习题一

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每题只有一个正确答案，答对一题得 2 分，共 20 分）

1.设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=m，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$=n，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于 【　　】

A.　m+n　　B.　$-$(m+n)　　C.　n$-$m　　D.　m$-$n

2.设矩阵 **A**=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^*$是 **A** 的伴随矩阵，则 $\mathbf{A}^*$中位于（1，2）的元素是【　　】

A.　–6　　B.　6　　C.　2　　D.　–2

3.设 **A** 是方阵，如有矩阵关系式 **AB=AC**，则必有【　　】

A.　**A** =**0**　　B.　**B**$\neq$**C** 时 **A=0**　　C.　**A**$\neq$**0** 时 **B=C**　　D.　|**A**|$\neq$**0** 时 **B=C**

4.已知 3×4 矩阵 **A** 的行向量组线性无关，则秩（$\mathbf{A}^T$）等于【　　】

A.　1　　B.　2　　C.　3　　D.　4

5.设矩阵 **A** 的秩为 r，则 **A** 中【　　】

A. 所有 r$-$1 阶子式都不为 0　　B. 所有 r$-$1 阶子式全为 0

C. 至少有一个 r 阶子式不等于 0　　D. 所有 r 阶子式都不为 0

6.设 **Ax=b** 是一非齐次线性方程组，η_1，η_2是其任意 2 个解，则下列结论错误的是【　　】

A.　$\eta_1+\eta_2$是 **Ax=0** 的一个解　　B.　$\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$是 **Ax=b** 的一个解

C.　$\eta_1-\eta_2$是 **Ax=0** 的一个解　　D.　$2\eta_1-\eta_2$是 **Ax=b** 的一个解

7.设 n 阶方阵 **A** 不可逆，则必有【　　】

A. 秩(**A**)<n　　B. 秩(**A**)=n$-$1　　C. **A=0**　　D. 方程组 **Ax=0** 只有零解

8. 设 A 是 n 阶方阵，则 A 能与 n 阶对角阵相似的充要条件是【　　】.

A.　A 是对角阵　　B.　A 有 n 个互不相同的特征向量

C.　A 有 n 个线性无关的特征向量　　D.　A 有 n 个互不相同的特征值

9.设 **A** 是正交矩阵，则下列结论错误的是【　　】

A.　$|\mathbf{A}|^2$必为 1　B. |**A**|必为 1　C.　$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$　D.　**A** 的行（列）向量组是正交单位向量组

10.设 **A** 是实对称矩阵，**C** 是实可逆矩阵，$\mathbf{B}=\mathbf{C}^T\mathbf{AC}$.则【　　】

A.　**A** 与 **B** 相似　　B.　**A** 与 **B** 不等价　C.　**A** 与 **B** 有相同的特征值　　D.　**A** 与 **B** 合同

二、填空题(本大题共 10 小题，每题 3 分,共 30 分。)

11. 行列式 D=$\begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ 1 & k+1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$中，k=_______时，D=0。

12.设矩阵 **A**=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}$等于_____________。

13.设 $\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{3\times3}$，$|\mathbf{A}|=2$，$\mathbf{A}_{ij}$ 表示$|\mathbf{A}|$中元素 a_{ij} 的代数余子式（i,j=1,2,3）,则

$(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$____________。

14. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价，其中 $\beta_1=(1,0,0,0)^T$，$\beta_2=(0,1,0,0)^T$，$\beta_3=(1,1,0,0)^T$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为_______。

15.设向量（2，−3，5）与向量（−4，6，a）线性相关，则 a=________。

16.设 **A** 是 3×4 矩阵，其秩为 3，若 η_1，η_2 为 **Ax=b** 的 2 个不同的解，则它的通解为_____。

17.设 **A** 是 m×n 矩阵，**A** 的秩为 r(<n)，则 **Ax=0** 的一个基础解系中含有解的个数为_____。

18.设向量 α、β 都是单位向量，则向量 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的内积（$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$）=______。

19.设 3 阶矩阵 A 的行列式$|\mathbf{A}|=8$，已知 **A** 有 2 个特征值−1 和 4，则另一特征值为_____。

20.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 10 & 6\\ 1 & -3 & -3\\ -2 & 10 & 8\end{pmatrix}$，已知 $\alpha=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$是它的一个特征向量，则 α 所对应的特征值为____。

