第三章
机械振动及
机械波

1 3.1 机械振动

2 3.2 机械波

机械波主要研究机械波的**形成及传播规律**，核心问题是通过振源的**振动方程**及波的**传播过程**求解**波动方程**。

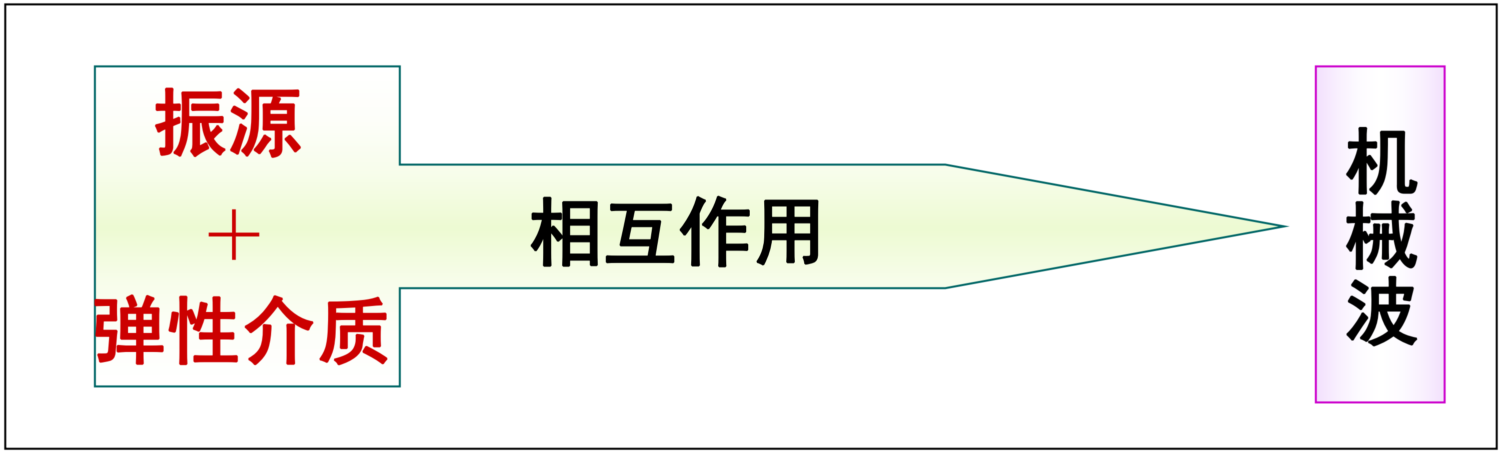
克里斯蒂安·惠更斯
（1629.04.14-1695.07.08）

一、机械波的形成

（1）机械波的产生条件是：1）**振源**；2）**弹性介质**；

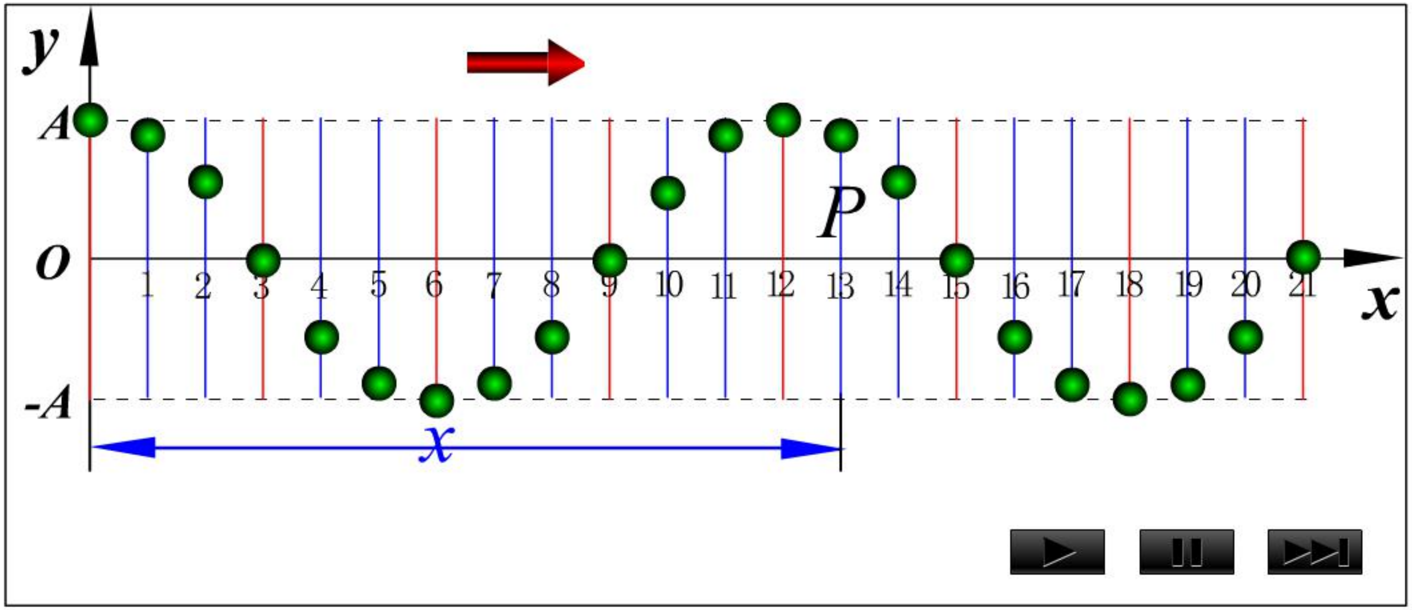
（2）机械波是在**振源**的带动下**弹性介质**中相邻质元**振动状态**由近及远的传播过程；

（3）弹性介质中的**质元**并不随机械波传播。



二、横波　纵波

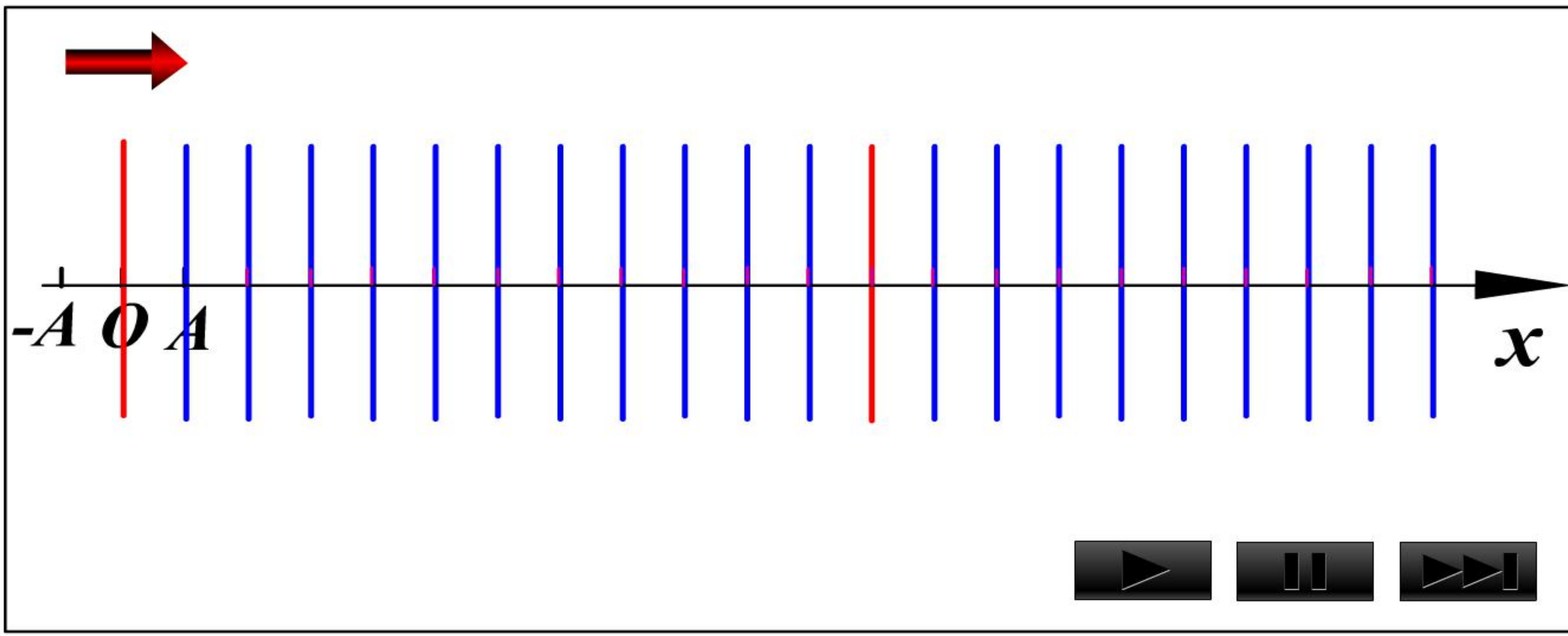
质元振动方向与波的传播方向相垂直的波称为横波（仅在固体中传播 ）。



➢ 特征：具有交替出现的波峰和波谷。

二、横波　纵波

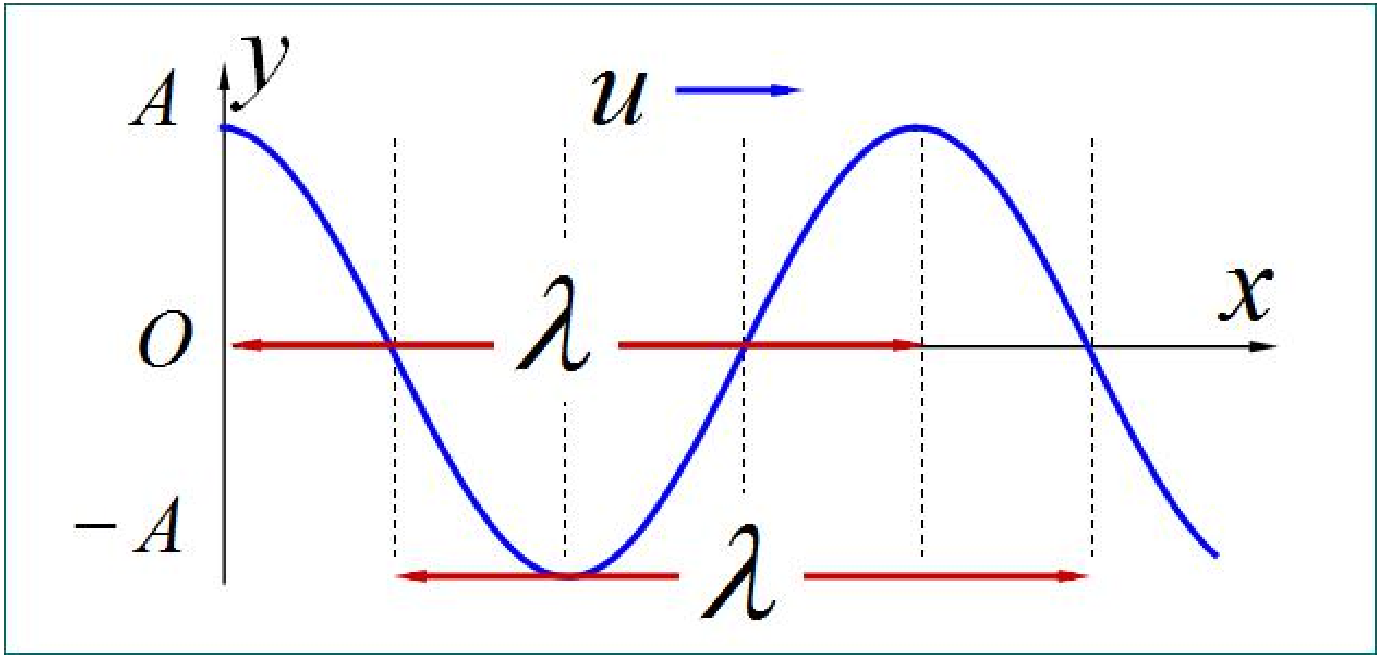
质元振动方向与波的传播方向互相**平行**的波称为纵波（可在**固体、液体**和**气体**中传播 ）。



