第一篇 力学

研究对象：**物质的机械运动**

第一章

质点的运动

1 1.1 质点运动学

2 1.2 质点动力学

3 1.3 动量及机械能守恒定律

我们正青春年少

质点运动学主要研究质点的运动规律。

涵盖两类问题：

第一类求导问题；第二类积分问题。

墨子 （公元前468-376年）

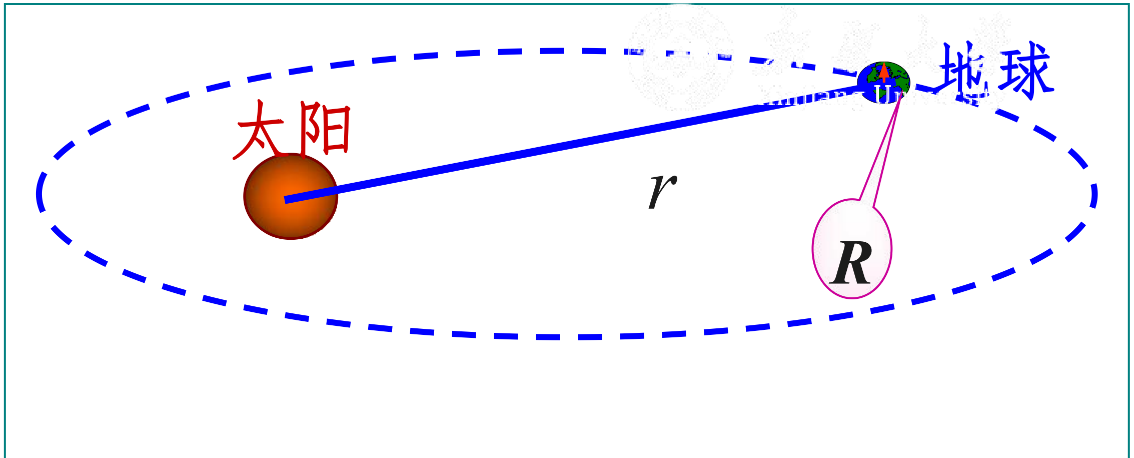
亚里士多德（公元前384-322年）

一、质点

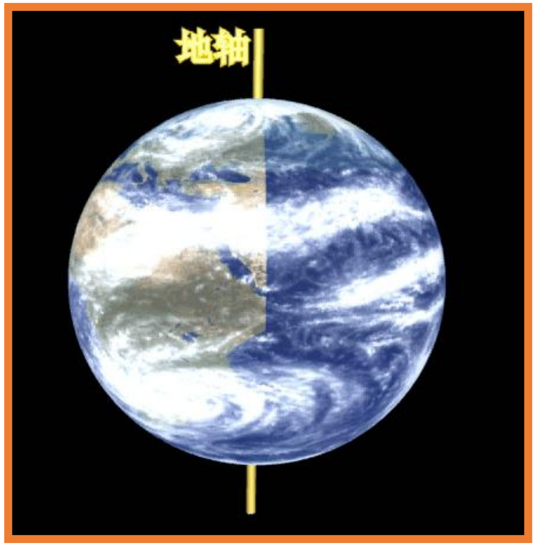
（1）物体能否被抽象为质点，视**具体情况**而定；

a. 物体的**线度和形状**在所研究问题中可以忽略不计

b. 物体在运动过程中只做平动



地球绕太阳公转



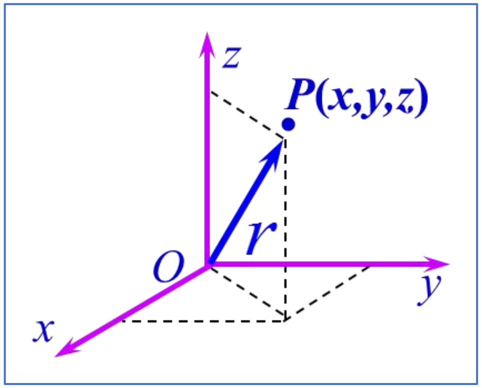
（2）质点是只有质量没有形状和大小的**理想化模型**。

二、参考系

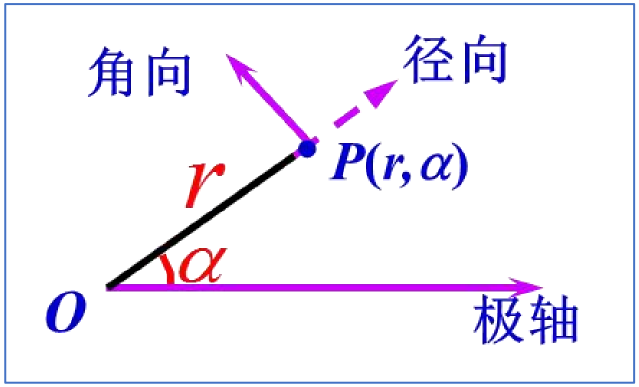
物体的运动具有相对性——→ 参考系（选择是任意的）

三、坐标系

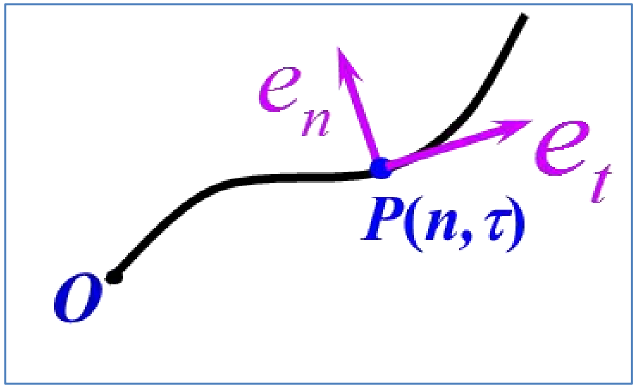
物体的运动具有独立性——→ 坐标系（参考系的数学抽象）



