新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

离散数学

Discrete Mathematics
Discrete Structures
Discrete Mathematical Structures

2022年10月24日星期一

新疆大学 Xinjiang University

第三章内容提要

1. 集合的基本概念
2. 集合的表示方法
3. 集合间的关系
4. 集合的运算
5. 集合中元素的计数

第三章学习要求

重点掌握 → 一般掌握 → 了解

1
1 集合的概念及集合间关系
2 集合的表示
3 集合运算及定律
4 幂集P(A)

2
1 集合的归纳法表示
2 集合的对称差运算

3
包含排斥原理

新疆大学信息科学与工程学院
新疆大学 Xinjiang University

集合的定义

- 集合没有精确的数学定义

直观理解为：指定范围内一些离散、无序、特定的个体/对象组成的全体

指定范围 …… 特定对象

中国所有真皮沙发的聚集

集合的元素

组成集合的特定个体/对象称为集合的元素或成员

德国数学家康托尔-导致数学发展的重大危机-悖论-逻辑不一致性

英国哲学家罗素-基于公理构建集合理论-避免了逻辑上不一致性

新疆大学信息科学与工程学院 新疆大学 Xinjiang University

扩展：罗素悖论

- 在一个很僻静的孤岛上，住着一些人家，岛上只有一位理发师，该理发师专给那些并且只给那些自己不刮脸的人刮脸。那么，谁给这位理发师刮脸？

解： 设C = {x|x是不给自己刮脸的人}

b是这位理发师

如 $b \in C$，则 $b \notin C$；

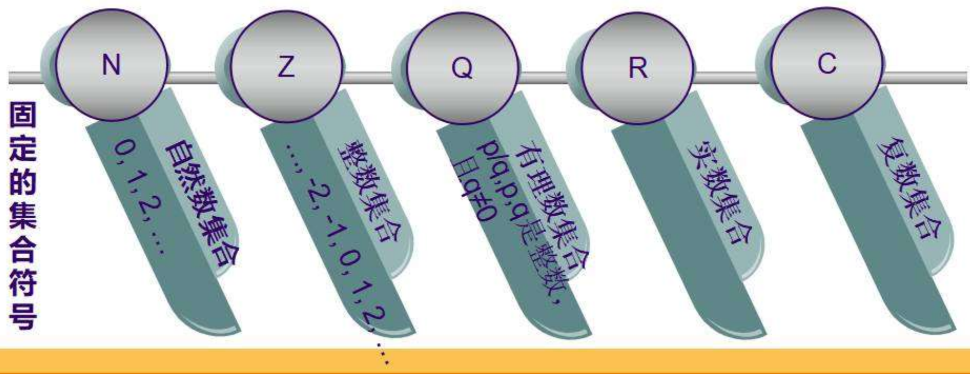
如 $b \notin C$，则 $b \in C$。

5

新疆大学信息科学与工程学院 新疆大学 Xinjiang University

集合的记法

- 通常用带或不带标号的**大写字母**A、B、C、....、A1、 B1 、C1 、....、X、Y、Z、...表示集合；
- 通常用带或不带标号的**小写字母**a、b、c、....、a1、 b1 、c1 、....、x、y、z、...表示元素。



6

集合的表示法

- **枚举法**---列出集合中全部元素或部分元素的方法。

  适用场景：

  一个集合仅含有限个元素

  一个集合的元素之间有明显关系

  例1：

  (1) A = {a，b，c，d}

  (2) B = {0, 1, 4, 9, 16, …, n^2, …}

新疆大学信息科学与工程学院 新疆大学 Xinjiang University

集合的表示法

- **枚举法**---列出集合中全部元素或部分元素的方法。

  适用场景：

  一个集合仅含有限个元素

  一个集合的元素之间有明显关系

  例1：

  (1) A = {a，b，c，d}

  (2) B = {0, 1, 4, 9, 16, …, n^2, …}

- **优点**：透明性，是一种显式表示法
- **缺点**：在表示具有某种特性的集合或集合中元素过多时，具有一定的局限。从计算机处理的角度，是一种静态表示法，存储该类型数据时，较消耗内存