- 特征：具有交替出现的密部和疏部。

三、波长　波的周期和频率　波速

➢ 波形图：y 表示各质点相对其平衡位置 x 的**位移**（横波和纵波均可用）。



波长 λ：沿波的传播方向，两个相邻的、相位差为 2π 的振动质点之间的距离，即一个完整波形的长度。

三、波长　周期和频率　波速

- **周期** T：波前进一个波长的距离所需要的时间。

- **频率** ν：周期的倒数，即单位时间内波动所传播的完整波的数目。

$$\nu = 1/T$$

- **波速** u：波动过程中，某一振动状态（即振动相位）单位时间内所传播的距离。

$$\boxed{u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu}$$

三、波长　周期和频率　波速

- 周期和频率由**振源**决定，而波长和波速由**介质**决定。

固体：

$u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$　切变模量　横波

$u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$　弹性模量

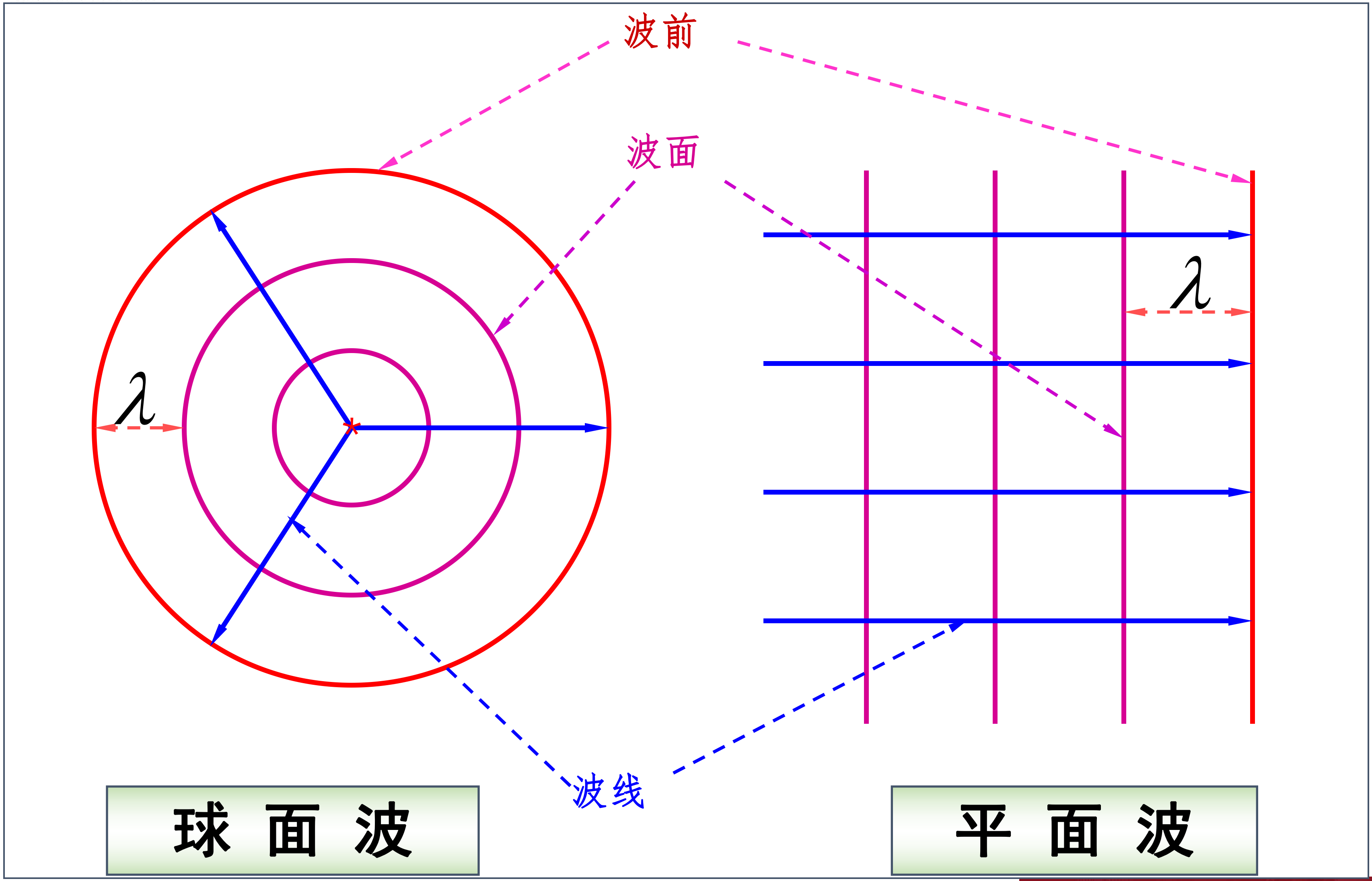
液、气体：

$u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$　体积模量

纵波

一般情况下，机械波在不同介质中的**传播速度**，固体中最大，液体中次之，气体中最小。

四、波线　波面　波前



例 在室温下，已知空气中的声速为$340m/s$，水中的声速为$1450m/s$，求频率为$20Hz$和 $20000Hz$ 的声波在空气中和水中的波长各为多少？

解： 由 $\lambda=\dfrac{u}{\upsilon}$ 得

两种频率的声波在空气中的波长分别为：

$$\lambda_1=\frac{u_1}{\nu_1}=\frac{340m\cdot s^{-1}}{20Hz}=17\ \mathrm{m} \qquad \lambda_2=\frac{u_1}{\nu_2}=\frac{340m\cdot s^{-1}}{20000Hz}=0.017\ \mathrm{m}$$

两种频率的声波在水中的波长分别为：

$$\lambda_1'=\frac{u_2}{\nu_1}=\frac{1450\mathrm{m}\cdot \mathrm{s}^{-1}}{20Hz}=72.5\ \mathrm{m} \qquad \lambda_2'=\frac{u_2}{\nu_2}=\frac{1450\mathrm{m}\cdot \mathrm{s}^{-1}}{20000Hz}=0.0725\ \mathrm{m}$$

一、平面简谐波波函数的定义

- 在均匀的、无能量吸收的弹性介质中，振源作简谐振动时在弹性介质中形成的机械波称为简谐波。

- 波面为平面的简谐波称为平面简谐波，是一种最简单、最基本的简谐波。

- 球面简谐波可以看成是沿各个方向平面简谐波的叠加。

各种不同的简谐波 $\underset{\text{分解}}{\overset{\text{合成}}{\rightleftharpoons}}$ 复杂波

一、平面简谐波波函数的定义

介质中任一坐标为 x 的质元相对其平衡位置的位移 y 随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为**波函数**。

$$y = y(x,t)$$

各质点相对平衡位置的**位移**

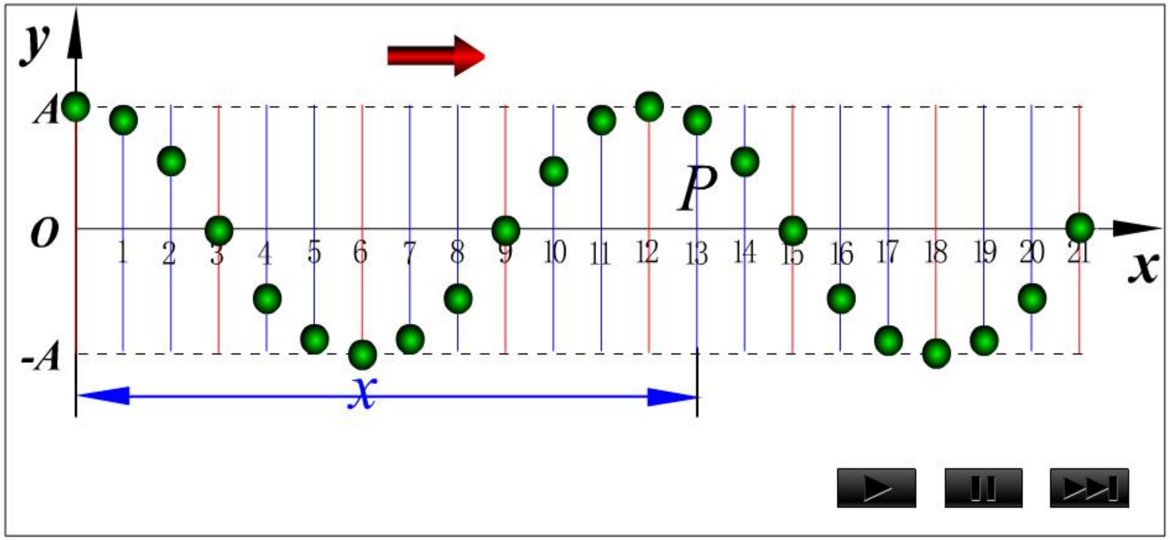
波线上各质点**平衡**位置

➢ 平面简谐波的**波函数**和**振动速度**定量描述了弹性介质中各质元的**振动状态**。

二、平面简谐波波函数的计算

（1）时间延迟法

如图所示，以速度u沿x轴正方向传播的平面简谐波。



振源*O*的振动方程

$$y_0 = A\cos\psi t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$$

点*P*的振动方程

$$y_P(t) = y_0(t-\Delta t) = A\cos\psi(t-\frac{x}{u})$$

➢ **波函数** $y = A\cos[\psi(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

我们正青春年少

二、平面简谐波波函数的计算

（1）时间延迟法

同理，以速度u沿x轴负方向传播平面简谐波的波函数为：

$$y = A\cos[\psi(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

➢ 振动速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin[\psi(t\mp\frac{x}{u})+\varphi]$$