直角坐标系



极坐标系



自然坐标系

多选题 10分

设置

描述质点运动状态的物理量都有哪些?

A 位置矢量

B 位移

C 速度

D 加速度

提交

多选题 10分

设置

描述质点运动状态变化的物理量都有哪些?

A 位置矢量

B 位移

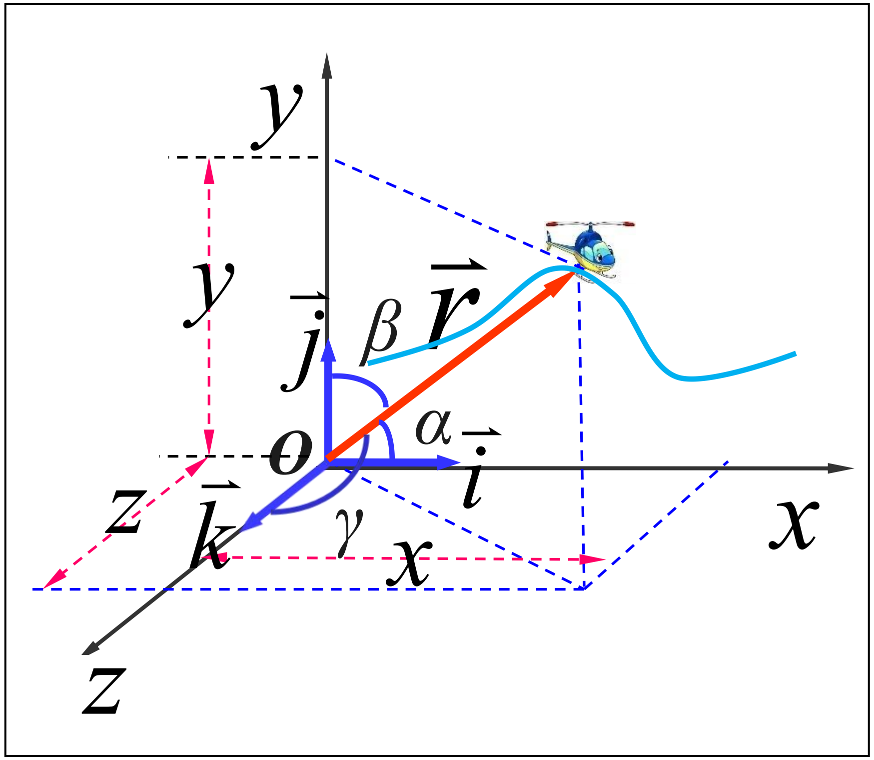
C 速度

D 加速度

提交

一、位置矢量

位置矢量是描述质点相对位置的物理量，简称位矢。



直角坐标系中：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

单位矢量： $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{r}$ 大小：$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向：$\cos\alpha = \frac{x}{r}$　$\cos\beta = \frac{y}{r}$　$\cos\gamma = \frac{z}{r}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