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合的表示法

- **谓词表示法** ---通过刻画集合中所有元素共同具备的某种特性来表示集合。

  一般表示方法：$P = \{x|\underline{P(x)}\}$

  适用场景：

  一个集合含有很多或无穷多个元素；

  一个集合的元素之间有容易刻画的共同特征

- **优点**：不要求列出集合中全部元素，而只要给出该集合中元素的特性

  例2：

  (1) A = {x|x是"discrete mathematics"中的所有字母}；

  (2) $S = \{x|x$是整数，并且$x^2 + 1 = 0\}$；

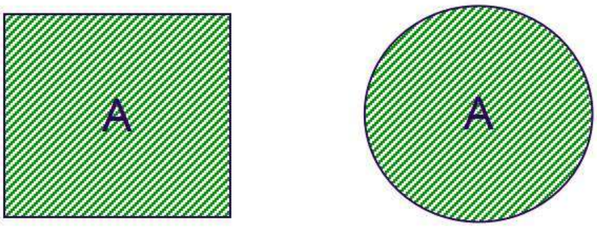
9

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合的表示法

- **文氏图表示法** ---一种利用平面上点的集合作成的对集合的图解。一般用平面上的圆形或方形表示一个集合



10

集合与元素的关系

- **隶属关系**

  属于∈，不属于 ∉

对某个集合A和元素a（也可以是集合）来说，

a属于集合A，记为$a \in A$

或者

a不属于集合A，记为$a \notin A$

两者必居其一且仅居其一

例2

$A=\{ x \mid x \in R \wedge x^2-1=0 \}$，$A=\{-1,1\}$

$1 \in A$，$2 \notin A$

集合与元素的关系

- **隶属关系的层次结构（树形结构）**

例 3

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

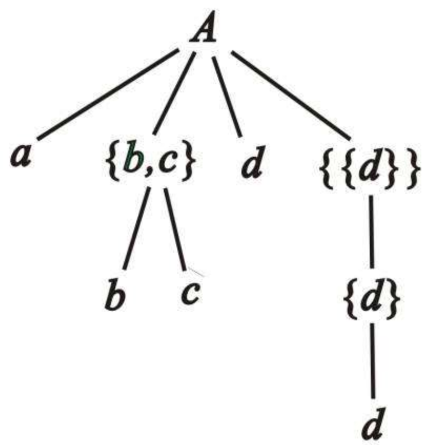
$\{b,c\} \in A$

$b \notin A$

$\{\{d\}\} \in A$

$\{d\} \notin A$

$d \in A$



集合与集合的关系

包含（子集） $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \rightarrow x\in B)$

不包含 $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

外延性定理：A = B当且仅当A与B具有相同的元素，否则，A≠B。

不相等 $A \neq B$

真包含 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含 $A \not\subset B$

思考： $\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

集合与集合的关系

空集 $\varnothing$ 不含任何元素的集合

实例 $\{x \mid x^2+1=0 \wedge x\in R\}$ 就是空集

定理 空集是任何集合的子集

$\varnothing\subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x\in\varnothing\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow T$

推论 空集是惟一的.

证 **全集** E

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\ (A\subseteq E)$

新疆大学信息科学与工程学院

集合与集合的关系

集合的三大特征

1、**互异性** - 集合中的元素都是不同的，凡是相同的元素，均视为同一个元素；

$$\{1,1,2\}=\{1,2\}$$

2、**确定性** - 能够明确加以“区分的”对象；

3、**无序性** - 集合中的元素是没有顺序的。

$$\{2,1\}=\{1,2\}$$

15

新疆大学信息科学与工程学院

集合与集合的关系

例4：设A = {BASIC, PASCAL, ADA}， B = {ADA, BASIC, PASCAL}，

请判断A和B的关系。

解：根据集合元素的无序性和外延性原理可得，

A = B。

因为集合A = B，所以B中的每个元素都是A中的元素，我们称集合A包含集合B。

16

集合与集合的关系

例5 设A = {BASIC, PASCAL, ADA},

B = {ADA, BASIC, PASCAL},

请判断A和B之间的包含关系。

解：根据集合的无序性和集合间包含关系的定义知

$A \supseteq B$ 且 $A \subseteq B$ 。

集合与集合的关系

例6 判断下列集合之间是否具有真包含关系。

(1) {a, b}和{a, b, c, d}；

(2) {a, b, c, d}和{a, b, c, d}。

解 根据真子集的定义，有

(1) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$；

(2) 因为 $\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$，

所以{a, b, c, d}不是{a, b, c, d} 的真子集。

集合与集合的关系

例7 设$A = \{a\}$是一个集合，$B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$，试问

$$\{A\}\in B\text{和}\{A\}\subseteq B$$

同时成立吗?

