第2章

2003—2004.

1. $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\tan\frac{x}{2}+\sin e$. 求 $\frac{dy}{dx}$

解. $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}\cdot\ln\frac{3}{2}\cdot 2+\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=2\ln\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

2004—2005

1. $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$. 求 y'

解: $y'=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$

3. 求 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数

解: $\ln y=x\ln\frac{x}{1+x}=x[\ln x-\ln(1+x)]$

$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x-\ln(1+x)+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)$

$y'=y\left[\ln x-\ln(1+x)+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\right]$

$y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left[\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right]$

2005-2006.

1. 设 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定. 则 $y=f(x)$ 在 $(1,1)$ 处切线方程是 ____

解: 求导: $y+xy'+2\cdot\frac{1}{x}=4y^3\cdot y'$

$(4y^3-x)y'=y+\frac{2}{x}$　　　$y'=\dfrac{y+\frac{2}{x}}{4y^3-x}$

$y'(1)=\dfrac{1+2}{4-1}=1$

$\therefore$ $(1,1)$ 处切线方程为: $y-1=1\cdot(x-1)$　即　$y=x$

2. 设 $y=f(x)$ 由 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 确定. 求 $\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$

解: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{2x+2y\cdot y'}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2}$

$\dfrac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2}=\dfrac{y'x-y}{x^2+y^2}$　　$\therefore$ $x+y\cdot y'=xy'-y$

$(x-y)y'=x+y$. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$　　$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

2006-2007

1. $y=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1,0)$ 处切线斜率为 $\underline{\ 1\ }$.

解: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$　　$y'(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2. $e^y+xy-e=0$. $\frac{dy}{dx}=$ ____.

解: $e^y\cdot y'+y+xy'=0$.

$(e^y+x)y'=-y$

$y'=\dfrac{-y}{e^y+x}$

3. $f(x)$ 在 $x=a$ 二阶可导，且 $f'(a)=0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=$ $\underline{f''(a)}$

解：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)$.

4. 求 $y=\frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^2}$ 导数.

解：$\ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)-2\ln(x+2)$

$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+2)}$

$y'=y\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+2)}\right]=\frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x+2)}\right]$

2007-2008.

1. $f(x)=\ln x$，则 $[f(3)]'=$ (B.)

A. $\frac{1}{3}$. B. 0. C. $\ln 3$. D. $\frac{1}{x}$.

$f'(3)=\frac{1}{x}\Big|_{x=3}=\frac{1}{3}$

$[f(3)]'=(\ln 3)'=0$.

2. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$y'=$ ______.

解：$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3. 由 $y-x=e^{xy}$ 确定 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程.

解：$x=0$. $\Rightarrow y=1$. 点 $(0,1)$.

$y'-1=e^{xy}(y+xy')=ye^{xy}+xe^{xy}\cdot y'$

$(1-xe^{xy})y'=1+ye^{xy}$

$y'=\frac{1+ye^{xy}}{1-xe^{xy}}$. $k=y'(0)=2$

切线方程：$y-1=2(x-0)$ 即 $y=2x+1$.

2008—2009

1. $f(x)$ 在 a 处可导，则 $f'(a)$ 是（ D ）

A. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$ B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h}$. C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$. D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$

$\because\ f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\therefore\ A=-f'(a).\quad B=-f'(a).\quad C=2f'(a).\quad D=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-[f(a+h)-f(a)]}{h}$

$=2f'(a)-f'(a)=f'(a)$

2. $x=\sin t$. $y=\cos2t$. 在 $(\frac{\sqrt2}{2}, 0)$ 处切线方程 ______.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos2t)'}{(\sin t)'}=\frac{-2\sin2t}{\cos t}=-4\sin t$.

$(\frac{\sqrt2}{2},0)\longrightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt2$

（或 $\frac{dy}{dx}=-4\sin t=-4x$. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\sqrt2}{2}}=-2\sqrt2$.）

切线方程：$y-0=-2\sqrt2(x-\frac{\sqrt2}{2})$ 即. $2\sqrt2x+y-2=0$.

3. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$. 求导.

解. $\ln y=\frac12\ln(x\sin x\sqrt{1-e^x})=\frac12[\ln x+\ln\sin x+\frac12\ln(1-e^x)]$

$\frac1y y'=\frac12[\frac1x+\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+\frac{-e^x}{2(1-e^x)}]$

$y'=\frac{y}{2}[\frac1x+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}]$

$y'=\frac12\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac1x+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}]$.

2008－2009.

