高数叔 × 积分

曲线积分 $\int_L$~

第一类(对弧长)　　第二类(对坐标)

$\int_L f(x,y)ds$　　$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$L: f(x,y)$	计算公式
$y=y(x)$	$\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$
$x=x(y)$	$\int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+[x'(y)]^2}dy$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

$L: f(x,y)$	计算公式
$y=y(x)$	$\int_a^b\{[P(x,y(x))]+[Q(x,y(x))]y'(x)\}dx$
$x=x(y)$	$\int_c^d\{[P(x(y),y)]x'(y)+[Q(x(y),y)]\}dy$
$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$	$\int_\alpha^\beta\{[P(x(t),y(t))]x'(t)+[Q(x(t),y(t))]y'(t)\}dt$

L 有方向，积分限为起点坐标到终点坐标

L 没方向，积分下限小于积分上限

计算方法：转化为一元定积分

$\int_a^b f(x)dx$

定积分换元法：换元必换限，不换元则不换限！

分部积分法："反对幂指三"五类函数，排名靠后的凑！

例 $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}dx^2$

换元 $x^2=u$　换限 $\begin{array}{c|cc}x&0&2\\\hline u&0&4\end{array}$

$\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du=\frac{1}{2}e^u\Big|_0^4=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

例 $\int x e^x dx$　　$u=x$　$du=dx$　$v=e^x$　$dv=e^x dx$

$=\int x\,de^x$

$=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

曲面积分 $\iint_\Sigma$~

第一类(对面积)　　第二类(对坐标)

$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$　　$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$

一投二代三变量

$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=$

Σ在xoy上的投影 $\iint_{D_{xoy}} f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

换 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

$=z(x,y)$代入被积函数

一投二代三符号

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$

三符号　一投　二代

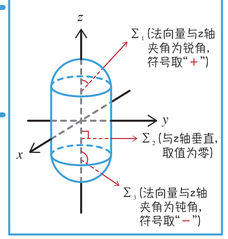
$=\pm\iint_{D_{xoy}} R(x,y,z=(x,y))dxdy$

$\Sigma: f(x,y,z)$	计算公式
$z=z(x,y)$	$\iint_{D_{xoy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$
$x=x(y,z)$	$\iint_{D_{yoz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}dydz$
$y=y(x,z)$	$\iint_{D_{xoz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$

曲面积分	曲面方程	一投	二代	三符号	化成二重积分
$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$	$z=z(x,y)$	D_{xoy}	$R(x,y,z(x,y))$	$\pm dxdy$	$\pm\iint_{D_{xoy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$
$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz$	$x=x(y,z)$	D_{yoz}	$P(x(y,z),y,z)$	$\pm dydz$	$\pm\iint_{D_{yoz}} P(x(y,z),y,z)dydz$
$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdz$	$y=y(x,z)$	D_{xoz}	$Q(x,y(x,z),z)$	$\pm dxdz$	$\pm\iint_{D_{xoz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz$

Σ没有方向

Σ有方向侧，需要判断符号：当Σ的正法向量与z轴正方向夹角为锐角时，符号取"+"，否则取"−"。



计算方法：转化为二重积分

格林公式

闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$

直角坐标

X型：$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

y 的积分限：一条平行于y轴的直线沿y轴正方向穿过积分区域，穿入线 $\varphi_1(x)$ 为y的积分下限，穿出线 $\varphi_2(x)$ 为积分上限。

Y型：$\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$

x 的积分限：一条平行于x轴的直线沿x轴正方向穿过积分区域，穿入线 $\varphi_1(y)$ 为x的积分下限，穿出线 $\varphi_2(y)$ 为积分上限。

极坐标

积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 由直角坐标变成极坐标分两步：

第一步：在直角坐标积分式中做代换：$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,并用$\rho d\rho d\theta$替换dxdy，这里注意千万不要忘了前面的$\rho$；

第二步：确定极坐标形式下的积分限，将积分变为如下形式：

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

注意！极坐标积分通常都是先对ρ后对θ积分的！

扫描线：原点出发，沿 × 轴正方向开始，逆时针扫描积分区域，通过起始角度和结束角度确定θ积分限，通过穿入线和穿出线确定ρ积分限。

$$\int_0^{\theta_1} d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$

直角坐标

先一后二

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV=\iint_{D_{xoy}}d\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