分析 $\because \{A\} = \{\{a\}\}$，$\{\{a\}\}\in B$

$\therefore \{A\}\in B$成立；

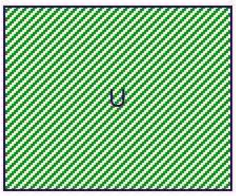
$\because \{A\} = \{\{a\}\}$，$\{a\}\in B$

$\therefore \{A\}\subseteq B$成立。

解：$\{A\}\in B$和$A\subseteq B$同时成立。

全集

- 在一个**相对固定的范围**内，**包含此范围内所有元素的集合**，称为**全集或论集**(Universal Set)，用U或E表示。
- 用文氏图描述如下:



例8

(1) 在立体几何中，全集是由空间的全体点组成；

(2) 在我国的人口普查中，全集是由我国所有人组成。

- 全集是相对唯一的

有限集和无限集

- 集合A中元素的数目称为集合A的**基数**（base number），记为|A|
- 如|A|是有限的，则称集合A为**有限集**，
- 如|A|是无限的，则称集合A为**无限集**。

例9 求下列集合的基数。

（1） A =Φ ; （2） B = {Φ};

（3） C = {a, b, c}; （4） D = {a, {b, c}}。

解 |A| = 0，|B| = 1，|C| = 3，|D| = 2。

m元子集

- **定义** 如果一个集合A含有n个元素，则称集合A为**n元集**，称A的含有m个(0≤m≤n)元素的子集为**A的m元子集**。
- 任给一个n元集，怎样求出它的全部m元子集?

例10 设A={1,2}，求出A的全部m元子集。

分析 ∵ n=|A| = 2，m≤n

∴ m=0,1,2。

∴ 当 m=0 时，得到0元子集：Φ;

当 m=1 时，得到1元子集：{1}, {2};

当 m=2 时，得到2元子集：{1, 2}。

解：A的全部m元子集是Φ、{1}、{2}和{1, 2}。

子集总数

一般来说，对于n元集A，它的m（0≤m≤n）元子集有C_n^m个，所以不同的子集总数有：

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

所以，n元集共有2^n个子集。

幂集

定义 设A为任意集合，把A的所有不同子集构成的集合叫做A的幂集(power set)，记为P(A)

其符号化表示为

$$P(A) = \{x \mid 一切 x \subseteq A\}$$

该集合又称为集族(family of set)。

对集族的研究在数学方面、知识库和表处理语言以及人工智能等方面都有十分重要的意义。

幂集

例11 计算（1）$P(\Phi)$；（2）$P(\{\Phi\})$；（3）$P(\{a,\{b,c\}\})$。

解

（1）$P(\Phi)=\{\Phi\}$;

（2）$P(\{\Phi\})=\{\Phi, \{\Phi\}\}$;

（3）$P(\{a,\{b,c\}\})=\{\Phi,\{a\},\{\{b,c\}\},\{a,\{b,c\}\}\}$。

显然，若集合 A 有 n 个元素，则集合 A 共有$2^{|A|}$个子集，即：

$|P(A)|=2^{|A|}$。

集合的运算

定义 设A、B是两个集合,

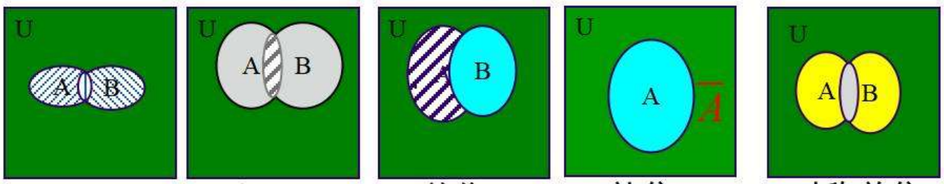
(1)并集 $A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$

(2)交集 $A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$

(3)差集 $A-B=\{x|x\in A且x\notin B\}$

(4)补集 $\overline{A}=U-A=\{x|x\in U且x\notin A\}(A',\sim A,A^C)$

(5)对称差集 $A\oplus B=\{x|(x\in A)且(x\notin B)或(x\in B)且(x\notin A)\}$



并集 交集 差集 补集 对称差集

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

推广

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n$$

$$=\{x \mid (x \in A_1)\text{或}(x \in A_2)\text{或}\ldots\ldots\text{或}(x \in A_n)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots \cap A_n$$

$$=\{x \mid (x \in A_1)\text{且}(x \in A_2)\text{且}\ldots\ldots\text{且}(x \in A_n)\}$$

