

# 第4章

# 离散信号与系统

规划4学时

1

# 第2次课

## 离散系统的 $z$ 域分析

1

## 4. 5 离散系统的时域分析与系统函数

### 4.5.1 常系数线性差分方程

对于离散系统而言，其激励信号 $x(n)$ 和响应信号 $y(n)$ 均为离散时间序列。若系统为线性时不变离散系统，则系统满足叠加原理（比例性和可加性），且响应信号的形式与激励信号施加于系统的起始时刻无关。

连续线性时不变系统使用微分方程来描述激励与响应之间的关系，与之类似，离散线性时不变系统使用差分方程来描述激励与响应之间的关系。差分方程形式如下：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) \quad (4.5.1)$$

由于我们讨论的是时不变系统，系数 $a_i$  ( $i=1,2,\cdots,N$ ) 和 $b_j$  ( $j=1,2,\cdots,M$ )为常数。差分方程的阶为响应序列 $y(n)$  的变量序号的最高值与最低值之差。如式 $y(n)-2y(n-1)+3y(n-2)=x(n)$ 的阶为2。

对于离散系统的时域描述，通常以符号“ $\frac{1}{E}$ ”表示对序列进行单位延时（也可用符号“ $T$ ”或“ $D$ ”表示）；以符号“ $\Sigma$ ”表示两个序列相加；以符号“ $\times$ ”表示序列与系数相乘，有时为简便起见，可直接将乘系数注明于信号传输线旁或圆圈之内。其逻辑图形如图4-12所示。

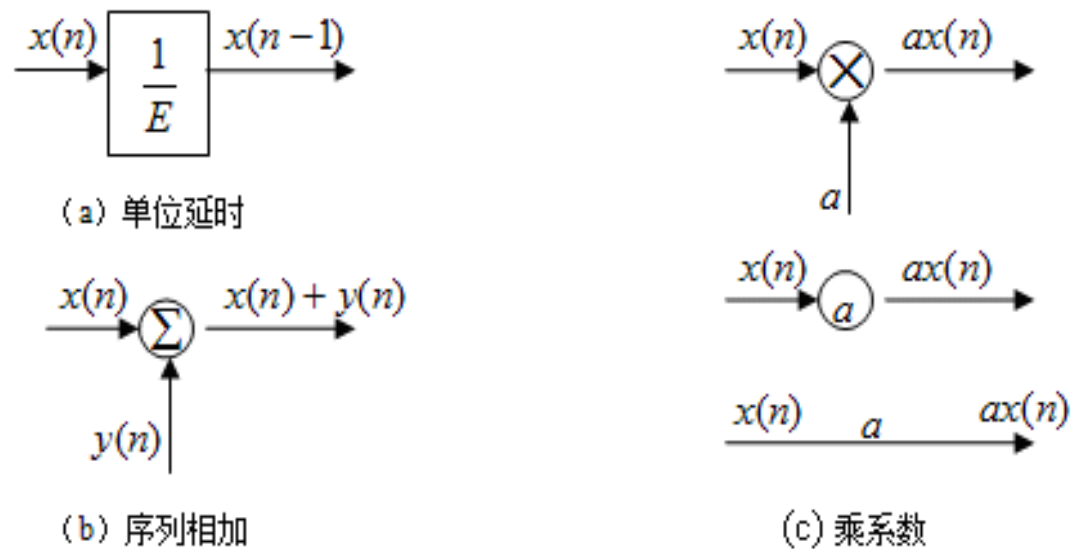
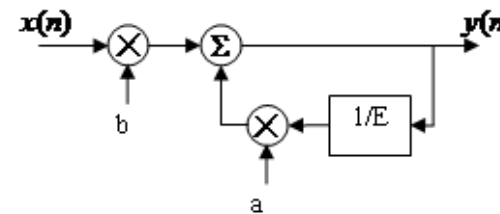


图4-12 离散时间系统的基本运算符号

【例4-7】离散系统结构如图所示，激励信号 $x(n]$ ，响应信号 $y(n]$ ，试写出描述系统工作的差分方程。

图4-13 【例4-7】图



【解】：由系统结构图可以看出，输入信号 $x(n]$ 乘以系数 $b$ 与输出信号 $y(n]$ 单位延时后乘以系数 $a$ 累加后得到输出信号 $y(n]$ ，列写差分方程如下：

$$bx(n) + ay(n-1) = y(n)$$

经整理后得到： $y(n) - ay(n-1) = bx(n)$

此方程为一阶差分方程，系统需设置寄存器存储上一次的输出值 $y(n-1)$ ，再根据当前的输入值 $x(n]$ 就可得到当前输出信号 $y(n]$ 的值。

【例4-8】 离散系统结构如图所示，激励信号 $x(n]$ ，响应信号

$y(n]$ ，试写出描述系统工作的差分方程。

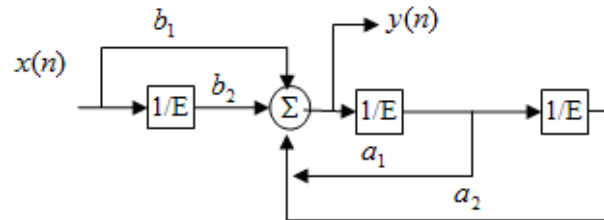


图4- 14 【例4-8】 图

【解】：根据图中的系统结构，可列写差分方程形式如下：

$$b_1 x(n) + b_2 x(n-1) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = y(n)$$

经整理可得：

$$y(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) = b_1 x(n) + b_2 x(n-1)$$

此方程为二阶差分方程，系统需存储前两次输出信号和  
前一次输入信号的值，即 $y(n-1)$ 、 $y(n-2)$ 和 $x(n-1)$ ，再根据当前的  
输入值 $x(n)$ 就可得到当前输出信号 $y(n)$ 的值。

### 4.5.2 迭代法与经典法

对常系数差分方程的时域解法主要包括以下两种：

#### 1. 迭代法

迭代法是通过将输入信号和输出信号逐次代入到差分方程中，对当前的输出信号 $y(n)$ 的数值进行求解的方法。这种方法概念清楚，解法简便，但只能对 $y(n)$ 给出数值解，通常无法得到 $y(n)$ 的闭合形式。下面通过一个例子给出迭代法的求解方法。



【例4-9】假设系统的差分方程为  $y(n)-ay(n-1)=bx(n)$ 。在  $n=0$  时刻，输入信号  $x(0)$  进入系统，此时系统状态为  $y(n)$  寄存器的值，因此系统的初始状态为  $y(-1)$ ，这也称为系统的边界条件。通过迭代法求解  $y(n)$ 。

【解】：首先可求得  $y(0)$

$$y(0)=bx(0)+ay(-1)$$

求得  $y(0)$  之后，可将  $y(0)$  作为下一次迭代的初始值求得  $y(1)$ ,

$y(2)$ ,  $y(3)\cdots$

$$y(1) = bx(1) + ay(0)$$

$$y(2) = bx(2) + ay(1)$$

$$y(3) = bx(3) + ay(2)$$

$\cdots \cdots$

若 $y(-1)=0$ ,  $x(n)=u(n)$  则可得到:

$$y(0)=bx(0)+ay(-1)=b$$

$$y(1)=bx(1)+ay(0)=b + ab$$

$$y(2)=bx(2)+ay(1)=b+ab+a^2b$$

$$y(3)=bx(3)+ay(2)=b+ab+a^2b+a^3b$$
$$\dots$$

$$y(n)=bx(n)+ay(n-1)=b+ab+a^2b+\dots+a^nb$$

使用迭代法求解差分方程比较简单, 通常计算机求解差分方程的程序也是利用这种方法, 这种方法的缺陷就是只能给出 $y(n)$ 的数值解, 而无法给出 $y(n)$ 的闭合形式解。

## 2. 经典法

这种方法与连续系统微分方程的经典解法类似，先分别求齐次解和特解，然后代入边界条件求解待定系数。完全解为齐次解与特解相加。

对于如式（4.5.1）的差分方程：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

令等式右边激励信号部分为零，对应的齐次方程形式为：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = 0 \quad (4.5.2)$$

