第一章
质点的运动

1 1.1 质点运动学

2 1.2 质点动力学

3 1.3 动量及机械能守恒定律

我们正青春年少

动量及机械能守恒定律主要研究作用于质点（质点系）上的力在时间和空间的积累引起质点（质点系）**动量和动能的变化规律**，核心问题是运用**动量守恒定律**和**机械能守恒定律**求解各质点的始末运动状态。

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨

(1646. 7. 1–1716. 11. 14)

一、冲量　动量

（1）力对时间的积分定义为冲量，即 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

冲量是矢量。

（2）质点的质量和速度乘积定义为动量，$\vec{p}=m\vec{v}$

物体动量也是矢量，方向与质点速度的方向一致。

注意：

1）冲量的方向与动量增量的方向一致。

2）动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理。

例 一颗钉子在射钉枪筒里前进时所受的合力大小为 $F = 50 - \frac{1}{3} \times 10^4 t(N)$ ，钉子从枪口射出时的速率为 $40m \cdot s^{-1}$，设钉子离开枪口时合力等于零，试求：

（1）钉子在枪筒里的运动时间；（2）钉子在枪筒中所受合力的冲量。

解：（1）$F = 50 - \frac{1}{3} \times 10^4 t = 0 \Longrightarrow t = 0.015s$

（2）$I = \int F\mathrm{d}t = \int_0^{0.015} \left(50 - \frac{1}{3} \times 10^4 t\right) \mathrm{d}t = 0.375\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}$

二、质点及质点系的动量定理

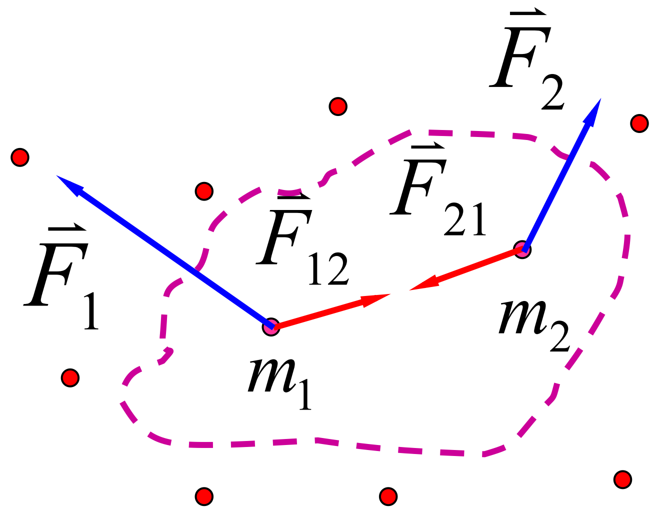
（1）质点的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

- 分量形式

$$\vec{I} = I_x\vec{i} + I_y\vec{j} + I_z\vec{k} \quad \begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

（2）质点系的动量定理



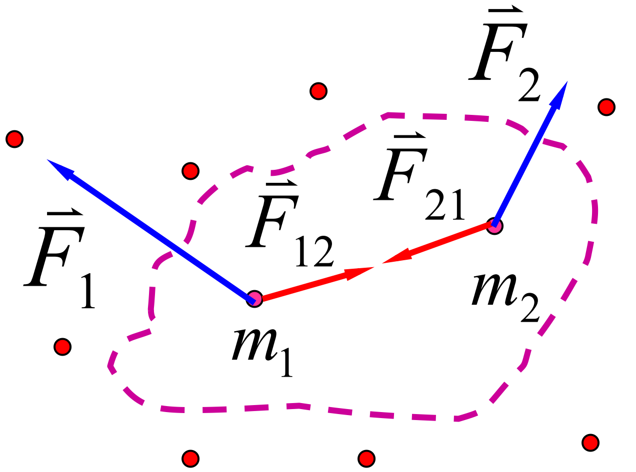
$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$，故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

