部分习题参考答案或提示

习 题 1

(A)

一、填空题

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\dfrac{3^{n-2}}{2}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $\boldsymbol{O}$.

4. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. -1.

7. $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$.

8. 40.

9. $-(ad-bc)^2$.

10. $-\dfrac{1}{70}$.

11. $\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. 0.

15. -1.

16. 2.

17. -3.

二、选择题

1. C. 2. D. 3. B. 4. A. 5. C. 6. C. 7. D. 8. D. 9. C. 10. C. 11. C. 12. C. 13. B. 14. B. 15. D. 16. A.

(B)

1. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ 14 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 = -6z_1 - z_2 + 5z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 2z_2 + 7z_3, \\ x_3 = -10z_1 - 5z_2 + 20z_3. \end{cases}$

4. 4, $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2\cdot 4^{99} & 3\cdot 4^{99} \\ -4^{100} & 6\cdot 4^{99} \end{pmatrix}$.

5. (1) $\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$. (2) $(0,6,8)$. (3) $\begin{pmatrix} d_1a_1 & d_1a_2 & d_1a_3 \\ d_2b_1 & d_2b_2 & d_2b_3 \\ d_3c_1 & d_3c_2 & d_3c_3 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} a_1d_1 & a_2d_2 & a_3d_3 \\ b_1d_1 & b_2d_2 & b_3d_3 \\ c_1d_1 & c_2d_2 & c_3d_3 \end{pmatrix}$. (5) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. (6) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. (1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(2) 提示: 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 考察 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素.

9. 提示: 比较 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{7}{9} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. (1) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

18. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

19. 提示: 先证 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{P}^{-1}$.

20. $\boldsymbol{A}^{11} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}$.

21. (1) 27. (2) 160. (3) $a^n + (-1)^{n+1}b^n$. (4) $(-1)^{n-1}(n-1)$.

(5) $\left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{a_i}\right) a_2 \cdots a_n$. (6) $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + x^n$.

22. 提示: 用 1.6.2 节性质 1.8.

23. 16, 20, 0.

24. $-\frac{8}{27}$.

25. $\begin{pmatrix} 29 & 55 & -19 \\ 5 & 23 & 17 \\ 26 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

26. 提示: 对可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}^* = |\boldsymbol{M}|\boldsymbol{M}^{-1}$.

27. $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} + 9\boldsymbol{E}$. $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1} = -\frac{1}{17}(\boldsymbol{A}^2 + 9\boldsymbol{E})$.

28. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

29. (1) 2. (2) 3.

30. $\lambda = 5$, $\mu = 1$.

31. 提示: (充分性) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的等价标准形都是 $\boldsymbol{E}_{m\times n}^{(r)}$.

(必要性) 初等变换不改变矩阵的秩.

习　题　2

(A)

一、填空题

1. $(-9, -4, 7, -4)^{\mathrm{T}}$.　2. 2.　3. 5.　4. 无.

5. $a = 2b$.　6. 相.　7. $a \neq 2$.　8. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. (0, 1, 0, 4), (2, 0, 0, 5), (0, 0, 3, 6).　10. $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0, 1, -1)$.

11. $\boldsymbol{\alpha} = (0, 1, -1)$.　12. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.　13. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $t + 2s = 0$.　15. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.　16. $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$.

二、选择题

1. C.　2. D.　3. A.　4. C.　5. D.　6. B.　7. D.　8. A.　9. B.　10. D.

(B)

1. 提示: 参考例 2.1.　2. (1) 2; (2) 2; (3) 3; (4) 2.

3. $a = 2$, $b = 3$.　4. $a = \frac{21}{2}$.　5. $a \neq 0$ 且 $b \neq \frac{1}{3}$.

6. $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow a \neq -b$. 提示: $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.

7. 提示: $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{A}$.

8. 提示: 由条件可知, 存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)B$, 故 $n = \mathrm{r}(\boldsymbol{E}) \leqslant \mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\} \leqslant n$.

9. 提示: $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{P}$, 且 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

10. 提示: $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{C}$, 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C}) < 4$, 或利用 $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$.

13. 提示: 参考定理 2.4 的证明.

16. 若 $a \neq 2$, 且 $a \neq 1$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大无关组是它本身.

当 $a = 1$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a = -2$ 时, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$.

17. (1) 不是. (2) 是. (3) 不是.

18. (1) $\boldsymbol{\alpha} = (6, 3, 2)^{\mathrm{T}}$ 是 V 的一组基, $\dim V = 1$.

(2) $\boldsymbol{\alpha} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (-3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 V 的一组基, $\dim V = 2$.

19. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 4, 5)$ 是 V 的一组基, $\dim V = 2$.

