答案. 第一章历年考题.

2003-2004.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+4e^{-x}}{3e^x+2e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+4e^{-2x}}{3+2e^{-2x}}=\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+4e^{-x}}{3e^x+2e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+e^{2x}}{2+3e^{2x}}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+4e^{-x}}{3e^x+2e^{-x}}$ 不存在. 选D.

2.

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+2)=\ln2.$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+}[(1+x)^{\frac{1}{x}}-1]=e-1$ 选C.

3. $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\csc x-\cot x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}$

$=\dfrac{1}{2}$

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}+\arcsin\dfrac{2x-1}{4}$. 求$f(x)$的定义域.

$$\begin{cases}x+2>0.\quad x+2\neq1.\\9-x^2\geq0.\\-1\leq\dfrac{2x-1}{4}\leq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2.\quad x\neq-1\\-3\leq x\leq3\\-\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in[-\tfrac{3}{2},-1)\cup(-1,\tfrac{5}{2}]$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}[1+2+3+\cdots+(n-1)-\dfrac{n^2}{2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}[\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{n^2}{2}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}\cdot(-\dfrac{n}{2})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2n+4}=-\dfrac{1}{2}$

6. 证明: $\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ $\quad\therefore\forall\varepsilon_1>0.\ \exists N_1.$ 当$n>N_1$时有$|x_n|<\varepsilon_1$.

$\forall\varepsilon>0.$ 取$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0.$ $\exists N.$ 当$n>N$时有$|x_n|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$

$\therefore\forall\varepsilon>0.\ \exists N.$ 当$n>N$时. $|x_ny_n|=|x_n|\cdot|y_n|\leq|x_n|M<\dfrac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0.$

2004-2005

1. B. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$. $\exists N\in N^+$. 当 $n>N$. $|x_n-a|<\varepsilon$.

∴只有 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 这有限项在 a 的 ε 领域之外.

2. B. 无穷大一定无界. 无界不一定无穷大.

$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界. 当 $x\to0^+$ 时不是无穷大.

3. $g(x)=\dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=\dfrac{ah}{h}=a$

4. $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-(a^2+1)x+a}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^2x-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(x-a)(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+ax-1}{x+a}=\dfrac{a^2+a^2-1}{2a}=\dfrac{2a^2-1}{2a}=a-\dfrac{1}{2a}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^x}{\sin x}=\infty$ (第三章洛必达).

2005-2006.

1. B. 数列收敛 $\Rightarrow$ 有界. 反之不一定 $(1, -1, 1, -1, \cdots)$

2. B. $g(x)=n+\frac{1}{n^3}$. $f(x)=n+\frac{1}{n^2}$. $g(x)=n+\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

3. $\lim\limits_{x\to0^-}(2A+x^2)=2A$. $\lim\limits_{x\to0^+}(x\cos\frac{1}{x}+1)=1$. $2A=1$. $A=\frac{1}{2}$.

4. $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}\alpha$ ∴ $\alpha=-\frac{3}{2}$

5. 当 $x\in(-\infty,1)$. $y=x$. 其反函数为 $y=x$. $x\in(-\infty,1)$.

当 $x\in[1,4]$. $y=x^2$. 其反函数为 $y=\sqrt{x}$. $x\in[1,16]$

当 $x\in(4,+\infty)$. $y=2^x$ 其反函数为 $y=\log_2 x$. $x\in(16,+\infty)$.

$$\therefore y=\begin{cases} x & x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x} & x\in[1,16] \\ \log_2 x & x\in(16,+\infty) \end{cases}$$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{e^x}=1$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$. ∴ $y=1$为水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$. ∴ $x=0$为铅直渐近线.

8. 证明：∵ $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$. ∴ $\forall M_1>0$. $\exists \delta_1>0$. 当$x\in(a,a+\delta_1)$ 有 $f(x)<-M_1$.

∴ $\exists x_1\in(a,a+\delta_1)$. 有 $f(x_1)<0$.

∵ $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty$. ∴ $\forall M_2>0$. $\exists\delta_2>0$. 当$x\in(b-\delta_2,b)$ 有 $f(x)>M_2$.

∴ $\exists\ x_2>x_1$ 且 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 有 $f(x_2)>0$.

∵ $f(x)$在(a,b)上连续. ∴ $f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续. 而$f(x_1)<0$. $f(x_2)>0$

∴ 由零点定理. $\exists\xi\in(x_1,x_2)$. $f(\xi)=0$. 而$(x_1,x_2)\subset(a,b)$. ∴ $f(x)$在(a,b)内有零点.

2006—2007

1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等.

2. 0.

3. $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

2007—2008

1. B.

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+a)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=2.$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+a)=1+a=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+}bx=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=3$ 选B

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1. \ \therefore y=1\text{为水平渐近线}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty \ \therefore x=0\text{为铅直渐近线}\end{array}\right\}$ 选D.

4. D

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4}=e^{4}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x(1+x)^2}=\infty$

7. 证明：函数 $f(x)=\sin x+x+1$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内连续.

