

第二章 刚体的运动

1

2.1 刚体运动学

2

2.2 刚体动力学

3

2.3 角动量定理及角动量守恒定律

4

2.4 动能定理及机械能守恒定律

我们正青春年少

一、冲量矩

力矩对时间的积分定义为冲量矩，即 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$ ，方向与角动量的变化方向一致。

二、角动量

(1) 角动量的定义

位矢与动量的矢积定义为角动量，即 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

在国际单位制中单位是 $Kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ 。

- ◆ 冲量矩和角动量都是矢量，遵循矢量运算法则；
- ◆ 冲量矩是过程量，而角动量是状态量。

二、角动量

(2) 角动量的计算

1) 质点绕定轴转动的角动量为: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

大小: $L_z = rmv = r^2 m \omega = J\omega$

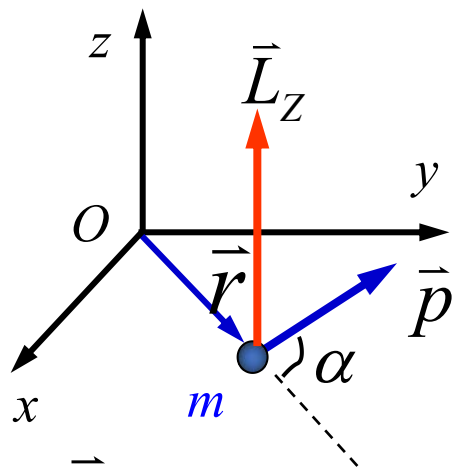
方向: 满足右手螺旋法则。

2) 质点系统绕定轴转动的角动量为:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

大小: $L_z = \sum r_i m_i v_i = \sum r_i^2 m_i \omega = J\omega$

方向: 满足右手螺旋法则。



二、角动量

(2) 角动量的计算

3) 刚体系统绕定轴转动的角动量为：

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times dm\vec{v}$$

大小： $L_z = \int r dm v = \int r^2 dm \omega = J\omega$

方向：满足右手螺旋法则。

三、角动量定理

刚体定轴转动时，合外力矩对时间的积分等于刚体角动量的变化量，即

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = \int_{t_1}^{t_2} J \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J d\omega = J\omega_2 - J\omega_1$$

2.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

角动量守恒定律：刚体所受合外力矩为零，则刚体的角动量保持不变，即

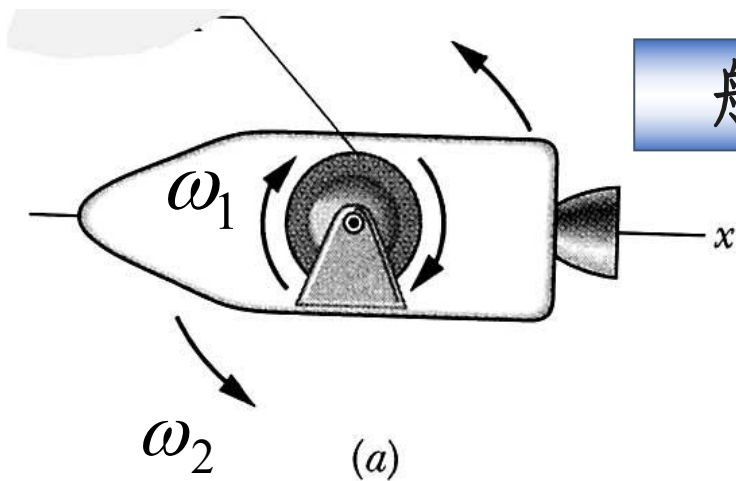
$$J\omega = J_0\omega_0$$



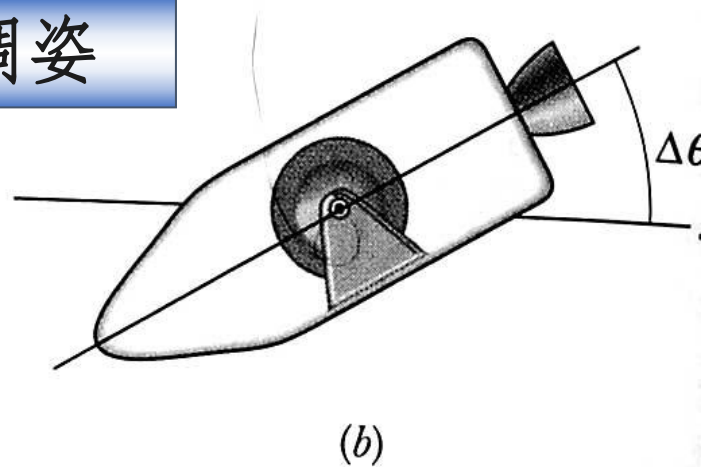
- (1) 内力矩不会改变刚体的角动量；
- (2) 在碰撞问题中，因为 $M^{\text{in}} \gg M^{\text{ex}}$ ，角动量近似守恒；
- (3) 角动量守恒定律是自然界中一个基本实验定律。

对由几个物体或质点构成的系统，若整个系统所受对**同一转轴的合外力矩为零**，则整个物体系对该转轴的**总角动量守恒**。

2.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律



航天器调姿



我们正青春年少

2.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

例 一滑冰者开始转动角速度为 ω_0 ，转动惯量为 J_0 ，然后将手臂收回，使转动惯量减少为原来的 $2/5$ ，求此时的转动角速度。

解： 滑冰过程外力矩为零，滑冰者角动量守恒

$$J_0 \omega_0 = \frac{2}{5} J_0 \omega$$

$$\omega = \frac{5}{2} \omega_0$$



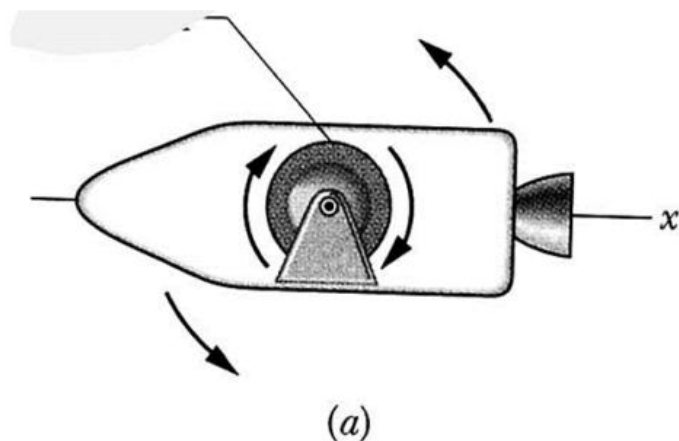
2.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

例 一转动惯量为 J_1 航天器中部有一个转动惯量为 J_2 的飞轮，为了调整航天器的飞行姿态，试求飞轮的角速度为 ω_2 时航天器的转动角速度。

解： 内力矩不会改变质点系的角动量，飞轮和航天器组成的系统角动量守恒

$$0 = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2$$

$$\omega_1 = -\frac{J_2}{J_1} \omega_2$$



2.3.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

例 一转动惯量为 J_1 航天器中部有一个转动惯量为 J_2 的飞轮，为了调整航天器的飞行姿态，试求飞轮的角速度为 ω_2 时航天器的转动角速度。

解： 内力矩不会改变质点系的角动量，飞轮和航天器组成的系统角动量守恒

$$0 = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2$$

$$\omega_1 = -\frac{J_2}{J_1} \omega_2$$