假设响应信号有如下形式：

$$y(k) = A a^k$$

其中为待定系数，将上式代入齐次方程式（4.5.2），得到：

$$a_0 A \alpha^n + a_1 A \alpha^{n-1} + \cdots + a_{N-1} A \alpha^{n-N+1} + a_N A \alpha^{n-N} = 0 \quad (4.5.3)$$

消去常数 $A$ 和公因子 $\alpha^n$ ，两边再同乘幂次项 $\alpha^N$ ，得到：

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (4.5.4)$$

上式称为差分方程的特征方程。式（4.5.4）一般有 $N$ 个不为零的根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ ，称为差分方程的特征根。

在特征根没有重根的情况下，差分方程的齐次解有如下形式：

$$y_c(n) = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \cdots + A_N \alpha_N^n \quad (4.5.5)$$

在特征根有重根的情况下，重根所对应的齐次解形式有所不同，例如，若 $\alpha_1$ 为 $K$ 重根，其余 $(N-K)$ 个根均为单根，则在齐次解中有 $K$ 项对应于 $\alpha_1$ ，其余 $(N-K)$ 项分别对应于 $(N-K)$ 个单根，其形式如下：

$$y_c(n) = (A_1 + A_2 n + \cdots + A_K n^{K-1}) \alpha_1^n + A_{K+1} \alpha_{K+1}^n + \cdots + A_N \alpha_N^n \quad (4.5.6)$$

下面我们通过例子来说明差分方程齐次解的求解过程。

【例4-10】 求差分方程  $y(n)+7y(n-1)+16y(n-2)+12y(n-3)=x(n)$  的齐次解。

【解】 特征方程为

$$\alpha^3 + 7\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 0$$

即 
$$(\alpha + 2)^2(\alpha + 3) = 0$$

特征根为  $\alpha_1 = -2$ (二重),  $\alpha_2 = -3$ (单重), 因此得到齐次解的形式为:

$$y_c(n) = (A_1 + A_2 n)(-2)^n + A_3(-3)^n$$

【例4-11】求差分方程 $y(n)+2y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$ 的齐次解形式。

【解】特征方程为  $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$

解特征方程可得到一对共轭复根： $\alpha_1 = -1+j$ ， $\alpha_2 = -1-j$

齐次解形式为：

$$\begin{aligned} y_c(n) &= A_1(-1+j)^n + A_2(-1-j)^n \\ &= A_1(\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}})^n + A_2(\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n \left[ A_1 \left( \cos \frac{3\pi n}{4} + j \sin \frac{3\pi n}{4} \right) + A_2 \left( \cos \frac{3\pi n}{4} - j \sin \frac{3\pi n}{4} \right) \right] \\ &= (\sqrt{2})^n \left( \hat{A}_1 \cos \frac{3\pi n}{4} + j \hat{A}_2 \sin \frac{3\pi n}{4} \right) \end{aligned}$$

其中， $\hat{A}_1 = A_1 + A_2$ ， $\hat{A}_2 = A_1 - A_2$ 。

由例4-11 可知，当特征根中存在共轭复根时，共轭复根所对应的齐次解形式为等幅、增幅或衰减形式的正弦（余弦）序列。

下面我们来讨论差分方程特解的求解方法。与微分方程特解的求解方法类似，先将激励函数 $x(n)$ 代入差分方程（4.5.2）的右端，其计算结果称为“自由项”；然后根据自由项的函数形式通过查表图4-2确定含有待定系数的特解函数形式 $B(n)$ ；最后将特解代入差分方程（4.5.2）的左端，根据方程左右两端同类项系数平衡的原则确定特解中的待定系数。

将齐次解与特解相加得到差分方程完全解的形式

$$y(n) = y_c(n) + B(n) \quad (4.5.7)$$

此时，再利用题目中给定的边界条件确定齐次解 $y_c(n)$ 中的待定系数。



表4-2 自由项对应的特解函数表

自由项 $\varphi$	特解函数 $\varphi$
$a^n$	$Ba^n$
$n^K$	$B_1 n^K + B_2 n^{K-1} + \dots + B_K n + B_{K+1}$
$n^K a^n$	$a^n (B_1 n^K + B_2 n^{K-1} + \dots + B_K n + B_{K+1})$
$\sin an$ (或 $\cos an$ )	$B_1 \sin an + B_2 \cos an$
$a^n \sin an$ (或 $a^n \cos an$ )	$a^n (B_1 \sin an + B_2 \cos an)$

【例4-12】 求解差分方程 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-1)$ ，其中激励函数 $x(n)=n^2$ ，且已知 $y(-1)=-1$ ， $y(0)=-1$ 。

【解】

1) 齐次解

由特征方程 $\alpha^2+3\alpha+2=0$ ，得到特征根 $\alpha_1=-1$ ， $\alpha_2=-2$ ，因此

$$y_c(n)=A_1(-1)^n+A_2(-2)^n$$

2) 特解

将 $x(n)=n^2$ 代入差分方程右端，得到自由项

根据自由项形式，在表4-2中选取特解形式 $\frac{n^2-(n-1)^2}{2}=2n-1$

将特解形式代入差分方程左端，激励信号 $x(n)=n^2$ 代入差分方程右端，得到

$$6B_1n + (6B_2 - 7B_1) = 2n - 1$$

若令等式两端同类项系数平衡得  $B_1 = \frac{1}{3}, B_2 = \frac{2}{9}$  因此,  
特解形式为:

$$B(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

### 3) 完全解

根据前面得到的齐次解和特解, 可以写出完全解形式

$$y(n) = A_1(-1)^n + A_2(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

再利用边界条件  $y(-1) = -1, y(0) = 1$ , 可以得到

$$\begin{cases} y(-1) = -A_1 - \frac{A_2}{2} - \frac{1}{9} = -1 \\ y(0) = A_1 + A_2 + \frac{2}{9} = 1 \end{cases}$$

解方程组, 得到  $A_1 = 1, A_2 = -\frac{2}{9}$  因此差分方程的完全解为

$$y(n) = (-1)^n - \frac{2}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

## 4. 5 离散系统的时域分析与系统函数

### 4.5.3 $z$ 变换法

在连续系统分析中，系统响应可分解为零输入响应和零状态响应。与之类似，离散系统的响应也可分解为零输入响应和零状态响应：

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \quad (4.5.8)$$

对应的，系统响应的边界条件也要分解为零输入响应的边界值和零状态响应的边界值。

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) \quad (4.5.9)$$

在时域分析中，可以利用求齐次解的方法得到系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$ ，但与齐次解不同的是，在确定系数时要使用零输入响应的边界值 $y_{zi}(k)$ 。若考虑系统的初始状态为零，输入信号为单位脉冲序列 $\delta(n)$ ，此时，系统的响应称为单位脉冲响应 $h(n)$ 。由第1章的1.2.3节可知，零状态响应 $y(n)$ 可由激励信号 $x(n)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 的卷积和获得。

时域计算离散系统的零输入响应和零状态响应与连续系统类似，计算过程较为繁复，不适合手工计算，下面我们详细讨论通过 $z$ 变换法求解零输入响应和零状态响应的方法。这种方法的主要思想与利用拉氏变换求解微分方程类似，是利用 $z$ 变换的线性和位移性，将差分方程转换为代数方程，简化了求解过程，得到 $z$ 域的系统响应，然后再通过 $z$ 反变换得到系统响应信号 $y(n)$ 。

线性时不变系统的差分方程一般写成后向差分的形式：

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) \quad (4.5.10)$$

由于位移数  $i$  和  $j$  均大于零，因此  $y(n-i)$  和  $x(n-j)$  均为右移序列，对上式两边取单边  $z$  变换，得到：

$$\sum_{i=0}^N a_i \mathcal{Z}[y(n-i)] = \sum_{j=0}^M b_j \mathcal{Z}[x(n-j)] \quad (4.5.11)$$