1. 正确的是（ D. ）

A. $f(x)$ 在 x_0 处是否有极限与 $f(x)$ 在 x_0 处的值有关系.

B. $f(x)$ 在 x_0 处有极限，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续.

C. $f(x)$ 在 x_0 处连续. 则 $f(x)$ 在 x_0 处一定可微分.

D. $f(x)$ 在 x_0 处可导是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分但非必要条件.

解析. A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在. $f(x_0)$ 不一定有定义.

B. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 时. 才连续

C. D. 可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 有极限.

2. $f(x)=e^{2x}$. 则 $f^{(n)}(x) =$ （ B ）

A. e^{2x}. B. $2^n e^{2x}$. C. $2^n e^{x}$. D. e^{2nx}

解: $f'(x)=2e^{2x}$. $f''(x)=2^2e^{2x}$. $f'''(x)=2^3e^{2x}$. $\cdots$ $f^{(n)}(x)=2^n e^{2x}$.

3. 曲线 $x=a\cos t$. $y=b\sin t$. 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应点处切线方程 ______.

解, $t=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

切线方程. $y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$

4. $y=2x^2+\ln x$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=4x+\frac{1}{x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4-\frac{1}{x^2}$$

2009-2010.

1. $y=f(x)$ 在 a 处可导. 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{2h}=$ (D)

A. $f'(a)$. B. $5f'(a)$. C. $2f'(a)$. D. $\frac{5}{2}f'(a)$.

解. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{2h}=\frac{5}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+5h)-f(a)}{5h}=\frac{5}{2}f'(a)$

2. $y=e^x\sin 2x$. 则 $y'=$ $\underline{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x}$

3. 与直线平行 $y=5x$ 的，曲线 $y=x^3+x^2$ 的所有切线方程 ______.

解. $k=5=3x^2+2x$

$3x^2+2x-5=0$ $(x-1)(3x+5)=0$ $x=1$ 或 $x=-\frac{5}{3}$

$x=1\Rightarrow y=2$. 或 $x=-\frac{5}{3}\Rightarrow y=-\frac{50}{27}$.

$y-2=5(x-1)$ 或 $y+\frac{50}{27}=5(x+\frac{5}{3})$

即 $y=5x-3$. 或 $y=5x+\frac{175}{27}$.

4. $\arcsin y=e^{x+y}$. $\dfrac{dy}{dx}$.

解. $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot y'=e^{x+y}\cdot(1+y')=e^{x+y}+e^{x+y}\cdot y'$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}-e^{x+y}\right)\cdot y'=e^{x+y}$

$$y'=\frac{e^{x+y}}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}-e^{x+y}}=\frac{e^{x+y}\cdot\sqrt{1-y^2}}{1-e^{x+y}\cdot\sqrt{1-y^2}}$$

2010-2011.

1. $f(0)=0$. $f'(0)$ 存在. 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}$ 等于 (D)

A. $f'(0)$. B. 0 C. $f'(x)$. D. $2f'(0)$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0+2x)-f(0)}{2x}=2f'(0)$

2. $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$, 则 $f'(0)=$ <u>100!</u>.

解: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{x}=100!$

3. $xy+2\ln x=y^4$ 在 (1.1) 处切线方程为 <u>$y=x$</u>

解. $y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3\cdot y'$. $(4y^3-x)y'=y+\frac{2}{x}$

$y'=\frac{y+\frac{2}{x}}{4y^3-x}$ $k=y'(1)=\frac{1+2}{4-1}=1$

∴切线方程: $y-1=x-1$. ∴ $y=x$.

4. $y=x\sec x+\arctan x^2+\ln3$. 求 y'、dy

解: $y'=\sec x+x\sec x\tan x+\frac{2x}{1+x^4}$. $dy=(\sec x+x\sec x\tan x+\frac{2x}{1+x^4})dx$.

5. $y=(1+x^2)^{\sin x}$, 求 y'.

解: $\ln y=\sin x\ln(1+x^2)$. $\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\ln(1+x^2)+\sin x\cdot\frac{2x}{1+x^2}$

$y'=(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$.

6. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$

2013—2014.

1. $y=\arctan x+\operatorname{arccot} x-a^x\ (a>0)$. 则 $y'=$ ______.

解: $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}-a^x\ln a=-a^x\ln a$.

