概率论与数理统计试题 18-19 A 标准答案及评分标准

一．单选题：

1.A　2. C　3.C　4.B　5.A　6.C　7.B　8.B　9.C　10.C

二．填空题：

1.　0.84　　2.　4/7，26/49　　3.　$\sqrt{30}$　　4.　1

三．计算题：

1. 解：（1）设A_1表示产品由甲厂生产，A_2产品由乙厂生产，A_3产品由丙厂生产，B 表示任取一件为合格品

由题意可知，P（A_1）=2/10=1/5　　P（A_2）=3/10　　P（A_3）=5/10=1/2

P（B｜A_1）=0.85　　P（B｜A_2）=0.80　　P（B｜A_3）=0.90

则有全概率公式可得：P（B）=$\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i)$

$=\frac{1}{5}*0.85+\frac{3}{10}*0.8+\frac{1}{2}*0.9$

=0.86　　……………………………（5 分）

（2）由贝叶斯公式可知：

P（A_1｜B）=$\frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}*0.85}{0.86}=\frac{17}{86}$　　………………………（5 分）

2. 解：（1）由规范性可知：

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$　=>　$\int_0^2 a\,(4x-2x^2)dx=1$　=>　a=3/8　……………………（5 分）

即　当 0< x<2 时　　f(x)= $\frac{3}{8}(4x-2x^2)= \frac{3}{4}(2x-x^2)$

当x为其他时　　f(x)=0

（2）　P$(1<x<2)=\int_1^2 \frac{3}{4}(2x-x^2)dx$=1/2　……………………………（5 分）

3. 解：由题意可得：

X	1	2	3
P	0.1	0.35	0.55

……………（3 分）

Y	1	2	3
P	0.3	0.3	0.4

…………（3 分）

且

Y^2+1	2	5	10
P	0.3	0.3	0.4

则 E(Y^2+1)=2*0.3+5*0.3+10*0.4=6.1　　……………………….(4 分)

4. 解：（1）求θ的矩估计量：

E（X）=$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx= \int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx= \int_0^1 \theta x^{\theta}\,dx= \frac{\theta}{\theta+1}$　……………………（3 分）

由 E（X）=$\bar{X}$　　可知 $\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}$　=>　$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$　……………（2 分）

（2）最大似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} & 当\ 0<x_i<1\ 时 \\ 0 & 当 x_i 为其他时\end{cases}$　……….（1 分）

=>　$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1} & 当\ 0<x_i<1\ 时 \\ 0 & 当 x_i 为其他时\end{cases}$　……….（1 分）

当 $0<x_i$<1 时　$lnL(\theta)$=n*$ln\theta$+$(\theta-1)\sum_{i=1}^{n} ln\,x_i$

又令$\frac{dlnL\theta}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n} ln\,x_i$=0　…………..（2 分）

=>　$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} lnx_i}$　……………..（1 分）

四．统计题：

1. 解：（1）构造 T=$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$~t$(n-1)$ ....（2 分）

由 P$\left\{|T| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$=1−α=0.95 可知 ....（1 分）

$|T| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ => $\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ => $\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$ .....（1 分）

=> 1500−2.06*$\frac{14}{5}$ ≤ μ ≤1500+2.06*$\frac{14}{5}$

=> μ ∈ (1494.23 , 1505.77) ....（1 分）

即数学期望μ的置信水平为 0.95 的置信区间为(1494.23 , 1505.77)

（2）构造 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ ....（2 分）

由 P$\left\{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \chi^2 \le \chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha = 0.95$可知 ....（1 分）

$\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \chi^2 \le \chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ => $\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$...（1 分）

=> $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$ => $\frac{(25-1)*14^2}{39.4} \le \sigma^2 \le \frac{(25-1)*14^2}{12.4}$

=> σ^2 ∈ (119.39 , 379.35) ....（1 分）

即总体方差σ^2的置信度为 0.95 的置信区间为(119.39 , 379.35)

2. 解：由题意知：$\bar{X}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}$(3.24+3.26+3.24+3.27+3.25)=3.252 ....（1 分）

$S^2=\frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{X})^2$=1.7*$10^{-4}$ ....（1 分）

假设H_0：μ = μ_0=3.25， H_1: μ ≠ μ_0=3.25 ....（1 分）

取 T=$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$~t$(n-1)$ ....（2 分）

P$\left\{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$=α=0.01 可知 ....（2 分）

$|T| = \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{3.252-3.25}{\sqrt{1.7*10^{-4}}/\sqrt{5}}\right|$=0.342<4.604=$t_{0.005}(4)$ ....（2 分）

则接受原假设，认为这批矿砂的含镍量为 3.25 ....（1 分）

五．应用题：

1. 解：令X_i为一个螺丝钉的重量，则有题意可知 X=$\sum_{i=1}^{100}X_i$ ....（2 分）

由题意可知 E（X_i）=50， $\sqrt{D(X_i)}$=5

则 E（X）=E（$\sum_{i=1}^{100}X_i$）=5000 ....（2 分）

$\sqrt{D(\mathrm{X})}=\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)}$=50 ....（2 分）

由中心极限定理可知

P$\{X > 5100\} = 1 -$P$\{X \le 5100\} = 1 -$ P$\left\{\frac{X-5000}{50} \le \frac{5100-5000}{50}\right\}$ ....（2 分）

$= 1 - \emptyset(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$ ....（2 分）