第二章 刚体的运动

一、力矩做功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = F_{\mathrm{t}}r\mathrm{d}\theta = Md\theta$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$

二、力矩的功率

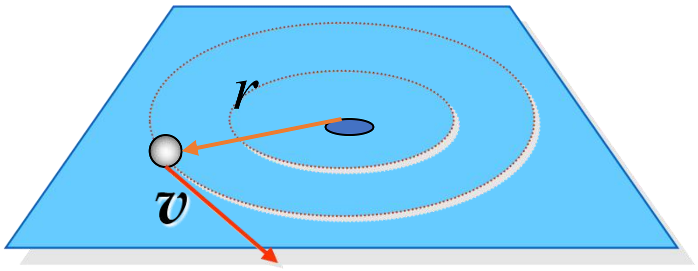
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$$

讨论：额定功率一定时，力矩越大，角速度越小；力矩越小，角速度越大。

三、转动动能

（1）质点的转动动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

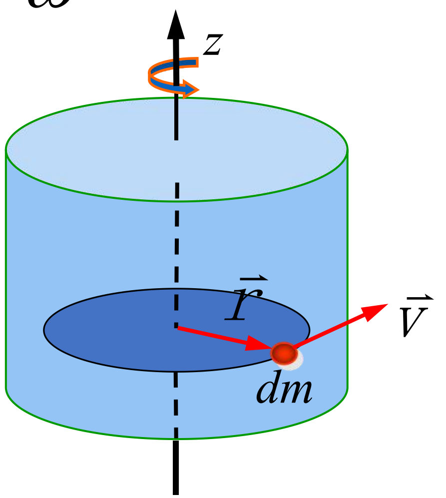


（2）质点系的转动动能

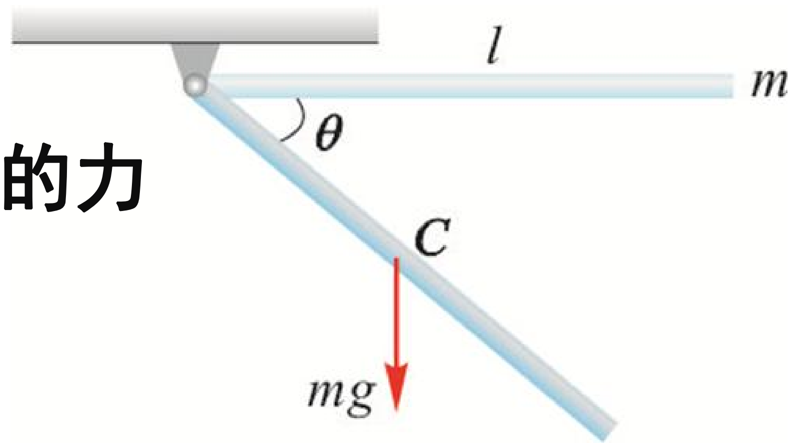
$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

（3）刚体的转动动能

$$E_k = \int \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}(\int dmr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$



例 有一根长为 l、质量为m的均匀细棒，最初细棒静止在水平位置，试求细棒下摆角 θ 时重力矩所做的功。



解： 重力集中于质心所产生的力矩为

$$M=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

重力矩所做的功为：

$$W=\int_0^{\theta}Md\theta=\int_0^{\theta}\frac{1}{2}mgl\cos\theta d\theta=\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

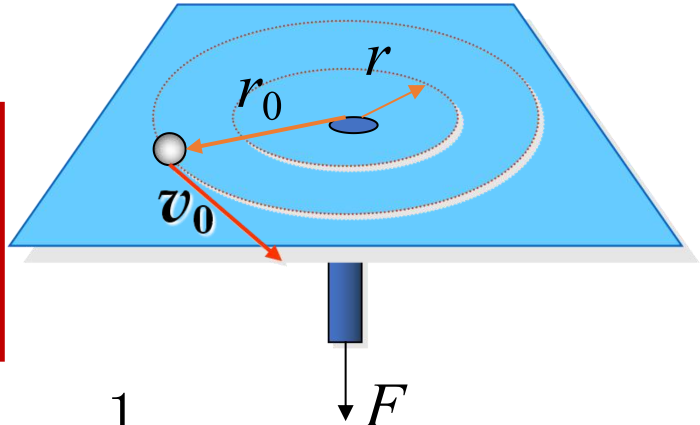
合外力矩对绕定轴转动的刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

$$W=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_1} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

