第三章

2003-2004.

1. $f(x)$的泰勒展开式为$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+R_n(x)$. 其中拉格朗日余项$R_n(x)=$(D).

$(0<\theta<1)$

A. $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$　　B. $\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

C. $\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(x-x_0)^{n}$.　　D. $\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

解: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. ξ介于x_0与x之间. $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$.

2. 设$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. 证明: $f'(x)=0$有且仅有三个实根.

证明: $\because f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$.

$\therefore$由罗尔定理. $(0,1)$. $(1,2)$. $(2,3)$内都有$f'(x)=0$的根.

而$f'(x)=0$为一元三次方程. $\therefore f'(x)=0$至多有3个实根

$\Rightarrow f'(x)=0$有且仅有三个实根.

2004-2005.

1. $f(x)$在$[-1,1]$连续. 在$(-1,1)$内可导. $|f'(x)|\leq M$. $f(0)=0$. 则有(C)

A. $|f(x)|\geq M$.　B. $|f(x)|>M$.　C. $|f(x)|\leq M$.　D. $|f(x)|<M$.

解: $\forall x\in[-1,1]$. $f(x)$在$[x,0]$或$[0,x]$上连续、在$(x,0)$或$(0,x)$内可导.

由拉格朗日中值定理. $f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$. ξ介于0和x之间.

$\therefore f(x)=f'(\xi)\cdot x$. $\therefore |f(x)|=|f'(\xi)|\cdot|x|\leq M\cdot 1=M$.

2. $y=x-\ln(x+1)$ 在区间 $(-1,0]$ 内单调下降.

解. 定义域. $x+1>0$. $x>-1$. $\therefore D=(-1,+\infty)$.

$y'=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}=0$. $x=0$ 为驻点. y 没有不可导点.

$x\in(-1,0)$. $y'<0$. $\therefore \searrow$.

$x\in(0,+\infty)$. $y'>0$. $\therefore \nearrow$. $\therefore$ 单调下降区间为 $(-1,0]$.

3. 当 $x>0$. 且 $x\neq 1$ 时. $x\ln x>x-1$ 成立.

证明. 设 $f(x)=x\ln x-x+1$. $x>0$. $x\neq 1$. 定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x$ 无驻点和不可导点.

当 $x\in(0,1)$ 时. $f'(x)<0$. $f(x)\searrow$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时. $f'(x)>0$. $f(x)\nearrow$.

$\therefore \forall x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. $f(x)>f(1)=0$.

$\therefore x\ln x-x+1>0$. 即 $x\ln x>x-1$.

2005–2006.

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导. 且 $f''(x)>0$. $f(0)\leq 0$. 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a)$ 上单调增加.

证明: 记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ $x\in(0,a]$

$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

记 $h(x)=xf'(x)-f(x)$ $x\in(0,a]$.

$h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0$. ($\because x>0$. $f''(x)>0$.)

$\therefore h(x)\nearrow$. $h(x)>h(0)=0-f(0)\geq 0$. ($\because f(0)\leq 0$).

$\therefore g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}>0$ $\therefore g(x)\nearrow$.

$\therefore \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 上单调递增. #.

2006-2007.

1. 证明. $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$. $x>0$.

证明. $f(x)=\ln x$ 在 $[x, x+1]$ 上连续. 在 $(x, x+1)$ 内可导. $x>0$.

$\therefore f(x+1) - f(x) = f'(\xi)[(x+1)-x]$. $x<\xi<x+1$.

$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{\xi}$. $x<\xi<x+1$

$\therefore \frac{1}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x}$. 即, $\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$.

2007-2008.

1. $f(x) = 1-x^2$ 在 $[-1, 3]$ 上满足拉格朗日中值定理. 定理中的 $\xi=$ (B)

A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

解, $f'(x) = -2x$. $f'(x) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{1-9-(1-1)}{4} = -2$.

$-2x=-2$. $x=1$.

2. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一实根.

证明: 设 $f(x) = \sin x + x + 1$. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 连续.

$f(-\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0$ $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2} + 1 > 0$.

$\therefore$ 由零点定理知 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一根

$\because f'(x) = \cos x + 1 > 0$. $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至多有一个根.

$\therefore \sin x + x + 1 = 0$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内有唯一实根.

3. 设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$. 求 (1) 函数的增减区间和极值.

(2) 凹凸区间和拐点.

解: 定义域 $(-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$. $y=x+\frac{4}{x^2}$

$y'=1-8\frac{1}{x^3}$ $y'=0 \Rightarrow x=2$ 驻点.

$y''=\frac{24}{x^4}$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$\frac{3}{2}$	$+$
y	↗	↙	极小值3	↗

单增区间: $(-\infty, 0)$, $[2,+\infty)$.

