2020-2021. (A)

一.选择题.

1) 方程 $z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}$ 所表示的曲面为.(   )

A. 椭球面. B.柱面 C.双曲抛物线. D.椭圆抛物线

二.填空.

6.过点.(1, -2, 4)且与平面 $2x-3y+z=4$ 垂直的直线方程是 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$

11. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{3}$ 的距离.

解:方法一:

过点P且与该知直线垂直的平面Π:

$0(x-3)+3(y+1)+3(z-2)=0$

即 $3y+3z-3=0 \Rightarrow y+z-1=0$

平面Π与直线交点:

$y=z-2$ 代入 $y+z-1=0 \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

交点为 $(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

$d=\sqrt{(3-1)^2+(-1+\frac{1}{2})^2+(2-\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

方法二:M(1,0,2)在直线上且

$\vec{s}=(0,3,3)$

$\vec{PM}=(-2,1,0)$

$\vec{PM}\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=(3,6,-6)$

$d=\frac{|\vec{PM}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{9+36+36}}{\sqrt{9+9}}=\frac{9}{3\sqrt{2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}$

12. 求过点(1,0,-1)且通过直线 $\begin{cases} x+2y+1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ 的平面方程.

解:过直线平面束方程:

$x+2y+1+\lambda(y+z-1)=0$

即: $x+(2+\lambda)y+\lambda z+1-\lambda=0$.

将点(1,0,-1)代入 得 $\lambda=1$ 所求平面方程为: $x+3y+z=0$

2020-2021 (B)

1. 方程 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=z$ 所表示的曲面为( )

A. 椭球面 B. 柱面. C. 双曲抛物面 D. 旋转抛物面.

6. 点 $M_0(1,2,1)$ 到平面 $\pi: x+2y+2z=10$ 的距离是 ___1___

11. 已知空间三点 $A(1,-1,2)$ $B(4,5,4)$ $C(2,2,2)$ 求 $\triangle ABC$ 中 AC 边的高.

解: $h_{\cancel{AC}} = \frac{|\vec{AC}\times\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{|\vec{AC}|} = \frac{|(6,-2,-3)|}{\sqrt{1+9}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$

12. 求过点 $P(0,-3,2)$ 且与过点 $A(3,4,-7)$ 与 $B(2,7,-6)$ 的连线平行的直线方程.

解: $\vec{s}=\vec{AB}=(-1,3,1)$

∴直线方程为: $\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{1}$.

2019-2020 (B卷)

1. 向量 $\vec{a}$ 的模为2，方向角 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，则向量 $\vec{a}$=(　　)

A $(\sqrt{2},1,1)$　　B. $(-\sqrt{2},1,1)$　　C. $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　　D. $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

2. 过点(1,2,3)且与直线 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ 平行的直线方程是(　　)

A: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$　　B. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{0}$　　C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$　　D: $2x-y=0$

3. xoy面上的曲线 $2x^2+3y^2-4=0$ 绕x轴旋转一周所得旋转曲面方程是:(

A: $2x^2+3y^2+z^2-4=0$　　B: $2(x^2+z^2)+3y^2-4=0$　　C: $2x^2+3(y^2+z^2)-4=0$.　　D: $2(x^2+y^2)+3z^2$

计算:

1. 求点P(1,-1,3)到直线 $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ 的距离.

解: 点M(1,-1,0)在直线上,且 $\vec{s}=(-2,1,0)$

$\vec{PQ}=(0,0,-3)$.　　$\vec{s}\times\vec{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&1&0\\0&0&-3\end{vmatrix}=(-3,-6,0)$

$$d=\frac{|\vec{s}\times\vec{PQ}|}{|\vec{s}|}=\frac{\sqrt{9+36}}{\sqrt{4+1}}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}=3.$$

方法二: 过点P且与已知直线垂直平面π: $-2(x-1)+(y+1)=0 \Rightarrow -2x+y+3=0$

直线与平面交点: $\begin{cases}\frac{x-1}{-2}=y+1\\-2x+y+3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ 交点(1,-1,0)

$d=\sqrt{(1-1)^2+(-1+1)^2+(3-0)^2}=3$

2. 求直线 $\begin{cases}x-y+z-1=0\\x+y+z-2=0\end{cases}$ 在平面 $2x-y+z-2=0$ 上投影直线方程.

解: 过直线平面束方程: $x-y+z-1+\lambda(x+y+z-2)=0$

$\Rightarrow (1+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1+\lambda)z-1-2\lambda=0$

由已知得. $(1+\lambda,\lambda-1,1+\lambda)\cdot(2,-1,1)=0 \Rightarrow \lambda=-2$.