D_{xoy} X型：$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

D_{xoy} Y型：$\int_a^b dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

先二后一

$$\int_{c_1}^{c_2}dz\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

这种方法有一定的适用范围：一是截面面积容易求解，比如截面是圆、椭圆、三角形等；另外一点，被积函数是只关于 z 的函数，也就是

$$f(x,y,z)=g(z)$$

柱面坐标

$$\iiint_\Omega f(r,\theta,z)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$=\iint_{D_{xoy}} rdrd\theta\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$
$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

确定z的积分限：过投影区域 D_{xoy} 内一点的直线，沿着z轴正方向穿过Ω，下入面；上限：穿出面。 r 和 θ 的积分限确定与二重积分极坐标方法一样。

如果投影区域是圆域，并且被积函数中含有 x^2+y^2 或 $\frac{y}{x}$ 这样的形式，则使用柱面坐标相对比较方便。

球面坐标

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z=\rho\cos\varphi,$$
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}}\sin\varphi d\varphi\int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2 d\rho$$

1、找ρ的积分限。从原点出发一条射线M，沿z轴正方向穿过积分区域Ω，可见从 $\rho_1(\varphi,\theta)$ 穿入，从 $\rho_2(\varphi,\theta)$ 穿出，则它们就是ρ的积分限。

2、找φ的积分限。对任一固定的 θ，射线 M 从z轴正方向开始扫描，扫描到积分区域时，与z轴正方向的夹角从 $\varphi_{\min}$ 到 $\varphi_{\max}$，则它们就是 φ 的积分限。

3、找θ的积分限。射线 M 在xoy平面上的投影射线为L，L在xoy平面上扫描，角θ从α扫到β，则它们就是θ的积分限。

高斯公式

空间有界闭区间Ω，其表面外侧曲面为Σ，若 $P(x,y,z)$ $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ 在Ω上具有一阶连续偏导数，则

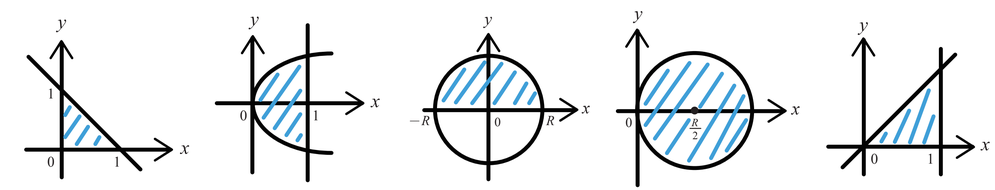
$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint_\Sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

或

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

这里$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是Σ上点（x,y,z）处的法向量的方向余弦。

二重积分图形



$y=1-x, x=0, y=0$ 围成

$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy,$

$\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx.$

抛物线 $y^2=x$ 与 $x=1$ 围成：

$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

$x^2+y^2=R^2$ 上半个圆

$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^\pi d\theta\int_0^R\rho\cdot\rho d\rho$

圆周 $x^2+y^2=Rx$ 围成的区域

$\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho d\rho.$

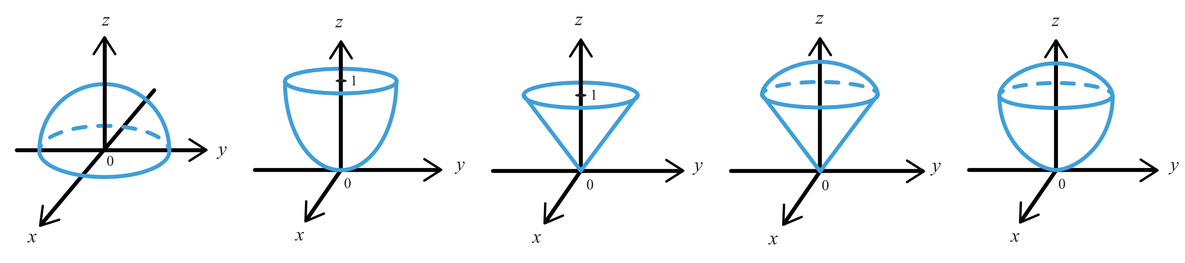
$y=x, x=1, y=0$ 围成

$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy,$

$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx,$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho d\rho.$

