一. 填空.

1. 向量的四则运算. 模. 方向角. 方向余弦.

$\vec{r}=(x,y,z)$. $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 方向角. $\vec{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴夹角 α. β. γ.

$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}$. $\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}$. $\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}$. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. $\vec{e}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$. $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$. $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

(1). $\vec{u}=(1,-2,2)$. $\vec{v}=(1,-3,5)$. 则与 $2\vec{u}-\vec{v}$ 方向一致单位向量. $\underline{(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})}$

(2). $\vec{a}=(-2,3,-\sqrt{3})$. 则 $\vec{a}$ 与 x 轴的方向角 $\alpha=\underline{\frac{2}{3}\pi}$.

解: $|\vec{a}|=\sqrt{4+9+3}=4$. $\vec{e}_a=(-\frac{1}{2},\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$. $\alpha=\frac{2}{3}\pi$.

(3). α、β、γ 为 $\vec{a}$ 三个方向角. $\gamma<\frac{\pi}{2}$. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 则 $\gamma=\underline{\frac{\pi}{3}}$

解: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. $\Rightarrow\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$. $\gamma<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\gamma=\frac{\pi}{3}$.

2. 数量积. 向量积.

数量积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

向量积. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$. 方向垂直于 $\vec{a}$. $\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix};\quad\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0};\quad\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}.$$

(1). $\vec{a}=(1,-1,1)$. $\vec{b}=(-3,1,2t)$. $\vec{a}\perp\vec{b}$. 则 $t=\underline{2}$.

解: $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow-3-1+2t=0\Rightarrow t=2$.

(2). L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$. L_2: $\frac{x}{k}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1-k}$. $L_1\perp L_2$. $\Rightarrow k=\underline{3}$

解. $L_1\perp L_2\Rightarrow\vec{s_1}\perp\vec{s_2}\Rightarrow s_1\cdot s_2=0\Rightarrow(2,-2,1)\cdot(k,2,1-k)=2k-4+1-k=0\Rightarrow k=3$.

(3). Π_1: $x+2y+kz+1=0$. Π_2: $x+y-z=5$. $\Pi_1\perp\Pi_2$. $\Rightarrow k=\underline{3}$

解. $\Pi_1\perp\Pi_2\Rightarrow\vec{n_1}\perp\vec{n_2}\Rightarrow\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=(1,2,k)\cdot(1,1,-1)=1+2-k=0\Rightarrow k=3$.

(4) 见1-2页最下.

3. 空间直线、平面方程.

直线方程：一般方程，L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. $\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

点向式. (x_0,y_0,z_0). $\vec{S}=(m,n,p)$. $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$. $-\infty<t<+\infty$. (x_0,y_0,z_0). $\vec{S}=(m,n,p)$.

两点式. $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

平面方程：点法式 (x_0,y_0,z_0). $\vec{n}=(A,B,C)$. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

(1). L过点$(1,1,1)$. $(2,3,4)$. 则L方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$

(2). 过点$(1,-1,1)$与$2x+2y-z=5$垂直直线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}}$

(3) 过点$(-1,2,1)$与xOy面垂直(或与z轴平行)直线方程 $\underline{\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{1}}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

(4). 过点$(4,-1,3)$与$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$平行的直线方程为 $\underline{\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}}$.

4. 点到直线、点到平面距离.

L：$M\in L$. $\vec{S}$. M_0为L外一点 ：M_0到L距离公式：$d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|}{|\vec{S}|}$.

$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(1). 点$(1,-1,1)$到 $2x+2y-z=5$ 距离 $d=\underline{\ 2\ }$

解：$d=\dfrac{|2\times1+2\times(-1)+(-1)\times1-5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{3}=2$.

补 2.(4). $|\vec{a}|=3$. $|\vec{b}|=4$. $\vec{a}\perp\vec{b}$. $|\vec{a}+\vec{b}|=\underline{\ 5\ }$.

解：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+0+|\vec{b}|^2$

$=3^2+4^2=5^2$. ($\vec{a}\perp\vec{b}$ $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$)

$\therefore |\vec{a}+\vec{b}|=5$

5. 平面与平面、平面与直线、直线与直线位置关系.