2. $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$. 则 $\frac{dy}{dx}=$ ______.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{t\cos t+\sin t}{\cos t-t\sin t}$

3. $x^2-y^2-4xy=0$. $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $2x-2y\cdot y'-4y-4xy'=0$. $(y+2x)y'=x-2y$

$y'=\frac{x-2y}{y+2x}$

$y''=\frac{(1-2y')(y+2x)-(x-2y)(y'+2)}{(y+2x)^2}=\frac{5y-5xy'}{(y+2x)^2}=\frac{5y-5x\cdot\frac{x-2y}{y+2x}}{(y+2x)^2}=\frac{5(y^2+4xy-x^2)}{(y+2x)^3}$

$=0$.

2013—2014 开学重考

1. $y=x+x^x$ 求 y'

解: $y-x=x^x$. $\ln(y-x)=x\ln x$

$\frac{y'-1}{y-x}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$y'-1=(y-x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

$y'=1+x^x(\ln x+1)$

2. $x^2+2xy+y^2=3x$. 求 y'

解. $2x+2y+2xy'+2y\cdot y'=3$

$(2x+2y)y'=3-2x-2y$

$y'=\frac{3-2x-2y}{2x+2y}$

3. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$. 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}$. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=1$.

4. $y=2e^x-\frac{x^2}{2}-x+5$. 验证 $y''=y'+x$

证明： $y'=2e^x-x-1$. $y''=2e^x-1$

$y'+x=2e^x-x-1+x=2e^x-1=y''$ 得证.

2014—2015

1. $y=\sin x$ 在 $(\pi,0)$ 处切线斜率 . (C)

A. $-\frac{1}{2}$. B. 1 . C. -1 . D. 2 .

解. $y'=\cos x$. $k=y'(\pi)=\cos\pi=-1$.

2. $f(x)=\begin{cases} x^2 . & x\le 1 \\ ax-1 . & x>1 . \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导. 则 $a=$ __2__

连续：$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1 \\ &\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(ax-1)=a-1 \\ &f(1)=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2 .$$

3. $y=x^3+2x^2-\frac{2}{x}+12$. 求 dy

解： $y'=3x^2+4x+\frac{2}{x^2}$ $\quad dy=(3x^2+4x+\frac{2}{x^2})dx$

4. $e^{x+y}=xy$. 求 y'

解. $e^{x+y}\cdot(1+y')=y+xy'$ $\quad e^{x+y}-y=(x-e^{x+y})y'$. $\quad y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}=\frac{xy-y}{x-xy}$

法二. $x+y=\ln x+\ln y$. $\quad 1+y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\cdot y'$ $\quad (1-\frac{1}{y})y'=\frac{1}{x}-1$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{y}}=\frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{y-1}{y}}=\frac{y-xy}{xy-x}$$

5. $\begin{cases} x=t^2 \\ y=4t^3 \end{cases}$，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{12t^2}{2t}=6t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6}{2t}=\frac{3}{t}$.　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=\frac{3}{2}$

2015-2016.

1. $y=\tan(1-x^2)$，求 $dy|_{x=1}$.

解：$y'=\sec^2(1-x^2)\cdot(-2x)=-2x\sec^2(1-x^2)$

$dy=-2x\sec^2(1-x^2)\Delta x$.　$dy|_{x=1}=-2\Delta x$.

2. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$.　求 $\frac{d^2y}{dx^2}$　(同 2010-2011).

2016-2017

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，$f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ <u>-2</u>.

解：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-2\Delta x)]-f(x_0)}{-2\Delta x}=-2f'(x_0)=-2$

2. $y=x+e^x$ 在 $(0,1)$ 处切线方程 <u>$y=2x+1$</u>.

解：$y'=1+e^x$，$k=y'|_{x=0}=1+1=2$.　$y-1=2(x-0)$.　$y=2x+1$

3. $y=f(\sin x^2)$.（$f(u)$ 可导），则 $dy=$ <u>$2x\cos x^2 f'(\sin x^2)dx$</u>

4. $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$，求 y'，dy.

解：$y'=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)+x\left[-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]$

$=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)-\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=2\cos(\ln x)$.

$dy=2\cos(\ln x)dx$

5. $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t\cos t}{\sin t} = 1 + t\cot t$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cot t + t\csc^2 t}{\sin t} = \frac{\sin t\cos t + t}{\sin^3 t}$

6. $xy = e^{x+y}$. $y = y(x)$ 的一阶导数.

2016-2017.

1. $f'(0)$ 存在. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0+2x)-f(0)}{2x} = 2f'(0)$.

2. $y=\sin x$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程为 ________ .

解: $y' = \cos x$. $k = y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})$. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}$.