功和转动动能都与参考系的选择有关，动能定理仅适用于惯性参考系。

例 质量为m的小球系在绳子的一端, 绳穿过铅直套管, 使小球限制在一光滑水平面上运动.先使小球以速度v_0绕管心作半径为r_0的圆周运动, 然后向下拉绳子, 使小球运动半径变为r.求小球的速度以及外力所做的功。

解: (1) 角动量守恒定律得



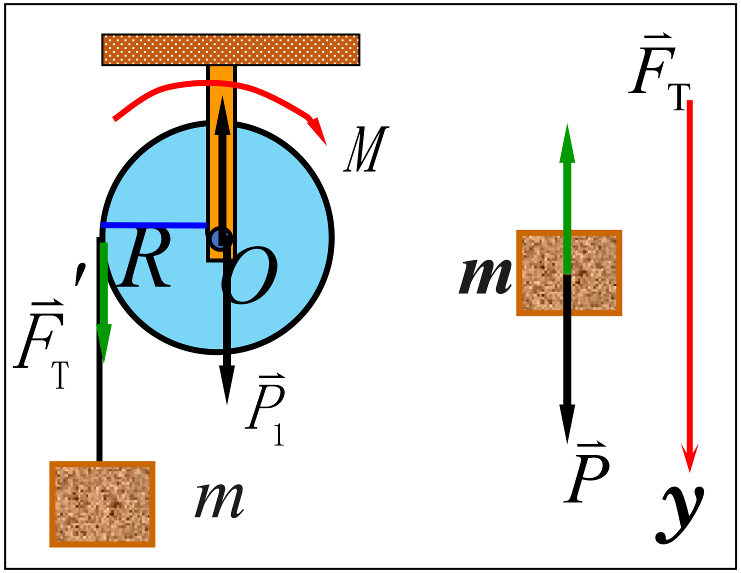
$$mv_0r_0 = mvr \qquad \boxed{v = v_0 \cdot \frac{r_0}{r}}$$

(2) 由动能定理得 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]$$

例 一质量为M、半径为R的圆盘，盘上绕有细绳，一端挂有质量为m的物体，设细绳不伸长且与滑轮间无相对滑动，试求物体由静止下落h时其速度的大小。

解： 以地面为参考系，通过受力分析



圆盘： $F_T R\Delta\theta = \dfrac{1}{2}J\omega^2 - 0$

物体： $mgh - F_T h = \dfrac{1}{2}mv^2 - 0$

$h = R\Delta\theta \quad v = R\omega \quad J = MR^2/2$

$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$

我们正青春年少

只有保守内力作功时，刚体的机械能保持不变，即当时 $W^{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{in}}=0$，机械能守恒。

$$E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=E_{\mathrm{k}0}+E_{\mathrm{p}0}$$