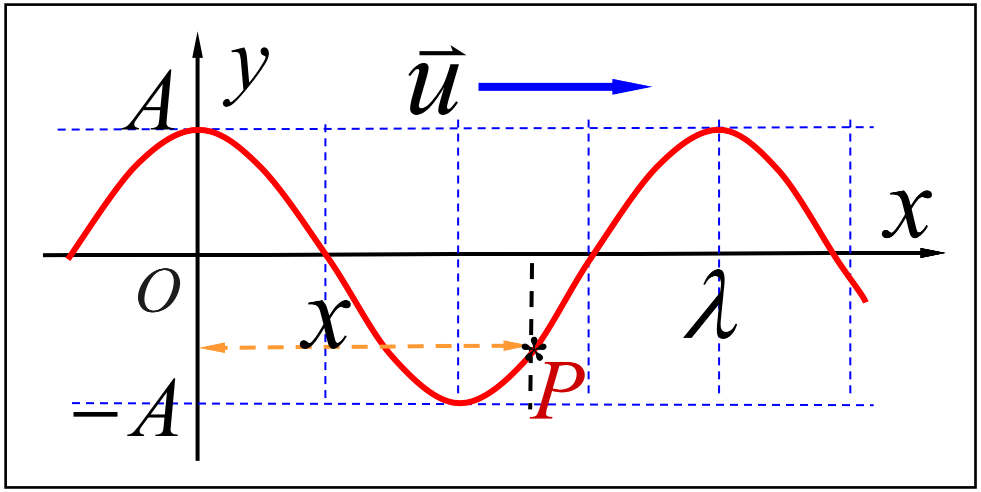
➢ 振动加速度

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos[\psi(t\mp\frac{x}{u})+\varphi]$$

二、平面简谐波波函数的计算

（2）相位落后法

如图所示，以速度 u 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波。



振源 O 的振动方程

$$y_0 = A\cos\omega t$$

$\Delta\varphi = -2\pi\dfrac{x}{\lambda}$

点 P 的振动方程

$$y_P = A\cos(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})]$$

➢ 波函数 $y = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi]$

二、平面简谐波波函数的计算

（2）相位落后法

同理，以速度u 沿 x 轴负方向传播平面简谐波的波函数为：

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

➢ 振动速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T} A\sin[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

➢ 振动加速度

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

三、平面简谐波波函数的物理意义

$$y = A\cos[\psi(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

（1）当 x一定时，波函数表示该点处质元的**振动方程**，并给出该点与点 0 振动的**相位差**

$$\Delta\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

$y(x,t) = y(x,t+T)$ （机械波具有**时间**的周期性）

三、平面简谐波波函数的物理意义

$$y = A\cos[\psi(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\,\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

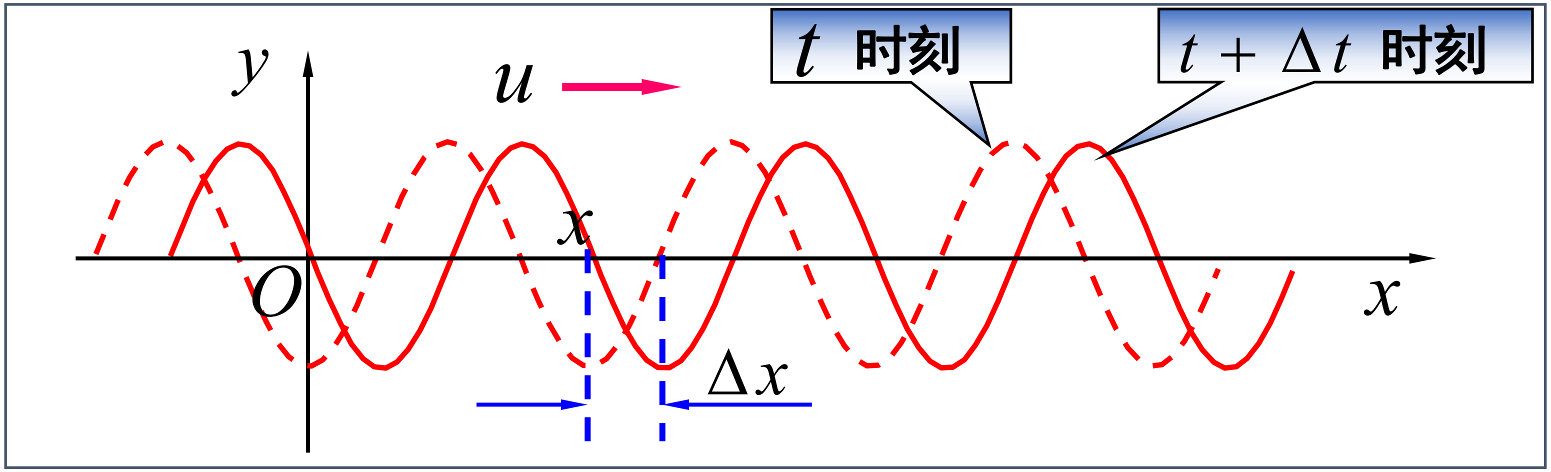
（2）当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点处质元相对其平衡位置的**位移**，并给出各质元间振动的**相位差**

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = -2\,\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\,\pi\frac{\Delta x_{12}}{\lambda}$$

$y(x,t) = y(x+K\lambda,t)$（机械波具有**空间**的周期性）

三、平面简谐波波函数的物理意义

（2）若x和 均变化，波函数表示波形沿传播方向的**运动情况**。

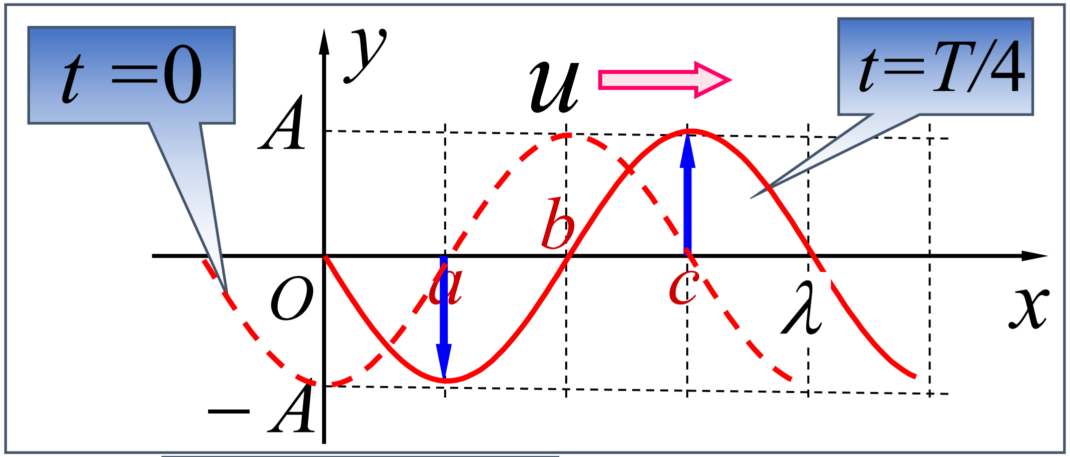


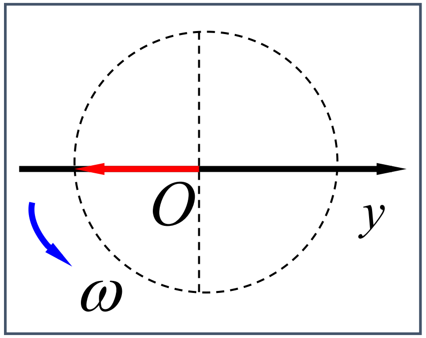
$y(x,t)=y(x+K\lambda,t+KT)$（机械波具有**时空**的周期性）

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

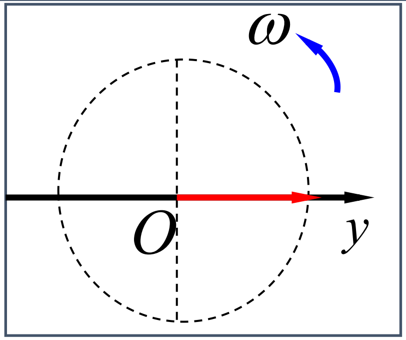
三、平面简谐波波函数的物理意义

讨 论 如图简谐波以余弦函数表示，**求** O、a、b、c 各点振动**初相位** $\varphi(-\pi \sim \pi)$

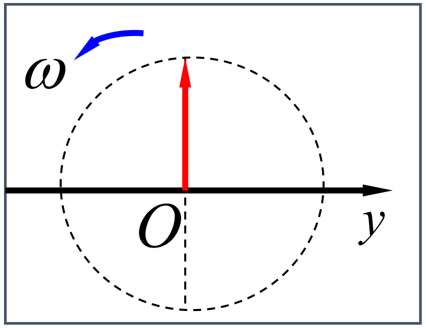




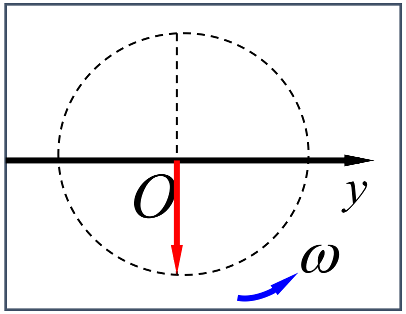
$$\varphi_O = \pi$$



$$\varphi_b = 0$$



$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



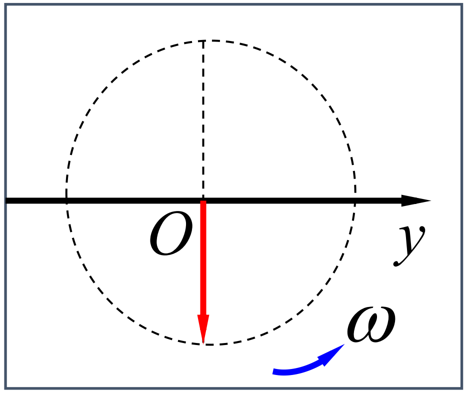
$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

例 一平面简谐波沿 x 轴负方向传播，已知振幅 $A=3.0\text{m}$，周期 $T=1.0\text{s}$，波长 $\lambda=2.0\text{m}$，在 $t=0$ 时坐标原点处的质元位于平衡位置并沿轴正方向运动。求：(1) 波函数；(2) 波形图；(3) 处质元的振动方程及曲线。

解： (1) 根据题意 $y=0$、$v=\dfrac{\partial y}{\partial t}>0$，由旋转矢量法得

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

代入 $y=A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda})+\varphi]$ 得：



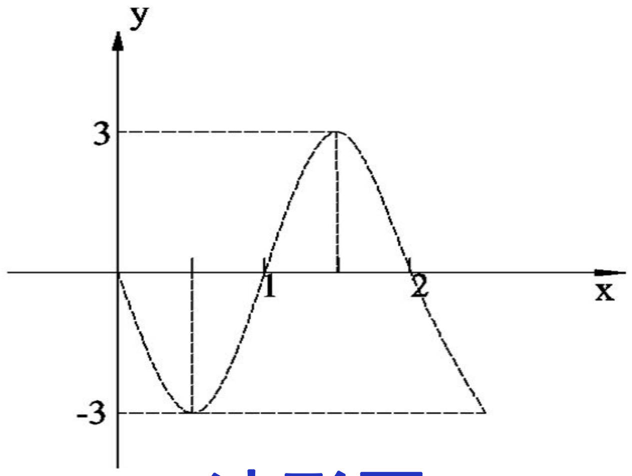
$$y=3.0\cos[2\pi(t+\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\text{m}$$