平面π_1与平面π_2: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}\perp\vec{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} /\!/ \vec{n_2} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

直线L_1与直线L_2: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} /\!/ \vec{s_2} \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

直线L与平面π: $\sin\theta=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$

$L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{s} /\!/ \vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$

$L /\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$

(1). $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$, $L_2: \dfrac{x}{k}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1-k}$, $L_1\perp L_2$, 则 $k=$ 3

(2). $\pi_1: x+2y+kz+1=0$, $\pi_2: x+y-z=5$, $\pi_1\perp\pi_2$, 则 $k=$ 3

6. 平面曲线绕坐标轴旋转所生成的旋转曲面的方程.

绕谁谁不变.

$f(x,z)=0$ 绕x旋转一周所形成旋转曲面: $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

$f(x,z)=0$ 绕z ……: $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

$f(x,y)=0$ 绕x ……: $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

平面曲线

(1) $4y^2-9z^2=36$ 绕z轴旋转所得旋转曲面: $4(x^2+y^2)-9z^2=36$.

(2). xoy平面上曲线 $y=e^x$. 绕x轴 ……: $\sqrt{y^2+z^2}=e^x$ 或 $y^2+z^2=e^{2x}$.

(3). 平面曲线 $4x^2-9y^2=36$. 绕y轴 ……: $4x^2-9y^2+4z^2=36$.

7. 多元函数的定义域及复合函数

(1). $z=\ln(y^2-2x+1)$ 定义域 $\underline{\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}}$

(2). $f(x,y)=x^2+y^2$. $f(\sqrt{xy},x+y)=\underline{x^2+3xy+y^2}$

(3). $f(x+y,x-y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. $f(x,y)=\underline{\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}}$

8. 多元函数偏导数与微分

$z=f(x,y)$. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

(1). $f(x,y)=\ln(y+\frac{x}{y})$. $f_y(0,1)=\underline{1}$

解: $f_y=\frac{1}{y+\frac{x}{y}}\cdot(1-\frac{x}{y^2})$. $f_y(0,1)=\frac{1}{1+0}\cdot(1-\frac{0}{1})=1$.

或 $f(0,y)=\ln y$. $f_y(0,y)=\frac{1}{y}$. $f_y(0,1)=1$.

(2) $z=f(xy,x+y)$. f有一阶偏导. $\frac{\partial z}{\partial x}=\underline{yf_1'+f_2'}$

(3). $f(x,y)=\ln(x+\frac{y}{2x})$. 则 $f_x(1,0)=\underline{1}$.

(4). $z=f(xy,x^2+y^2)$. $\frac{\partial z}{\partial x}=\underline{yf_1'+2xf_2'}$

(5). $z=xy+\frac{x}{y}$. $dz=\underline{\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy}$

(6). $z=e^{x+xy}$. $dz=\underline{(1+y)e^{x+xy}dx+xe^{x+xy}dy=e^{x+xy}[(1+y)dx+xdy]}$

(7). $z=\sqrt{\ln(xy)}$. $dz=\underline{\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}(\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy)}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$

10. 空间曲线在一点处法平面和切线. (x_0,y_0,z_0).

$\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$ 切向量: $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

法平面: $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

切线: $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

$\Gamma: \begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 切向量：$\vec{T}=(1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0))$.

法平面：$x-x_0+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

切线：$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$

(1). $x=t, y=t^2, z=t^3$，在 $t=-1$ 对应点处切线方程 $\underline{\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}}$.

解：$t=-1 \longrightarrow (x_0, y_0, z_0)=(-1, 1, -1)$

切向量 $\vec{T}=(1, 2t, 3t^2)\big|_{t=-1}=(1, -2, 3)$.

∴切线方程：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$

(2). $x=t^2, y=2t, z=t^3$，在点 $(1, 2, 1)$ 处切线方程：$\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$

解：$(1, 2, 1) \longrightarrow t=1$.

切向量：$(2t, 2, 3t^2)\big|_{t=1}=(2, 2, 3)$.

切线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$.

9. 空间曲面在一点处的切平面和法线. (x_0, y_0, z_0).