3. $y = 3\sec x + \arctan x + \ln 3$. 求 $\frac{dy}{dx}$. $y'|_{x=0}$

解: $y' = 3\sec x\tan x + \frac{1}{1+x^2}$ $y'|_{x=0} = 1$.

4 $\begin{cases} x = at \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a} = \sin t$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t}{a}$

5. $y = 1 - xe^y$. 求 $\frac{dy}{dx}$.

解: $y' = -e^y - xe^y \cdot y'$ $(1+xe^y)y' = -e^y$

$y' = -\frac{e^y}{1+xe^y}$

2017-2018

1. $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. 则 $f'(-1)=$ $\underline{\quad -6 \quad}$

解：$f'(-1)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-0}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1}x(x+2)(x+3)(x+4)=-1\times1\times2\times3=-6$$

2. $y=f(\sin x+\ln x)$ ($f(u)$ 可导). $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{(\cos x+\frac{1}{x})f'(\sin x+\ln x)}$

解：$y'=f'(\sin x+\ln x)\cdot(\cos x+\frac{1}{x})$

3. $y=2^{\sin x}+(\sin x)^2+\int_2^5 e^{x^2}dx$. 求 y'. dy. (每5分).

解：$y'=2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos x$ $\qquad dy=y'dx$.

4. $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$. 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}=\sec t$. $\quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

5. $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$

解：$\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dfrac{y'x-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$. $\qquad y'x-yy'=x+y$

$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

2017-2018 (16周).

1. $f'(a)=3$. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{3h}=$ __1__.

解: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{3h}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f[a+(-h)]-f(a)}{-h}=\dfrac{1}{3}f'(a)=\dfrac{1}{3}\times3=1$.

2. $y=e^x+\cos x-1$ 在 $(0,1)$ 处切线方程为 __$y=x+1$__.

解. $y'=e^x-\sin x$. $y'|_{x=0}=1$

$y-1=1\cdot(x-0)$ $\therefore$ $y=x+1$

3. $y=x\arctan\dfrac{x}{2}+\sqrt{1-x^2}+\ln2$. 求 y'. dy

解: $y'=\arctan\dfrac{x}{2}+x\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\arctan\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{4+x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$dy=$ __y'__ dx.

4. $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$. $\dfrac{dy}{dx}$.

解: $1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$. $(1-\frac{1}{2}\cos y)y'=1$.

$$y'=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}$$

5. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (2010-2011).

2017-2018 (开学备考).

1. $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. $f'(0)=$ __$4!$__.

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=4!$

2. $y=f(\sin x^2)$. $\dfrac{dy}{dx}=$ __$f'(\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot2x=2x\cos x^2f'(\sin x^2)$__

3. $y=e^{\sin x}+\tan 2x+\sin\frac{\pi}{5}$. 求 y'、dy.

解: $y'=e^{\sin x}\cdot\cos x+2\sec^2 2x+0=\cos x\cdot e^{\sin x}+2\sec^2 2x$.

4. $\begin{cases}x=at+1\\ y=a^2\sin t.\end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2\cos t}{a}=a\cos t$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-a\sin t}{a}=-\sin t$. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$.

5. $x+y=e^{x-y}$ 求 $\frac{dy}{dx}$

解: $1+y'=e^{x-y}\cdot(1-y')=e^{x-y}-e^{x-y}\cdot y'$

$(1+e^{x-y})y'=e^{x-y}-1$. $y'=\frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}$.

2018-2019.

1. $f'(1)=2$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ __4__

解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)=2\times 2=4$

2. $f(x)=x^n+e^{2x}$. $f^{(n)}(0)=$ __$n!+2^n$__

解: $f'(x)=nx^{n-1}+2e^{2x}$. $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}+2^2e^{2x}$

$\cdots$ $f^{(n)}(x)=n!+2^ne^{2x}$. $f^{(n)}(0)=n!+2^n$

3. $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+\int_0^1 e^{x^2}dx$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ (第五章)

解: $y'=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)+x\left[-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right]+0$

$=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)-\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=2\cos(\ln x)$

$y''=-2\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$.

4. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$. $t=\frac{\pi}{4}$处切线方程，法线方程。

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=\frac{-4\sin t\cos t}{\cos t}=-4\sin t$.

$k_{切}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-4\sin\frac{\pi}{4}=-2\sqrt{2}$, $k_{法}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$t=\frac{\pi}{4}$. $x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $y=\cos(2\times\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{2}=0$. $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$.

切线方程: $y=-2\sqrt{2}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})=-2\sqrt{2}x+2$. $y=-2\sqrt{2}x+2$

法线方程: $y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{4}$. $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{4}$

5. $e^{x+y}+\cos(xy)=0$. 求 dy.