当n无限增大时，可以记为：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

27

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

定理

1.等幂律: $A \cup A = A$；$A \cap A = A$；

2.交换律: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

3.结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

4.恒等律: $A \cup \Phi = A$；　$A \cap U = A$；

5.零　律: $A \cup U = U$；　$A \cap \Phi = \Phi$；

6.分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7.吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$;

28

定理

8. $A - A = \Phi$； 9. $A - B = A - (A \cap B)$；

10. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$；

11. $A \cup (B - A) = A \cup B$； 12. $A - B = A \cap \overline{B}$ ；

13. 否定律：$\overline{\overline{A}} = A$ ；

14. DeMorgan律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ；

15. 矛盾律： $A \cap \overline{A} = \Phi$；

16. 排中律：$A \cup \overline{A} = U$。

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

定理

DeMorgan律：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

分析

定理 设A、B是任意两个集合，则

$A \subseteq B$，$B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

(1) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

定理

① $\forall x \in \overline{A \bigcup B}$

$\Rightarrow \forall x \notin A \bigcup B$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

② $\forall x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$

$\Rightarrow x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$

$\Rightarrow \forall x \notin A \bigcup B$

$\Rightarrow x \in \overline{A \bigcup B}$

$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

- **由①、②知,** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

定理

(b) 在 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **中，用**$\overline{A}$**和**$\overline{B}$**分别取代A和B，则有**

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$$

$$\Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

集合包含或相等的证明方法

- **证明 $X \subseteq Y$**
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- **证明 $X=Y$**
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

集合包含或相等的证明方法

等式替换证明 $X=Y$，不断进行代入化简，最终得到两边相等

例 证明 $A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 （假设交换律、分配律、同一律、零律成立）

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合元素的计数：包含排斥原理

定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，$i=1, 2, \ldots, m$.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i \cap A_j \cap A_k|+\ldots \\
&+(-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

35

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合元素的计数：包含排斥原理

证明要点： 任何元素 x，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1，否则为 0

证 设 x不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$x \notin A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$

$x \notin A_i \cap A_j$, $1 \le i < j \le m$

…

$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$,

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

36

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合元素的计数：包含排斥原理

设 x 具有 n 条性质，$1 \le n \le m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m}|A_i|$ 贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

....

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 0$$

37

新疆大学信息科学与工程学院

新疆大学 Xinjiang University

集合元素的计数：包含排斥原理

推论：S中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| \\
&= \sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^{m-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

38

集合元素的计数：包含排斥原理

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解：$S=\{\, x \mid x\in \mathrm{Z},\ 1\le x \le 1000 \,\}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C:

$A=\{\, x \mid x\in S,\ 5 \mid x \,\}$,

$B=\{\, x \mid x\in S,\ 6 \mid x \,\}$,

$C=\{\, x \mid x\in S,\ 8 \mid x \,\}$

集合元素的计数：包含排斥原理

对上述子集计数:

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=133$,

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$, $|B\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

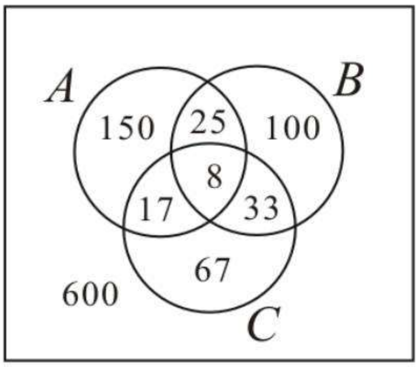
$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$,

代入公式

$N= 1000-(200+133+125)+(33+25+41)-8=600$

文氏图法

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?



集合元素的计数：包含排斥原理

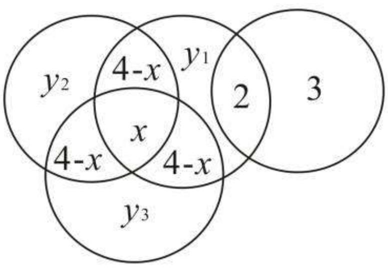
例3 24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13；日语：5；德语：10；法语：9

英日：2；英德：4；英法：4；法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$