解： (2) $t=1.0\text{s}$，波函数为

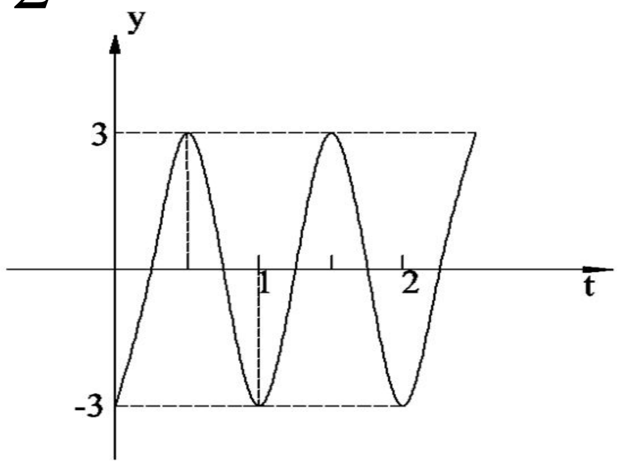
$$y=3.0\cos[2\pi(1-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]m=3.0\cos(-\pi x+\frac{3\pi}{2})m$$

(3) $x=0.5\text{m}$，振动方程为

$$y=3.0\cos[2\pi(t-\frac{0.5}{2.0})-\frac{\pi}{2}]m=3.0\cos(2\pi t-\pi)m$$



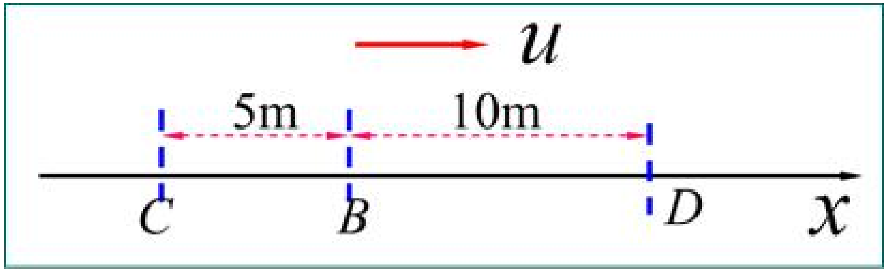
波形图



振动曲线

例 一平面简谐波以速度$u=10\text{m}/\text{s}$沿直线传播，波线上B点处质元的简谐振动方程为：$y_B=2.0\times10^{-2}\cos(2\pi t+\frac{\pi}{3})\text{m}$

求：1）以B点为坐标原点，写出波函数；2）以C点为坐标原点，写出波函数；3）分别写出BC和CD两点处质元的相位差。



解： (1) 根据题意 $T=1.0\text{s}$，

$\lambda=uT=10\text{m}$，代入

$$y=2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(t-\frac{x}{\lambda})+\frac{\pi}{3}]\text{m}$$

以B点为坐标原点，波函数为：

$$y=2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]\text{m}$$

解： (2) 将 $x=-5\text{m}$，代入波函数得C点振动方程

$$y_C = 2.0\times10^{-2}\cos(2\pi t + \frac{4\pi}{3})\text{m}$$

以C点为坐标原点，波函数为：

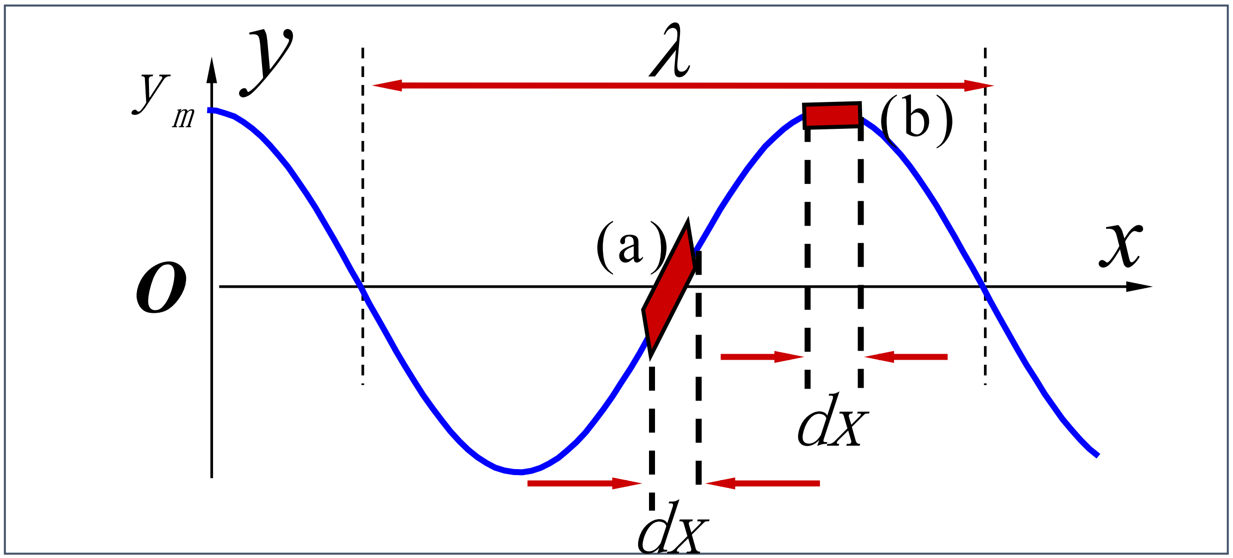
$$y = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(t - \frac{x}{10}) + \frac{4\pi}{3}]\text{m}$$

(3) $$\varphi_{BC} = \varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{5}{10} = -\pi$$

$$\varphi_{CD} = \varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-15}{10} = 3\pi$$

一、波动能量的传播

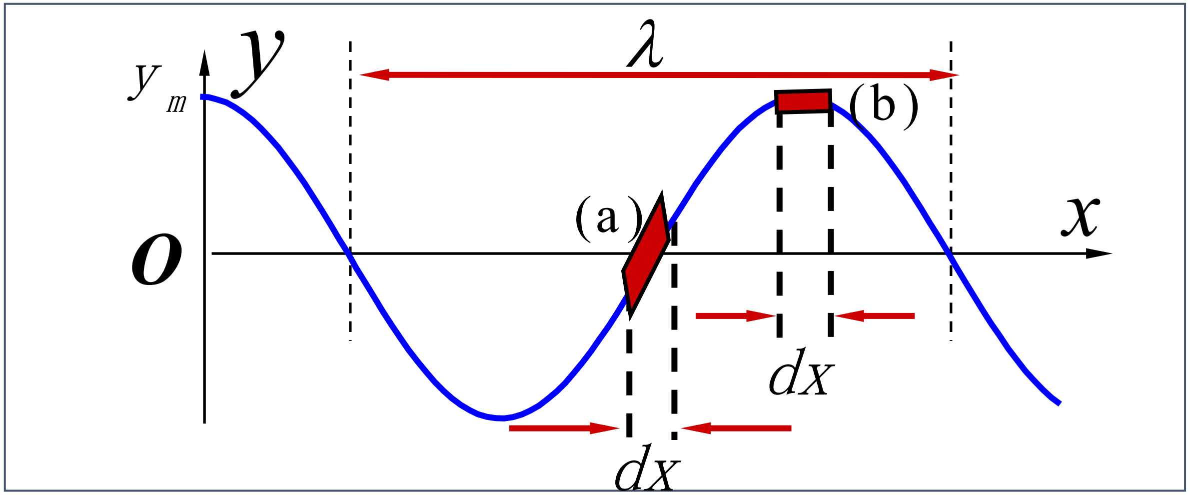
（1）波动能量的传播规律



➢ 波源从平衡位置开始每经过T/4把其机械能传递给弹性介质中相邻质元，再在该质元带动下由近及远的传递给其它质元，在波的整个传播过程中质元的机械能不再守恒。

一、波动能量的传播

（1）波动能量的传播规律



- 质元在平衡位置（a）时，动能、势能和机械能均最大；
- 质元在位移最大处（b）时，三者均为零；
- 波动是能量传递的一种方式。

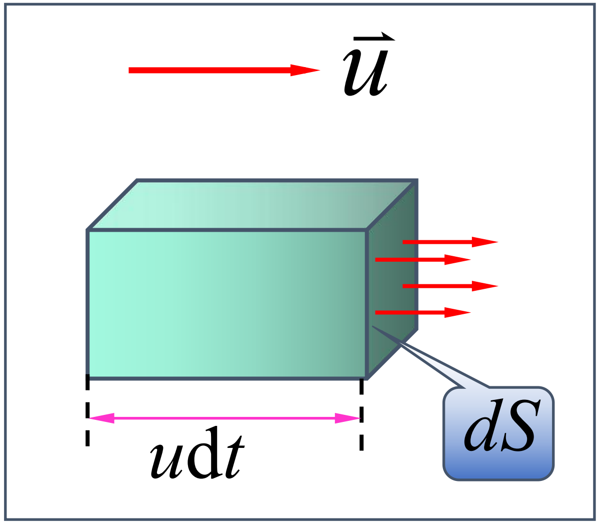
一、波动能量的传播

（2）能流　能流密度

- **能流 (P)**：单位时间内垂直通过某一面积的能量，单位是 $J \cdot s^{-1}$。

- **平均能流**：

$$\boxed{\overline{P} = \overline{w} u S}$$



- **能流密度 (I)**：通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流，单位是 $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$。

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{dSdt} = \frac{\frac{1}{2} m\psi^2 A^2}{dSdt} = \frac{\frac{1}{2} \rho u dt dS \psi^2 A^2}{dSdt} = \frac{1}{2}\rho u \psi^2 A^2$$