三、计算题（本大题共 4 小题，共 42 分）

21.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，求 $\left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}$。（8 分）

22.设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，求矩阵 **B** 使其满足矩阵方程 **AB**=**A**+2**B**。（8 分）

23.求方程组 $\begin{cases}x_1 \quad\quad\; + x_3 = -3\\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4\\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -1\end{cases}$ 的通解。（12 分）

24.设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，求正交变换 X=PY 化该二次型为标准形。（14 分）

四、证明题：

25. 设 η_0 是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ_1，ξ_2 是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.试证明：η_0，$\eta_0+\xi_1$，$\eta_0+\xi_2$ 线性无关。(8 分)

26. 已知 A 为 m×n 实矩阵，证明：A^TA 是正定矩阵的充分必要条件为 秩（A）=n。(8 分)

习题二

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每题只有一个正确答案，答对一题得 2 分，共 20 分）

1．设 A 是 4 阶矩阵，则$|-A|$=【　　】

A．$-4|A|$　　B．$-|A|$　　C．$|A|$　　D．$4|A|$

2．设 A 为 n 阶可逆矩阵，下列运算中正确的是【　　】

A．$(2A)^T=2A^T$　　B．$(3A)^{-1}=3A^{-1}$　　C．$[(A^T)^T]^{-1}=[(A^{-1})^{-1}]^T$　　D．$(A^T)^{-1}=A$

3．设 2 阶方阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，则 A=【　　】

A．$\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

4．设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则下列向量组线性无关的是【　　】

A．α_1，α_2，$\alpha_1+\alpha_2$　　B．α_1，α_2，$\alpha_1-\alpha_2$

C．$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$　D．$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$

5．向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,0,1)$，下列向量中可以由 α_1，α_2 线性表出的是【　　】

A．（2，0，0）　B．（−3，2，4）　C．（1，1，0）　D．（0，−1，0）

6．设 A，B 均为 3 阶矩阵，若 A 可逆，秩（B）=2，那么秩（AB）=【　　】

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7．设 A 为 n 阶矩阵，若 A 与 n 阶单位矩阵等价，那么方程组 Ax=b【　　】

A．无解　　B．有唯一解　　C．有无穷多解　　D．解的情况不能确定

8．在 R^3 中，与向量 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,1)$ 都正交的单位向量是【　　】

A．（−1，0，1）　B．$\frac{1}{\sqrt{2}}$（−1，0，1）　C．（1，0，−1）　D．$\frac{1}{\sqrt{2}}$（1，0，1）

9．下列矩阵中，为正定矩阵的是【　　】

A.$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

10．已知 A 是 n 阶实对称矩阵，$A^2=A$，秩（A）=n，则 x^TAx 是【　　】

A．正定二次型　　B．负定二次型　　C．既不正定也不负定　　D．无法判断

二、填空题（本大题共 10 小题，每题 3 分，共 30 分。）

11．行列式 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$=__________。

12．设行矩阵 A=（$a_1\ a_2\ a_3$）,B=（$b_1\ b_2\ b_3$）,且 $A^TB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，则 AB^T=____________。

13．设 A 为 3 阶方阵,且|A|=$\frac{1}{2}$,则|2A^*|=____________。

14．当向量组 α_1=(1，2，3)，α_2=(2，2，2)，α_3=(3，0，t) 线性相关时， t=__________。

15． 若 3 元齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系含 2 个解向量,则矩阵 A 的秩等于_________。

16．矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$的秩等于_________。

17．设α_1，α_2是非齐次线性方程组 Ax=b 的解，又已知 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是 Ax=b 的解，则 k_1+k_2=_____。

18． 已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}$,其中 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的属于特征值$\lambda=-1$的特征向量是_____。

19．设 A 为 n 阶方阵，已知矩阵 E-A 不可逆，那么矩阵 A 必有一个特征值为_________。

20．实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$所对应的二次型 x^TAx=____________________________。

三、计算题（本大题共 4 小题，共计 42 分）

21. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 AB=A+2B，求 B。（8 分）

22. 设向量$\alpha_1=(1,2,1)^T$和$\alpha_2=(1,1,2)^T$都是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值λ＝2 的特征向量，又向量$\beta=\alpha_1+2\alpha_2$，求$A^2\beta$。(8 分)

23. 给定向量组$\alpha_1=(-2,1,0,3)^T$，$\alpha_2=(1,-3,2,4)^T$，$\alpha_3=(3,0,2,-1)^T$，$\alpha_4=(0,-1,4,9)^T$.

