

《概率统计》模拟题02答案

一、填空题（本题共 9 个小题，每空 2 分，共 24 分）

1、0.3, 0.2; 2、0.7, 0; 3、0.4; 4、 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & 15 < x < 115 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 5、 $D(Y) = a^2$; 6、0.4,

0.6; 7、0.5; 8、 $\chi^2(5)$; 9、0.5.

二、选择题（本题共 5 个小题，每空 2 分，共 10 分）

1、D; 2、B; 3、B; 4、A; 5、A

三、计算题（本题共 4 个小题，每空 10 分，共 40 分）

1、解：不考虑球的顺序。从 9 个球中任取两球，取法总数为 $n_{\Omega} = C_9^2$ 。

(1) 设 A 表示“两球均为白球”，则 $n_A = C_4^2$, $P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}$;

(2) 设 B 表示“两球中，一白一黑”，则 $n_B = C_4^1 C_5^1$, 则 $P(B) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{5}{9}$;

(3) 设 C 表示“至少有一球是黑球”，显然， $C = \bar{A}$, 则 $P(C) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$

2、设 A={甲厂生产}, B={乙厂生产}, C={丙厂生产}, D={合格产品}

则 $P(A) = 2/10$; $P(B) = 3/10$; $P(C) = 5/10$; $P(D/A) = 0.85$; $P(D/B) = 0.80$; $P(D/C) = 0.90$

(1) 由全概率公式

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \\ = 0.2 \times 0.85 + 0.3 \times 0.8 + 0.5 \times 0.9 = 0.86 = 86\%$$

(2) $P(A/D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.2 \times 0.85}{0.86} = \frac{17}{86}$

3、解：(1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 所以 $A = \frac{1}{\pi}$; (2) $P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}$;

$$(3) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \int_{-1}^x \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

4、解：(1) 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A e^{-(x+2y)} dx dy = A \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = \frac{1}{2} A$

所以 $A = 2$.

(2) X 的边缘密度函数: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

Y 的边缘密度函数: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(3) 因 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, 所以 X, Y 是独立的.

四、统计题（本题共 2 个小题，每空 9 分，共 18 分）

1、解：（1）总体期望 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x\theta x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+2}$

由矩估计法 $E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta+2} = \bar{X}$ 得 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}}{1-\bar{X}}$

解：（2）似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta \quad 0 < x_i < 1$

对数似然函数 $\ln[L(\theta)] = n\ln\theta + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad 0 < x_i < 1$

取导数 $\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad 0 < x_i < 1$

令 $\frac{d\ln[L(\theta)]}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ 得 $\hat{\theta} = -n / \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

2、（1）解：选择随机变量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$1-\alpha=0.95$, $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(8)=2.306$, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \right) \Rightarrow \left(202 - \frac{\sqrt{38.5}}{\sqrt{9}} \times 2.306, 202 + \frac{\sqrt{38.5}}{\sqrt{9}} \times 2.306 \right)$$

$\Rightarrow (197.23, 206.77)$

（2）解：选择随机变量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, (6 分)

$1-\alpha=0.95$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=2.18$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=17.54$,

σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$,

$\Rightarrow \left(\frac{8 \times 38.5}{17.54}, \frac{8 \times 38.5}{2.18} \right) \Rightarrow (17.56, 141.28)$.

五、应用题（本题共 1 个小题，6 分）

解：令 X = “同时使用的终端数”

则 $X \sim B(120, 0.05)$, $\therefore P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10 - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5.7}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(1.68) = 0.046$$