二、声波　声强级

（1）声波的定义及类型

- 在弹性介质中传播的机械纵波统称为声波。

根据其**频率**，声波可分为：

超声波

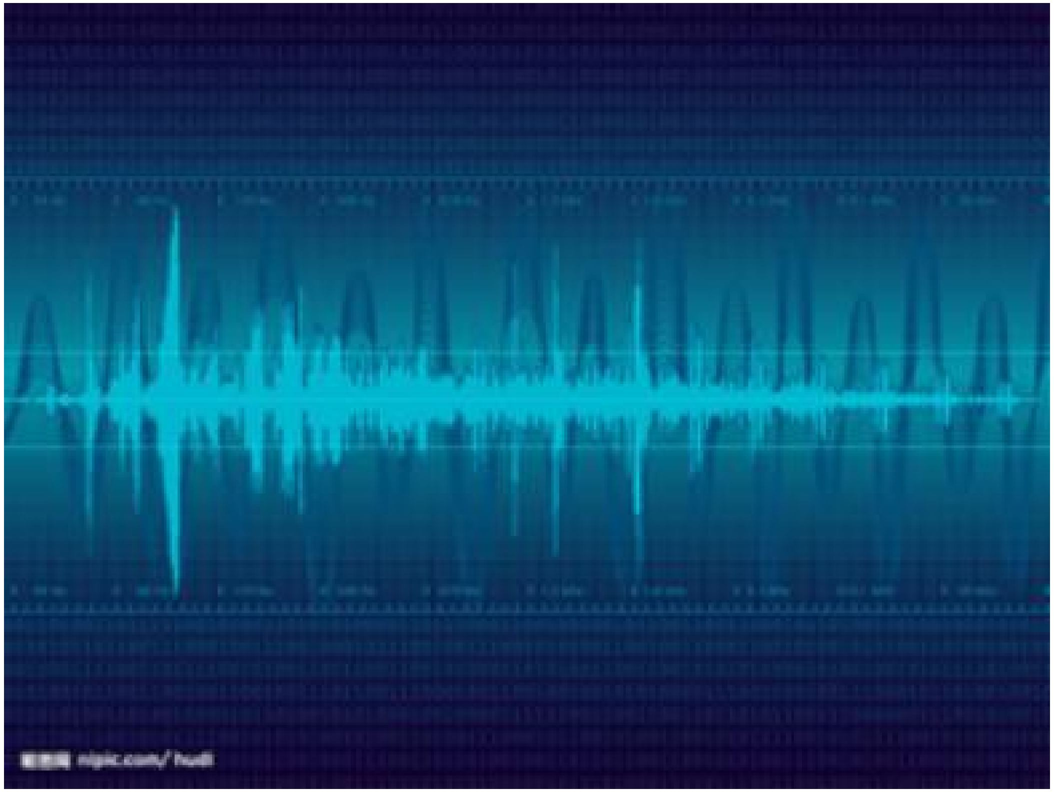
(高于20000Hz)、

可闻声波

(20~20000Hz)、

次声波

(低于20Hz)。



二、声波　声强级

（2）声强　声强级

- 声波的能流密度称为**声强**，能够引起人类听觉的声强范围是 $10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}} \sim 1\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$。

- 声波的声强和基准声强 $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ 比值的对数定义为**声强级**，即

$$L_I = \lg\frac{I}{I_0}$$

单位：贝尔（B）

$$L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}$$

单位：分贝（dB）

二、声波　声强级

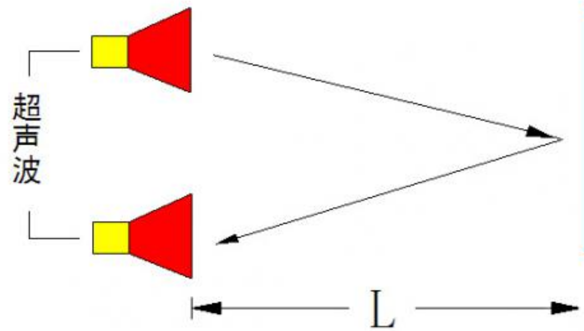
几种声音近似的声强、声强级和响度

声源	声强W/m^{-2}	声强级/dB	响度
引起痛觉的声音	1	120	
摇滚音乐会	10^{-1}	110	震耳
交通繁忙的街道	10^{-5}	70	响
通常的谈话	10^{-6}	60	正常
耳语	10^{-10}	20	轻
树叶的沙沙声	10^{-11}	10	极轻
引起听觉的最弱声音	10^{-12}	0	

二、声波　声强级

（3）声波在科学研究及生产生活中的应用

➢ 1）超声波的应用

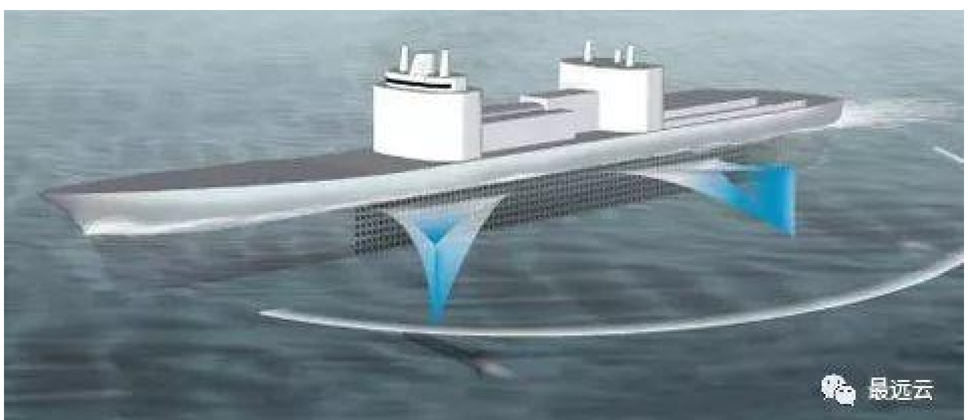


我们正青春年少

二、声波　声强级

（3）声波在科学研究及生产生活中的应用

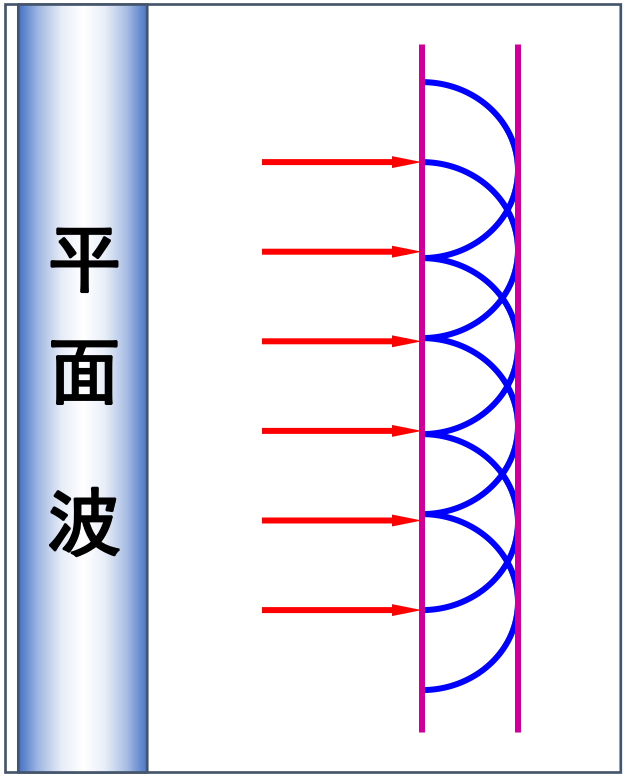
- 2）次声波的应用

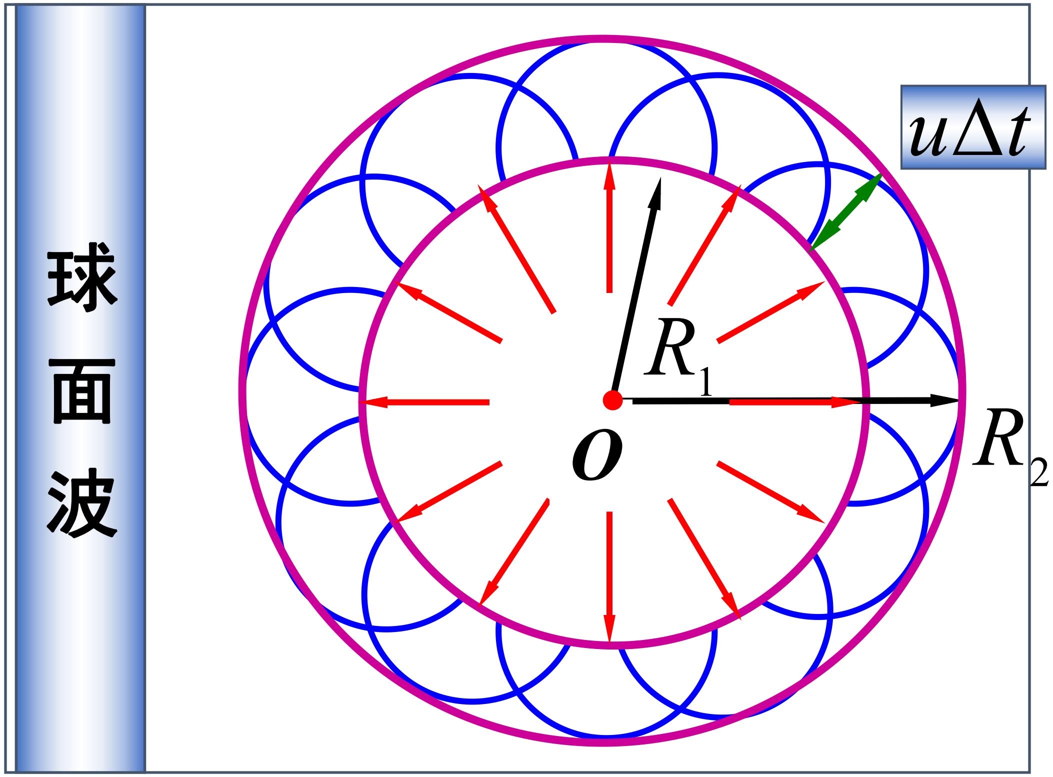


我们正青春年少

一、惠更斯原理

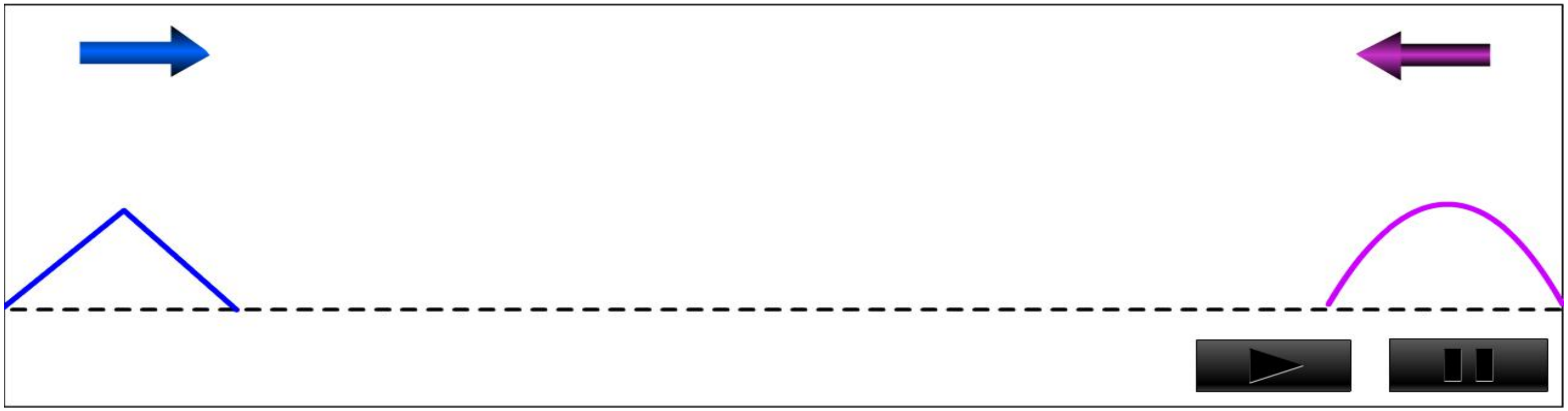
➢ 介质中波动传播到的各点处质元都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻这些子波的包络就是新的波前。