再利用单边  $z$  变换的位移性，可得到：

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} [Y(z) + \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} [X(z) + \sum_{m=-j}^{-1} x(m) z^{-m}] \quad (4.5.12)$$

若输入信号  $x(n)=0$ ，式 (4.5.12) 的等号右边为零：

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} [Y(z) + \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}] = 0 \quad (4.5.13)$$

此时，系统响应为零输入响应 $y_{zi}(n)$ ，上式中的 $Y(z)$ 实际上是零输入响应 $y_{zi}(n)$ 的 $z$ 变换，即 $Y(z)=Y_{zi}(z)$ ，其形式与输入信号无关，仅依赖于系统的初始状态 $y(l)(-N \leq l \leq -1)$ 。通过式（4.5.13），我们可以得到 $Y_{zi}(z)$ ：

$$Y_{zi}(z) = \frac{-\sum_{i=0}^N \left[ a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l} \right]}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (4.5.14)$$

再对 $Y_{zi}(z)$ 取 $z$ 反变换，即可得到零输入响应 $y_{zi}(n)$ 。

$$y_{zi}(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_{zi}(z)] \quad (4.5.15)$$



下面我们再来讨论系统的零状态响应，即系统的初始状态 $y(l)=0, (-N \leq l \leq -1)$ 。此时，式（4.5.12）变为：

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} [X(z) + \sum_{m=-j}^{-1} x(m) z^{-m}] \quad (4.5.16)$$

因为在实际中，我们通常认为输入序列 $x(n)$ 为因果信号，即 $n < 0$ 时 $x(n)=0$ ，因此式（4.5.16）可以进一步写成如下形式：

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} X(z) \quad (4.5.17)$$

上式中 $Y(z)$ 的实际上是零状态响应 $y_{zs}(n)$ 的 $z$ 变换，即 $Y(z) = Y_{zs}(z)$ ，其形式与系统的初始状态无关，仅依赖于系统的输入信号 $x(n)$ 。通过式（4.5.17），我们可以得到 $Y_{zs}(z)$ ：

$$Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} X(z) \quad (4.5.18)$$

【例4-13】一离散系统的差分方程为 $y(n)+6y(n-1)+8y(n-2)=x(n)$ ，已知初始值 $y(-1)=0$ ， $y(-2)=1$ ，激励 $x(n)=2^n u(n)$ ，求响应 $y(n)$ 。

【解】对差分方程两边取单边 $z$ 变换，得到

$$Y(z) + 6[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 8[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = X(z)$$

将初始条件 $y(-1)=0$ ， $y(-2)=1$ 代入上式，整理后由（4.5.14）、式（4.5.18）得到

$$\mathcal{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$Y(z) = -8 \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8} + \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8} X(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z)$$

（1）求零输入响应

响应的 $z$ 变换

$$Y_{zi}(z) = -8 \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8}$$

部分分式 
$$\frac{Y_{zi}(z)}{z} = -\frac{8z}{z^2 + 6z + 8} = \frac{8}{z+2} - \frac{16}{z+4}$$

$$Y_{zi}(z) = 8\frac{z}{z+2} - 16\frac{z}{z+4}$$

得零输入响应:  $y_{zi}(n) = 8(-2)^n - 16(-4)^n \quad (n \geq 0)$

(2) 求零状态响应

激励的z变换 
$$X(z) = \mathcal{Z}[2^n u(n)] = \frac{z}{z-2}$$

得响应的z变换 
$$Y_{zs}(z) = \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8} \frac{z}{z-2}$$

部分分式 
$$\frac{Y_{zs}(z)}{z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z+2} + \frac{4}{3} \frac{1}{z+4} + \frac{1}{6} \frac{1}{z-2}$$

$$Y_{zs}(z) = -\frac{1}{2} \frac{z}{z+2} + \frac{4}{3} \frac{z}{z+4} + \frac{1}{6} \frac{z}{z-2}$$

$$Y_{zs}(z) = -\frac{1}{2} \frac{z}{z+2} + \frac{4}{3} \frac{z}{z+4} + \frac{1}{6} \frac{z}{z-2}$$

得零状态响应:  $y_{zs}(n) = -\frac{1}{2}(-2)^n + \frac{4}{3}(-4)^n + \frac{1}{6}(2)^n \quad (n \geq 0)$

(3) 求全响应

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= 8(-2)^n - 16(-4)^n - \frac{1}{2}(-2)^n + \frac{4}{3}(-4)^n + \frac{1}{6}(2)^n \\ &= \frac{15}{2}(-2)^n - \frac{44}{3}(-4)^n + \frac{1}{6}(2)^n \quad (n \geq 0) \end{aligned}$$

4.5.4 系统函数 $H(z)$ 

我们重列出系统的差分方程式 (4.5. 10)

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

当输入序列 $x(n)$ 为因果信号时，差分方程的 $z$ 变换式 (4.5. 17) :

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} X(z)$$

定义离散系统的系统函数

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (4.5. 19)$$

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (4.5.19)$$

由上式可以看出，系统函数 $H(z)$ 是由系统结构所决定的，它实际上是系统单位脉冲响应的 $z$ 变换，即 $H(z)=Z[h(n)]$ 。零状态响应的 $z$ 变换 $Y_{zs}(z)$ 即为输入信号的 $z$ 变换与系统函数的乘积

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z) \quad (4.5.20)$$

系统函数 $H(z)$ 由系统结构决定，描述了系统的输入-输出之间的关系。由式（4.5.19）可以看出，对于线性时不变系统，其系统函数的分子和分母均为 $z^{-1}$ 的多项式，为有理分式形式。分子中 $z^{-j}$ 的系数就是差分方程（4.5.10）中 $x(n-j)$ 的系数；分母中 $z^{-i}$ 的系数就是差分方程中 $y(n-i)$ 的系数。这种系统函数与差分方程之间的对应关系使得我们可以对系统函数与差分方程直接进行转换。

【例4-14】若系统处于零状态，且输入信号 $x(n]$ 为因果信号，求下列差分方程所描述的离散系统的系统函数。

$$y(n) - ay(n-1) + by(n-2) = cx(n)$$

当 $a = 3, b = 2, c = -1$ 时，求系统的单位脉冲响应。

【解】将差分方程两边取单边 $z$ 变换，并利用位移特性，得到

$$Y(z) - az^{-1}[Y(z) + y(-1)z] + bz^{-2}[Y(z) + y(-2)z^2 + y(-1)z] = cX(z)$$

由于系统处于零状态，即 $y(-1)=0, y(-2)=0$ ，因此

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) + bz^{-2}Y(z) = cX(z)$$

由此可得系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{c}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}$$

我们看到，系统函数 $H(z)$ 分母中的系数对应于差分方程中响应信号的系数，而分子的系数对应于差分方程中激励信号的系数。因此对于零状态的线性时不变系统，且输入为因果信号，可直接根据差分方程列出其系统函数的形式。

当 $a = 3, b = 2, c = -1$ 时，系统函数有如下形式

$$H(z) = -\frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

对 $H(z)$ 进行部分分式分解，可以得到

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$$

由于系统函数 $H(z)$ 为系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 的 $z$ 变换，因此，对 $H(z)$ 进行 $z$ 反变换，即可得到系统的单位脉冲响应

$$h(n) = [1 + 2 \cdot (2)^n] u(n)$$



【例4-15】求例4-13所给系统的单位脉冲响应。

【解】单位脉冲响应是当输入为单位脉冲序列时的零状态响应，则由例4-13得

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8} \mathcal{Z}[\delta(n)] = \frac{z^2}{z^2 + 6z + 8}$$

$$H(z) = \frac{-z}{z+2} + 2 \frac{z}{z+4}$$

$$h(n) = -(-2)^n + 2(-4)^n \quad (n \geq 0)$$

【例4-16】根据系统的输入和输出来求系统描述的问题称为系统识别。已知当一个离散线性时不变系统的输入为  $x(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ ，其输出为  $y(n) = 3(-1)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ ，求该系统的系统函数和单位脉冲响应  $h(n)$ 。