单减区间: $(0, 2]$.

极小值. $f(2)=3$.

凹区间: $(-\infty, 0)$, $(0,+\infty)$. 无拐点.

4. $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定. 求曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 的取值范围.

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}}{3t^2+3}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$

当 $t<0$ 时. $\frac{d^2y}{dx^2}<0$. 曲线上凸; 当 $t>0$ 时. $\frac{d^2y}{dx^2}>0$. 下凹.

当 $t<0$ 时. $x<1$ $\therefore$ 上凸区间: $(-\infty, 1]$

(拐点: $(1, 1)$).

2008-2009.

1. 曲线 $xy=1$ 在 $(1,1)$ 处曲率为 $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

解: $xy=1$. $y+xy'=0$. $y'=-\frac{y}{x}$ $y'|_{(1,1)}=-1$

$y'+y'+xy''=0$. $y''=-\frac{2y'}{x}$ $y''|_{(1,1)}=2$.

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 证明: 当 $e<a<b<e^2$ 时. $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

证明: 记 $f(t)=\ln^2 t$. $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 在 (a,b) 内可导.

$\exists\ \xi\in(a,b)$. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

$f'(t)=\frac{2\ln t}{t}$ $\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)$.

设 $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$ $e<x<e^2$.

$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}<0$. $\therefore f(x)\downarrow$. $\therefore f(x)>\frac{2\ln e^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$

$\therefore \ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

2008-2009. 开学查考.

1. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 取得极大值. 则必有 (D.)

A. $f'(x_0)=0$.　　B. $f''(x_0)<0$.

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$.　　D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

$\because$ 极值点 $\subseteq$ {驻点, 不可导点}.

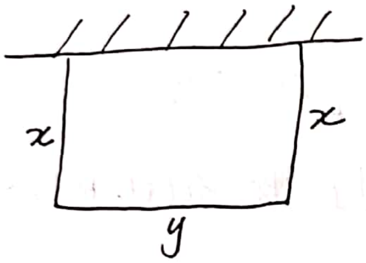
2. $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形的凹区间是 $\underline{[\frac{1}{3},+\infty)}$.

解：$D=(-\infty,+\infty)$. $y'=3x^2-2x-1$. $y''=6x-2>0$. $x>\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 凹区间：$[\frac{1}{3},+\infty)$

3. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁，问围成怎样的长方形才能使小屋面积最大？

解．



如图设长方形边长为 x. y.

$2x+y=20$ $\quad y=20-2x$

$S=xy=x(20-2x)=20x-2x^2$.

$S'(x)=20-4x=0$. $\quad x=5$.

$S''(x)=-4<0$. $\quad S''(5)<0$. $\therefore$ 唯一极大值点为最大值点.

$\therefore x=5$. $y=10$ 时面积最大.

垂直墙壁的两边长为 5m. 平行墙壁的一边长 10 时面积最大.

4. 证明. $|\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$.

证明：记 $f(x)=\arctan x$. $\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1. \qquad f(x) 在 (-\infty,+\infty) 内连续可导.$$

$\forall\ a.b$. $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$.

$\exists\xi$ 介于 $a.b$ 之间

$\therefore |f(a)-f(b)|=|f'(\xi)|\cdot|a-b|\leq|a-b|$.

$\therefore |\arctan a-\arctan b|\leq|a-b|$. #.

2009-2010. 综合第5章考的.

2010-2011.

1. $y=x^2e^x$ 的单增区间为 $\underline{(-\infty,-2],\ [0,+\infty)}$.

解, $y'=2xe^x+x^2e^x=xe^x(2+x)=0$. $x_1=-2$, $x_2=0$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↙		↗

2. 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上任一点处曲率 $K=\underline{\frac{1}{R}}$.

解: $x^2+y^2=R^2$. $2x+2y\cdot y'=0$. $y'=-\frac{x}{y}$

$2+2(y')^2+2yy''=0$. $y''=-\frac{1+(y')^2}{y}=-\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{|x^2+y^2|}{y^3}}{\left[1+\frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(R^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{R}$$

2013-2014.

1. 曲线 $y=ax^3+bx^2$ 以点 $(1,3)$ 为拐点, 求 a, b.

解: ∵ $(1,3)$ 为 $y=ax^3+bx^2$ 上点, ∴ $a+b=3$. ①

$y'=3ax^2+2bx$. $y''=6ax+2b=0$. $x=-\frac{b}{3a}$

$(1,3)$ 为拐点. ∴ $-\frac{b}{3a}=1$. $3a+b=0$ ②.

由①.②. $a=-\frac{3}{2}$. $b=\frac{9}{2}$.