(2) $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ 是 V 的一组基, $\dim V = 2$.

20. 提示: 根据定义进行验证即可.

21. $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ 是 V 的一组基, $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标为 $(1, 1)^{\mathrm{T}}$.

22. (1) 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 从 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵就是 $\boldsymbol{A}$.

(2) 从 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 ε_1, ε_2, ε_3 的过渡矩阵就是 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{\eta}$ 在 ε_1, ε_2, ε_3 下的坐标就是 $(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$; 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(4, -2, 1)^{\mathrm{T}}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

25. 提示: 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 因为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2 \geqslant 0$$

恒成立, 所以

$$\Delta = \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant 0.$$

26. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$.

31. 提示: $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$.

32. 提示: 验证 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2$.

习　题　3

(A)

一、填空题

1. $(-2,1,0)$.　　2. $(b-a)(c-a)(c-b)=0$.　　3. $n-1$.

4. $(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.　　5. $\lambda=1$.　　6. $abc\neq 0$.

7. $\boldsymbol{x}=k(0,2,4,6)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $k\in\mathbb{R}$.

8. n.

二、选择题

1. D.　2. C.　3. C.　4. C.　5. C.　6. D.　7. D.　8. B.　9. B.　10. C.

(B)

1. (1) $\boldsymbol{\xi}_1=\left(-\dfrac{3}{2},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\left(\dfrac{1}{2},0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\left(\dfrac{5}{2},0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\xi}_1=(7,-11,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-6,10,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(3) $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,-3,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(4) 没有基础解系.

2. 当 $\lambda=0$ 或 -1 时, 原方程组有非零解. $\lambda=0$ 时, 基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(2,-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$; $\lambda=-1$ 时, 基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

4. 当 $a=0$ 时, 基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时, 基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,\cdots,n-1,n)^{\mathrm{T}}$.

5. 提示: 由 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 可得 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$. 可见 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间 V_1 包含在 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 的解空间 V_2 中, 因而 $\dim V_1\leqslant\dim V_2$, 其中 $\dim V_1=t-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, $\dim V_2=t-\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})$. $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 同解 $\Leftrightarrow V_1=V_2\Leftrightarrow \dim V_1=\dim V_2$.

6. 提示: 根据定义进行验证即可.

7. 提示: 可以利用上一题的结论.

8. 提示: 先证明 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t,\boldsymbol{\xi}$ 线性无关.

9. (1) 提示: 由 $k_1\boldsymbol{\gamma}_1+k_2\boldsymbol{\gamma}_2=0$ 可推出 $k_1=k_2=0$.

(2) 提示: 可以分 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1\neq\boldsymbol{\gamma}_2$ 两种情况进行讨论. 当 $\boldsymbol{\gamma}_1\neq\boldsymbol{\gamma}_2$ 时, $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 构成 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 因而 $\boldsymbol{\eta}$ 可以由 $\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 线性表示.

10. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2 为任意常数.

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{8} \\ 0 \\ \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$.

(3) 无解.

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 c 为任意常数.

(5) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{9}{5} \\ \dfrac{6}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

11. 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, 该方程组有唯一解; 当 $\lambda = 1$ 时, 该方程组有无穷多解; 当 $\lambda = -2$ 时, 该方程组无解. 当 $\lambda = 1$ 时, $\boldsymbol{x} = c_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}} + c_2(-1,0,1)^{\mathrm{T}} + (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

12. (1) 当 $a \neq -4$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示.

(2) 当 $a = -4$ 但 $b \neq 2 + c$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(3) 当 $a = -4$ 但 $b = 2 + c$ 时, $\boldsymbol{\beta}$ 能用 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但表示方法不唯一. 此时 $\boldsymbol{\beta} = -\dfrac{2+b+3k}{6}\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2 + \dfrac{1+2b}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$, 其中 k 为任意常数.

13. 提示: (必要性) 验证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$.

(充分性) 记 $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i$, 令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$.

14. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$.

15. (1) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \dfrac{1}{2}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组.

(3) $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. (1) $\boldsymbol{A}$ 的第 1, 2, 4 行构成 $\boldsymbol{A}$ 的行空间的一组基, $\boldsymbol{A}$ 的行空间的维数为 3.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的第 1, 2, 3 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列空间的一组基, $\boldsymbol{A}$ 的列空间的维数为 3.

(3) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间的一组基为 $(-2,1,0,6,0)^{\mathrm{T}}$, $(1,0,0,-6,1)^{\mathrm{T}}$; 维数为 2.

习 题 4

(A)

一、填空题

1. $\boldsymbol{E}$. 2. $\lambda_1=n,\ \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 3. $(1,3)$. 4. 2. 5. $(\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|)^2+1$.
6. 4, 2, 5; 40. 7. 24. 8. 0. 9. 1. 10. 2.
11. 2. 12. 2. 13. 2.