（2）质点系的动量定理



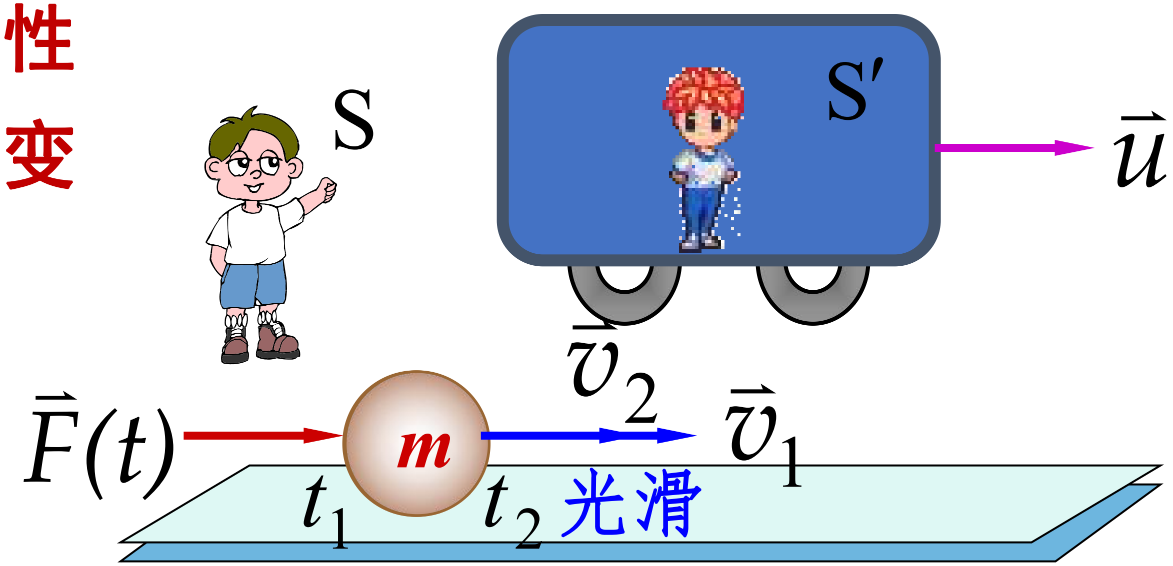
- 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{\,\mathrm{ex}} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i0}$$

$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

注意 内力都是成对的作用力和反作用力不改变**质点系的总动量**，但会改变**质点的动量**。

（3）动量的相对性及动量定理的不变性



参考系	t_1 时刻	t_2 时刻	动量定理
S系	$m\vec{v}_1$	$m\vec{v}_2$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$
S'系	$m(\vec{v}_1 - \vec{u})$	$m(\vec{v}_2 - \vec{u})$	

例 一质量为 $4kg$的质点在变力 $F = 8t - 4(N)$ 作用下沿x方向运动，已知t=0s时质点速率 $v_0 = 6m \cdot s^{-1}$ ，质点位于$x_0=1m$ 处，试求质点在时刻的速率和位置。

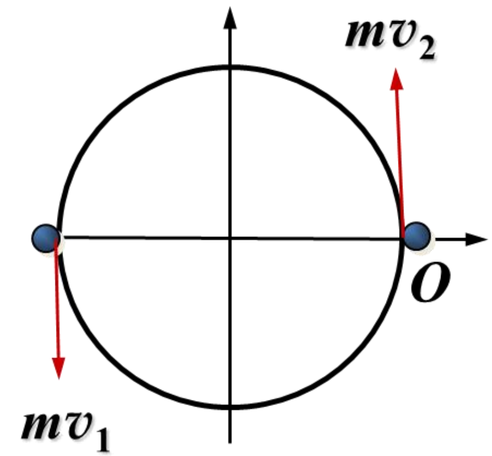
解： 由动量定理微分式： $Fdt = mdv$

$$\int_6^v dv = \frac{1}{m}\int_0^t (8t-4)dt \Rightarrow v = t^2 - t + 6$$

由速度的定义式： $v = \frac{dx}{dt}$

$$\int_1^x dx = \int_0^t (t^2 - t + 6)dt \Rightarrow x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t + 1$$

例 质量为 $m=2kg$ 的质点从点O开始沿半径 $R=1m$ 的圆周运动，以点O为自然坐标原点，已知质点的运动方程为 $s=\frac{1}{2}\pi t^2$，试求从 $t_1=\sqrt{2}s$ 到 $t_2=2s$ 这段时间内质点所受合外力的冲量。



解：

$$t_1=\sqrt{2}s \qquad s_1=\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2=\pi \qquad \theta_1=\frac{s_1}{R}=\pi$$

$$t_2=2s \qquad s_2=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi \qquad \theta_2=\frac{s_2}{R}=2\pi$$