代入平面束方程: $-x-3y-z+3=0 \Rightarrow x+3y+z-3=0$

投影直线方程: $\begin{cases}x+3y+z-3=0\\2x-y+z-2=0.\end{cases}$

2019-2020 (A)

1. 向量 $\vec{a}=(1,1,\sqrt{2})$ 与 z 轴的夹角是(　　)

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D: $\frac{5\pi}{6}$

2. 过点 (1,1,1) 且与平面 $x-2y+3z-5=0$ 垂直的直线方程是(　　)

A: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$　B: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$　C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$　D. $x-2y+3z-2=0$

3. 点 (1,1,1) 到平面 $x-2y+2z=5$ 的距离是(　　)

A: -2.　　B: $-\frac{4}{3}$　　C: 2.　　D: $\frac{4}{3}$

11. 求过点 (2,-1,3) 且与直线 $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$ 平行的直线方程.

解: $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,0,2)$.

所求直线方程为: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{2}$

12. 求过直线 $\begin{cases} x-2y+2z+1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$ 且与平面 $2x-y-z-2=0$ 垂直的平面方程.

解: 过直线平面束方程: $x-2y+2z+1+\lambda(x+y-z-2)=0$

$(1+\lambda)x+(\lambda-2)+(2-\lambda)+1-2\lambda=0$

由已知 $(1+\lambda,\lambda-2,2-\lambda)\cdot(2,-1,-1)=0$ 得 $\lambda=-1$

所求平面: $y-z-1=0$

扫描全能王

2018－2019 (A)

1. 若直线过点 $(1,1,1)$ 和 $(2,3,4)$ 则该直线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

2. 已知向量 $|a|=3, |b|=4$. $a\perp b$ 则 $|a+b|=$ 5

3. 已知向量 $\vec{a}=(2,2,1)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$ 求以 $\vec{a}+2\vec{b}$ 与 $\vec{a}-2\vec{b}$ 为边的平行四边形面积.

解: $\vec{a}+2\vec{b}=(2,2,1)+(2,-2,0)=(4,0,1)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(2,2,1)-(2,-2,0)=(0,4,1)$

$S=|(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$

$=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}\right|=|(-4,-4,16)|=\sqrt{16+16+16^2}=12\sqrt{2}$.

$S=|(\vec{a}+2\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|=|\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times2\vec{b}+2\vec{b}\times\vec{a}+2\vec{b}\times2\vec{b}|$

$=|2(2\vec{b}\times\vec{a})|=4|\vec{b}\times\vec{a}|=4\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\right|=4|(-1,-1,4)|$

$=12\sqrt{2}$

2. 求通过两平面 $2x+y-4=0$ 与 $y+2z=0$ 的交线,并且过点 $(0,1,1)$ 的平面方程

解: 过交线的平面束方程: $2x+y-4+\lambda(y+2z)=0$

$2x+(\lambda+1)y+2\lambda z-4=0$.

把点 $(0,1,1)$ 代入平面束方程 $\lambda+1+2\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=1$

平面方程为: $2x+2y+2z-4=0 \Rightarrow x+y+z-2=0$

2018－2019 (B)

1. 已知向量 $\vec{a}=(-2,3,-\sqrt{3})$ 则向量 $\vec{a}$ 与 x 轴的方向角 $\alpha=$ $\frac{2}{3}\pi$

2. 平面 $x+2y+kz+1=0$ 与平面 $x+y-z=5$ 垂直, 则 $k=$ 3

3. 过点 $(-1,2,1)$ 且与 xoy 面垂直的直线方程是 $\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$

1. 已知平行四边形的三个顶点 $A(1,-1,2)$, $B(2,-3,2)$ 和 $C(1,1,-1)$ 求平行四边形 AC 边上高 h.

解: $h=\frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{|\vec{AC}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|(6,3,2)|}{\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

2. 求过直线 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y-2z-1=0\end{cases}$ 且与 yoz 面垂直的平面方程.

解: 过直线平面束方程: $x+y+z+\lambda(x-y-2z-1)=0$

$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(1-2\lambda)z-\lambda=0$

由已知可得 $(1+\lambda,1-\lambda,1-2\lambda)\cdot(1,0,0)=0$ $\lambda=-1$. 所求平面方程: $2y+3z+1=0$

2018－2019 (16周)

1. 设 α,β,γ 是向量 $\vec{a}$ 的三个方向角,其中 γ 为锐角,若 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\gamma=$ $\underline{\frac{\pi}{3}}$

2. 直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ 与直线 $\frac{x}{k}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1-k}$ 垂直,则 $k=$ $\underline{3}$

3、xoy 平面上的曲线 $y=e^x$,绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面方程是 $\underline{\sqrt{z^2+y^2}=e^x}$

1. 已知三角形的三个顶点 $A(1,-1,2)$, $B(2,-2,2)$ 和 $C(1,1,-1)$ 求 $\triangle ABC$ 上以 AC 边为底边对应的高 h.

