高数常用公式

高数叔

當時得令

考試必過 學霸附體

基础不定积分公式

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad \mu \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

重要的极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

等价无穷小替换

当 $x \to 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x$$

$$x \sim \tan x \sim \arctan x$$

$$x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$$

$$(1-\cos x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$[(1+x)^{\alpha} - 1] \sim \alpha x$$

$$(a^x - 1) \sim x\ln a$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x$$

万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

基础导数公式

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln a}$$

积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

两角和与差

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$=1-2\sin^2\alpha$$

泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间）

麦克劳林公式

带有拉格朗日型余项

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$

带有皮亚诺型余项

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

常用函数的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

打开微信学高数

莱布尼茨定理

$$(u\cdot v)^n=u^n v+nu^{n-1}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{n-2}v^k+\cdots+uv^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k$$

二项式定理　　对任何正整数 n

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

整数幂的差

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\qquad n>0$$