二、波的干涉

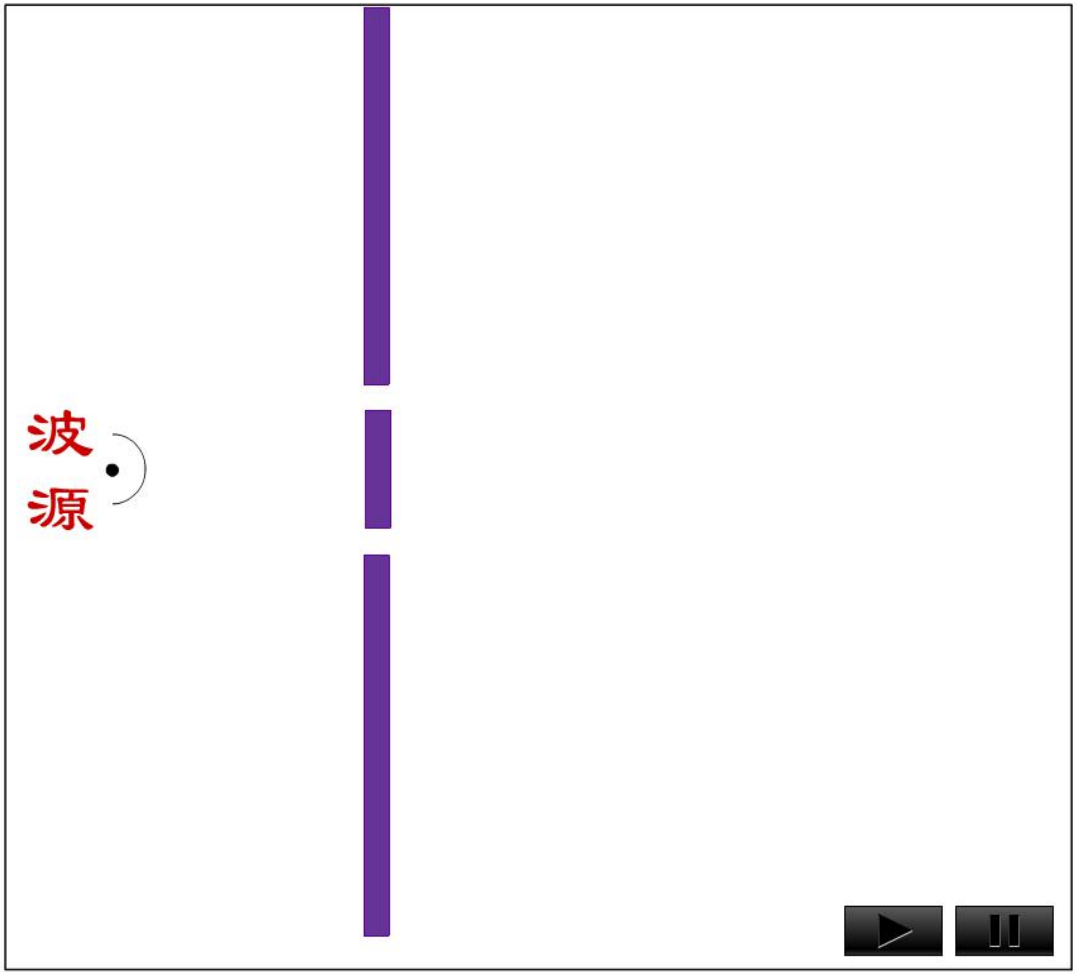
（1）波的叠加原理



- 几列波相遇区域内任意点处质元的振动，为各列波单独存在时在该点处所引起质元振动位移的矢量和（叠加性）。
- 几列波在空间相遇后，仍然保持它们各自原有的特征不变，并按照原来的方向继续前进好像没有遇到过其它波一样（独立性）。

二、波的干涉

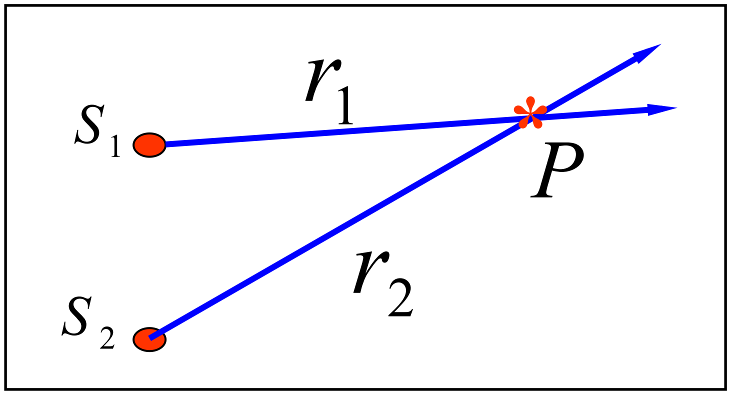
（2）波的干涉



频率相同、振动方向平行、相位相同或相位差恒定的两列波在空间相遇时，使得有些地方振动始终加强、有些地方振动始终减弱的现象。

二、波的干涉

（2）波的干涉



$$\begin{cases} y_{1P} = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - 2\pi \dfrac{r_1}{\lambda}) \\ y_{2P} = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - 2\pi \dfrac{r_2}{\lambda}) \end{cases}$$

$$y_P = y_{1P} + y_{2P} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin(\varphi_1 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_2 - \dfrac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_1 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_2 - \dfrac{2\pi r_1}{\lambda})}$$

二、波的干涉

讨 论

$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda} \end{cases}$$

(1) 合振动的振幅（波的强度）在空间各点的分布随位置而变，但是稳定的。

(2)

$$\Delta\varphi=\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$A=A_1+A_2$$ 振动始终加强

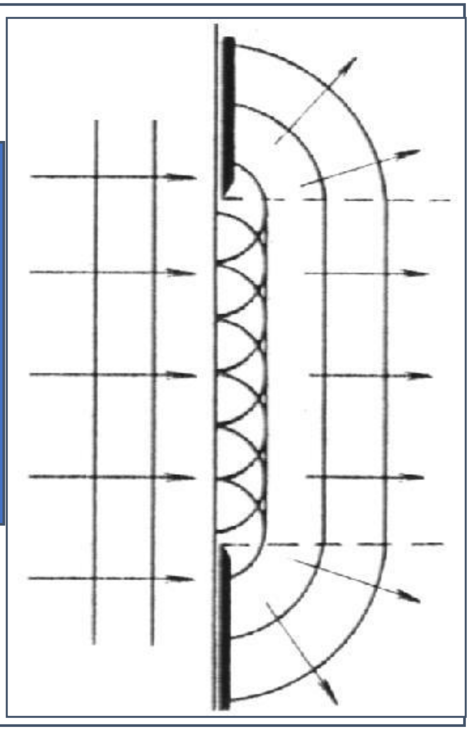
$$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$ 振动始终减弱

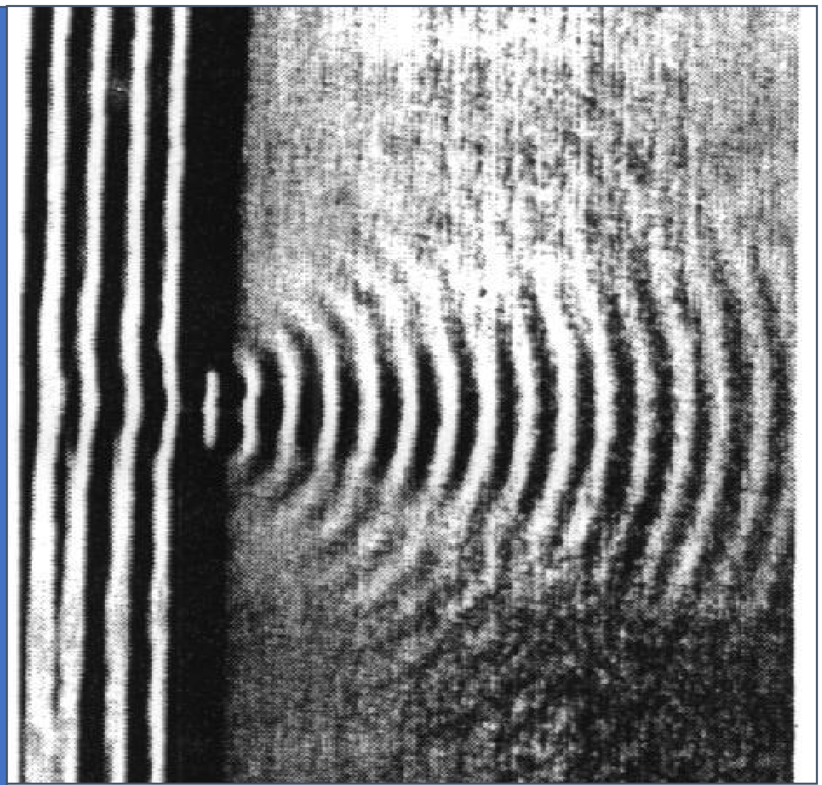
$\Delta\varphi=$ 其他 $\quad \left|A_1-A_2\right|<A<A_1+A_2$