（1）刚体的重力势能

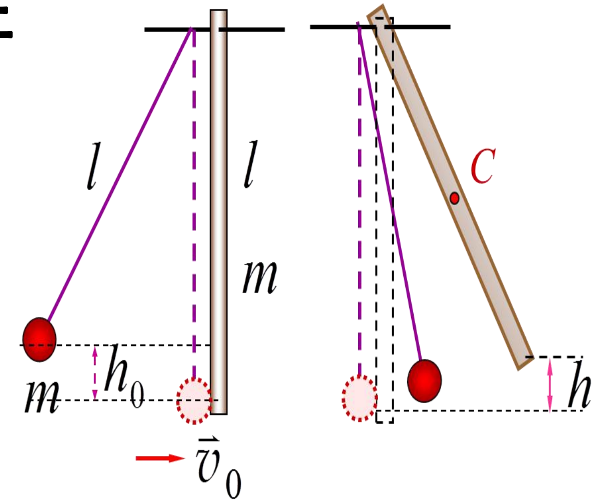
$$\boxed{E_{\mathrm{p}}=mgh_c}$$

（2）刚体的机械能

$$\boxed{E=\frac{1}{2}J\omega^2+mgh_c}$$

2.4.3 刚体定轴转动的机械能守恒定律

例 把一单摆和等长的匀质直杆悬挂在同一高度，杆与单摆的质量均为 m，开始时将单摆拉到高度 h_0处，使它从静止状态下摆并在最低位置处垂直和直杆发生弹性碰撞，试求：碰撞后直杆下端达到的高度 h。



解: (1) 单摆自由下摆过程: $mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

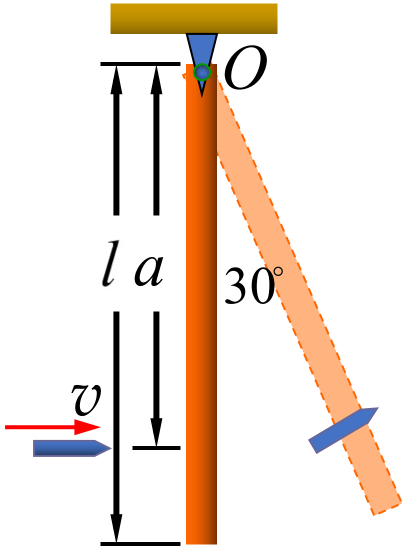
(2) 单摆和杆发生弹性碰撞过程:

$$mlv_0 = J\omega + mlv \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

(3) 碰撞后杆上摆过程: $\frac{1}{2}J\omega^2 = mgh_C$

$$h = 2h_C = \frac{3}{2}h_0$$

例 一长为l、质量为M的杆可绕支点O自由转动.一质量为m、速度为v的子弹射入距支点为a的棒内，若棒最大偏转角为30°, 问子弹的**初速度**是多少?



解: 碰撞过程角动量守恒

$$mva=\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega$$

向上摆动过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\omega^2=mga(1-\cos 30^0)+Mg\frac{l}{2}(1-\cos 30^0)$$

$$v=\frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}(2-\sqrt{3})(Ml+2ma)(Ml^2+3ma^2)}$$

我们正青春年少

质点的运动与刚体定轴转动对照	
质点的运动	**刚体定轴转动**
位矢 $\vec{r}$	角坐标 $\vec{\theta}$
速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\vec{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}$
加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\vec{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
力 $\vec{F}$	力矩 $\vec{M}$
质量 m	转动惯量 $J=\int r^2\mathrm{d}m$

我们正青春年少

2.4.3 刚体定轴转动的机械能守恒定律

质点的运动与刚体定轴转动对照	
质点的运动	**刚体定轴转动**
牛顿第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律 $\vec{M}_Z=J\vec{\alpha}$
动量 $\vec{P}=m\vec{v}$	角动量 $\vec{L}=J\vec{\omega}$
动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{F}dt=m\vec{v}-m\vec{v}_0$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t}\vec{M}dt=J\vec{\omega}-J\vec{\omega}_0$
动量守恒定律 $\sum_i m_i\vec{V}_i=\vec{C}$	角动量守恒定律 $\sum_i J_i\vec{\omega}_i=\vec{C}$
功 $W=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	功 $W=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta$

我们正青春年少

质点的运动与刚体定轴转动对照	
质点的运动	**刚体定轴转动**
动能 $E_K=\frac{1}{2}mv^2$	动能 $E_K=\frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理 $\int_{r_0}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2-\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i0}^2$	动能定理 $\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta=\sum_i\frac{1}{2}J_i\omega_i^2-\sum_i\frac{1}{2}J_i\omega_{i0}^2$
势能 $E_p=mgh$	势能 $E_p=mgh_c$
机械能守恒定律 $\sum_i\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2+E_p\right)=C$	机械能守恒定律 $\sum_i\left(\frac{1}{2}J_i\omega_i^2+E_p\right)=C$