由速率的定义式 $v=\dfrac{ds}{dt}=\pi t$

$$p_1=mv_1=-2\sqrt{2}\pi(kg\cdot m\cdot s^{-1}) \qquad p_2=mv_2=4\pi(kg\cdot m\cdot s^{-1})$$

$$I=p_2-p_1=mv_2-mv_1=(4+2\sqrt{2})\pi(kg\cdot m\cdot s^{-1})$$

沿竖直向上方向。

一、动量守恒定律

若质点系所受的合外力为零，即 $\vec{F}^{\text{ex}}=\sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}}=0$，

则系统的总动量守恒，即 $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ 保持不变。

（1）系统动量守恒是指系统内各物体动量的矢量和不变，但每个质点的动量可能变化。

（2）条件: ① 系统不受外力作用　　② 合外力=0

③ $F_{内} >> F_{外}$

（3）若 $\sum \vec{F}_i \neq 0$，但 $\sum \vec{F}_{ix}=0$，动量守恒定律在 x 方向上成立。

（4）动量守恒定律只适用于惯性系。

我们正青春年少

二、动量守恒定律的应用

（1）若某一方向合外力为零，则该方向动量守恒。

$$F_x^{\text{ex}}=0,\quad p_x=\sum m_i v_{ix}=C_x$$

$$F_y^{\text{ex}}=0,\quad p_y=\sum m_i v_{iy}=C_y$$

$$F_z^{\text{ex}}=0,\quad p_z=\sum m_i v_{iz}=C_z$$

（2）在碰撞、打击、爆炸等问题中，因 $\vec{F}^{\text{ex}} << \vec{F}^{\text{in}}$， 可略去外力的作用，近似认为系统动量守恒。

例 一手榴弹以速度v_0沿仰角α的方向扔出去，在到达最高点处爆炸为质量相等的两块，一块以仰角$45°$向上飞，另一块以的俯角$30°$向下飞，求刚爆炸后两块手榴弹碎片的速率各为多大。

解： 以地面为参考系，设两块手榴弹碎片的质量均为m、速率分别为 v_1 和 v_2 ，在最高点爆炸，内力远远大于外力动量守恒。

$$2mv_0\cos\alpha = mv_1\cos 45° + mv_2\cos 30°$$

$$0 = mv_1\sin 45° - mv_2\sin 30°$$

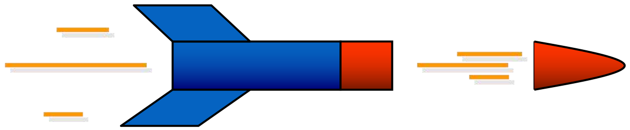
$$v_1 = \frac{4v_0\cos\alpha}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \qquad v_2 = \frac{4v_0\cos\alpha}{1+\sqrt{3}}$$

1.3.2 动量守恒定律

例 火箭以速率 v 水平飞行，由控制器使仪器仓和燃料仓分离，仪器仓 m_1 相对于火箭燃料仓的平均速率为 v_0，火箭燃料仓质量 m_2，求燃料仓和仪器仓相对于地面的速率。

解： 设**相对于地：**仪器仓速率为 v_1，燃料仓速率为 v_2

根据动量守恒定律



$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

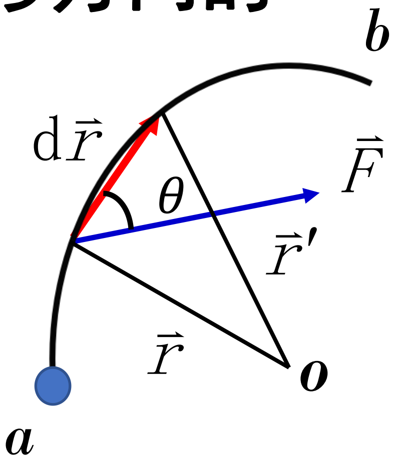
$$v_1 = v_2 + v_0$$

$$v_2 = v - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \qquad v_1 = v - \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

一、功 动能

（1）功

定义： 力对质点所做的功等于力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积，即



$$W = \int \mathrm{d}W = \int F(t)\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \int \vec{F}(t)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

计算： 1）恒力对做直线运动的质点做功

$$W = F\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

2）恒力或变力对做曲线运动的质点做功

$$W = \int \mathrm{d}W = \int F(t)\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \int \vec{F}(t)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