【解】输入和输出信号的  $z$  变换分别是

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad \text{和} \quad Y(z) = \frac{3}{1 + z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{4}{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

根据式 (4.5.19)，可得系统函数为

$$H(z) = \frac{4(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{4(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 + z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 1$$

求 $H(z)$ 的 $z$ 逆变换，可得系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。对 $H(z)$ 应用部分分式展开法，可得

$$H(z) = \frac{2}{1 + z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad |z| > 1$$

从而，单位脉冲响应为

$$h(n) = 2(-1)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

## 4.5.5 离散系统稳定性

系统稳定性的定义：当输入信号有界时，输出信号也必定是有界的，满足此条件的系统称为稳定系统。系统输出等于系统输入与单位脉冲响应的卷积和，由卷积和定义可得：

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (4.5.21)$$

若输入信号 $x(n)$ 有界，即  $|x(n)| < M < \infty$  (对所有 $n$ 值)，则有

$$|y(n)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad (4.5.22)$$

根据式(4.5.22)可知，若在保证系统的稳定性，即令 $|y(n)|$ 有界，则要求单位脉冲响应序列是绝对可和的，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (4.5.23)$$

式 (4.5.23) 是满足离散系统稳定性的充分必要条件。

下面我们来分析一下系统函数与系统的稳定性之间有什么样的关系。

对于线性时不变离散系统，其系统函数有如下有理分式形式：

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

分子是 $z^{-1}$ 的 $M$ 阶多项式，分母是 $z^{-1}$ 的 $N$ 阶多项式，对分子和分母进行因式分解，可以得到：

$$H(z) = G \frac{\prod_{j=0}^M (1 - Z_j z^{-1})}{\prod_{i=0}^N (1 - P_i z^{-1})} \quad (4.5.24)$$

其中 $Z_j$ 是 $H(z)$ 的零点，即令分子为零所求得的多项式的根；

$P_i$ 是 $H(z)$ 的极点，即令分母为零所求得的多项式的根； $G = \frac{b_0}{a_0}$ 是增益因子。

进一步，对 $H(z)$ 做部分分式展开，又因为 $P_0 \geq 0$ 可以得到

$$H(z) = \sum_{i=0}^N \frac{A_i z}{z - P_i} = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - P_i} \quad (4.5.25)$$

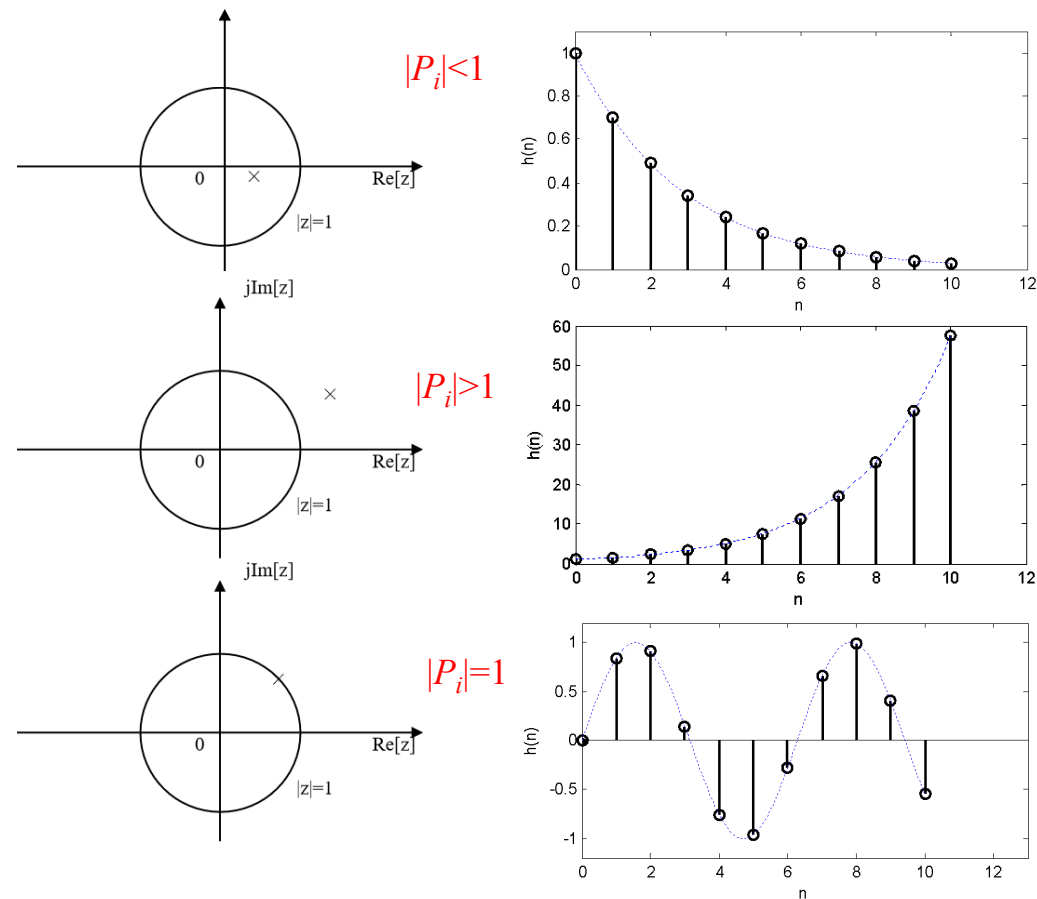
因为系统函数 $H(z)$ 是单位脉冲响应 $h(n)$ 的 $z$ 变换，所以

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left[ A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - P_i} \right] \\ &= A_0 \delta(n) + \sum_{i=1}^N A_i (P_i)^n u(n) \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - P_i}\right] \\ &= A_0 \delta(n) + \sum_{i=1}^N A_i (P_i)^n u(n) \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

由式（4.5.26）可以看出 $h(n)$ 的形式由 $H(z)$ 的极点 $P_i$ 决定， $P_i$ 可能是实数，也可能是成对出现的共轭复数。若某个极点 $P_i$ 在 $z$ 平面的单位圆内，即 $|P_i| < 1$ ，则 $h(n)$ 的累加和中与该极点的对应项为指数衰减序列；若某个极点在 $z$ 平面的单位圆外，即 $|P_i| > 1$ ，则 $h(n)$ 的累加和中与该极点的对应项为指数递增序列；若某个极点 $P_i$ 在 $z$ 平面的单位圆上，即 $|P_i| = 1$ ，则 $h(n)$ 的累加和中与该极点的对应项为复正弦序列。这些关系如图4-15所示。

图4-15 系统函数的极点位置与单位脉冲响应之间的关系





显然，指数增长序列和正弦序列均不是绝对可和的，是不稳定项。若要满足系统的稳定性，即保证单位脉冲响应 $h(n)$ 的绝对可和，要求 $h(n)$ 的累加和中不包含指数增长序列项和正弦序列项，而仅有指数衰减序列项，这就要求 $H(z)$ 的所有极点均在单位圆内。图4-16给出了一个稳定的因果线性时不变系统的例子，从这个例子可以看到，当 $H(z)$ 的所有极点均在单位圆内时， $h(n)$ 为一衰减序列，满足绝对可和的条件，此时系统具有稳定性。

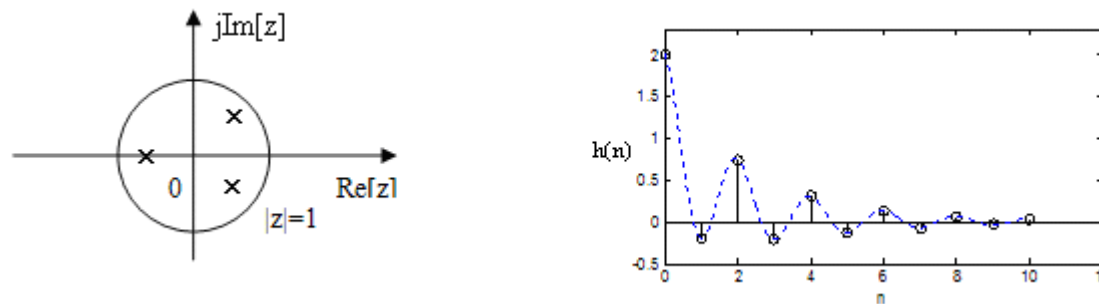


图4-16 稳定系统的极点位置与单位脉冲响应之间的关系

【例4-17】 已知一线性时不变系统的系统函数

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.9e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} + \frac{3}{1 + 2z^{-1}}$$

