

装

订

线

座位号:

新疆大学 2015—2016 学年第一学期
《高等数学》上册试题 (理工汉本)

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

学院: 班级:

2016 年 1 月 8 日

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得分	评卷人

一、单项选择题 (本题5小题, 每小题3分, 共15分)

1. 函数 $f(x) = \sin x + \frac{|x|}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (\quad)$
A. 0 B. -1 C. 1 D. 不存在
2. 满足方程 $f'(x) = 0$ 的点 x 是函数 $y = f(x)$ 的 (\quad)
A. 极大值点 B. 极小值点 C. 驻点 D. 间断点
3. 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x^2 + k, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $k = (\quad)$
A. 1 B. 0 C. -1 D. 不存在
4. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单调增区间为 (\quad)
A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(-1, 1)$
5. 已知 $f(x) = e^{-2x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} dx = (\quad)$
A. $\frac{1}{x^2} + C$ B. $-\frac{1}{x^2} + C$ C. $\ln x + C$ D. $-\ln x + C$

得分	评卷人

二、求下列极限（本题共3小题，每小题5分，共15分）

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$

得分	评卷人

三、求下列导数或微分（本题共4小题，每小题6分，共24分）

9. 求由方程 $xy = e^{x+y}$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

**
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 装
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 订
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 线
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **
 **

10. 已知 $y = \tan(1 - x^2)$, 求 $dy|_{x=1}$

11. 已知
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
, 求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

12. 求函数 $y = \ln(1 + x^2)$ 的凹凸区间及拐点

得分	评卷人

四、求下列各式的积分（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\int x^2 \cos x dx$

14. $\int_1^2 \frac{2 + 3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

16. 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $a \leq x \leq b$ 的一段弧的长度

装

订

线

五、求解微分方程（本大题共2小题，第17题6分，第18题8分，共14分）

18. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解

得分	评卷人

六、证明题 (本大题共 2 小题, 每题 6 分, 共 12 分)

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{2}$, n 为正整数. 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在并求出其极限

20. 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$

新疆大学 2015—2016 学年度第一学期
《高等数学》(上册) 汉本试卷 (标准答案)

一. 单项选择题

1. D 2. C 3. A 4. D 5. A

二. 极限

$$6. \text{原式} = \lim \left(1 + \frac{-2}{2x+1} \right)^{3x} = e^{-3}$$

$$7. \text{原式} = \lim \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim \frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \lim \frac{-1}{\ln x + 2} = \frac{-1}{2}$$

$$8. \text{原式} = \lim \frac{e^{-\cos^2 x} \sin x}{2x} = \lim \frac{e^{-\cos^2 x}}{2} = \frac{1}{2e}$$

三. 微分

$$9. \text{两边求导得到 } y + xy' = e^{x+y}(1+y'), \quad \text{故 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$$

$$10. y' = -2x \sec^2(1-x^2), \quad dy|_{x=1} = -2$$

$$11. \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$$

$$12. y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

凹区间 $[-1, 1]$, 凸区间其余集。拐点 $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$

四. 积分

$$13. \text{原式} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2x \sin x - 2 \sin x + c$$

$$14. \text{原式} = - \int_1^2 2 + \sin \frac{1}{x} d \frac{1}{x} = - \int_1^{\frac{1}{2}} 2 + \sin u du = 1 - 3 \cos 1 + 3 \cos \frac{1}{2}$$

$$15. \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \pi$$

装
订
线
内
答
题
无
效

$$16. s = \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \int_{a+1}^{b+1} \sqrt{u} du = \frac{2}{3} [(b+1)^{\frac{3}{2}} - (a+1)^{\frac{3}{2}}]$$

五. 微分方程

17. 化为标准式为 $y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$, 齐次通解为 $\frac{c}{\ln x}$, 设特解为 $\frac{c(x)}{\ln x}$ 求导代入方程得到

$$c'(x) = \frac{\ln x}{x}, c(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x, \text{ 所以通解为 } \frac{c}{\ln x} + \frac{1}{2} \ln x$$

18. 特征方程和特征根为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, 齐次通解为 $c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, 设特解

$$y^* = x(ax + b)e^{2x}, \text{ 代入方程得到 } a = -\frac{1}{2}, b = -1. \text{ 通解为 } c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - x(\frac{1}{2}x + 1)e^{2x}$$

六. 证明

19. 证明: 0 为数列下界, 数学归纳法可证明 1 为它的上界。

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(1 - a_n)^2}{2} > 0, \text{ 它是单调递增的, 所以极限存在, 设为 } a,$$

$$\text{对递归式两边取极限得到 } a = \frac{1+a^2}{2}, a = 1.$$

20. 证明: 令 $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}, f(1) = 0$. 对函数 $f(x)$ 求导有 $f'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$.

$$\text{当 } 0 < x \leq 1, f(x) \leq 0, \ln x \leq \frac{x-1}{x+1}, (x-1)\ln x \geq \frac{(x-1)^2}{1+x},$$

$$\text{当 } x > 1, f(x) > 0, \ln x > \frac{x-1}{x+1}, (x-1)\ln x \geq \frac{(x-1)^2}{1+x}$$