试判断α_4是否为α_1，α_2，α_3的线性组合；若是，则求出组合系数。(12 分)

24. 设已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。（14 分）

四、证明题

25. 设η_0是非齐次线性方程组 **Ax=b** 的一个特解，ξ_1，ξ_2，⋯，ξ_r是其导出组 **Ax=0** 的一个基础解系.

试证明：η_0，$\eta_0+\xi_1$，$\eta_0+\xi_2$，⋯，$\eta_0+\xi_r$线性无关。(8 分)

26. 已知 A 为 m×n 实矩阵，证明：A^TA 是正定矩阵的充分必要条件为 秩（A）=n。

习题三：

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。）

1．设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|-A|=$【　　】

A．-6　　B．-2　　C．2　　D．6

2．设 A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则 A 的伴随矩阵 A*=【　　】

A．$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} -d & c \\ b & -a \end{bmatrix}$　　C．$\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

3．A 是 n 阶方阵，且 A 的第一行可由其余 n-1 个行向量线性表示，
则下列结论中错误的是【　　】

A．r(A)≤n-1　　B．A 有一个列向量可由其余列向量线性表示

C．|A|=0　　D．A 的 n-1 阶余子式全为零

4．设 A 为 n 阶方阵，AB=0，且 B≠0，则【　　】

A．A 的列向量组线性无关　　B．A=0

C．A 的列向量组线性相关　　D．A 的行向量组线性无关

5．设 α_1、α_2 是非齐次线性方程组 Ax=b 的解，β 是对应齐次线性方程组 Ax=0 的解，则 Ax=b 必有一个解是【　　】

A． $\alpha_1+\alpha_2$　**B．** $\alpha_1-\alpha_2$　　**C．** $\beta+\alpha_1+\alpha_2$　**D．** $\beta+\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2$

6．设齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系含有一个解向量，当 A 是 3 阶方阵时，【　　】

A．r(A)=0　　B．r(A)=1　　C．r(A)=2　　D．r(A)=3

7．设 A 与 B 等价，则【　　】

A．A 与 B 合同　　B．A 与 B 相似　C．|A|=|B|　　D．r(A)=r(B)

8．已知 A 相似于∧=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则|A|=【　　】

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．2

9．设 λ_0 是可逆阵 A 的一个特征值，则 A^{-2} 必有一个特征值是【　　】

A．$\frac{\lambda_0}{2}$　　B．$\frac{1}{2\lambda_0}$　　C．$\frac{1}{\lambda_0^2}$　　D．$\frac{2}{\lambda_0}$

10．设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1，0，-1，则【　　】

A．|A|≠0　　B．|A|=0　　C．A 负定　　D．A 正定

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。）

1．按自然数从小到大为标准次序，则排列 54123 的逆序数=__________。

2. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$=____________。　　　3. 设 A=$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 A^{-1}=_________。

4．设α_1=（1，2，4），α_2=(−1, −2, y) 且α_1与α_2线性相关，则 y=_________。

5．若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,且可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，则 s _____t。（填≥或≤）

6．若 A 是秩为 1 的三阶方阵，η_1,η_2,η_3是 Ax=b 的解，且$\eta_1-\eta_2$与$\eta_2-\eta_3$无关，

则 Ax=b 的通解可表示为 x=_________。

7．已知 A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$与 B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则 x=_________。

8．若向量α=（1，−2，1）与β=（2，3，t）正交，则 t =_________。

9．已知三阶实对称矩阵A有三个特征值 2, 1, −2, B=A^2+2E，则B的特征值是_______。

10．二次型f(x_1，x_2，x_3，x_4)=$x_1^2+x_1x_2+3x_1x_4-5x_4^2$的对称矩阵是_______。

三、计算题　(本大题共 50 分)