二、选择题

1. A. 2. B. 3. B. 4. D. 5. A. 6. B. 7. D. 8. B. 9. B. 10. B. 11. B. 12. B. 13. C.

(B)

1. 提示: $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$.

2. 提示: $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}_2$, 验算 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$.

4. 提示: 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, 验证 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$.

5. 提示: $\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}\boldsymbol{AE}(i,j)=\boldsymbol{B}$.

6. (1) 对应于 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k(1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$; 对应于 $\lambda=4$ 的全部特征向量为 $k(1,-1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$.

(2) 对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$; 对应于 $\lambda=2$ 的全部特征向量为 $k(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$.

(3) 对应于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$; 对应于 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$; 对应于 $\lambda=9$ 的全部特征向量为 $k\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$.

(4) 对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1, k_2 不全为0; 对应于 $\lambda=-1$ 的全部特征向量为 $k_1(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1, k_2 不全为0.

(5) 对应于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为 $k_1(-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1, k_2 不全为0; 对应于 $\lambda=10$ 的全部特征向量为 $k\left(-\dfrac{1}{2},-1,1\right)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$.

(6) 对应于 $\lambda=na$ 的全部特征向量为 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $k\neq0$; 对应于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$k_1(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+\cdots+k_{n-1}(-1,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1, k_2, $\cdots$, k_{n-1} 不全为0.

7. 提示: 由 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 以及 $(\lambda^2-3\lambda+2)\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,
取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 但2不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.
取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 但1不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

8. 1, 3, -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 提示: $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

9. $a=1$, $\lambda=3$.

10. (1) $-2, 8, -4$. (2) 64. (3) -72.

11. 提示: $\boldsymbol{A}^* = -6\boldsymbol{A}^{-1} = -6\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(1, 2, -3)$.

$$|\boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = |-6\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} + 3\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} + 2\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1}| = |-6\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + 3\boldsymbol{\Lambda} + 2\boldsymbol{E}| = 25.$$

12. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda_0\boldsymbol{\xi}$.

13. (2) 提示: 先证 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 可逆, 再由 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

14. 提示: 利用反证法及属于不同特征值的特征向量线性无关.

15. (1) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $\boldsymbol{A}$ 只有 2 个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \left(-1, -\frac{1}{3}, 1\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

(3) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$.

17. $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}$.

18. (1) $\lambda = -1$, $a = -3$, $b = 0$.

(2) 提示: $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda + 1)^3$. $\mathrm{r}(-\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 2$, $\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

19. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

20. (1) $x = 0$, $y = -2$.

(2) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

21. (1) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$.

22. $a=b=0$. $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

23. 提示: 设 $\boldsymbol{p}_3$ 为属于 λ_3 的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 正交, 可取 $\boldsymbol{p}_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0\end{pmatrix}$.

24. 提示: 设 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 为属于 -1 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交, 可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

习　题　5

(A)

一、填空题

1. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$. 4. 2. 5. 2, 1.

6. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. 7. 2. 8. $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$. 9. $3y_1^2$

二、选择题

1. D. 2. B. 3. A. 4. D. 5. B. 6. B. 7. A. 8. C. 9. C. 10. B.

(B)

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 提示: (1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$;

(3) 若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$ 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数相等.

5. (1) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $f=5y_1^2+2y_2^2-y_3^2$.

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$.

(3) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.

6. (1) $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2$.

(2) $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$ $f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$.

(3) $\begin{cases} x_1 = y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + \dfrac{1}{2}y_2^2 + 2y_3^2$.

7. 提示: $f(x_1, \cdots, x_n) = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^2$.

8. $a = 2$, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

9. (1) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $f = 4u^2 + 2v^2 + w^2$.

(2) 最大值为 4, 最小值为 1.

10. 提示: 可用顺序主子式; 特征值; 定义; 合同于单位矩阵等判别.

11. 提示: 考虑特征值.

12. 提示: 若 $\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A}) = n$, 则对于任意的 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$, 都有 $\boldsymbol{A\xi} \neq \boldsymbol{0}$, 因而

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{A\xi})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\xi}) = \|\boldsymbol{A\xi}\|^2 > 0.$$

13. 提示: 考虑特征值.

14. 提示: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$ 且 $\lambda > 0$, 故 $\lambda = 1$.

15. 提示: $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} \geqslant \lambda\|\boldsymbol{\xi}\|^2$.

16. $-2 < \lambda < 1$.

17. (1) 正定, (2) 不正定, (3) 正定.

18. 提示: 令 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

19. $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (k+2)^2 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$ 且 $k \neq -2$.