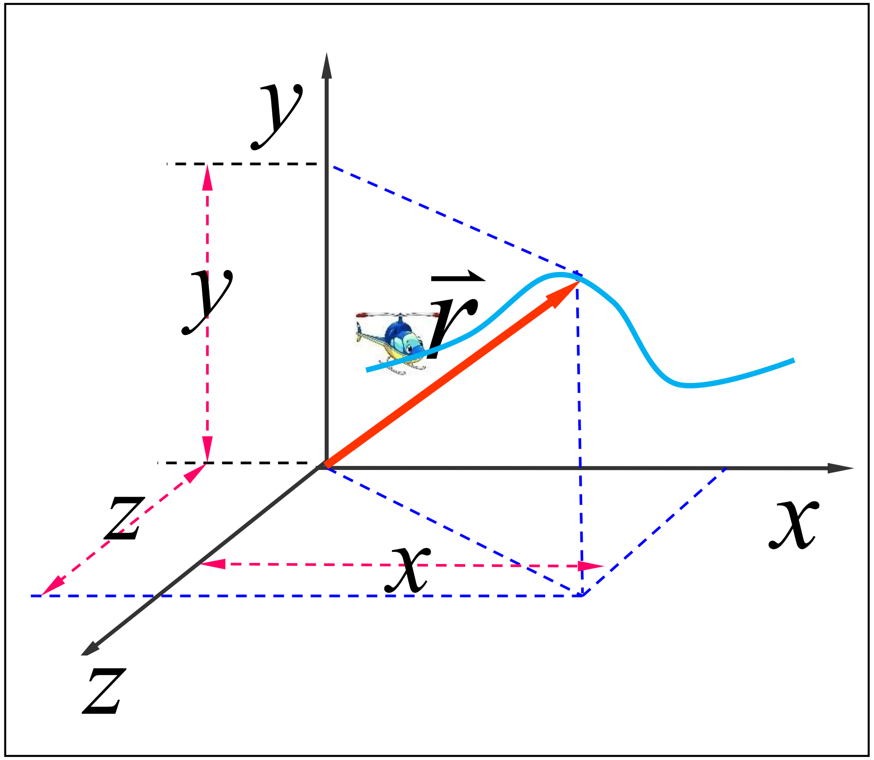
我们正青春年少

二、运动方程和轨迹方程

（1）运动方程

质点运动时位置随时间变化的规律。

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



（2）轨迹方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{消去参数 } t} f(x, y, z) = 0$$

例 一质点作匀速圆周运动，圆周半径为r, 角速度ω, 试分别写出直角坐标中的质点**运动方程的分量式、矢量式及轨迹方程。**

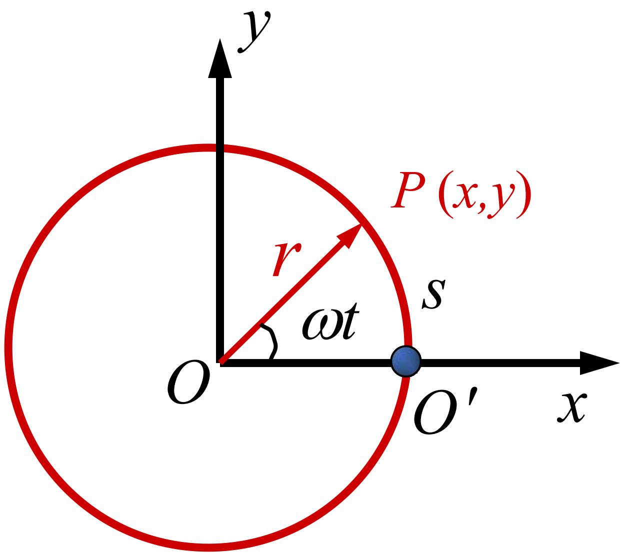
解:

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$= r\cos\omega t\vec{i} + r\sin\omega t\vec{j}$$

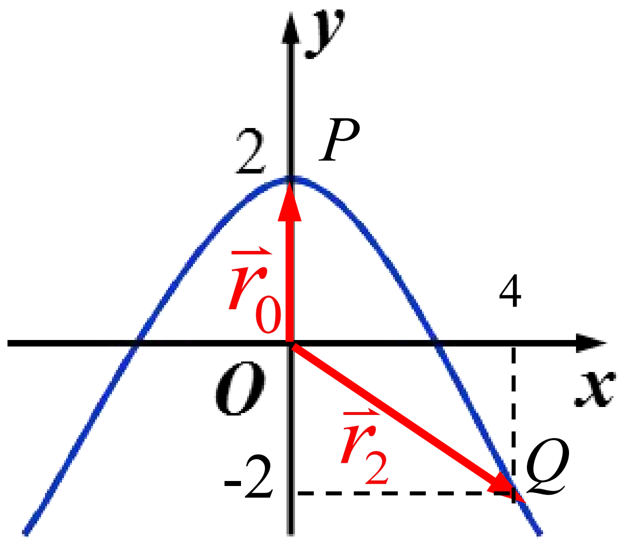
轨迹方程： $x^2 + y^2 = r^2$



例 已知质点的运动方程：$\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ (SI)，求：(1)该质点的**轨迹方程**；(2) $t=0$ 及 $t=2\text{s}$ 时质点的**位置矢量**。