求系统的单位脉冲响应 $h(n)$ ，并判断系统的稳定性。

【解】 根据系统函数 $H(z)$ 可以得到系统的极点

为  $P_1 = 0.9e^{j\frac{\pi}{4}}$ ,  $P_2 = 0.9e^{-j\frac{\pi}{4}}$ ,  $P_3 = -2$ ，极点位置如图4-17所示。其中极点 $P_3 = -2$ 落在单位圆之外，因此系统是不稳定的。其单位脉冲响应为：

$$\begin{aligned} h(n) &= 2(0.9e^{j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + 2(0.9e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + 3(-2)^n u(n) \\ &= 4(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u(n) + 3(-2)^n u(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(n) &= 2(0.9e^{j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + 2(0.9e^{-j\frac{\pi}{4}})^n u(n) + 3(-2)^n u(n) \\
 &= 4(0.9)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) u(n) + 3(-2)^n u(n)
 \end{aligned}$$

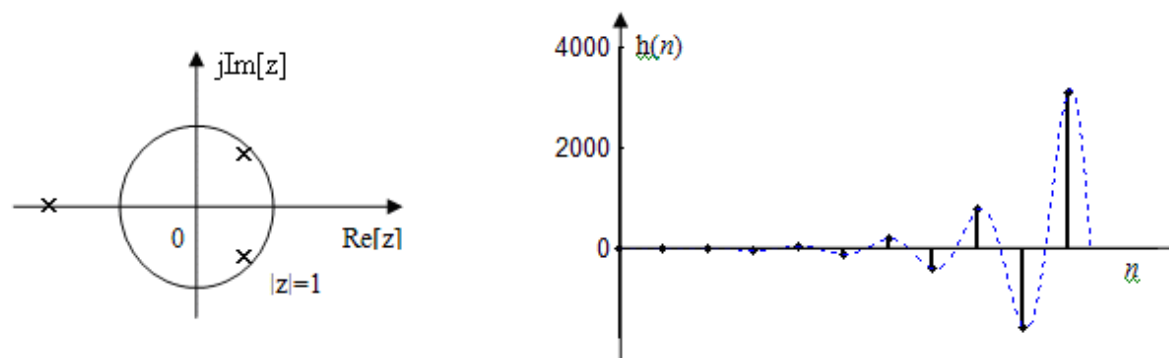


图4- 17例4-16中的系统极点位置与单位脉冲响应函数

## 4.6 离散信号与系统的频域分析

我们在连续信号与系统的分析中，用拉普拉斯变换来求解描述系统输入输出关系的常系数线性微分方程，得到连续系统的系统函数 $H(s)$ ；用傅里叶变换来分析信号的谐波成分以及系统的频率响应等。由前节可见，在离散信号与系统的分析中，我们也有类似的分析方法，其中 $z$ 变换与拉普拉斯变换对应，用于求解离散系统的常系数线性差分方程，得到离散系统的系统函数 $H(z)$ ；下面介绍与傅里叶变换相对应的离散时间傅里叶变换（discrete time Fourier transform, DTFT），并在此基础上，分析离散信号与系统的频率特性。

### 4.6.1 序列的离散时间傅里叶变换 (DTFT)

我们在第2章详细讨论过连续时间信号的傅里叶变换，而离散序列的傅里叶变换，也称为离散时间傅里叶变换

(DTFT)，是一种将序列信号 $x(n)$ 从时域变换到频域的数学工具，通过这种变换我们得到离散信号的数字域频谱。这里需要注意离散时间傅里叶变换 (DTFT) 与离散傅里叶变换 (DFT) 的区别。通常所说的离散傅里叶变换是为了适用于数字计算机的分析计算而引入的一种变换方式，我们将在下一章给出详细介绍。

### 1. DTFT的定义

在第3章中，我们曾经讨论过傅里叶变换实际上是拉普拉斯变换的一种特殊情况，即令拉氏变换的自变量 $s=j\omega$ ，也就是说自变量 $s$ 沿虚轴变化。由式（4.4.1）可知，序列 $z$ 变换的自变量 $z$ 与拉氏变换的自变量 $s$ 之间的关系为 $z=e^{sT}$ 。若 $s=j\omega$ ，则 $z=e^{j\Omega}$ （ $\Omega=\omega T_s$ ）（ $|z|<1$ ），即变量 $z$ 在 $z$ 平面上沿着单位圆变化，此时，序列 $x(n)$ 的 $z$ 变换 $X(z)$ 可写成如下形式：

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

式（4.6.1）称作序列的离散时间傅里叶变换，也即在单位圆上的 $z$ 变换，记为

$$X(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$$

再由 $z$ 变换的反变换公式

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

将 $z=e^{j\Omega}$ 代入上式，得到

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} e^{-j\Omega} d(e^{j\Omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

式 (4.6.2) 即 $X(e^{j\Omega})$ 为的离散时间傅里叶逆变换，记为

$$x(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\Omega})]$$

若要保证 $X(e^{j\Omega})$ 存在, 即 $|X(e^{j\Omega})| < \infty$  (对所有 $\Omega$ ), 则要求 $X(z)$ 的收敛域必须包含单位圆, 即

$$|X(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |e^{-j\Omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (4.6.3)$$

式(4.6.3)表明, 若序列 $x(n)$ 是绝对可和的, 则 $x(n)$ 的离散时间

傅里叶变换一定存在, 此时级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$ 一致收敛于一个 $\Omega$ 的连续函数 $X(e^{j\Omega})$ 。

## 2. DTFT的特性

离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$ 是频率 $\Omega$ 的复函数, 在数字频谱的分析中可以表示为

$$X(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})| e^{j\varphi(\Omega)}$$



$|X(e^{j\Omega})|$ 为幅度谱,  $\varphi(\Omega)$ 为相位谱, 二者都是  $\Omega$  的连续函数。

当为  $x(n)$  实数序列时,

$$X(e^{-j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[e^{-j\Omega n}]^* = X^*(e^{j\Omega})$$

即

$$\begin{aligned} |X(e^{-j\Omega})| &= |X(e^{j\Omega})| \\ \varphi(\Omega) &= -\varphi(-\Omega) \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

由于  $e^{j\Omega}$  是变量  $\Omega$  以  $2\pi$  为周期的周期性函数, 因此也是以  $2$  为周期的周期函数。实数序列的DTFT在  $(0, 2\pi)$  范围内, 其幅频特性关于  $\pi$  偶对称, 相频特性关于  $\pi$  奇对称。因此计算实数序列的频谱  $X(e^{j\Omega})$  可以通过计算其内的结果来完全确定。

【例4-18】求指数序列 $x(n)=a^n u(n)$ 的离散时间傅里叶变换。

【解】

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n}$$

对于 $|a| \geq 1$ , 此级数发散, 当 $a < 1$ 时, 得到收敛的几何级数:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}, \quad |a| < 1$$

利用欧拉公式将上式展开, 得到  $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - a \cos \Omega + j a \sin \Omega}$

由此得到幅度谱和相位谱分别为:

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \Omega)^2 + a^2 \sin^2 \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1 - 2a \cos \Omega}}$$

$$\varphi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{a \sin \Omega}{1 - a \cos \Omega}\right)$$

$$|X(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\Omega)^2 + a^2\sin^2\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1 - 2a\cos\Omega}}$$

$$\varphi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{a\sin\Omega}{1-a\cos\Omega}\right)$$

