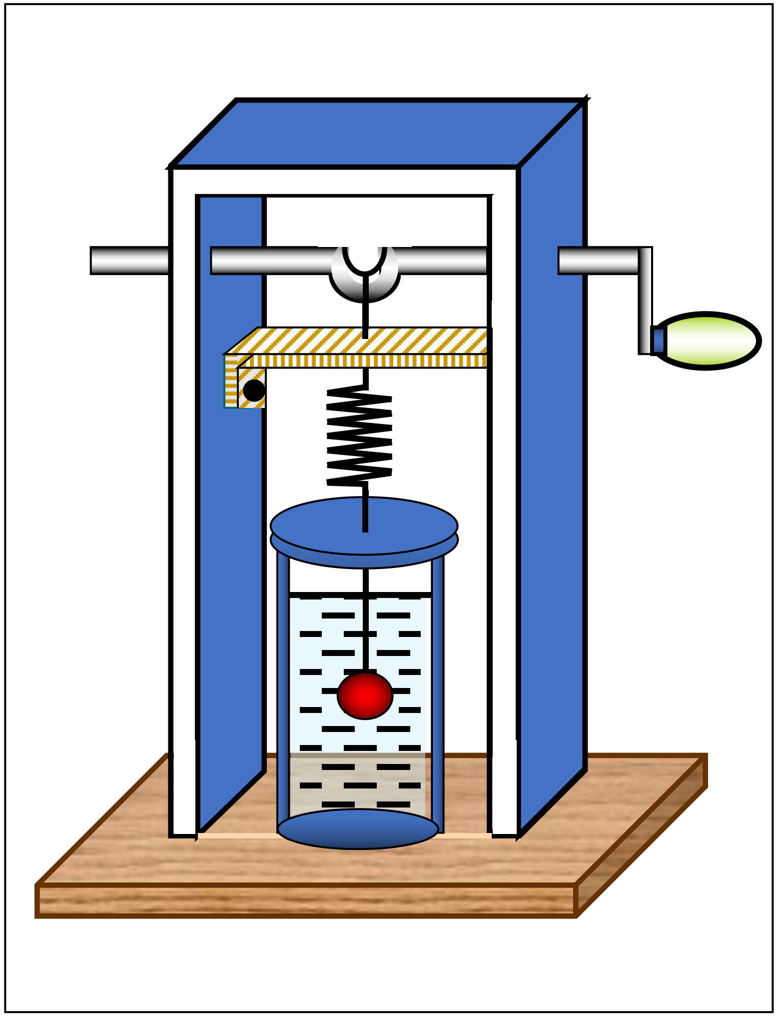


三种阻尼振动位移时间曲线

a — 欠阻尼 b — 过阻尼 c — 临界阻尼

二、受迫振动

系统在周期性外力作用下所进行的振动叫**受迫振动**(如扬声器中纸盆的振动、机器运转时引起基座的振动)。

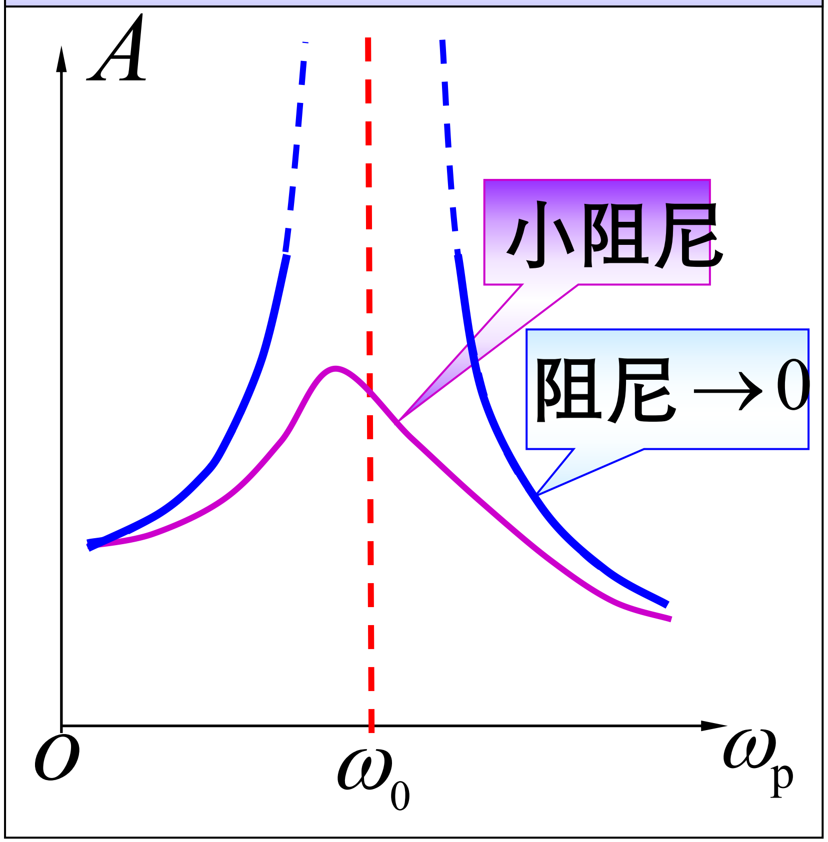


当受迫振动达到稳定后，振动的**振幅**保持稳定**不变**。

三、共振

当周期性外力的频率与振子的固有频率接近时，振子振幅显著增加，在某一频率时振子的振幅达到最大，这一现象称为共振现象，达到共振时的频率称为共振频率。

共 振 频 率



当阻尼趋于零时，共振频率等于系统的固有频率。