解：(1) 轨迹方程

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消}\,t} y=2-\frac{x^2}{4}$$



(2) 位置矢量

$t=0\text{s}$ 时, $x=0$, $y=2$

$$\vec{r}_0=2\vec{j}$$

$t=2\text{s}$ 时, $x=4$, $y=-2$ $\quad \vec{r}_2=4\vec{i}-2\vec{j}$

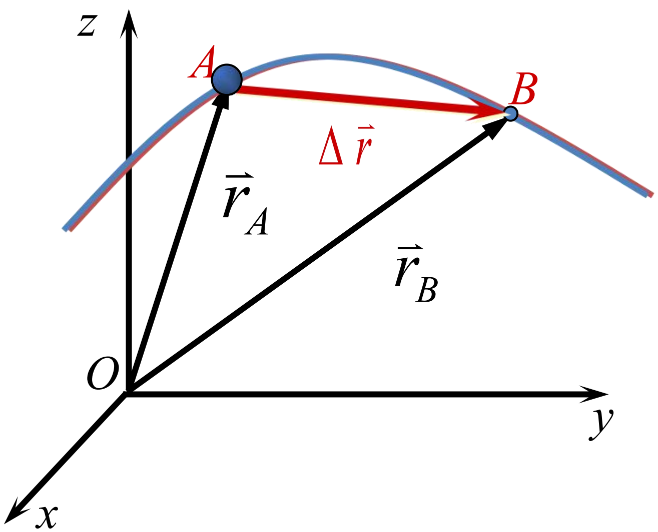
三、位移和路程

（1）位移： 描述质点相对位置变化的物理量，表示为 $\Delta\vec{r}$。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$$ 即A到B的**有向线段**

在直角坐标系中：

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$



大小： $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

方向： $A \to B$

注意： 1）位移是矢量，遵循矢量合成法则；

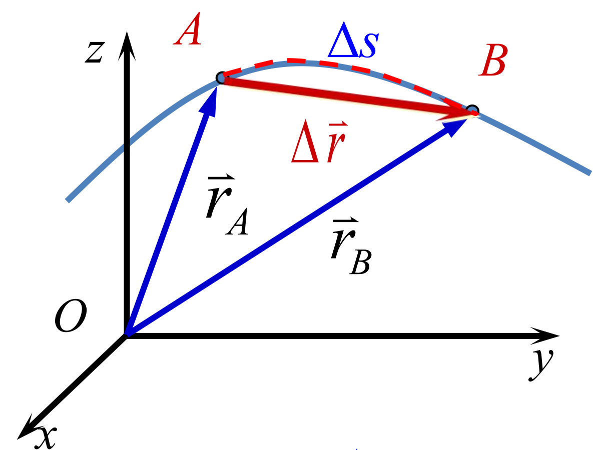
2）位移与实际经过路径不同。

三、位移和路程

（2）**路程：** 质点沿任意曲线走过的轨迹的长度，用ΔS 表示。

讨论：

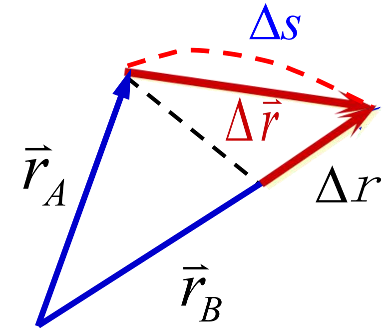
$$\Delta s \neq |\Delta\vec{r}| \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\Delta S = \lim_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}|$$



