新疆大学2020—2021学年度第一学期期末考试

《线性代数》试卷（汉本A卷）

2020年12月

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

装 订 线

第一部分　选择题（共10分）

得分	评卷人

一、单项选择题（本大题共5小题，每题只有一个正确答案，答对一题得2分，共10分）

1、设3阶行列式$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$是行列式中元素$a_{ij}$的代数余子式，则

$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$　　【　　】

A. -6　　B. 0　　C. 4　　D. 6

2、设A,B均为n阶矩阵，则下列结论中正确的是　　【　　】

A. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　　B. $(AB)^k=A^kB^k$

C. $|kAB|=k|A|\cdot|B|$　　D. $\left|(AB)^k\right|=|A|^k\cdot|B|^k$

3、若齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$有非零解，则$\lambda=$　　【　　】

A. 1或2　　B. -1或-2　　C. 1或-2　　D. -1或2

4、设A为3阶方阵，A的特征值为1，2，3，则$2A$的特征值为　　【　　】

A. 1/2, 1/4, 1/6　　B. 2, 4, 6　　C. 1, 2, 3　　D. 1, 1/2, 1/3

5、如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性相关，则下述结论中错误的是 【　　】

A. 它的任何部分组都是线性相关

B. 它的秩小于m

C. 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$有非零解

D. 其中某一个向量可由其余向量线性表示

第二部分　非选择题（共90分）

得分	评卷人

二、判断题(本大题共5小题，每题2分，共10分，答A表示说法正确．答B表示说法不正确，本题只需指出正确与错误，不需要修改)

6、若行列式主对角线上的元素全为0，则该行列式的值必为0. (　　)

7、只有可逆矩阵，才存在伴随矩阵. (　　)

8、基础解系中的解向量有可能线性相关. (　　)

9、对向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，如果其中任意两个向量都线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

(　　)

10、设有二次型$f=X^TAX$，则二次型f的秩等于其对应的矩阵A的秩. (　　)

得分	评卷人

三、填空题(本大题共5小题，每题 2分，共10分)

11、四阶行列式的项$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$前的符号为________.

12、设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则$A^{2020}=$________.

13、设n阶方阵A的元素全为1，则$r(A)=$________.

14、设α_1,α_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，又已知$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$也是$Ax=b$的解，则

$k_1+k_2=$________.

15、若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&0&3\end{pmatrix}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 ________.

得分	评卷人

四、计算题(本大题共 5 题，每题 12 分，共 60 分)

16、计算行列式 $\begin{vmatrix}x+a&b&c&d\\a&x+b&c&d\\a&b&x+c&d\\a&b&c&x+d\end{vmatrix}$.

17、已知 $AX+B=X$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

18、讨论 p 取何值时，下列线性方程组无解？有解？并在有解时求其通解。

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=p\end{cases}$$

19、已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$

(1) 求向量组的秩；

(2) 判定向量组的线性相关性；

(3) 求向量组的一个最大无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表示出来.

20、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$

(1) 求矩阵 A 的特征值与特征向量，并判断特征向量是否正交；

(2) 判断 A 可否与对角矩阵相似，若可以，求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵；

(3) 判断矩阵 A 是否正定.

得分	评卷人

五、证明题（本大题共 1 小题，共 10 分）

21、若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：向量组 $2\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_2+4\alpha_3$，$5\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

新疆大学 2020 至 2021 学年第一学期期末考试

{线性代数(汉 A)} 试题标准答案及评分标准

开课院（系）________学生班级 ______考试方式__闭卷__2020 年 12 月

一、单项选择题（每题有一个正确答案，答对一题得 **2** 分，共 **10** 分）

1、C　2、D　3、C　4、B　5、A

二、判断题(每题 **2** 分,共 **10** 分，答 A 表示说法正确.答 B 表示说法不正确,本题只须指出正确与错误,不需要修改)

6、B　7、B　8、B　9、B　10、A

三、填空题(本大题共 5 小题，每题 2 分,共 10 分)

11、正；　12、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$；　13、1；　14、1；　15、 1,2,3；

四、计算题（每题 **12** 分，共 **60** 分）

16、$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)x^3$

(12 分)

17、 $|E-A|=3$ ， $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (8 分)

$$X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ (4 分)

18、$(A,b) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6 分)

若方程组有解，则 $R(A,b)=R(A)=2$，从而 $p=2$.

原方程组的同解方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3 \end{cases}$ x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

Ax=0 的基础解系：$\xi_1 = (1,-2,1,0,0)^T, \xi_2 = (1,-2,0,1,0)^T, \xi_3 = (5,-6,0,0,1)^T$

原方程的一个特解 $\eta = (-2,3,0,0,0)^T$

线性方程组的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta$，$k_1,k_2,k_3$是任意实数. (6 分)

19、$\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\-1&3&-5&5&-2\\2&1&3&4&2\\4&2&6&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&3&-3&6&-1\\0&1&-1&2&0\\0&2&-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ (4 分)

所以，向量组的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，向量组线性相关 (4 分)

向量组的一个极大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$，

且有$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_5$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_5$ (4 分)

20、$|A-\lambda E|=\lambda(1-\lambda)(\lambda+2)$，$A$的特征值为：$\lambda_1=1,\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$. (3 分)

对于$\lambda_1=1$，解方程$(A-E)x=0$，得特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^T$

对于$\lambda_2=0$，解方程$Ax=0$，得特征向量$\alpha_2=(0,-1,1)^T$，

$\lambda_3=-2$，解方程$(A+2E)x=0$，得特征向量 $\alpha_3=(0,1,1)^T$ (4 分)

对于不同的特征值对应的特征向量两两正交 (1 分)

令$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ (2 分)

矩阵A的 3 阶顺序主子式不大于 0，因此A不正定 (2 分)

五、证明题（本大题共 1 小题，共 10 分）

21、证明：设存在k_1,k_2,k_3使得

$k_1(2\alpha_1+3\alpha_2)+k_2(\alpha_2+4\alpha_3)+k_3(5\alpha_3+\alpha_1)=0$ 成立 (3 分)

即$(2k_1+k_3)\alpha_1+(3k_1+k_2)\alpha_2+(4k_2+5k_3)\alpha_3=0$ (2 分)

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\3k_1+k_2=0\\4k_2+5k_3=0\end{cases}$

解得$k_1=k_2=k_3=0$，

所以$2\alpha_1+3\alpha_2$，$\alpha_2+4\alpha_3$，$5\alpha_3+\alpha_1$线性无关 (5 分)