3）合力做的功

$$W = \int \sum \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum \int \vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i W_i$$

一、功 动能

（2）动能

定义： 物体的质量与速率平方的乘积的1/2定义为动能，即

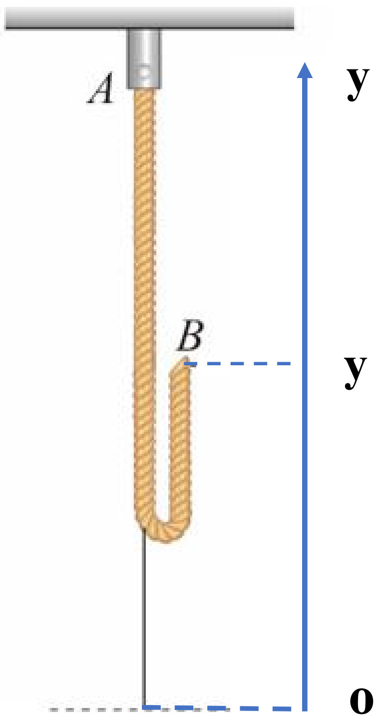
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

讨论： 1）在国际单位制中，功的单位是**焦耳**，用符号表示J；

2）动能是由于物体做相对运动而具有的能量，动能是**标量**；

3）动能和过程无关，是**状态量**。

例 一条长为 L、质量为m的匀质软绳，其一端挂在屋顶的钩子上自然下垂，再将另一端沿竖直方向提高到与钩子等高，求该过程中重力所作的功。



解： 取绳子自然下垂最低点为坐标原点，竖直向上为 y轴正方向

绳提起部分所受重力为：$P = -\frac{M}{L}\frac{1}{2}yg$

重力所做的元功为：$\mathrm{d}W = -\frac{M}{L}\frac{1}{2}yg\mathrm{d}y$

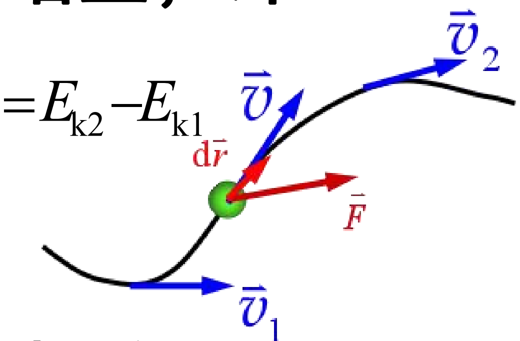
重力所做的总功为：$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^L -\frac{M}{L}\frac{1}{2}yg\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}MgL$

二、质点及质点系的动能定理

（1）质点的动能定理

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量，即

$$W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}|\mathrm{d}\vec{r}|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_1}^{v_2}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=E_{\mathrm{k}2}-E_{\mathrm{k}1}$$



（2）质点系的动能定理

合外力及内力对质点系所做的功等于质点系动能的增量，即

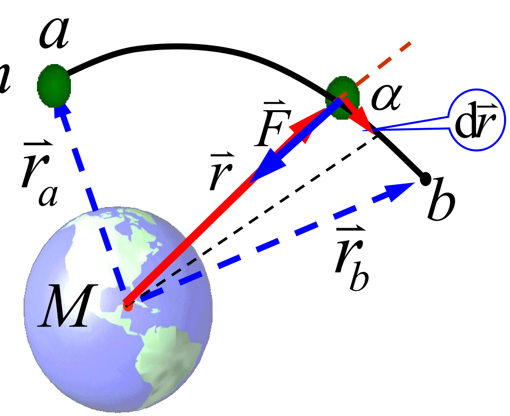
$$\mathrm{W}=\mathrm{W}^{\mathrm{ex}}+\mathrm{W}^{\mathrm{in}}=\sum_i W_i^{\mathrm{ex}}+\sum_i W_i^{\mathrm{in}}=\sum_i E_{\mathrm{k}i}-\sum_i E_{\mathrm{k}i0}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