图4-18 给出了 $a=0.3$ 时的幅度谱和相位谱。

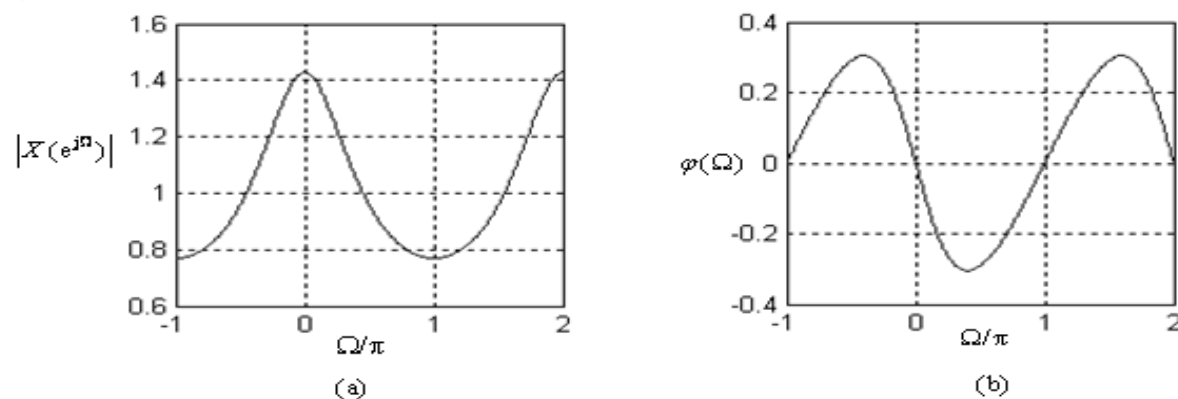


图4-18 例4-17的DTFT

从图中可看出幅度谱是  $\Omega$  的偶函数，相位谱是  $\Omega$  的奇函数。

表4-3中给出了一些常用序列的离散时间傅里叶变换。

表 4-3 常用序列的 DTFT

序 列	DTFT
$\delta(n)$	1
$a^n u(n) \quad  a  < 1$	$(1 - ae^{-j\Omega})^{-1}$
$R_N(n)$	$e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \frac{\sin(\frac{N\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega + 2k\pi)$
$u(n)$	$(1 - e^{-j\Omega})^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega + 2k\pi)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 + 2k\pi)$
$\cos(\Omega_0 n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\Omega - \Omega_0 + 2k\pi) + \delta(\Omega + \Omega_0 + 2k\pi)]$

由于序列的离散时间傅里叶变换实际上就是其 $z$ 变换在单位圆上的取值，因此其基本性质与 $z$ 变换的性质比较近似，表4-4给出了DTFT的基本性质，不再证明。

表4-4 DTFT的性质

性 质	$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\Omega}), \text{DTFT}[y(n)] = Y(e^{j\Omega})$
线性	$\text{DTFT}[ax(n) + by(n)] = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$
序列的位移	$\text{DTFT}[x(n - n_0)] = e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$
频域的位移	$\text{DTFT}[e^{j\Omega_0 n} x(n)] = X[e^{j(\Omega - \Omega_0)}]$
序列的线性加权	$\text{DTFT}[nx(n)] = j \left[ \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega}) \right]$
序列的反褶	$\text{DTFT}[x(-n)] = X(e^{-j\Omega})$
奇偶虚实性	$\text{Re}[X(e^{j\Omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\Omega})], \text{Im}[X(e^{j\Omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\Omega})]$ $ X(e^{j\Omega})  =  X(e^{-j\Omega}) , \varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega)$

时域卷积定理	$\text{DTFT}[x(n) * y(n)] = X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$
频域卷积定理	$\text{DTFT}[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} [X(e^{j\Omega}) * Y(e^{j\Omega})]$
帕塞瓦尔定理 (能量定理)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\Omega}) ^2 d\Omega$

## 3. DTFT与傅里叶变换FT的关系

连续信号 $x(t)$ 经理想抽样得到的抽样信号 $x_s(t)$ 可记作

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

利用冲激函数的傅里叶变换、傅里叶变换的时移特性和线性特性，以及模拟角频率与数字角频率的对应关系，对上式作傅里叶变换（FT）得理想抽样信号的频谱

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \mathcal{F}[x_s(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathcal{F}[\delta(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j\omega nT_s} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega nT_s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{jn\Omega} \\ &= X(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

所以，序列的离散时间傅里叶变换就是其对应的连续信号理想抽样后的傅里叶变换。

## 4.6.2 离散系统的频率响应

### 1. 频率响应的重要意义

由第1章的1.2.3节可知，对于一个线性时不变的离散因果系统，假设对于输入序列 $x(n)$ ，系统的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，系统的输出序列为 $y(n)$ ，则 $y(n)$ 与 $x(n)$ 之间有如下关系：

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对上式等号两边进行DTFT变换，根据时域卷积性质，可以得到

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) \quad (4.6.5)$$

其中 $X(e^{j\Omega})$ 、 $Y(e^{j\Omega})$ 及 $H(e^{j\Omega})$ 分别是 $x(n)$ 、 $y(n)$ 及 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换，于是我们有

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$$



$H(e^{j\Omega})$ 称为系统的频率响应,描述了在频域上,离散系统输出与输入之间的关系。线性时不变系统的频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 是以 $2\pi$ 为周期的连续周期函数,是复函数。它可以写成模和相位的形式

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j\varphi(\Omega)} \quad (4.6.6)$$

式中,模 $|H(e^{j\Omega})|$ 称作幅频响应或幅度特性,相位 $\varphi(\Omega)$ 称作相频响应或相位特性。

对于稳定系统,如果输入序列是一个频率为 $\Omega$ 的复正弦序列:

$$x(n) = e^{j\Omega n}, \quad (-\infty < n < \infty)$$

则系统输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\Omega(n-m)} = e^{j\Omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\Omega m} \\ &= e^{j\Omega n} H(e^{j\Omega}) \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

式中

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\Omega m} = H(e^{j\Omega})$$

式(4.6.7)表明,当线性时不变系统的输入信号是频率为 $\Omega$ 的复正弦序列时,输出则为同频复正弦序列乘以加权函数 $H(e^{j\Omega})$ 。显然,  $H(e^{j\Omega})$ 决定了复正弦序列通过线性时不变系统时幅度和相位随频率 $\Omega$ 的变化情况。换句话说,系统对复正弦序列的响应完全由频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 决定。用极坐标形式表示频率响应,由式(4.6.5),系统的输出和输入的傅里叶变换的幅度和相位间的关系可表示为:

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) \quad (4.6.5)$$

$$|Y(e^{j\Omega})| = |H(e^{j\Omega})| |X(e^{j\Omega})| \quad (4.6.8)$$

$$\arg[Y(e^{j\Omega})] = \arg[H(e^{j\Omega})] + \arg[X(e^{j\Omega})] \quad (4.6.9)$$

## 2. 频率响应的几何确定

通过序列的傅里叶变换与 $z$ 变换的关系可知,  $H(e^{j\Omega})$ 是系统函数 $H(z)$ 在 $z$ 平面的单位圆上的取值, 即令 $z=e^{j\Omega}$ , 有

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

对于线性时不变的离散系统, 其系统函数 $H(z)$ 有如下形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

若 $H(z)$ 的零点和极点均为单阶, 则对上式的分子和分母进行多项式分解,  $H(z)$ 可写成如下形式:

$$H(z) = G_0 \frac{\prod_{j=0}^M (z - Z_j)}{\prod_{i=0}^N (z - P_i)}$$

将 $z=e^{j\Omega}$ 代入式(4.6.10)，得到系统的频率响应：

$$H(e^{j\Omega}) = G_0 \frac{\prod_{j=0}^M (e^{j\Omega} - Z_j)}{\prod_{i=0}^N (e^{j\Omega} - P_i)} = |H(e^{j\Omega})| e^{j\varphi(\Omega)} \quad (4.6.11)$$

