

装
订
线

座位号:

《概率论与数理统计》试卷答案 A

2021 年 5 月

1. B 2. B 3. D 4. C 5. C

6. $\overline{ABC} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup ABC$ 7. 0.7 8. 1/120 9. 1

10. e^{-3}

11. $\frac{3}{4}\pi$ 12. $\frac{1}{2}$ 13. $t(16)$ 14. $f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \quad (-\infty < \xi < \infty)$

三、计算题（本大题共 3 小题，15、16 每题 10 分，17 题 12 分，共 32 分）

15 答: 设 A_i ($i=1,2,3$)表示“任选一名射手是 i 级射手”, B 为“任选一名射手能通过选拔进入比赛”。

依题意知： $P(A_1)=\frac{3}{10}$ ， $P(A_2)=\frac{5}{10}$ ， $P(A_3)=\frac{2}{10}$

$P(B|A_1)=0.9, P(B|A_2)=0.7, P(B|A_3)=0.5$ 。 2分

1) 由全概率公式得：任取一名射手能通过选拔进入比赛的概率为：4分

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = \frac{3}{10} \times 0.9 + \frac{5}{10} \times 0.7 + \frac{2}{10} \times 0.5 = 0.72$$

2) 由贝叶斯公式得：若选手能通过选拔，则他是一级射手的概率为：4分

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.3 \times 0.9}{0.72} = 0.375$$

16. 解: 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, 得 $\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}dx = 1$

解得 $A = \frac{1}{2}$ 3分

$$P(0 < \xi < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{e})$$

当 $x \leq 0$ 时, $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^x$; 3 分

当 $x > 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

17 (1) 联合分布律为: 4 分

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

(2) 边缘分布律为: 4 分

X	0	1
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

Y	0	1
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

由于 $P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{10}$,

而 $P\{X=0\} = \frac{2}{5}$, $P\{Y=0\} = \frac{2}{5}$, $P\{X=0, Y=0\} \neq P\{X=0\} P\{Y=0\}$ 不成立

所以 X 与 Y 不相互独立 1 分

$$(3) P\{Y=0 | X=1\} = \frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{X=1\}} = \frac{3}{4} \quad 3 \text{ 分}$$

18. 矩法估计

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 (\lambda + 1) x^{\lambda+1} dx = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \quad 4 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \frac{\lambda+1}{\lambda+2} = \bar{x} \quad \text{解出} \quad \hat{\lambda} = \frac{1-2\bar{x}}{\bar{x}-1} \quad 6 \text{ 分}$$

19. 解: 当 σ^2 未知, μ 的区间估计

$$P\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1 - \alpha \quad 2 \text{ 分}$$

得 $\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{\mu} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{\mu}$ 2 分

$$0.95 = 0.05 \text{ , 查表得 } t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.7764,$$
$$t_{\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{\mu}=13.67 \quad 2 \text{ 分}$$

σ^2 未知, μ 的置信度为 0.95 的置信区间为:

 $\mu \in (563.93, 591.27)$ 2分

20. 解：本题要求在 $\alpha=0.02$ 下检验： 1分

$$H_0: \sigma^2 = 5000;$$

$$H_0: \sigma^2 \neq 5000;$$

现在 $n=26$, 3 分

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314, \quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.99}(25) = 11.524$$

$\sigma_0^2 = 5000;$ 2 分

拒绝域为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > 44.314$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < 11.524$$

由观察值 $S^2=9200$ ，所以拒绝 H_0 ， 3分

认为这批电池寿命的波动性有显著变化。 1分

21. 解: 设索赔 x 人, $x \sim B(10000, 0.006)$

则利润为 $120000 - 1000x$ 元 1 分

(1) 由于 $n=10000$ 充分大, 则二项分布接近于正态分布

所以 $x \sim N(60, 59.64)$ 2 分

$$p\{70 < x < 110\} = P\left\{\frac{70-60}{\sqrt{59.64}} < \frac{x-60}{\sqrt{59.64}} < \frac{110-60}{\sqrt{59.64}}\right\} = 0.0985 \quad 3 \text{分}$$

(2) 利润为 $100000 - 1000x$ 元 1 分

$$P\{10-0.1x < 0\} = 1 - P\{x < 100\} = 1 - P\left\{\frac{X-60}{\sqrt{5964}} < \frac{100-60}{\sqrt{5964}}\right\} \approx 0 \quad 3 \text{分}$$