注意

功和动能都与参考系的选择有关

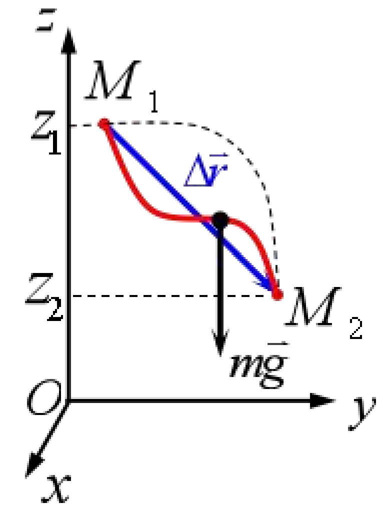
动能定理仅适用于**惯性参考系**

一、万有引力、重力、弹性力做功



（1）万有引力做功

$$W=\int_{r_a}^{r_b}-G\frac{Mm}{r^2}\,\mathrm{d}r=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_b}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_a}\right)\right]$$

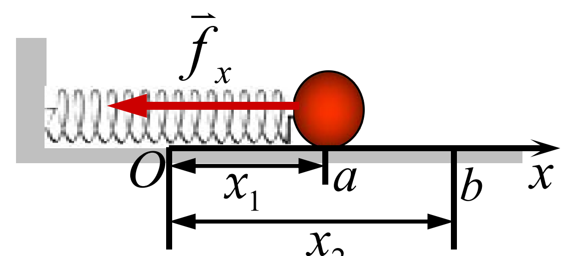


（2）重力做功

$$W=-(mgz_2-mgz_1)$$

（3）弹性力做功

$$W=-(\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2)$$



二、保守力及非保守力

（1）保守力

做功与路径无关，仅取决于相互作用质点的始末相对位置，这种力统称**保守力**，用 $\vec{F}_{C}$表示。

特性： 1）保守力所做的功等于质点势能改变量的负值，即 $W_C = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_{P}$

2）质点沿闭合路径运动一周时，保守力对它所做的功等于零，即 $\oint_l \vec{F}_C \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

（2）非保守力

诸如：摩擦力、洛仑兹力、安培力做功与路径相关，这种力统称非保守力。

三、势能

（1）势能的定义

保守场中，相互作用的两个及两个以上物体与其相对位置相关的能量定义为势能，用E_P表示。

特性：1）势能是状态量，取决于相互作用物体之间的相对位置。

2）势能具有相对性，其大小取决于势能零点的选择。

3）势能是属于系统的，单个物体没有势能的概念。

三、势能

（2）势能的计算

物体在任意一点的势能等于物体从该点到势能零点保守力所做的功， 即若 $E_{p0}(x_0, y_0, z_0) = 0$，则

$$E_p(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{(x_0, y_0, z_0)} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

在经典动力学中，常见的势能有

引力势能： $E_p = -G\dfrac{m'm}{r}$

重力势能： $E_p = mgz$

弹性势能： $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$

一、质点系的功能原理

合外力和非保守内力作功之和等于质点系机械能的增量，即 $W^{\text{ex}}+W_{\text{nc}}^{\text{in}}=(E_{\text{k}}+E_{\text{p}})-(E_{\text{k0}}+E_{\text{p0}})=E-E_0$

二、机械能守恒定律

只有保守内力作功时，质点系的机械能保持不变，即当 $W^{\text{ex}}+W_{\text{nc}}^{\text{in}}=0$ 时，$E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}$

(1) 机械能守恒定律只适用于惯性系,不适合于非惯性系。

(2) 在某一惯性系中机械能守恒，但在另一惯性系中机械能不一定守恒。

我们正青春年少

例 一轻绳跨过一个定滑轮, 两端分别拴有质量为m 及M 的物体, M 离地面的高度为h , 若滑轮质量及摩擦力不计, m 与桌面的摩擦也不计, 开始时两物体均为静止, 求M 落到地面时的速率(m 始终在桌面上). 若物体m与桌面的摩擦系数为μ, 结果如何?

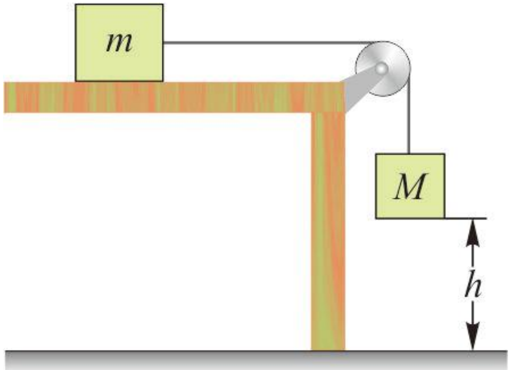
解: (1)以m 和M 及地球作为系统，系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_1^2=Mgh \Longrightarrow v_1=\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$$