$\Sigma: F(x,y,z)=0$，法向量，$\vec{n}=(F_x, F_y, F_z)\big|_{(x_0, y_0, z_0)}$.

$\Sigma: z=f(x,y)$，法向量，$\vec{n}=(f_x, f_y, -1)\big|_{(x_0, y_0)}$.

(1). $z=x^2+y^2$ 在 $(1, 1, 2)$ 处法线方程：$\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}}$. 切平面：$\underline{2x+2y-z-2=0}$

解：$\vec{n}=(2x, 2y, -1)\big|_{(1,1,2)}=(2, 2, -1)$

切平面：$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$.

法线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

即 $2x+2y-z-2=0$

(2). $z=x^2-y^2$ 在 $(2, 1, 3)$ 处切平面方程：$\underline{4x-2y-z-3=0}$. 法线 $\underline{\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}}$.

解：$\vec{n}=(2x, -2y, -1)\big|_{(2,1,3)}=(4, -2, -1)$

切平面方程：$4(x-2)-2(y-1)-(z-3)=0$

即 $4x-2y-z-3=0$

法线：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$

11. 多元函数在一点处的梯度.

$Z=f(x,y)$. 梯度. $\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0))$

$u=f(x,y,z)$. $\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)=(f_x(x_0,y_0,z_0),\ f_y(x_0,y_0,z_0),\ f_z(x_0,y_0,z_0))$.

(1). $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $\mathrm{grad}\,f(1,-1,2)=\underline{(2,-2,4)}$.

解: $(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,2z)$. $\mathrm{grad}\,f(1,-1,2)=(2,-2,4)$

(2). $f(x,y,z)=xyz$. $\mathrm{grad}\,f(1,-1,2)=\underline{(-2,2,-1)}$

解: $f_x=yz$, $f_y=xz$, $f_z=xy$. $\mathrm{grad}\,f(1,-1,2)=(-2,2,-1)$

(3). $f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$. $\mathrm{grad}\,f(0,0,1)=\underline{(1,0,1)}$.

解: $f_x=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}$, $f_y=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $f_z=\dfrac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\dfrac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$

$f_x(0,0,1)=1$. $f_y(0,0,1)=0$, $f_z(0,0,1)=1$. $\mathrm{grad}\,f(0,0,1)=(1,0,1)$

12. 二重积分大小的比较.

$f(x,y)\le g(x,y)$. $(x,y)\in D$. $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$.

书 P_{140}. 5.

13. 二重积分交换积分次序. (包括极坐标形式).

(1). $\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$ 在极坐标形式下的二次积分 $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R f(\rho)\cdot\rho\,d\rho}$.

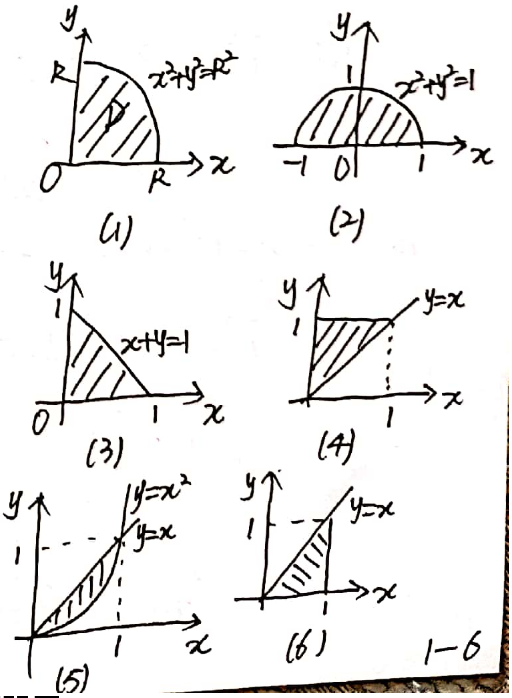
(2). $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx=\underline{\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy}$

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy=\underline{\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx}$

(4). $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)\,dy=\underline{\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)\,dx}$

(5) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x f(x,y)\,dy=\underline{\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx}$.

(6) $\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx=\underline{\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy}$



14. 简单的第一类曲线积分计算.