$$\Rightarrow \quad ds = |d\vec{r}|$$

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$$

$$\Delta r = |\vec{r}_B| - |\vec{r}_A| = r_B - r_A$$



则： $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$

四、速度

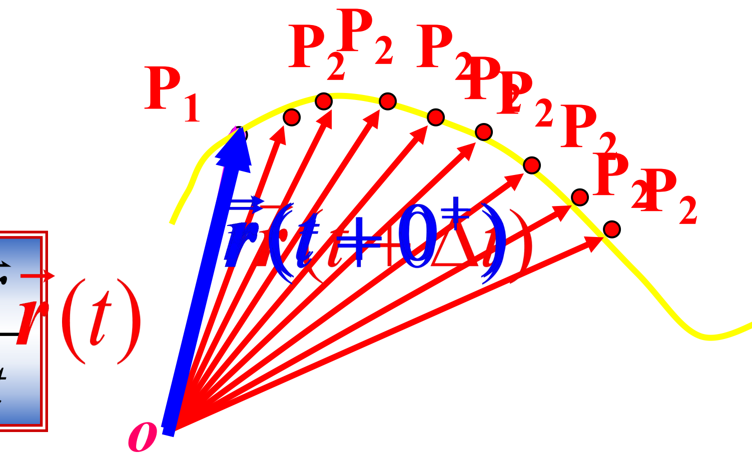
速度是描述质点运动快慢和方向的物理量。（矢量）

(1) 平均速度：

$$\boxed{\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$

(2) 瞬时速度：

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$



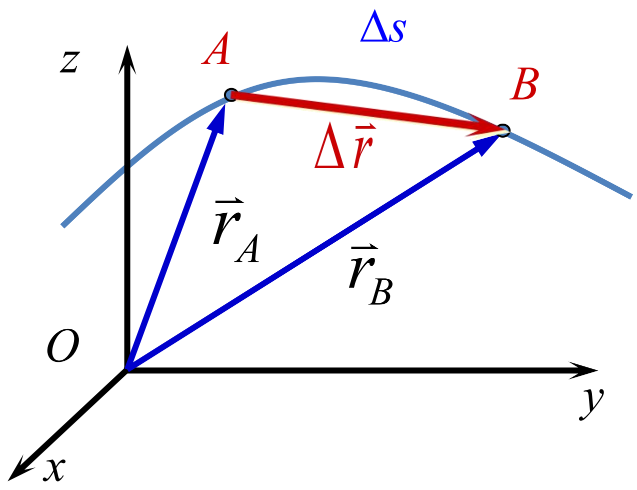
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

速度的大小： $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

速度的方向： 轨道上质点所在处的切线方向。

四、速度

(3) 平均速率： $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$



(4) 瞬时速率： $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

讨论：

(1) 因 $\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s$ 则 $\left|\bar{\vec{v}}\right| \neq \bar{v}$，而 $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$ 则 $\left|\vec{v}\right| = v$

(2) 因 $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \neq \mathrm{d}r$ 则 $v = \left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r$

单选题 10分

设置

一运动质点在某瞬时位于矢径$r(x,y)$的端点处，其速度大小为

A $\dfrac{dr}{dt}$

B $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

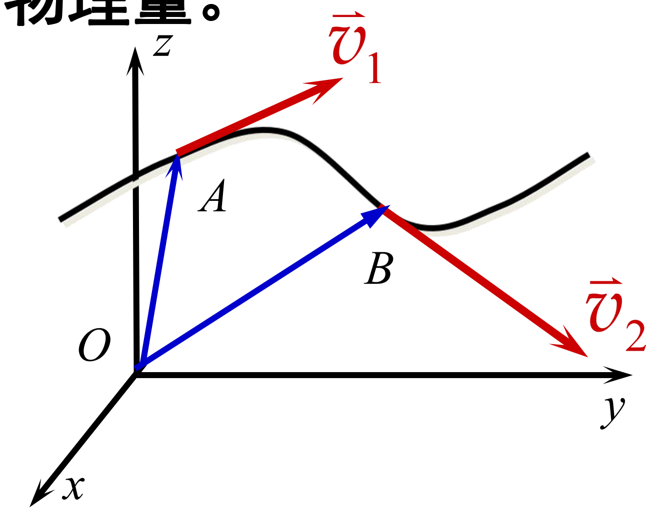
C $\dfrac{d\left|\vec{r}\right|}{dt}$

D $\sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2}$

提交

五、加速度

加速度是描述质点**运动状态变化**的物理量。



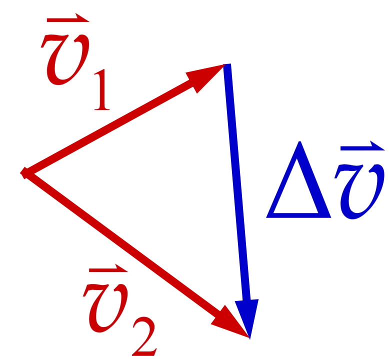
(1) 平均加速度：

$$\boxed{\overline{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

(2) 瞬时加速度：

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$



大小： $a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt}$

方向： 同$d\vec{v}$ **速度增量的极限方向**

例 已知一质点的运动方程：$\vec{r}=5t\vec{i}+(15t-5t^2)\vec{j}$ (SI)

求：质点的**轨迹方程、速度和加速度**。

解：

$$\begin{cases} x=5t \\ y=15t-5t^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{消}\,t} y=3x-\frac{x^2}{5}$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=5\vec{i}+(15-10t)\,\vec{j}\ \text{(SI)}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-10\vec{j}\quad(\text{SI})$$

六、质点运动学中的两类问题

质点运动学的核心任务就是描述质点的运动规律，即确定质点的位矢、速度和加速度随时间的变化规律。

（1）求导问题

运动学方程 → 速　度 → 加速度

（2）积分问题

加速度 → 速　度 → 运动学方程

例 设质点的运动方程为：$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\,(SI)$，其中 $x(t)=t^2+5$，$y(t)=t^4+3t^2+1$，求：（1）$t=2s$ 时的速度及加速度；（2）质点的轨迹方程。