三、波的衍射

波在传播过程中遇到障碍物或狭缝时，能绕过障碍物或狭缝继续传播使得有些地方**振动始终加强**、有些地方**振动始终减弱**的现象。



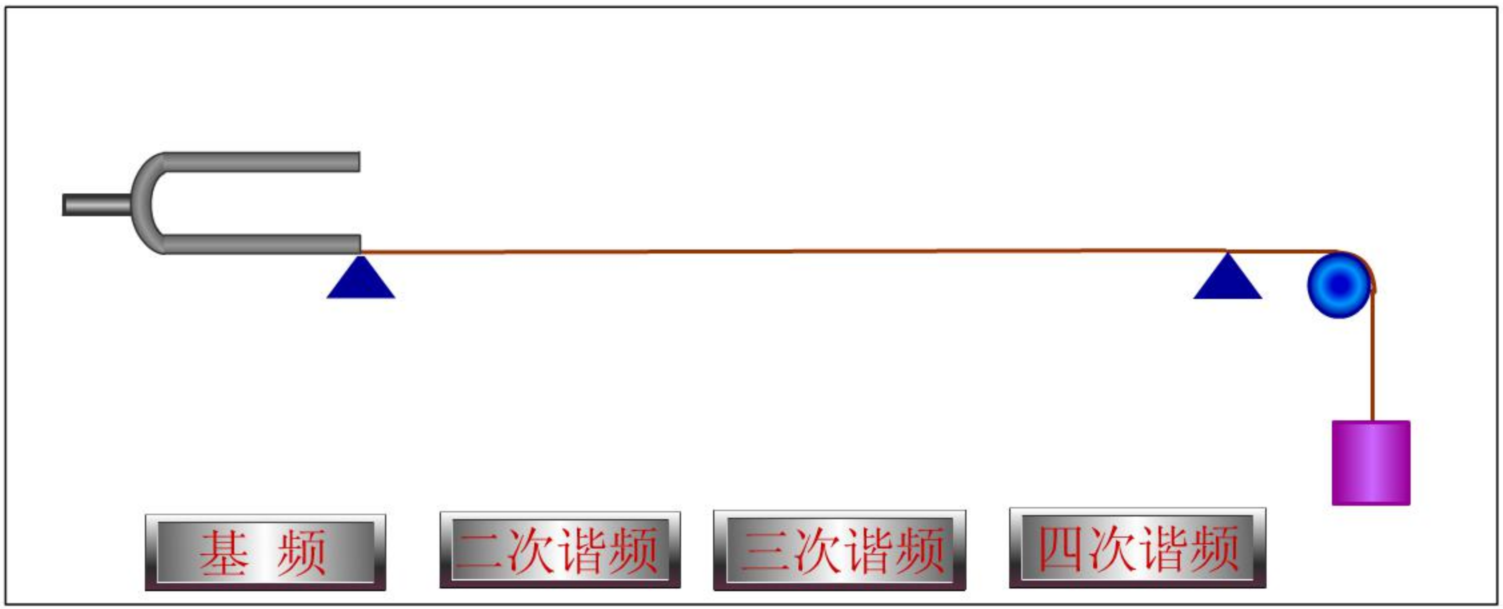
波的衍射

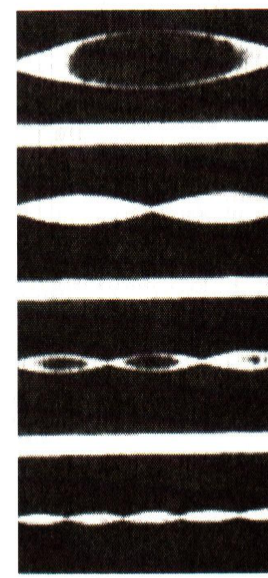


水波通过狭缝后的衍射

一、驻波的形成

振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象。





二、驻波的描述

正向 $$y_1 = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

负向 $$y_2 = A\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + A\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$
$$= \boxed{2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}}\,\boxed{\cos 2\pi\nu t}$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

二、驻波的描述

讨论

➢ 驻波方程 $y = 2A\cos 2\pi \dfrac{x}{\lambda}\cos 2\pi \nu t$

(1) 振幅 $\left|2A\cos 2\pi \dfrac{x}{\lambda}\right|$ 随 x 而异， 与时间无关。

$$\left|\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi \dfrac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad (k = 0,1,2,\cdots) \\ 0 & 2\pi \dfrac{x}{\lambda} = \pm(k + \dfrac{1}{2})\pi \quad (k = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \pm k\dfrac{\lambda}{2} \quad (k = 0,1,\cdots) & A_{max} = 2A \\ \pm(k + \dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2} \quad (k = 0,1,\cdots) & A_{min} = 0 \end{cases}$$

波腹

波节

二、驻波的描述

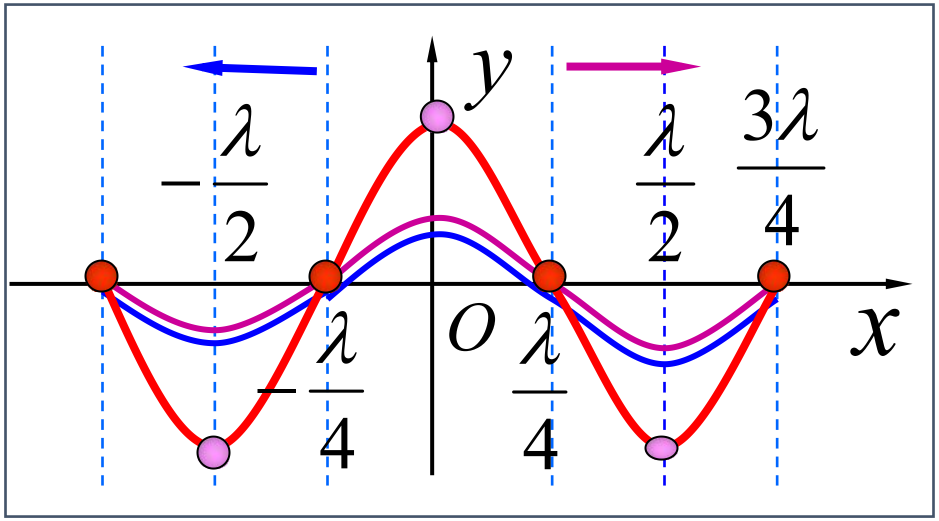
讨论

➢ 驻波方程 $y = 2A\cos 2\pi \dfrac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$

(2)相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生π的相位跃变。

$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} > 0,\ -\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{4},$$

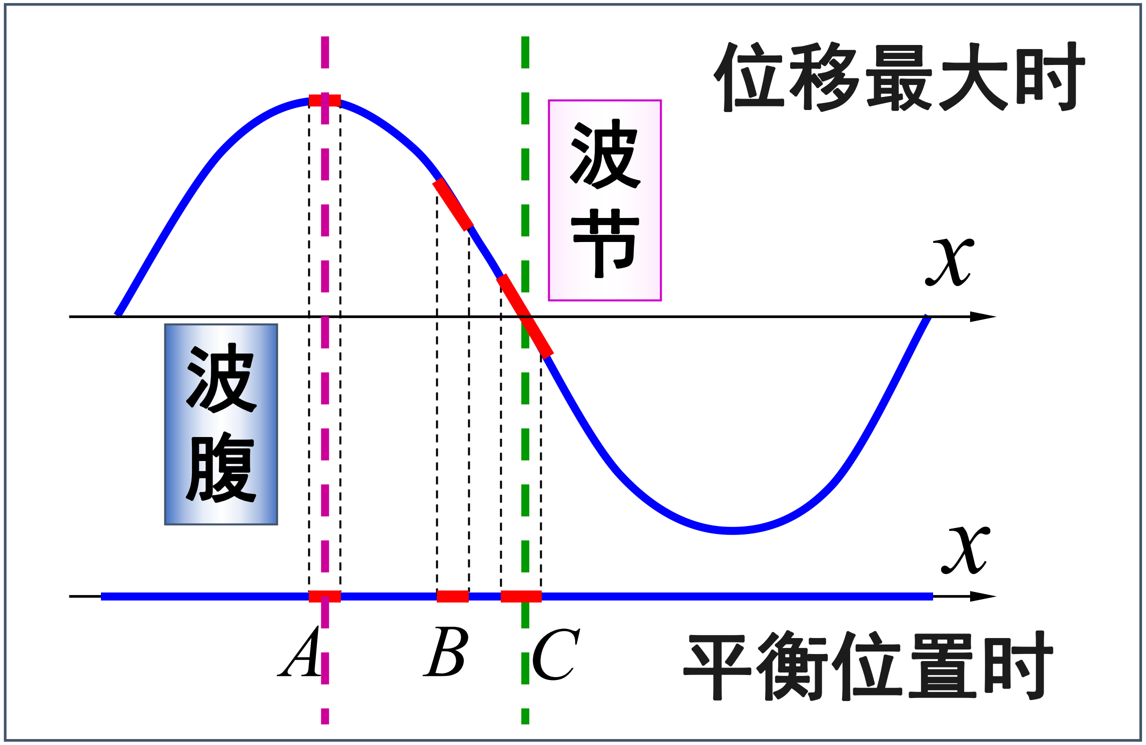
$$y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$$



$$\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} < 0,\ \frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4},\quad y = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|\cos(2\pi\nu t + \pi)$$

三、驻波的能量

驻波的能量在相邻的波腹和波节间往复变化，在相邻的波节间发生动能和势能间的相互转换，动能主要集中在波腹，势能主要集中在波节，驻波无长距离的能量传播。



$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} \propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

例 已知一根线上的驻波方程为: $y = 0.05\sin 10\pi x \cos 20\pi t$

求：1）在 $0 \le x \le 0.50\text{m}$ 所有波节的位置；2）线上除波节外任意质元的振动周期；3）在 $0 \le t \le 0.05\text{s}$ 内线上质元横向速度为零的什么时刻。