$f(-\frac{\pi}{2})=-1-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0$. $f(\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi}{2}+1>0$

由零点定理. 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一点 ξ. 使得 $f(\xi)=0$.

$\therefore$ 方程 $\sin x+x+1$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个实数根.

若 $\sin x+x+1=0$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内还有另一个实根 η. 不妨设 $\xi<\eta$.

$\because$ $\sin x+x+1$ 在 $[\xi,\eta]$ 上连续. 在 (ξ,η) 内可导. 且 $f(\xi)=f(\eta)=0$.

由罗尔定理. $\exists x_0$. $(\xi<x_0<\eta)$. $f'(x_0)=0$.

而 $f'(x)=\cos x+1\geq 1$. $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 矛盾.

$\therefore$ $\sin x+x+1=0$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内有唯一实数根.

2008–2009.

1. A. $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$.

2. B. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)=2$.

3.
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}(x\sin\tfrac{1}{x}+b)=b.\\ &\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\sin x=1\\ &f(0)=a\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$a=b=1$ 时. $f(x)$ 连续.

$a=1$ 时 $f(x)$ 不连续.

$a=b$ 时 $f(x)$ 不连续.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=e^{-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{1}=2$.

2008-2009 重考

1. B.

2. C. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

3. A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-1/e^{\frac{1}{x}}}{1+1/e^{\frac{1}{x}}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1$. 跳跃.

4. D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. $x=0$ 无定义. 可去间断点.

5. $-1\leq\frac{x-1}{2}\leq 1$. $-2\leq x-1\leq 2$. $-1\leq x\leq 3$.

6. $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n\sqrt{n}+3n-100}{(2+3n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n\sqrt{n}+3n-100}{9n^2+12n+4}=\frac{2}{9}$

2009-2010.

1. B. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

2. $\begin{cases}|x|-1>0\\4-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1 \text{ 或 } x>1\\x<4\end{cases}\Rightarrow D=(-\infty,-1)\cup(1,4)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\left[-(1+\sqrt{1+x^2})\right]=-2$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-2}}{e}=e^{-3}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$

2010—2011.

1. C. $\begin{cases} -1\le \frac{x}{3}\le 1 \\ \frac{x}{x-2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\le x\le 3 \\ x<0 \text{ 或 } x>2 \end{cases} \Rightarrow D=[-3,0)\cup(2,3]$.

2. B. $\lim_{n\to\infty} a^n=0$. $|a|<1$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}}=1$.

3. 令 $1-x=t$. $x=1-t$ $f(t)=\frac{1-t+1}{2(1-t)-1}=\frac{2-t}{1-2t}$ $\therefore f(x)=\frac{2-x}{1-2x}$

4. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+ax}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{1}{2}ax}=\frac{4}{a}=1$. $\therefore a=4$

5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$. $y=0$ 为水平渐近线

6. $\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}$

7. $\lim_{x\to2}\frac{x^2}{4x-1}\sin\frac{1}{x}=\frac{2^2}{4\times2-1}\sin\frac{1}{2}=\frac{4}{7}\sin\frac{1}{2}$

2013—2014.

1. C.

2. C. $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$. $\lim\alpha=0$.

3. C $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-\frac{x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(x-1)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3-x^2}{x^3-x^2+x-1}=-1$

4. D.

5. $x(x-4)\ge0$. $\Rightarrow \begin{cases} x\ge0 \\ x-4\ge0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\le0 \\ x-4\le0 \end{cases} \Rightarrow D=(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

6. $\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$.

7. $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}$.

2013-2014 查考.

1. A. $g(x)=f(x)-f(-x)$. $g(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-g(x)$. ∴奇函数

2. C $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$; $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$. $(\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty)$.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2^x-1}=\infty$.

3. A. $f(0)=\lim\limits_{x\to0}(2+x^2)^{-\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{-\frac{2}{x^2}\ln(2+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\ln(2+x^2)}{x^2}}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2x)^{10}(1+3x)^{20}}{(1+6x^2)^{15}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(1+2x)^{10}}{x^{10}}\cdot\frac{(1+3x)^{20}}{x^{20}}}{\frac{(1+6x^2)^{15}}{x^{30}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{x})^{10}\cdot(3+\frac{1}{x})^{20}}{(6+\frac{1}{x^2})^{15}}=\frac{2^{10}\times3^{20}}{6^{15}}$

$=(\frac{3}{2})^5$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}{x}=\lim\limits_{x\to0}2(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})=4\sqrt{5}$

2014-2015.

1. A. $\begin{cases}x\neq0\\1-x^2\geq0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\neq0\\-1\leq x\leq1\end{cases}\Longrightarrow D=[-1,0)\cup(0,1]$

2. B. 单调有界数列必有极限. 数列收敛 ⟹ 有界.

3. D. $f(0)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot(-1)}=e^{-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x}{2x^4-3x^2+1}=\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{\sqrt{x+7}-\sqrt{7}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x(\sqrt{x+7}+\sqrt{7})}{x}=6\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+7}+\sqrt{7})=12\sqrt{7}$.