(2) 物体m 与桌面有摩擦, 根据功能原理

$$-\mu mgh=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_1^2-Mgh$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2(M-\mu m)gh}{m+M}}$$



三、碰撞

两个及两个以上物体相互作用时间极短而相互作用力较大的物理过程称为碰撞，由于碰撞过程 $\vec{F}^{\text{ex}} << \vec{F}^{\text{in}}$，则系统的动量守恒，即

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{C}$$

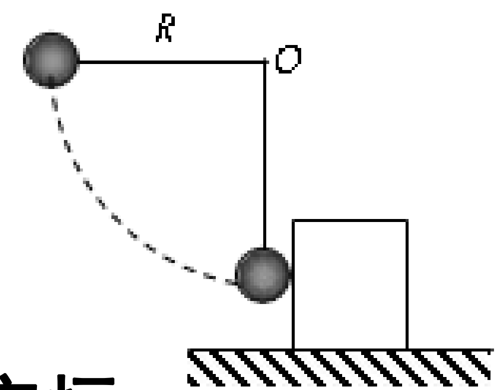
（1）弹性碰撞

两个及两个以上物体碰撞过程只有保守内力做功，碰撞前后它们的动能之和保持不变的碰撞称为弹性碰撞，即

$$\sum_i E_{\mathrm{k}i} = \sum_i E_{\mathrm{k}i0} = \mathrm{C}$$

1.3.5 功能原理 机械能守恒定律

例 长为R的细绳，一端固定另一端系质量为m_1的小球，现将球由水平位置静止下摆，当球到达最低点时与质量为m_2静止于水平面上的木块发生弹性碰撞，求：（1）当球到达最低点与木块碰撞前的速率；（2）碰撞后小球和木块的速率。



解: (1) 只有保守力重力所做机械能守恒

$$m_1 gR = \frac{1}{2} m_1 v_0^{\ 2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$$

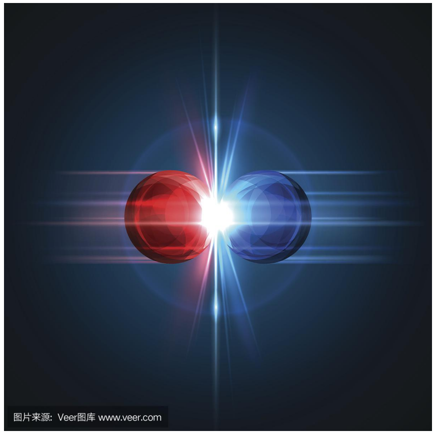
(2) 发生弹性碰撞系统的动量和动能守恒

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^{\ 2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\ 2} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_0}{m_1 + m_2} \quad v_2 = \frac{2 m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

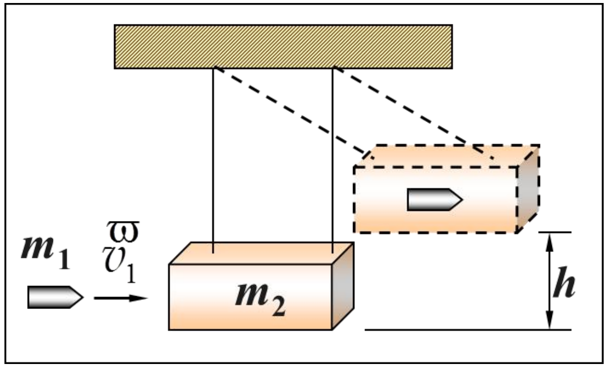
（2）非弹性碰撞

两个及两个以上物体碰撞过程有非保守内力做功，碰撞之后物体的部分动能转化为热能、声能、化学能等其它形式能量的碰撞称为**非弹性碰撞**。

碰撞之后几个物体合为一体的碰撞称为**完全非弹性碰撞**，完全非弹性碰撞过程物体的动能损耗最大。



例 质量为的木块m_2被悬挂在细绳的下端，有一质量为m_1的子弹以速率v_1沿水平方向射入木块中后，子弹与木块将一起摆至高度为h处，试求此子弹射入木块前的速率v_1。



解: (1) 子弹与木块发生完全非弹性碰撞动量守恒

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

(2) 子弹与木块一起摆动只有保守力重力做功机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

我们正青春年少