解： (1) 由速度及加速度的定义式得

$$\vec{v}(t)=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}=2t\vec{i}+(4t^3+6t)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}=2\vec{i}+(12t^2+6)\vec{j}$$

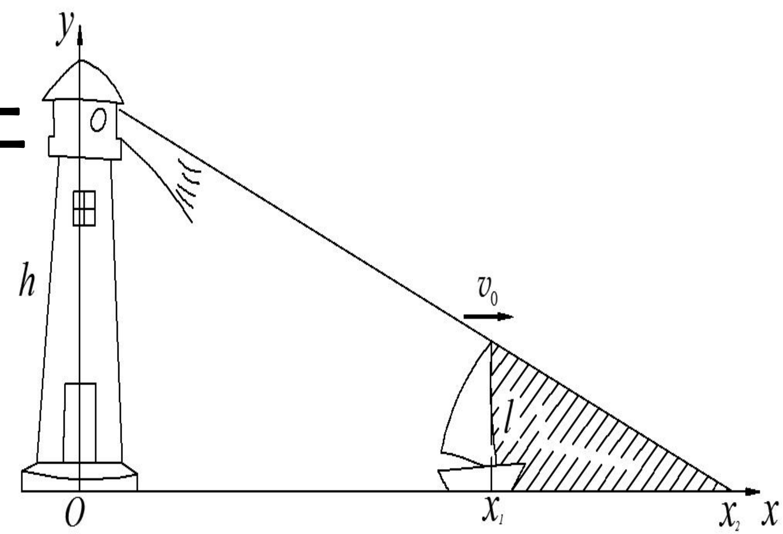
$$\vec{v}(2)=4\vec{i}+44\vec{j} \qquad \vec{a}(2)=2\vec{i}+54\vec{j}$$

(2) 消t得质点的轨迹方程 $y=x^2-7x+11$

例 河岸上灯塔距水面的高度为h，帆高为l的帆船以速度v_0 在水面上匀速航行，试求：

(1) 帆影顶部的运动速率；

(2) 帆影的运动速率。



解： (1) 由题意及速度定义式得

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h} \quad \Rightarrow \quad (h-l)\frac{dx_2}{dt} = h\frac{dx_1}{dt}$$

$$\text{而}\, v = \frac{dx_2}{dt}，\; v_0 = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{则}\, v = \frac{hv_0}{h-l}$$

(2) 令影长为 $L = x_2 - x_1$，则$v' = \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{l}{h}\dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{lv_0}{h-l}$

例 一辆摩托车正以速度 $v_x = v_0$ 行驶，关闭发动机后获得与速度方向相反大小与速率平方成正比的加速度，试计算在关闭发动机后摩托车又行驶 x 距离时的速度。

解： 根据题意得

$$a_x = -kv_x^{\ 2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{dv_x}{dt} = \frac{v_x dv_x}{dx}$$

$$\frac{dv_x}{v_x} = -kdx \Rightarrow \int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = \int_0^x -kdx \Rightarrow v_x = v_0 e^{-kx}$$