1．设 A=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$且 AB=A+2B，求 B。（10 分）

2．讨论 p 取何值时，下列线性方程组无解？有解？并在有解时求其通解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=p \end{cases}$$（14 分）

3．已知 A=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$的一个特征向量是$\zeta$= (1，1，−1)^T，确定 a,b 以及$\zeta$的特征值。

（10 分）

4．用正交变换化二次型 f(x_1，x_2，x_3)=$2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$为标准型，并写出所用的正交变换。（16 分）

四、证明题

1．设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$，α_3也线性无关。

2．设 A 与 B 都是 n 阶正定矩阵，证明：A+B 也是正定矩阵。

习题四：

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。）

1．二阶行列式$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}$≠0 的充分必要条件是【　　】

A．k≠－1　　B．k≠3　　C．k≠－1 且 k≠3　　D．k≠－1 或≠3

2．设 A 为三阶矩阵，|A|=a≠0，则其伴随矩阵 A^*的行列式$|A^*|$=【　　】

A．a　　B．a^2　　C．a^3　　D．a^4

3．设 A、B 为同阶可逆矩阵，则以下结论正确的是【　　】

A．|AB|=|BA|　　B．|A+B|=|A|+|B|

C．$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　D．$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

4．设 A 可逆，则下列说法错误的是【　　】

A．存在 B 使 AB=E　　B．|A|≠0

C．A 相似于对角阵　　D．A 的 n 个列向量线性无关

5．矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$的逆矩阵的【　　】

A．$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　　C．$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

6．已知 A 的一个 k 阶子式不等于 0，则秩(A)满足【　　】.

A．秩(A)>k　　B．秩(A)≥k　　C．秩(A)=k　　D．秩(A)≤k

7．设α_1，α_2是非齐次方程组 Ax=b 的解，β 是对应的齐次方程组 Ax=0 的解，

则 Ax=b 必有一个解是【　　】

A．$\alpha_1+\alpha_2$　　B．$\alpha_1-\alpha_2$　　C．$\beta+\alpha_1+\alpha_2$　　D．$\beta+\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2$

8．若 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$相似，则 x=【　　】

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

9．若 A 相似于$\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，则|A－E|=【　　】

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

10．设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1，0，－1，则【　　】

A．|A|≠0　　B．|A|=0　　C．A 负定　　D．A 正定

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。）

11．设 A，B 均为三阶可逆阵，$|A|=2$，则$|2B^{-1}A^2B|=$________。

12．在五阶行列式中，项$a_{21}a_{32}a_{45}a_{14}a_{53}$的符号为________。

13．向量空间 $V=\{ x=(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2$ 为实数 $\}$的维数为______________。

14．设三阶方阵A等价于$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则R（A）=____________。

15．设$\alpha_1=[1，2，x]$，$\alpha_2=[-2，-4，1]$线性相关，则 x=________。

16．矩阵$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1 \quad -1 \quad 1]$的秩为____________。

17．设λ_0是可逆阵 A 的一个特征值，则 A^{-2}必有一个特征值是____________。

18．已知齐次方程组 $A_{4\times5}x=0$ 的基础解系含有 2 个向量，则 A 的秩=_________。

19．若向量$\alpha=（1，-2，1）$与$\beta=（2，3，t）$正交，则 t =__________。

20．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+x_2x_3$的矩阵是__________。

三、计算题 (本大题共 50 分)

1．设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，求$(A+2E)^{-1}(A^2-4E)$。(10 分)

2．讨论 a 为何值时下列方程组无解？有无穷解？并在有解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=a \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4=1 \end{cases}$$ （14 分）

3．设 $A=\begin{bmatrix} x & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值是$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$。

（1）求 x 的值；（2）A 是否相似于对角阵，为什么？（10 分）

4．用正交变换化二次型 $f(x_1，x_2，x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$为标准型，

并写出所用的正交变换。(16 分)

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1．设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$，α_3也线性无关。

2．设 A 与 B 都是 n 阶正定矩阵，证明：A+B 也是正定矩阵。

习题一：

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1.D	2.B	3.D	4.C	5.C
6.A	7.A	8.C	9.B	10.D