$Z_j$ 为系统的零点， $P_i$ 为系统的极点。

令式(4.6.11)的分子项  $(e^{j\Omega} - Z_j) = B_j(\Omega) e^{j\beta_j(\Omega)}$  和  $\beta_j(\Omega)$  分别表示零点 $Z_j$ 与单位圆上某点 $z_d$  ( $|z_d|=1$ )相连的矢量 $(e^{j\Omega} - Z_j)$ 的长度和相位。令式(4.6.11)的分母项  $(e^{j\Omega} - P_i) = A_i(\Omega) e^{j\alpha_i(\Omega)}$  和  $\alpha_i(\Omega)$  分别表示极点 $P_i$ 与单位圆上某点 $z_d$  ( $|z_d|=1$ )相连的矢量的长度和相位。则 $|H(e^{j\Omega})|$ 和 $\varphi(\Omega)$ 有如下形式：

$$|H(e^{j\Omega})| = G_0 \frac{\prod_{j=1}^M B_j(\Omega)}{\prod_{i=1}^N A_i(\Omega)} \quad (4.6.12)$$

$$\varphi(\Omega) = \sum_{j=1}^M \beta_j(\Omega) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\Omega) \quad (4.6.13)$$

从式 (4.6.12) 和 (4.6.13) 可以看出, 随着点  $z_d$  在单位圆上的移动, 频率响应特性也随之发生变化, 当  $z_d$  移到与某个极点

$P_i$  最接近的位置时, 由于  $A_i(\Omega)$  变小,  $|H(e^{j\Omega})|$  会出现一个峰值; 当  $z_d$  移到与某个零点  $Z_j$  最接近的位置时, 由于  $B_j(\Omega)$  变小,  $|H(e^{j\Omega})|$  会出现一个谷值。

下面我们通过一个例子来探讨系统的零极点对系统频率响应的影响。

**【例4-19】** 某离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{1+0.8z^{-1}}{(1-0.7e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-0.7e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})}$ , 画出该系统的幅度响应  $|H(e^{j\Omega})|$  的图形。

**【解】** 由系统函数可知, 系统  $z = -0.8$  在处有一个零点, 在  $P_1 = 0.7e^{j\pi/3}$  和  $P_2 = 0.7e^{-j\pi/3}$  处, 各有一个极点, 零点和极点的分布图如图4-19所示。

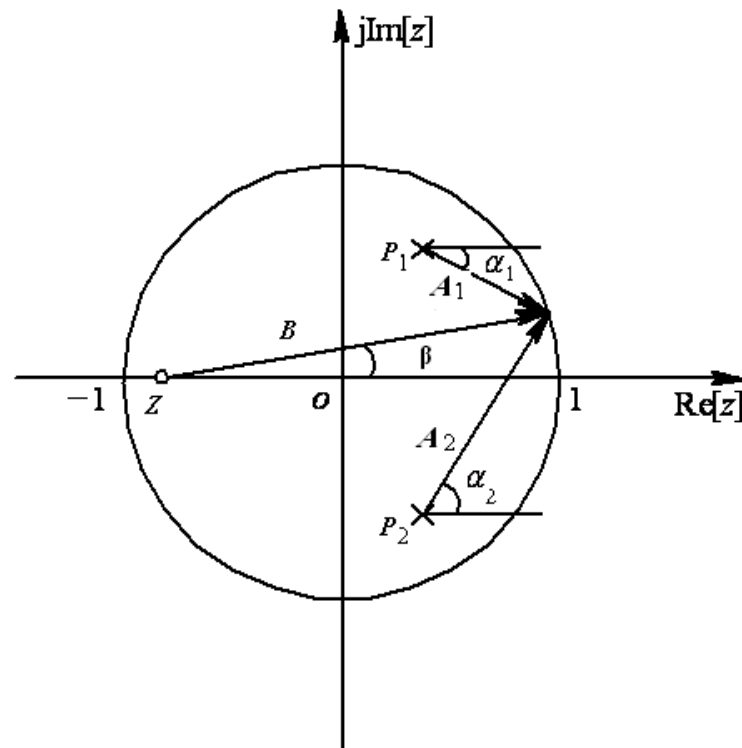


图4-19 零点和极点在z平面上位置

因此，幅度响应在  $\Omega = \pi$  处为零，在  $\Omega = \pm \pi/3$  处取得最大值，  
由系统零极点位置定性确定的系统的频率响应如图4- 20所示。

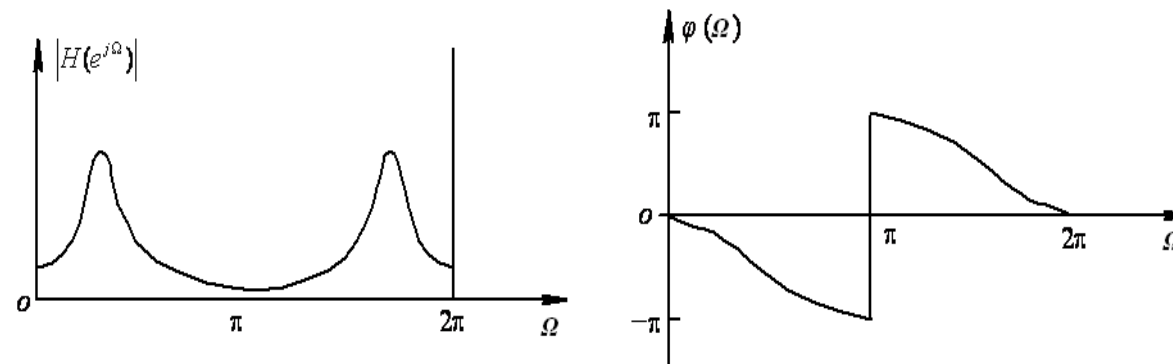


图4- 20 由零极点位置定性确定的系统频率响应

## 4. 7 本章内容Matlab仿真

### 1. 部分分式展开法

在MATLAB中用部分分式求  $z$  的逆变换的指令是residuez。它可求得 $X(z)$ 部分分式的各个系数。格式如下：

$[r, p, k]=\text{residuez}(b, a)$

其中 $b=[b_0, b_1, \dots, b_M]$ 和 $a=[a_0, a_1, \dots, a_N]$ 是式(4.2.1 )中分子和分母多项式的系数。如果 $X(z)$ 的部分分式展开为

$$X(z) = \frac{r_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2 z^{-1}} + \frac{r_3}{1-p_3 z^{-1}} + k_1 + k_2 z^{-1} \quad (4.7.1)$$

则residuez的返回参数 $r, P, k$ 分别为 $r=[r_1 \ r_2 \ r_3]'$ ， $p=[p_1 \ p_2 \ p_3]'$ 和 $k=[k_1 \ k_2]$ 。



【例4-20】 用部分分式展开法求  $X(z) = \frac{80 - 53z^{-1} + 15z^{-2}}{10 - 7z^{-1} + z^{-2}}$  的逆变换。

