新疆大学 2018-2019 学年二学期
课程考试试卷答案(A 卷)

课程名称：线性代数　考试时间：120 分钟　年级：xxx 级

专业：　xxx

题目部分，（卷面共有 27 题，100 分，各大题标有题量和总分）

一、选择题（5 小题，共 10 分）

1、已知四阶行列式 D 的第二列元素及其余子式为 $a_{12}=1, a_{22}=3, a_{32}=-2, a_{42}=2$，

$M_{12}=3, M_{22}=-2, M_{32}=1, M_{42}=1$　　则　D=（　　　）

A. 5　　　　B.-3　　　　C.3　　　　D.-5

答案：D

2、已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，且满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则下列结论必然成立的是　(　　).

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$　　C. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　　D. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$

答案：B

3、对方程组 $Ax=b$ 与其导出组 $Ax=0$，下列命题正确的是(　　).

A. $Ax=0$ 有解时，$Ax=b$ 必有解.

B. $Ax=0$ 有无穷多解时，$Ax=b$ 有无穷多解.

C. $Ax=b$ 无解时，$Ax=0$ 也无解.

D. $Ax=b$ 有惟一解时，$Ax=0$ 只有零解.

答案：D

4、设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,1,2),\ \boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=$　(　).

A. (1, 0, 5, 4)　B. (1, 0, -5, 4)　C. (-1, 0, 5, 4)　D. (1, 0, 5, -6)

答案：A

5、设二次型的标准形为 $f=y_1^2-y_2^2-3y_3^2$，则二次型的正惯性指标为（　　）

A.2　　　　B.-1　　　　C.1　　　　D.3

答案：C

二、判断（5 小题，共 10 分）

1、一个偶排列的逆序数为 a,那么至少经过 a 次变换成为自然顺序（　　　）

答案：√

2、 秩$(A+B)$＝秩A，当 且仅当秩$B=0$。　（　　　）

答案：×

3、基础解系中解向量的个数等于系数矩阵的秩.　（　　　）

答案：×

4、若两个向量组等价，则它们含有相同个数的向量.（　　　）

答案：×

5、如果 4 阶方阵 A 与 4E 相似，则 A 的特征值为 1.　（　　）

答案：×

三、填空题（10 小题，共 20 分）

1、行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$______.

答案：0

2、行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}=$__________.

答案：24

3、 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} t \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，且$\alpha^T\beta=4$，则$t$ =______ 。

答案： -4

4、若 4 阶矩阵A的行列式$|A|=-5$，A^*是 A 的伴随矩阵，则$|A^*|$=______。

答案：-125

5、设η_1，η_2，η_s都是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，若

$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_s\eta_s$ 也是方程组 $Ax=b$ 的解，

则 $c_1+c_2+\cdots+c_s=$___________.

答案：1

6、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -2 & 6\\ 3 & -1 & t & 4\end{bmatrix}$ 的秩为 2，则 $t=$______.

答案：t=-3

7、设 $\vec{a}=(2,1,4,7)^{\mathrm{T}}$，若 $\vec{a}-\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$，则 $\vec{b}=$ _______ .

答案：$(1,\frac{1}{2},2,\frac{7}{2})^{\mathrm{T}}$

8、已知向量组 $\alpha_1=(3,2,2,1),\alpha_2=(3,0,t,0),\alpha_3=(1,-2,4,-1)$ 的秩为 2，则 $t=$______。

答案： 9/2

9、$x=(1,2a-1,3a)^T, y=(1,1,a)^T$, 且 x 与 y 正交, 则 $a=$____________

答案：0 或者 $-\frac{2}{3}$

10、设 A 为 3 阶方阵，且有|A-E|=0, |A-2E|=0, |A-3E|=0. 则 $|A^{-1}|=$______

答案：1/6

四、计算（5 小题，共 50 分）

1、计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$.

答案：解： $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

2、设 A=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$且 AB=A+2B，求 B。

答案：AB-2B=A → (A-2E)B=A → B=(A-2E)$^{-1}$ A

(2) $A-2E=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3、设有线性方程组$\begin{cases} \boldsymbol{x_1+3x_2+x_3=6} \\ \boldsymbol{3x_1+2x_2+3x_3=-3} \\ \boldsymbol{-x_1+4x_2+ax_3=b} \end{cases}$，问 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为何值时，方程组①有唯一解？

②无解？③有无穷多解？在有无穷多解时求通解（用基础解系表示）。

答案：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，根据方程组的解与系数矩阵的秩和增广矩阵的秩之间的关系即得

$$\boldsymbol{(A|b)}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}+1 & \boldsymbol{b}-13 \end{array}\right]$$

当 $\boldsymbol{a}\neq-1$ 时，方程组有唯一解（系数行列式非零）；

当 $\boldsymbol{a}=-1$ 且 $\boldsymbol{b}\neq13$ 时，方程组无解（ $\boldsymbol{rank(A)\neq rank(A|b)}$ ）；

当 $\boldsymbol{a}=-1$ 且 $\boldsymbol{b}=13$ 时，方程组有无穷多解（ $\boldsymbol{rank(A|b)\neq rank(A)}=2<3$ ）；

此时齐线性方程组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，非齐线性方程组的特解为$\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$，

通解为$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

4、已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\0\\c\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix}$，线性无关试确定$a,b,c$满足什么关系。

答案：解：向量组α_1，α_2，α_3线性无关，则$\begin{vmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{vmatrix}\neq 0$，所以$abc\neq 0$。

5、已知$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量是$\zeta=(1，1，-1)^{\mathrm{T}}$，确定$a,b$以及$\zeta$的特征值。

答案：解：设 A 的关于ζ的特征值为λ，则 Aζ=λζ.

$$A\zeta=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\zeta=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}$$

解得λ= -1，a= -3, b=0.

五、证明（2 小题，共 10 分）

1、设 α_1，α_2 ..... α_n是由n个向量构成的n维向量组，证明：n维单位坐标向量组可由向量组 α_1，α_2 ..... α_n线性表示的充要条件是$R(A)=n$，其中$A=($ α_1，α_2 ..... α_n $)$为$n\times m$矩阵。

答案：证明：向量组$e_1,e_2......e_n$能由向量组α_1，α_2 ．．．．．α_n线性表示的充要条件是$R(A)=R(A,E)$，而$n=R(E)\le R(A,E)\le n$即$R(A)=n$

2、证明如果A为n阶正交阵，则其逆矩阵A^{-1}也是正交阵

答案：

证明：因为A是正交阵，故$AA^T=E$,

从而$\left(A^T\right)^{-1}A^{-1}=E$,则$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}=E$

所以A^{-1}是正交阵