原方程组的一个特解为 η_0=（-3，-2，0）^{T}，

对应的齐次线性方程组的基础解系为 ξ_1=（-1，2，1）^{T}-----------------10 分

原方程组的通解为 $\eta=\eta_0+k\xi_1$， k 是任意的数。------------------------- 12 分

二、填空题（本大题共 10 空，每空 3 分，共 30 分）

11. -2,或 1

12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

13. 4

14. 2

15. -10

16. $\eta_1+c(\eta_2-\eta_1)$（或 $\eta_2+c(\eta_2-\eta_1)$），c 为任意常数，或 $c_1\eta_1+c_2\eta_2$，$c_1+c_2=1$

17. $n-r$

18. 0

19. -2

20. 1

三、计算题（本大题共 4 小题，共 42 分）

21. 解：因为 $AA^*=|A|E=18E$----------------------------4 分

所以 $\left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}=\frac{1}{18}\mathbf{A}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$------------------8 分

22. 解：$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$ 即（$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$）$\mathbf{B}=\mathbf{A}$，-------------------------2 分

而（$\mathbf{A}-2\mathbf{E}$）$^{-1}$=$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.---------------------6 分

所以 $\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.----------8 分

23. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$-------------------------4 分

24. 解：该二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，-------------------3 分

它的特征值为 2，5，1； 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$-----------------6 分

所以，正交变换 $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}Y$-----------------------------12 分

该二次型的标准形为 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$。----------------------------14 分

四、证明题（本大题共 2 小题，根据学时选一题，各 8 分）

25．证明：由假设 $\mathbf{A}\eta_0=\mathbf{b}$，$\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}\xi_2=\mathbf{0}$.

（1）$\mathbf{A}\eta_1=\mathbf{A}(\eta_0+\xi_1)=\mathbf{A}\eta_0+\mathbf{A}\xi_1=\mathbf{b}$，同理 $\mathbf{A}\eta_2=\mathbf{b}$，

所以 η_1，η_2 是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的 2 个解。------------------------------2 分

（2）考虑 $l_0\eta_0+l_1\eta_1+l_2\eta_2=\mathbf{0}$，

即 $(l_0+l_1+l_2)\eta_0+l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$. --------------------------------4 分

则 $l_0+l_1+l_2=0$，否则 η_0 将是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，矛盾。

所以 $l_1\xi_1+l_2\xi_2=\mathbf{0}$.---6 分

又由假设，ξ_1，ξ_2 线性无关，所以 $l_1=0$，$l_2=0$，从而 $l_0=0$.

所以 η_0，η_1，η_2 线性无关。----------------------------------8 分

26. 证明：必要性：已知 A^TA 正定， $|A^TA|>0$，则秩（A^TA）=n

因为秩（A）=秩（A^TA）

所以秩（A）=n。---4 分

充分性：因为秩（A）=n，对任意 $x\in R^n$，当 $x\neq 0$ 时，$Ax\neq 0$

此时，$[Ax，Ax]=xA^TAx>0$，即二次型 $f=xA^TAx$ 是正定的

二次型 f 的矩阵 A^TA 是正定的。---------------------------------4 分

习题二：

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

1.C	2.A	3.B	4.D	5.A
6.C	7.B	8.B	9.C	10.A

二、填空题（本大题共 10 空，每空 3 分，共 30 分）

11. 4	12. 0	13. 2
14 −3	15. 1	16. 3
17. 1	18. $(1, 1, 2)^T$	19. 1

20. $x_1^2+5x_3^2+4x_1x_2+6x_2x_3$

三、计算题（本大题共 4 小题，共 42 分）

三、计算题（本大题共 4 小题，共 42 分）

21. 解：$AB = A+2B \quad \Rightarrow \quad (A-2E)B = A$ -------------------2 分

令 $C = A-2E$，则 $|C| = -1$，故 $C = A-2E$ 可逆

且利用 $C^{-1} = \frac{1}{|C|}C^*$ 或初等变换可求得 $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$---------------6 分

从而 $B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$---------------8 分

22. 解：由题设得，$A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$-----------------------2 分

$A^2\beta = A^2(\alpha_1+2\alpha_2) = A^2\alpha_1 + 2A^2\alpha_2=4\alpha_1+8\alpha_2$------------6 分