三重积分图形



半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 与 $z=0$ 围成：

投影区域 $D_{xoy}:\begin{cases}x^2+y^2\le R^2\\z=0\end{cases}$

$I=\iint_{D_{xoy}}dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$

抛物面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成：

投影区域 $D_{xoy}:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\z=0\end{cases}$

$I=\iint_{D_{xoy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 围成：

投影区域 $D_{xoy}:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\z=0\end{cases}$

$I=\iint_{D_{xoy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}$ 围成区域：

投影区域 $D_{xoy}:\begin{cases}x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\\z=0\end{cases}.$

$I=\iint_{D_{xoy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$

$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+y^2+z^2=2\end{cases}$ 围成区域：

投影区域 $D_{xoy}:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\z=0\end{cases}.$

$I=\iint_{D_{xoy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz.$

积分对称性

定积分对称性

当定积分的积分限关于原点对称时：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，

则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx.$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，

则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0.$

定积分中关于三角函数还有一个非常有用的定理，这个定理经常和定积分对称性在题中结合使用：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{ 为正偶数}\\\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, n\text{ 为正奇数}\end{cases}$$

当然这里 n 为正奇数时，$n\ne 1$，因为

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$。

打开微信学高数

二重积分对称性

1. 若积分区域 D 关于 x 轴对称，记 x 轴以上区域为 D_1。

如果被积函数 $f(x,y)$ 是关于 y 的奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$$

如果被积函数 $f(x,y)$ 是关于 y 的偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma.$$

2. 若积分区域 D 关于 y 轴对称，记 y 轴右侧区域为 D_1。

如果被积函数 $f(x,y)$ 是关于 x 的奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$$

如果被积函数 $f(x,y)$ 是关于 x 的偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma.$$

3. 若积分区域 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，记

$$D_1=\{(x,y)\in D\,|\,x\ge 0, y\ge 0\}$$

如果 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$$

如果 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=4\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma.$$

4. 若积分区域 D 关于原点对称，记

$$D_1=\{(x,y)\in D\,|\,x\ge 0\}$$

如果 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$$

如果 $f(-x,-y)=f(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma.$$

三重积分对称性

1. 设Ω 关于 yoz（或写成 $x=0$）面对称，并且设 Ω_1 为 Ω 中 $x\ge 0$（或 $x\le 0$）的部分：

若 $f(x,y,z)$ 关于 x 为奇函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=0.$

若 $f(x,y,z)$ 关于 x 为偶函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv.$

2. 设Ω 关于 xoz（或写成 $y=0$）面对称，并且设 Ω_1 为 Ω 中 $y\ge 0$（或 $y\le 0$）的部分：

若 $f(x,y,z)$ 关于 y 为奇函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=0.$

若 $f(x,y,z)$ 关于 y 为偶函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv.$

3. 设Ω 关于 xoy（或写成 $z=0$）面对称，并且设 Ω_1 为 Ω 中 $z\ge 0$（或 $z\le 0$）的部分：

若 $f(x,y,z)$ 关于 z 为奇函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=0.$

若 $f(x,y,z)$ 关于 z 为偶函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv.$

4. 轮转对称性

设Ω 关于 $x=y=z$ 对称，则可以对被积函数中的变量 x，y，z 进行任意的轮换，而积分结果不变，即

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega f(y,z,x)dv=\iiint_\Omega f(y,x,z)dv\cdots.$$

特别地，若被积函数仅为一元函数，则

$$\iiint_\Omega f(x)dv=\iiint_\Omega f(y)dv=\iiint_\Omega f(z)dv.$$

5. 轮转对称性

若积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]d\sigma.$

记 $D_1=\{(x,y)\in D\,|\,y\ge x\}$，

如果 $f(x,y)=-f(y,x)$ 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=0.$

如果 $f(x,y)=f(y,x)$，则 $\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma.$

未经许可，任何个人及企事业单位不得转载、生产、销售、商业使用数学媒体材料，违者将追究法律责任。

6940509400045

Copyright © 2016 天津莱美得科技有限公司，版权所有权利。