解: $e^{x+y}(1+y')-\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$.

$[e^{x+y}-x\sin(xy)]y'=y\sin(xy)-e^{x+y}$

$y'=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$. $dy=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}dx$

2018-2019.

1. $f(x)$在$x=a$处可导. 则 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=$ <u>$f'(a)$</u> .

解: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a)$

2. $y=\cos\ln(1+2x)$ 求y'及dy

解. $y'=-\sin\ln(1+2x)\cdot\frac{2}{1+2x}=-\frac{2}{1+2x}\sin\ln(1+2x)$

$dy=-\frac{2}{1+2x}\sin\ln(1+2x)$.

3. $y=x^{\sin x}$ 求 y'

解。$\ln y=\sin x\ln x$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

4. $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=te^{t}\end{cases}$. 求 $\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{t}+te^{t}}{-e^{-t}}=-e^{2t}-te^{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2e^{2t}-2te^{2t}-e^{2t}}{-e^{-t}}=3e^{3t}+2te^{3t}=e^{3t}(3+2t).$$

2018-2019.(开学补考)

1. $f'(1)=2$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ $\underline{\quad -4 \quad}$

2. $y=x^2+e^{2x}$ 在 (0.1) 处切线方程. $\underline{y=2x+1}$.

解：$y'=2x+2e^{2x}$. $\quad y'|_{x=0}=2$. $\quad y-1=2x \quad y=2x+1$

3. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+\int_0^1\sin x^2dx$ 求 $\frac{dy}{dx}$. dy.

解. $y'=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$dy=\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

4. $f(u)$ 二阶可导. $y=f(\ln x)$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$y'=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(\ln x)\frac{1}{x^2}+f'(\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$$

5. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t \end{cases}$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin 2t}{\cos t}=4\sin t$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4\cos t}{\cos t}=4$.

2019-2020. (16周).

1. $f'(x_0)=4$. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=$ __12__.

2. $f'(1)=2$. $\left.\frac{df(x^2)}{dx}\right|_{x=1}=$ __4__

解: $\frac{df(x^2)}{dx}=f'(x^2)\cdot 2x$. $\left.\frac{df(x^2)}{dx}\right|_{x=1}=f'(1)\cdot 2=4$

3. $y=\sin^2x-\ln\cos x+\arctan\frac{\pi}{4}$. 求 dy.

解: $y'=2\sin x\cdot\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}+0=\sin 2x+\tan x$

$dy=(\sin 2x+\tan x)\,dx$

4. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$. 求 $\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$

5. $y=xe^y$ 在 $(0,0)$ 处切线,法线方程.

解: $y'=e^y+xe^y\cdot y'$ $(1-xe^y)y'=e^y$. $y'=\frac{e^y}{1-xe^y}$

$k_{切}=y'|_{x=0}=1$. $k_{法}=-1$.

切线方程. $y=x$. 法线方程: $y=-x$

2019—2020

1. $f(0)=0$. $f'(0)=3$. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2h)}{h}=$ $\underline{\ -6\ }$.

解: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2h)}{h}=-2\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0-2h)-f(0)}{-2h}=-2f'(0)=-6$

2. $f(u)$ 可导. $y=f(1-2x)$. 则 $y'=($ C $)$

A. $f'(1-2x)$. B. $-f'(1-2x)$. C. $-2f'(1-2x)$. D. $-2f'(x)$

3. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $y'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-x^2}$

$y''=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

4. $x+\arctan y=y$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解: $1+\frac{1}{1+y^2}\cdot y'=y'$ $\quad (1-\frac{1}{1+y^2})y'=1$. $\quad y'=\frac{1+y^2}{y^2}=\frac{1}{y^2}+1$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2}{y^3}\cdot(\frac{1}{y^2}+1)$

5. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\frac{\pi}{2}-\arctan t \end{cases}$ 在哪一点处切线平行于直线 $x+2y=0$. 并求该点处切线方程.法线方程.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1}{2t}$ $\quad x+2y=0$. $\therefore y=-\frac{1}{2}x$.

设所求点为 (x_0,y_0). $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0}=k_{切}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2t_0}\Longrightarrow t_0=1$.

$\therefore x_0=\ln 2$. $y_0=\frac{\pi}{4}$. $\quad\therefore (x_0,y_0)=(\ln 2,\frac{\pi}{4})$

切线方程: $y-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}(x-\ln 2)$.

法线方程: $y-\frac{\pi}{4}=2(x-\ln 2)$.