将 $\alpha_1 = (1,2,1)^T$ 和 $\alpha_2 = (1,1,2)^T$ 代入，得 $A^2\beta$ =（12，16，20）^{T}---------8 分

23. 解一：$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,-----------------8 分

所以 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，组合系数为（2，1，1）.----------------12 分

解二：考虑 $\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，

即 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$

方程组有唯一解（2，1，1）^{T}，-----------------10 分

组合系数为（2，1，1）. ---------12 分

24. 解：$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值为 2，5，1。-----------------3 分

相应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。---------9 分

所以，正交变换 P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，--------------------12 分

证明：必要性：已知 A^TA 正定， $|A^TA|>0$，则秩（A^TA）=n

因为秩（A）=秩（A^TA）

所以秩（A）=n。---4 分

充分性：因为秩（A）=n，对任意 $x\in R^n$，当 $x\neq 0$ 时，$Ax\neq 0$

此时，[Ax，Ax]=$xA^TAx>0$，即二次型 $f=xA^TAx$ 是正定的

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ---------------------------14 分

四、证明题（本大题共 2 小题，根据学时选一题，各 8 分）

25. 证明：考虑 $l_0\eta_0+l_1(\eta_0+\xi_1)+\cdots+l_r(\eta_0+\xi_r)=\mathbf{0}$，

即 $(l_0+l_1+\cdots+l_r)\eta_0+l_1\xi_1+\cdots+l_r\xi_r=\mathbf{0}$.-------------2 分

则 $l_0+l_1+\cdots+l_r=0$，否则 η_0 将是 $\mathbf{Ax=0}$ 的解，矛盾。

所以 $l_1\xi_1+\cdots+l_r\xi_r=\mathbf{0}$. -----------------------------------5 分

又由假设，ξ_1，…，ξ_r 线性无关，

所以 $l_1=0$，…，$l_r=0$，从而 $l_0=0$.

所以 η_0，$\eta_0+\xi_1$，$\eta_0+\xi_2$，…，$\eta_0+\xi_r$ 线性无关。----------8 分

26. 证明：必要性：已知 A^TA 正定， $|A^TA|>0$，则秩（A^TA）=n

因为秩（A）=秩（A^TA）

所以秩（A）=n。---4 分

充分性：因为秩（A）=n，对任意 $x\in R^n$，当 $x\neq 0$ 时，$Ax\neq 0$

此时，[Ax，Ax]=$xA^TAx>0$，即二次型 $f=xA^TAx$ 是正定的

二次型 f 的矩阵 A^TA 是正定的。--------------------------------8 分

习题三

一、单项选择题（每题只有一个正确答案，答对一题得 2 分，共 20 分）

(1) B　(2) A　(3) D　(4) C　(5)　D　(6) C　(7) D　(8)A　(9)C　(10) B

二、填空题(每题 2 分,共 20 分)

(1) 7　　(2) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$　　(3) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) —4　　(5) ⩽

（6）$k_1(\eta_1 - \eta_2) + k_2(\eta_2 - \eta_3)$　(7) -1　(8) 4　(9) 6,3,6　(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

三、计算题

1．解 (1) AB-2B=A → (A-2E)B=A → B=(A-2E)$^{-1}$ A　　(2 分)

(2)　$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,　$(A-2E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(6分)

（3）$B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.　(10分)

2.解：

$$(1)(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-5 \end{pmatrix} \quad (4分)$$

（2）p=2 时方程组有解，p≠2 时方程组无解。　(8 分)

$$(A,b) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)　p=2 时，

Ax=0 的基础解系：$\xi_1 = (1,-2,1,0,0)^T$，　$\xi_2 = (1,-2,0,1,0)^T$，　$\xi_3 = (1,-6,0,0,1)^T$

原方程的一个特解：$\eta = (2,-3,0,0,0)^T$.