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$. $\int_L ds = L$的弧长.

(1) 书 P_{193}. 习题11-1. 3.

(2). $L: x^2+y^2=2$. $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2}ds =$ $\underline{\sqrt{2}\pi}$

解: $\oint_L \frac{1}{x^2+y^2}ds = \oint_L \frac{1}{2}ds = \frac{1}{2}\oint_L ds = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\pi = \sqrt{2}\pi$.

15. 第二类曲线积分与路径无关条件.

$\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. $\Leftrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=0$.

(1). 曲线积分 $\int_L (y-e^x\cos y)dx + (x+e^x\sin y)dy$ 与路径 $\underline{无关}$.

解: $P=y-e^x\cos y$. $Q=x+e^x\sin y$. $\frac{\partial P}{\partial y}=1+e^x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x}$

(2) $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 逆时针方向. 则 $\oint_L (2xy+3xe^x)dx+(x^2-y\cos y)dy =$ $\underline{0}$

解: $P=2xy+3xe^x$. $Q=x^2-y\cos y$. $\frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$

(3). $\int_L (3xy^2-y^3)dx+(6x^2y-3xy^2)dy$ 与路径 $\underline{有关}$.

解: $P=3xy^2-y^3$. $Q=6x^2y-3xy^2$. $\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2 \ne \frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2$

(4). $\int_L (e^x\sin y-mxy)dx+(e^x\cos y-x^2)dy$ 与路径无关. 则 $m=$ $\underline{2}$.

解: $P=e^x\sin y-mxy$. $Q=e^x\cos y-x^2$ $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-mx=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-2x$.

$\therefore m=2$.

(5). $\int_L (axy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$ 与路径无关. 则 $a=$ $\underline{2}$

解: $P=axy^3-y^2\cos x$. $Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$

$\frac{\partial P}{\partial y}=3axy^2-2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2$ $\therefore 3a=6$. $a=2$

16. 简单的第一类曲面积分计算.

$\Sigma: z=z(x,y)$. $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. 一投二代.

历年试题. 见四4.

17. 级数收敛的必要条件.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n=0$.

(1). 若 $\lim_{n\to\infty} u_n\neq 0$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定 <u>发散</u>.

(2). 若 $\lim_{n\to\infty} u_n=1$. 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ 是 <u>发散</u>. $(\because \lim_{n\to\infty}(-1)^n u_n\neq 0.)$

(3) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 <u>必要条件</u>

(4). $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-1)$ 收敛. 则 $\lim_{n\to\infty} u_n=$ <u>1</u>. $(\because \lim_{n\to\infty}(u_n-1)=0.\ \therefore \lim_{n\to\infty} u_n=1)$

(5). $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10}u_n$ 是 <u>发散</u>.

18. 幂级数的收敛半径. 收敛区间及收敛域.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, 收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$. 收敛区间 $(-R,R)$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \xlongequal{x-x_0=t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. $R=\frac{1}{\rho}$. 收敛区间 (x_0-R,x_0+R).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}}\right|=\rho$. $\rho<1$ 收敛. $\rho>1$ 发散. 确定 R.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2+n}x^n$ 的收敛半径 $R=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>.

解: $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{2+n+1}}{\frac{2^n}{2+n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+3}=2$. $R=\frac{1}{2}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-5)^n$ 收敛区间 <u>$(4,6)$</u>.

解: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}} \xlongequal{x-5=t} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{\sqrt{n}}$. $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1$ $\therefore R=1$. $-1<x-5<1$. $x\in(4,6)$

($x=4$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛. $x=6$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. $\therefore$ 收敛域 $[4,6)$.)

19. 简单幂级数和函数.

(1). $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ 的和函数. $\frac{2}{2-x}$. $x\in(-2,2)$

解：∵ $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$、$-1<x<1$. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2}{2-x}$ $-1<\frac{x}{2}<1$. $-2<x<2$

(2). $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ 的和函数：$\frac{1}{1+x}$. $x\in(-1,1)$.

(3) $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ 的和为 e.

解： $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. $x=1$时. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e^1=e$

20. 简单函数的幂级数展开.

(1). $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

解： $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$