2. 利用泰勒公式将函数 $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $x=0$ 处展开.

解. ∵ $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^nn!}+o(x^{2n})$

$f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}=x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{8}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n+1})$

2013-2014 开学重考.

1. 若 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 则 (C)

A. 必有 $f''(x_0)$ 存在且等于0.　　B. $f''(x_0)$ 一定存在. 但不一定等于0.

C. $f''(x_0)$ 如果存在. 必等于0.　　D. 若 $f''(x_0)$ 存在. 必不为0.

拐点 $\subseteq$ { $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点 }.

2 对 $y=x+\frac{1}{x}$ 的极值正确的是 (D)

A. 无极大值与极小值.　　B. 极小值为 -2. 无极大值.

C. 极大值为 -2. 无极小值.　　D. 极小值为 2. 极大值为 -2.

解: 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$y'=1-\frac{1}{x^2}$　　$y'=0$. $x_1=-1$. $x_2=1$.

$y''=\frac{2}{x^3}$.　当 $x=-1$、$y''(-1)=-2<0$. $f(-1)=-1-1=-2$ 为极大值.

当 $x=1$.　$y''(1)=2>0$.　$f(1)=2$ 为极小值.

3. 求 $y=x^2-\ln x^2$ 单调区间

解: 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$y'=2x-\frac{2x}{x^2}=2x-\frac{2}{x}=2\frac{x^2-1}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.　$x_1=-1$. $x_2=1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	↙	极小值	↗	↙	极小值	↗

单调增区间: $[-1, 0)$, $[1, +\infty)$

单调减区间: $(-\infty, -1]$、$(0, 1]$.

2014-2015

1. $f(x)=x^3-3x+1$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为（ B ）

A. 1. B. 3. C. -1. D. 2.

解. $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. $x_1=1$. $x_2=-1$(舍).

$f(1)=1-3+1=-1$. $f(0)=1$. $f(2)=8-6+1=3$.

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. (a,b) 内可导. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$. 使 $f'(\xi)=$ $\underline{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

3. 求 $f(x)=2x+\frac{8}{x}$ $(x>0)$ 单调区间.

解：定义域 $(0,+\infty)$

$f'(x)=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$. 驻点. $x_1=2$. $x_2=-2$ (舍).

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	极小值.	$\nearrow$

单调增区间：$[2,+\infty)$. 单调减区间：$(0,2]$.

4. 当 $x>0$. $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$

证明：设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$. $x>0$.

$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>\ln(1+x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $x>0$ 上单调递增.

$\therefore f(x)>f(0)=0$.

$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$ #.

注：若此题直接移项设为 $f(x)$. 求导非常复杂.

2015-2016.

1. 满足 $f'(x)=0$ 的点 x 是 $y=f(x)$ 的（ C ）

A. 极大值点. B. 极小值点. C. 驻点. D. 间断点.

2. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的单增区间为（ D ）.

A. $(-\infty,+\infty)$. B. $(1,+\infty)$. C. $(0,1)$. D. $(-1,1)$.

解：$D=(-\infty,+\infty)$. $y'=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x)(1+x)$.

$y'=0$. $x_1=1$、$x_2=-1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	极小值	↗	极大值	↘

3. $y=\ln(1+x^2)$ 的凹凸区间及拐点.

解，定义域 $(-\infty,+\infty)$. $y'=\frac{2x}{1+x^2}$ $y''=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

$y''=0 \Rightarrow x_1=-1$、$x_2=1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	凸	拐点	凹	拐点	凸

凸区间：$(-\infty,-1]$. $[1,+\infty)$

凹区间，$[-1,1]$.

拐点. $(-1,\ln 2)$. $(1,\ln 2)$

4. $x>0$. 证明 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$. $\Leftrightarrow \ln x\geqslant\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \Leftrightarrow \ln x\geqslant\frac{x-1}{x+1}$

证明：设 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$. $x>0$.

$f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2-1}{x}-2(x-1)=2x\ln x+2-x-\frac{1}{x}$ 不好判断)

设 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$, $x>0$ 定义域：$(0,+\infty)$. $f(1)=0$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$. $\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

当 $x>1$ 时. $\ln x-\frac{x-1}{x+1}>f(1)=0 \Rightarrow \ln x>\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

当 $0<x<1$ 时. $\ln x-\frac{x-1}{x+1}<f(1)=0 \Rightarrow \ln x<\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow (x^2-1)\ln x>(x-1)^2$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,+\infty)$. $(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$. #.

2016-2017

1\. 证明：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$，$x>0$.

证明：设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，$x>0$.