2015—2016

1. D. $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x+\frac{|x|}{x})=\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x+1)=1$. $\lim\limits_{x\to0^-}(\sin x+\frac{|x|}{x})=\lim\limits_{x\to0^-}(\sin x-1)=-1$

2. A $\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+k)=k$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{2x})^{3x}}{(1+\frac{1}{2x})^{3x}}=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-2x})^{-2x}\right]^{-\frac{3}{2}}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{2x})^{2x}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}}=e^{-3}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=\frac{-1}{\ln 1+1+1}=-\frac{1}{2}$

2016—2017.

1. $\begin{cases}x\neq0\\3-x\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq0\\x\leq3\end{cases}\Longrightarrow D=(-\infty,0)\cup(0,3]$

2. $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$. $x>0$. $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{\frac{1}{x}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)(x+1)}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

2016-2017 壹季

1. $f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=x^2+1$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+2x^2)=a$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=e^{-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\pi\sin(\pi x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$

2017-2018.

1. $e^{2x}-1\sim 2x$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)}\cdot\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=1$ 为可去间断点

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+3)}=\infty$. $\therefore x=-3$ 为无穷间断点.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 6x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{3x}=2$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

2017-2018 (16周).

1. $f[f(x)]=\dfrac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{1+x}{1+2x}=\dfrac{x}{1+2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. $x=0$ 为可去间断点.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{-2}=\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1-x^2}=0$. $\therefore y=0$ 是水平渐近线.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{-\frac{x}{2}}\cdot(-1)}=e^{-1}$.

5. $1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{a(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{a(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{a(1+x)}=\dfrac{1}{2a}$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$

$\left(\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{4}\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 3^n}\right)=\dfrac{3}{2}$

2017-2018 (重考).

1. $1-\cos\sqrt{2x}\sim\frac{1}{2}\cdot(2x)=x$ $(x\to 0)$.

2. $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\dfrac{1-x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 6x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2x}=3$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-x^2-4}{x^2(\sqrt{4-x^2}+2)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}+2}=-\dfrac{1}{4}$

$\left(\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x^2}}=-\dfrac{1}{4}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-2}=\dfrac{1}{2}$

2018—2019

1. $\begin{cases} \frac{1}{1-x}>0 \\ x+2\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\geqslant -2 \end{cases} \Rightarrow D=[-2,1)$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}\cdot 2}=e^2$

3. $a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}+1)=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}$

or $(e^x-1\sim x)$ $\left(=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}-\frac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n}-\frac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2018—2019.

1. $\begin{cases} x+2>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow D=(-2,3)$ 选 A.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{a\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{a\cdot(\frac{x}{2})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot 2}{\frac{a}{4}x^2}=\frac{4}{a}$ $\therefore a=4.$

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax-1)=a-1$. $a=2$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2-3}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

or $\left(\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$

or $\left(=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{2}{x-1})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x-1}}=e^2\right)$

or $\left(=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{x+1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2\right)$

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

7. 证明：设 $f(x)=x^5-3x-1$

$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，$f(1)=-3<0$，$f(2)=32-6-1=25>0$.

由零点定理，$\exists\, \xi\in(1,2)$，$f(\xi)=0$，$\therefore x^5-3x=1$ 至少有一个根介于1和2之间.

2018-2019（重考）.

1. $\begin{cases}4-x^2\geq0\\ x\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq2\\ x\neq0\end{cases}\Rightarrow D=[-2,0)\cup(0,2]$

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}}=e^2$

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\sin x+1\right)=2=f(0)=1+a$，$\Rightarrow a=1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x-x}{x(e^x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^{2x}-e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4e^{2x}-e^x}{e^x+e^x+xe^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{4e^x-1}{2+x}=\frac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$

2019-2020 (16周).

1. $0 \le \ln x \le 1$. $1 \le x \le e$ $D=[1,e]$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+a) = a$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x-1}{x^2+2x+b}=\infty$. ∵ $x=-3$ 是唯一铅直渐近线 ∴ $x^2+2x+b=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$

∴ $b=-3$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x}=\frac{1}{2}$ ($\sqrt{1+\sin x}-1 \sim \frac{1}{2}\sin x$. $\arcsin x \sim x$).

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{e^2}{e}=e$

2019-2020.

1. $f(\frac{1}{x})=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 令 $\frac{1}{x}=t$. $x=\frac{1}{t}>0$ ∴ $t>0$.

$f(t)=\frac{\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}}{\frac{1}{t}}=t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\sqrt{1+t^2}$ ∴ $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2}$ 、 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{x+1}=\infty$

∴ $x=-1$ 为铅直渐近线.

3. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2^x\ln 2+3^x\ln 3)=\ln 2+\ln 3\ne 1$. 同阶不等价.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x^2}-1}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x^2}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.