【解】： m文件如下

```
b = [80,-53,15,-2];
```

```
a = [10,-7,1];
```

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
```

程序执行的结果为：

```
r =
```

```
3.0000
```

```
4.0000
```

```
p =
```

```
0.5000
```

```
0.2000
```

k =

1 -2

根据仿真结果得 $X(z)$ 的部分分式展开式为

$$X(z) = \frac{3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{4}{1-0.2z^{-1}} + 1 - 2z^{-1}$$

则 $z$ 逆变换为

$$x[n] = 3(0.5)^n + 4(0.2)^n + \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

## 2. 用MATLAB计算频率响应

用MATLAB计算频率响应可直接使用如下指令：

`freqz(b, a, n)`

其中**b**和**a**分别为系统函数分子、分母的系数向量；**n**为频率的计算点数，常取2的整数次幂，以便使用FFT进行快速运算（见第6章），**n**的缺省值为512；绘制的频率特性的横坐标 $\Omega$ 的范围为0到 $\pi$ 。

【例4- 21】系统函数为  $H(z) = \frac{z}{z-0.8} = \frac{1}{1-0.8z^{-1}}$ ，用MATLAB绘制频率特性曲线。

【解】：MATLAB命令为

`b=[1 0];`

`a=[1 -0.8];`

`freqz(b,a)`

频率特性如图4-21 所示

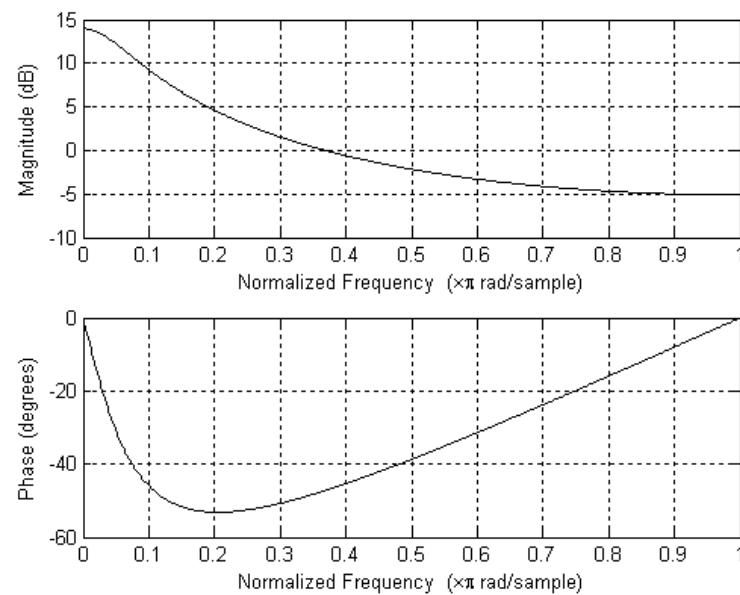


图4-21 例4- 21的频率特性图

## 3. 求DTFT的频率特性

【例4-22】设 $x(n)$ 是3点矩形序列， $x(n)=R_3(n)$ ，求它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$ 。

【解】由4.6.3节表4-3可直接写出 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换

$$X(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}[R_3(n)] = \sum_{n=0}^2 e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j3\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\frac{3\Omega}{2}} e^{j\frac{3\Omega}{2}} - e^{-j\frac{3\Omega}{2}}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}} = e^{-j\Omega} \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

于是有幅频特性

$$|X(e^{j\Omega})| = \left| \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \right|$$

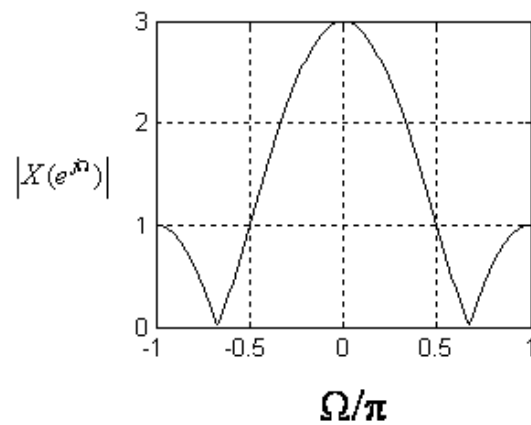
相频特性

$$\varphi(\Omega) = -\Omega + \arg \left| \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \right|$$

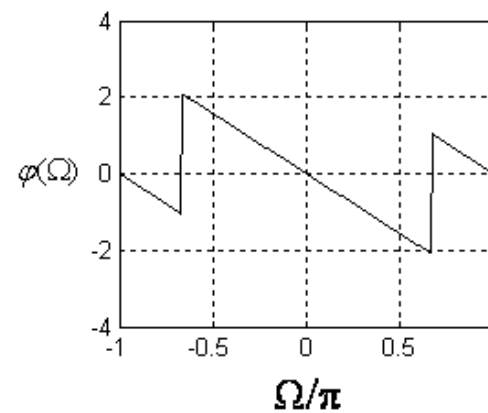
由MATLAB的求模指令`abs()`和求相位角指令`angle()`我们可分别求得幅频特性和相频特性，见如下程序。

```
clear all;close all;
N=3;                %取3点矩形序列
n=-pi:0.01*pi: pi;
y1=sin((N./2)*n).*exp(-1*j*n*(N-1)./2);
y2=sin(0.5*n);
i=find(y2);          %因y2在分母上，返回序列y2中不为零的值
                      对应的索引值。
y(i)=(y1(i)./y2(i));
j=find(y2==0);y(j)=N;
subplot(1,2,1);plot(n/pi,abs(y));grid on;
subplot(1,2,2);plot(n/pi,angle(y));grid on;
```

$x(n]=R_3(n)$ 的离散时间傅里叶变换DTFT的幅频特性和相频特性分别如图4-21(a)、(b)所示。



(a)



(b)

$$|X(e^{j\Omega})| = \left| \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \right|$$

$$\varphi(\Omega) = -\Omega + \arg \left| \frac{\sin(\frac{3\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})} \right|$$

图4-22 例4-22的频率特性图

## 4. 8 小结

$z$ 变换是线性离散系统分析和设计的重要变换之一，它实际上是对理想抽样信号的拉普拉斯变换。 $z$ 变换的收敛域是指 $z$ 平面上某一不包括极点的圆外或圆内区域，当变量 $z$ 在此区域内取值时， $z$ 变换收敛。应当注意的是，相同的 $z$ 变换形式，当其收敛域不同时，所对应的时间序列也是不同的。对于线性时不变系统， $z$ 变换的形式都是关于 $z^{-1}$ 的有理分式，我们可以通过长除法确定其所对应序列的有限个点，另外，还可以利用部分分式展开法得到其所对应序列的闭合解形式。正如利用傅里叶变换和拉普拉斯变换的性质分析连续信号与连续系统一样， $z$ 变换的许多性质是分析离散信号与离散系统的很有价值的工具。我们往往可利用一些常用序列的 $z$ 变换，再结合 $z$ 变换的性质求得一些其它序列的 $z$ 变换。



线性时不变离散系统可以用常系数差分方程和运算结构图进行描述。分析方法包括时域分析法和变换域分析法，时域分析方法与连续系统的时域分析方法类似，只不过连续系统需要求解系统的微分方程，而离散系统是对差分方程进行求解。常系数差分方程的时域解法有迭代法和经典的通解特解法，迭代解法简明易行，思路清楚，但不容易得到闭合解；采用通解特解法可以求取系统的完全解。利用 $z$ 变换方法可以将系统的差分方程转换为代数方程进行求解，这样可以大大简化求解过程。系统函数 $H(z)$ 定义为离散系统的响应信号的 $z$ 变换与激励信号的 $z$ 变换的比值，同时也是系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的 $z$ 变换形式。系统函数的极点位置对系统稳定性产生影响，对于因果系统而言，只有当系统函数的极点都在 $z$ 平面的单位圆之内时，系统才是稳定的。

序列的离散时间傅里叶变换DTFT又称序列的傅里叶变换，是离散序列在 $z$ 平面的单位圆上取其 $z$ 变换，我们也称之为序列的数字频谱，其地位等同于连续信号的傅里叶变换。序列的频谱是周期的、连续的，幅度谱是 $\Omega$ 的偶函数，相位谱是 $\Omega$ 的奇函数（请注意模拟角频率 $\omega$ 和数字角频率 $\Omega$ 的对应关系）。序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\Omega})$ 就是其对应的连续信号 $x(t)$ 理想抽样后的傅里叶变换。利用DTFT对系统输出的频率响应进行分析，系统函数用 $e^{j\Omega}$ 代替 $z$ 即可得到系统的频率响应。当线性时不变系统的输入信号是频率为 $\Omega$ 的复正弦序列时，输出则为同频复正弦序列乘以加权函数 $H(e^{j\Omega})$ ， $H(e^{j\Omega})$ 决定了复正弦序列通过线性时不变系统时幅度和相位随频率 $\Omega$ 的变化情况。系统频率响应的谷值位置受到系统函数 $H(z)$ 在单位圆附近的零点位置影响，系统频率响应的峰值位置受到系统函数 $H(z)$ 在单位圆内且靠近单位圆附近的极点位置影响。利用这一结论，我们可以通过对系统函数零极点的配置来定性决定系统的频率响应特性。