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

$$f''(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$ $\therefore f'(x)\nearrow$. $f'(x)>f'(0)=0$ $\therefore f'(x)>0$

$\therefore f(x)\nearrow$. $f(x)>f(0)=0$. $\therefore f(x)>0$.

$\therefore 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$. $x>0$. #.

2016-2017 开学查考.

1\. 求 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 单调区间和极值.

解：定义域 $(-\infty,+\infty)$. $y'=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)=0$.

$x_1=1$、$x_2=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

单调增区间：$(-\infty,1]$、$[2,+\infty)$. 单调减区间 $[1,2]$.

极大值：$f(1)=2-9+12-3=2$. 极小值：$f(2)=2\times8-9\times4+12\times2-3=1$

2017-2018.

1\. 求 $y=2x+\frac{8}{x}$ 单调区间. 凹凸区间. 极值、拐点. 渐近线.

解：定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$y'=2-\frac{8}{x^2}=0$. $x_1=-2$. $x_2=2$.

$y''=\frac{16}{x^3}$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−	-2	−	+	2	+
y	$\nearrow$ 凸	极大值	$\swarrow$ 凸	$\swarrow$ 凹	极小值	$\nearrow$ 凹

单增区间 $(-\infty,-2]$ $[2,+\infty)$. 单减区间 $[-2,0)$. $(0,2]$. 极大值 $f(-2)=-8$.

极小值 $f(2)=8$ 无拐点. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+\frac{8}{x})=\infty$. $\because$ 无水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(2x+\frac{8}{x})=\infty$. $\therefore$ $x=0$ 为铅直渐近线.

2017–2018（16周）.

1. 求 $y=\frac{x}{(x+3)^2}-1$ 的单调区间. 极值. 凹凸区间. 拐点.

解：定义域 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$

$$y'=\frac{(x+3)^2-x\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{9-x^2}{(x+3)^4}=\frac{3-x}{(x+3)^3},\quad y'=0\Rightarrow x_1=3.$$

$$y''=\frac{-(3+x)^3-(3-x)\cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6}=\frac{2(x-6)}{(x+3)^4}.\quad y''=0\Rightarrow x_2=6.$$

x	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘ 凸	↗ 凸	极大值	↙ 凸	拐点	↙ 凹

单增区间. $(-3,3]$. 单减区间. $(-\infty,-3)$, $[3,+\infty)$.

凸区间. $(-\infty,-3)$. $(-3,6]$. 凹区间. $[6,+\infty)$.

极大值 $f(3)=\frac{1}{12}-1=-\frac{11}{12}$. 拐点：$(6,f(6))=(6,-\frac{25}{27})$.

2017–2018. 开学重考.

1. 证明：当 $x>1$. $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证明：设 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}\quad x>1$.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^2}>0.\quad x>1.$$

$\therefore f(x)>f(1).=2-3+1=0.$

$\therefore 2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}>0.\quad x>1.$

$\therefore 2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}.\quad x>1.$ #

2018–2019.(19)

都是结合第五章知识点考的.

2018–2019.(20).

1. $y=\sqrt{x}-1$ 在 $[1,4]$ 上应用拉格朗日定理. 结论中点 $\xi=$ (C)

A. 0. B. 2. C. $\frac{9}{4}$. D. 3.

解. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. $f(4)-f(1)=f'(\xi)(4-1)$

$\therefore \frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{\sqrt{4}-1-(\sqrt{1}-1)}{3}=\frac{1}{3}$. $\sqrt{\xi}=\frac{3}{2}$. $\xi=\frac{9}{4}$.

2. 确定 a. b 的值. 使 $(1,3)$ 是 $y=ax^3+bx^2+x$ 拐点. 并求点 $(1,3)$ 处切线方程.

解: $(1,3)$ 是 $y=ax^3+bx^2+x$ 上点. $\therefore$ $a+b+1=3$. 即 $a+b=2$. ①

$(1,3)$ 是拐点. $y'=3ax^2+2bx+1$. $y''=6ax+2b=0$. $6a+2b=0$.

即 $3a+b=0$. ②.

由①②. $a=-1$ $b=3$.

$y'=-3x^2+6x+1$. $k=y'|_{x=1}=-3+6+1=4$.

$\therefore$ 切线方程为: $y-3=4(x-1)$ 即: $4x-y-1=0$

2018–2019 开学重考.

没有只考第三章的.

2019–2020.(16周).

1. $y=2x^3-3x^2+4x-5$ 凸区间为 $\underline{(-\infty,\frac{1}{2}]}$.

解. $y'=6x^2-6x+4$. $y''=12x-6=6(2x-1)=0$. $x=\frac{1}{2}$.

x	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	凸	拐点	凹

2019-2020.

证 $x>0$. $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$.

同2014-2015.