一、直线运动

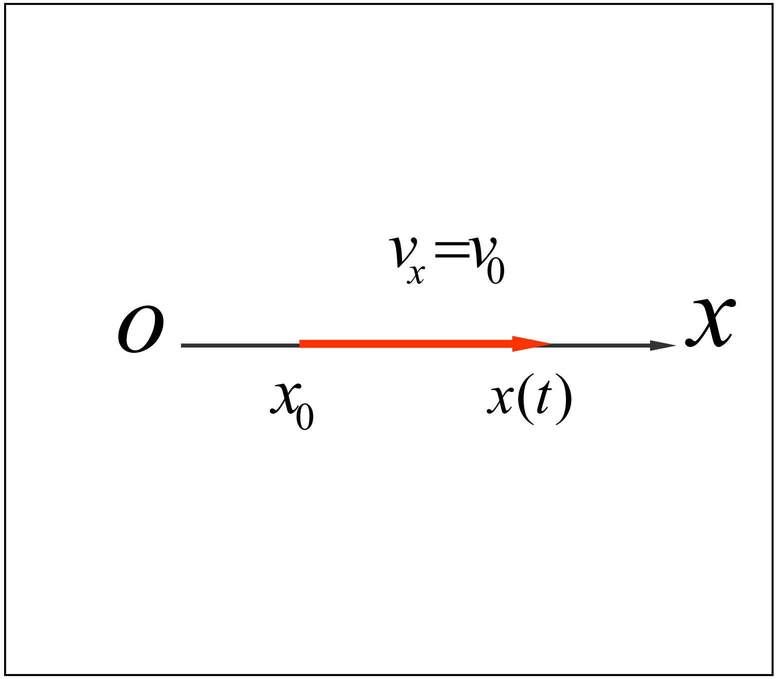
（1）匀速直线运动

$$a_x = 0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$$

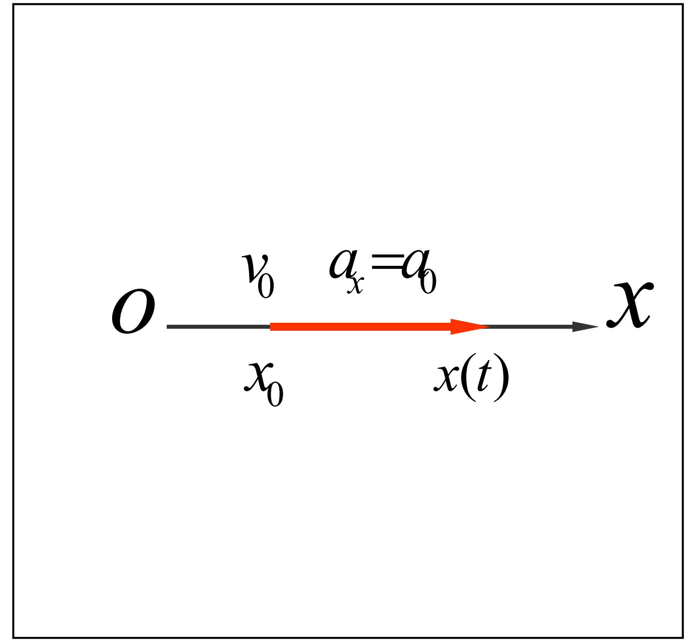
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt$$

$$x = x_0 + v_0 t$$



（2）匀变速直线运动

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=a_0$$



$$\int_{v_0}^{v} dv_x=\int_0^t a_0 dt$$

$$v_x=v_0+a_0t$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=v_0+a_0t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_0^t (v_0+a_0t)dt$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$$

（3）变速直线运动

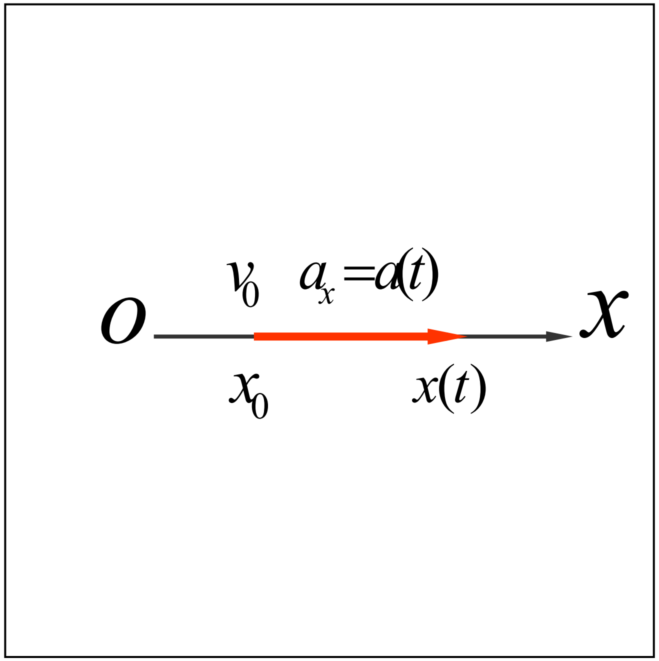
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a(t)$$

$$\int_{v_0}^{v} dv_x = \int_0^t a(t)dt$$

$$v_x = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 + \int_0^t a(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left(v_0 + \int_0^t a(t)dt\right)dt$$