解： (1) 由 $\left|\sin 10\pi x\right| = 0$ 得 $10\pi x = k\pi \ (k = 0,1,2\cdots)$

则 $x = \dfrac{1}{10}k$ ，在 $0 \le x \le 0.50\text{m}$ 内的波节为：

$x_1 = 0\text{m}$ $\quad x_2 = 0.10\text{m}$ $\quad x_3 = 0.20\text{m}$

$x_4 = 0.30\text{m}$ $\quad x_5 = 0.40\text{m}$ $\quad x_2 = 0.50\text{m}$

三、驻波的能量

解： (2) 由 $2\pi\nu=20\pi$ 得 $\nu=10Hz$

则 $T=0.10\text{s}$

(3) 由 $\cos 20\pi t=\pm 1$得 $20\pi t=k\pi \quad (k=0,1,2\cdots)$

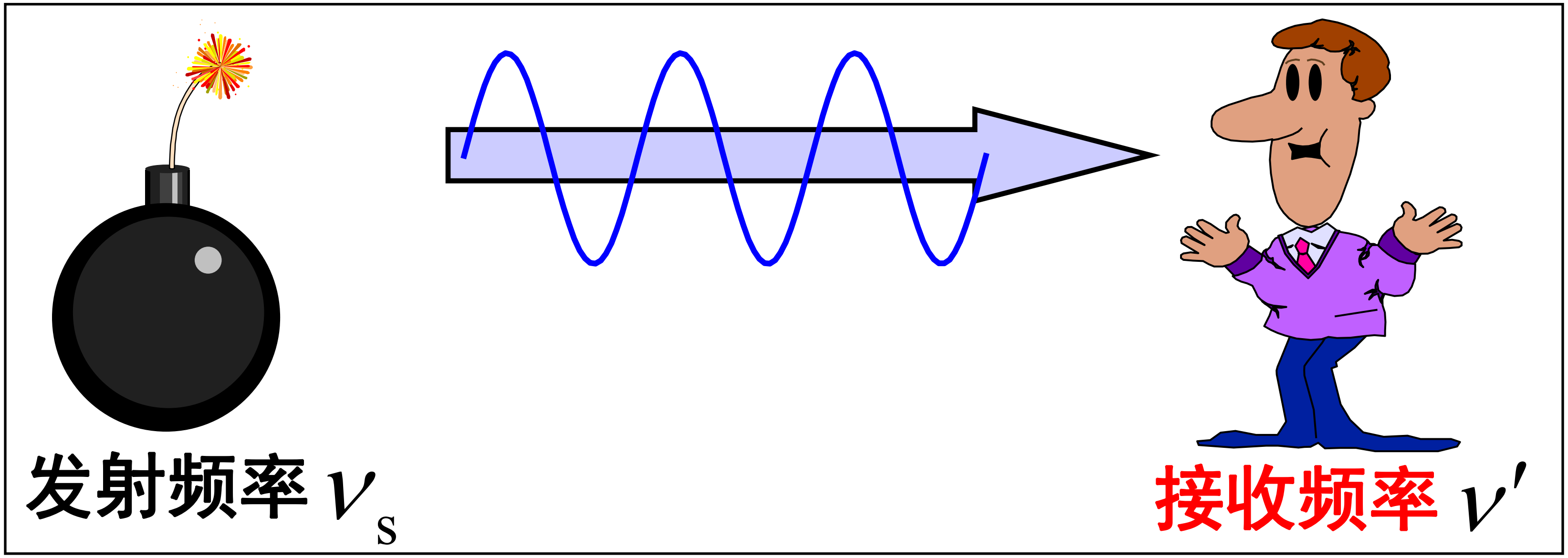
则 $t=\dfrac{1}{20}k$

在 $0\le t\le 0.10\text{s}$ 内的波节为：

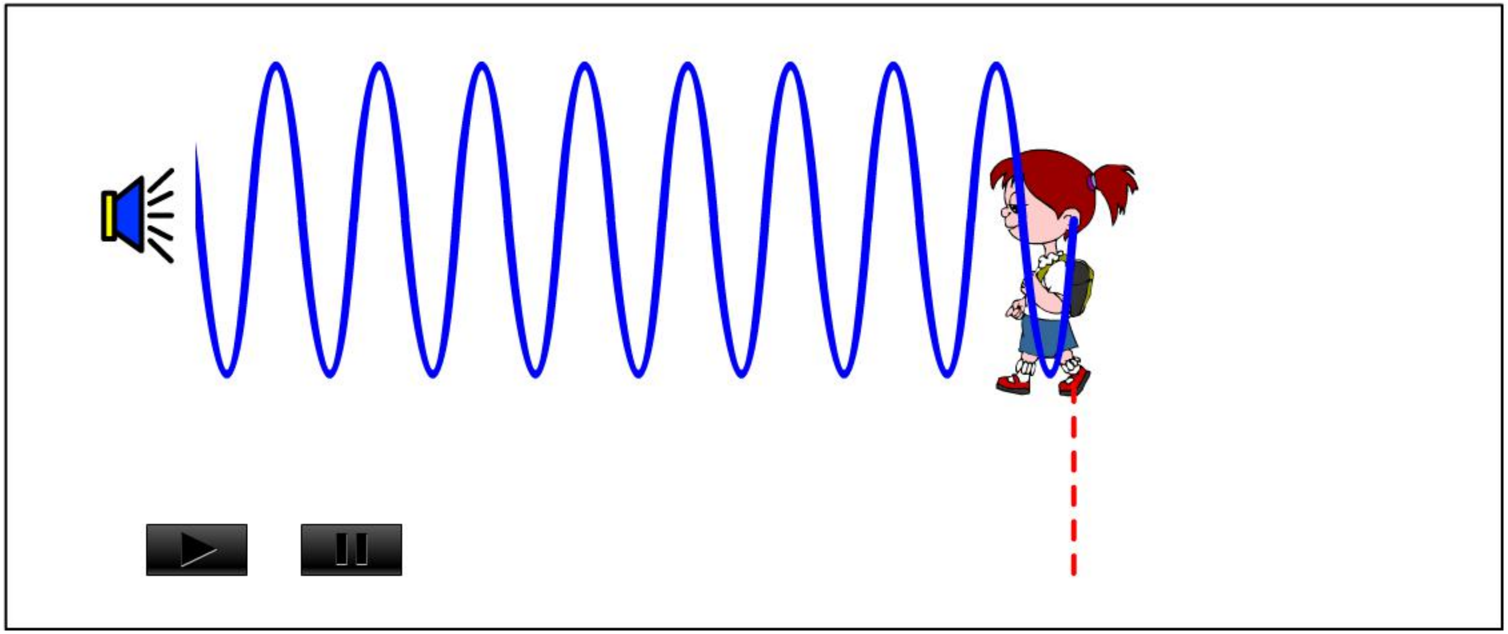
$$t_1=0\text{s} \qquad t_2=\frac{1}{20}\text{s} \qquad t_3=\frac{1}{10}\text{s}$$

思考 人耳听到的声音的频率与声源的频率相同吗？

接收频率——单位时间内观测者接收到的振动次数或完整波数。



一、波源不动，观察者相对介质以 v_0 速度运动

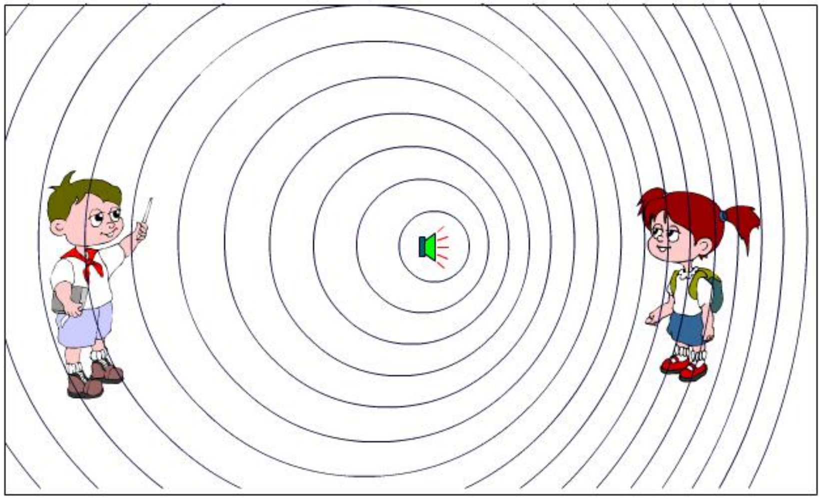


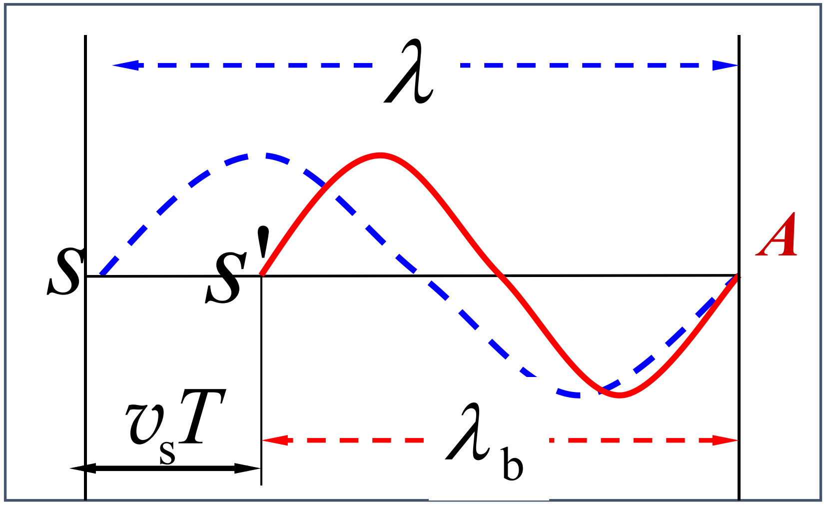
观察者接收的频率

$$\nu' = \frac{u + v_o}{u}\nu$$ 观察者**向**波源运动

$$\nu' = \frac{u - v_o}{u}\nu$$ 观察者**远离**波源

二、观察者不动，波源相对介质以 v_s 速度运动





$$T' = \frac{\lambda - v_s T}{u} = \frac{\lambda_b}{u} \qquad \nu' = \frac{1}{T'} = \frac{u}{\lambda - v_s T} = \frac{u}{u - v_s}\nu$$

观察者接收的频率

$$\nu' = \frac{u}{u - v_s}\nu$$ 波源向观察者运动

$$\nu' = \frac{u}{u + v_s}\nu$$ 波源远离观察者

三、波源与观察者同时相对介质运动

（1）波源与观察者沿二者连线运动

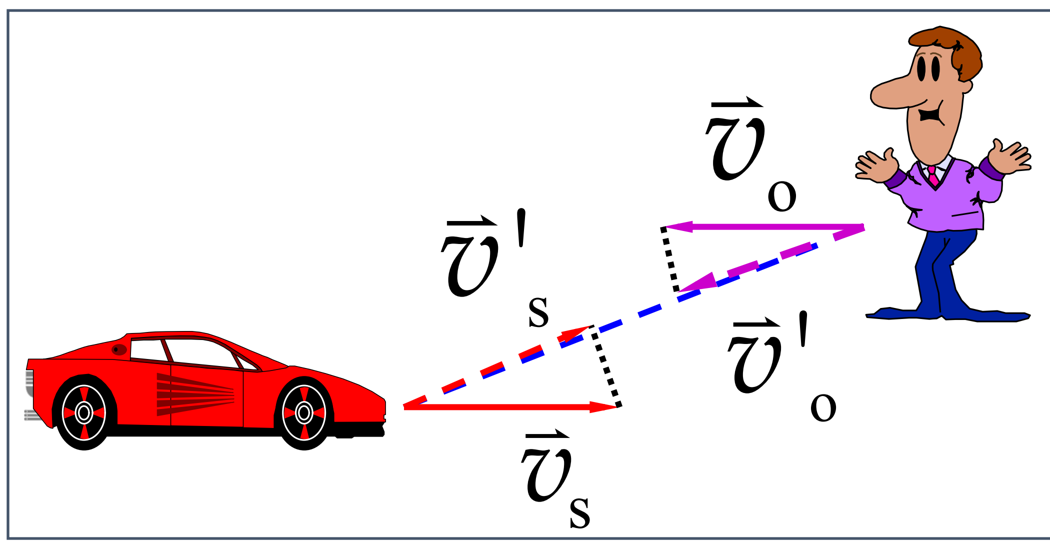
$$\nu' = \frac{u \pm v_o}{u \mp v_s}\nu$$

v_o 观察者向波源运动 + 远离 −

v_s 波源向观察者运动 − 远离 +

（2）波源与观察者不沿二者连线运动

$$\nu' = \frac{u \pm v'_o}{u \mp v'_s}\nu$$



例 利用多普勒效应测定车速，测速装置发出频率为 $\nu = 100\text{kHz}$ 的超声波，当汽车向测速装置行驶时，装在测速装置上的接收器接收到从汽车反射回来的波的频率为 $\nu'' = 110\text{kHz}$，已知空气中的声速为 $u = 330\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，求汽车的车速。

解： 车为接收器时，车接受到的频率为： $\nu' = \dfrac{u + v_0}{u}\nu$

车为发射器时，接收器接受到的频率为：

$$\nu'' = \frac{u}{u - v_s}\nu' = \frac{v_0 + u}{u - v_s}\nu$$

汽车车速为： $v_s = \dfrac{\nu'' - \nu}{\nu'' + \nu}u = 68\,\text{m}\cdot s^{-1}$