线性方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \eta$, k_1，k_2，k_3 为常数。　(14 分)

3.解：设 A 的关于 ζ 的特征值为 λ，则 Aζ = λ ζ.　(3 分)

$$A\zeta=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\1+b\end{pmatrix}=\lambda\zeta=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix},$$ (6 分)

解得 $\lambda=-1$, $a=-3$, $b=0$. (10 分)

4. 解：(1) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ （2 分）

（2）$|A-\lambda E|=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)$，A 的特征值为 2，1，5。 （5 分）

（3） 与 2 对应的特征向量为 $k(1,0,0)^T$ （7 分）

与 1 对应的特征向量为 $k(0,1,-1)^T$ （9 分）

与 5 对应的特征向量为 $k(0,1,1,)^T$ k 不等于 0 （11 分）

（4）正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ ， $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ ………………………（14 分）

（5）设 $X=PY$，则它是一个正交变换且 $f(x_1,x_2,x_3)\overset{X=PY}{=}2{y_1}^2+{y_2}^2+5{y_3}^2$（16 分）

四．1.证明:

(1)设 k_1, k_2, k_3 为常数，$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3\alpha_3=0$. (2 分)

(2) 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关和 $(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 得 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2=0\\k_3=0\end{cases}$ (3 分)

即 $k_1=k_2=k_3=0$, $\therefore\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

2.证明:∵A, B 正定, 即 A, B 都为对称阵. $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$, 即 A+B 也是对称阵. (2 分)

任意的 $\mathbf{x}\neq0$,有 $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}>0$ 和 $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}>0$, 则有 $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}>0$. (3 分)

∴A+B 也是正定矩阵.

习题四：

一、单项选择题（每题只有一个正确答案，答对一题得 **2** 分，共 **20** 分）

(1) C (2) B (3) A (4) C (5) A

(6) B (7) D (8) B (9) B (10) B

二、填空题(每题 **2** 分,共 **20** 分)

(11) 32 (12) 正号 (3) 2 (14) 2 (15) $-\frac{1}{2}$

(16) 1 (17) $\frac{1}{\lambda_0^2}$ (18) 3 (19) 4

(20) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

三．计算题 **(本大题共 50 分)**

1. A+2E=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2 分)， $(A+2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4 分), $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

A^2-4E=$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (6 分), $(A+2E)^{-1}(A^2-4E)=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (10 分)。

2. 解 （A,b）= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & a \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$ （4 分）

故 (1) 当 $a\neq 3$ 时，R(A)=2<R(A,b)=3 , 此方程组无解。 （7 分）

（2）当 a=3 时， R(A)= R(A,b)=2, 此方程组有无穷多解。 （10 分）

于是取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

所求通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ （14 分）

3. 解 由已知条件可得 x+3+3=2+2+4$\Rightarrow$ x=2 （4 分）

故 A=$\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&3&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$, A-2E=$\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$，由 R(A-2E)=2 （7 分）

可知方程组(A-2E)x=0 基础解系只含一个解向量， 即 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 这个特征值只有一个无关的特征向量，故 A 不能相似与对角矩阵。（10 分）

4. 解：（1） $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ （2 分）

（2）$|A-\lambda E|=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5)$，A 的特征值为 2，1，5。 （5 分）

（3） 与 2 对应的特征向量为 k（1，0，0）^{T} （7 分）

与 1 对应的特征向量为 k（0，1，-1）^{T} （9 分）

与 5 对应的特征向量为 k（0，1，1，）^{T} k 不等于 0 （11 分）

（4）正交矩阵 P=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ ……………………（14 分）

（5）设 $X=PY$，则它是一个正交变换且 $f(x_1,x_2,x_3)\overset{X=PY}{=}2{y_1}^2+{y_2}^2+5{y_3}^2$ （16 分）

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1.证明:

(1)设 k_1, k_2, k_3 为常数，$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+k_3\alpha_3=0$. (2 分)

(2) 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关和 $(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 得 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2=0\\k_3=0\end{cases}$ (5 分)

即 $k_1=k_2=k_3=0$，$\therefore \alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

2. 证明:∵A, B 正定, 即 A, B 都为对称阵. $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$, 即 A+B 也是对称阵. （2 分）

任意的 $\mathbf{x}\neq0$,有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}>0$ 和 $\mathbf{x}^TB\mathbf{x}>0$, 则有 $\mathbf{x}^T(A+B)\mathbf{x}=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}+\mathbf{x}^TB\mathbf{x}>0$. (5 分)

∴A+B 也是正定矩阵.