解: $h=\frac{|\vec{AC}\times\vec{AB}|}{|\vec{AC}|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&2&-3\\1&-1&0\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|(-3,-3,-2)|}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{22}{13}}$

2. 求过直线 $\begin{cases}3x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 且与 x 轴平行的平面方程.

解: 过直线平面束方程: $3x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$

$(3+3\lambda)x-(4+\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$

由已知得: $(3+3\lambda,\ -(4+\lambda),\ 1-2\lambda)\cdot(1,0,0)=0$ $\lambda=-1$

平面方程为: $-3y+3z+9=0\Rightarrow y-z-3=0$

2017－2018 (16周).

1. 如果向量 $\vec{a}=(1,-1,1)$ 与 $\vec{b}=(-3,1,2t)$ 垂直,则 $t=$ $\underline{2}$

2. 点 $(1,-1,1)$ 到平面 $2x+2y-z=5$ 的距离 $d=$ $\underline{2}$

3. yoz 平面上的曲线 $4y^2-9z^2=36$,绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程是 $\underline{4(x^2+y^2)-9z^2=36}$

1. 已知空间两点 $A(1,1,-1)$ $B(-2,1,2)$ 求:(1)在线段 AB 上求一点 M,满足 $\vec{AM}=2\vec{MB}$,

(2) 向量 $\vec{OM}$, (3) 与向量 $\vec{OM}$ 方向一致的单位向量.

解: (1) $M(x,y,z)$.

$\vec{AM}=(x-1,y-1,z+1)$. $\vec{MB}=(-2-x,1-y,2-z)$ M: $(-3,\frac{3}{2},1)$

由已知得: $\begin{cases}x-1=2(-2-x)\\y-1=2(1-y)\\z+1=2(2-z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=\frac{3}{2}\\z=1\end{cases}$

(2) $\vec{OM}=(-3,\frac{3}{2},1)$ (3) $\vec{e}_{OM}=\frac{(-3,\frac{3}{2},1)}{\sqrt{9+\frac{9}{4}+1}}=\frac{2}{7}(-3,\frac{3}{2},1)$

2. 一平面过点 $(1,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases}x-y+z-1=0\\x+y+z=0\end{cases}$ 垂直. 试求该平面方程.

解: $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(-2,0,2)$

该平面为: $-2(x-1)+2(z-1)=0$

$-2x+2+2z-2=0\Rightarrow x-z=0$

2017-2018 (B)

1. 设 $\vec{a}=(3,2,-4)$ $\vec{b}=(2k,-1,1)$ 若 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 则 $k=$ <u>1</u>

2. 过点 $(1,-1,1)$ 且与平面 $2x+2y-z=5$ 垂直的直线方程是 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$

1. 设三角形的三个顶点是A, B, C, 且 $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$. 求△ABC的面积

解： $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(-1,-1,2)|=\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

2. 一平面过点 $(0,0,0)$ 且通过直线 $\begin{cases}x+2y-4z+7=0\\ 3x+5y-2z-1=0\end{cases}$ 试求该平面方程.

解：过直线平面束方程： $x+2y-4z+7+\lambda(3x+5y-2z-1)=0$

$(1+3\lambda)x+(2+5\lambda)y-(4-2\lambda)z+7-\lambda=0$

过 $(0,0,0)$ 代入 $7-\lambda=0,\ \lambda=7$

平面方程： $22x+37y+10z=0.$

2016-2017 (18周)

1. 设 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ 且 $(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$ 则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ <u>12</u>

1. 过点 $(4,-1,3)$ 且垂直于平面 $2(x-3)+y+5(z-1)=0$ 的直线方程是 $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$

3. 平面曲线 $4x^2+3y^2=36$, 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程是 $4x^2+3(y^2+z^2)=36$

1. 设向量 $\vec{a}=(2,1,1)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$ 求以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边平行四边形的面积.

解： $S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=|(1,1,-3)|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$

2. 求过直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\ x-y-z=0\end{cases}$ 且与平面 $x+y-z=0$ 垂直的平面方程.

解：过直线平面束方程： $x+y+3z+\lambda(x-y-z)=0$

$(\lambda+1)x+(1-\lambda)y+(3-\lambda)z=0$

由已知得： $(\lambda+1,\ 1-\lambda,\ 3-\lambda)\cdot(1,1,-1)=0 \Rightarrow \lambda=1.$

所求平面方程： $2x+2z=0 \Rightarrow x+z=0.$