$$x = x_0 + \int_0^t \left(v_0 + \int_0^t a(t)dt\right)dt$$

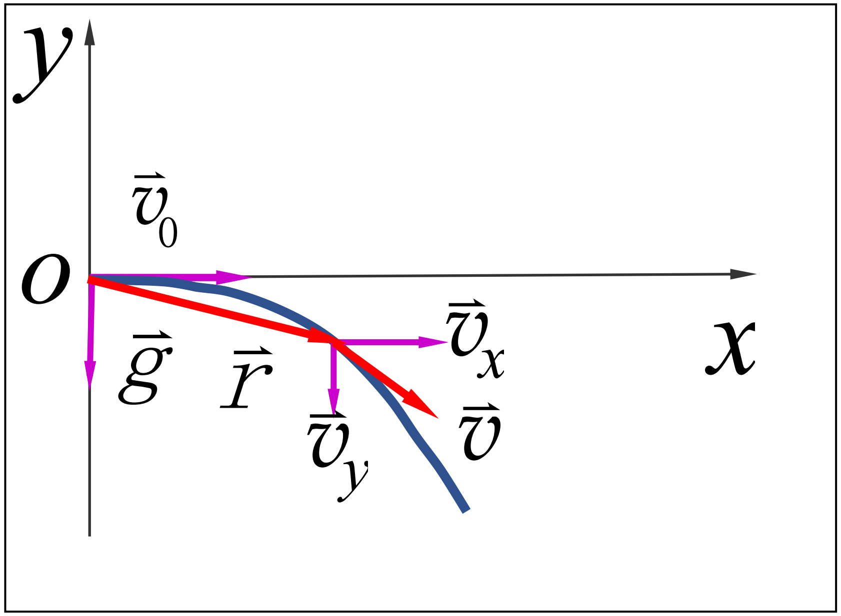


我们正青春年少

二、抛体运动

（1）平抛物体运动

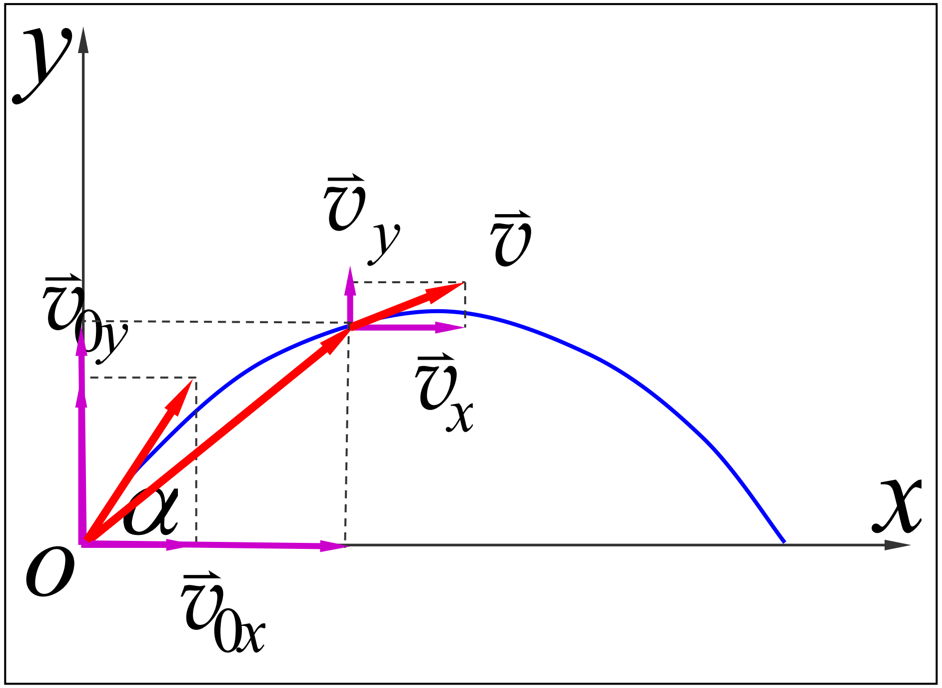
$$\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y=a_y\vec{j}=-g\vec{j}$$



$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=v_0\vec{i}-gt\vec{j}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=v_0t\,\vec{i}-\frac{1}{2}gt^2\,\vec{j}$$

（2）斜抛物体运动



$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}_{\mathrm{x}}+\vec{a}_{\mathrm{y}}=a_{\mathrm{y}}\vec{j}=-\mathrm{g}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=v_x\vec{i}+v_{\mathrm{y}}\vec{j}=v_0\cos\alpha\vec{i}+(v_0\sin\alpha-\mathrm{g}t)\,\vec{j}$$

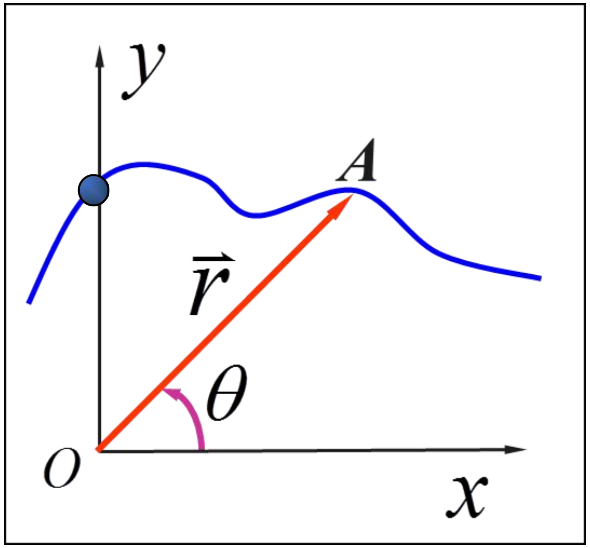
$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=v_0\cos\alpha\mathrm{t}\,\vec{i}+(v_0\sin\alpha\mathrm{t}-\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2)\,\vec{j}$$

三、平面曲线运动

（1）平面极坐标系

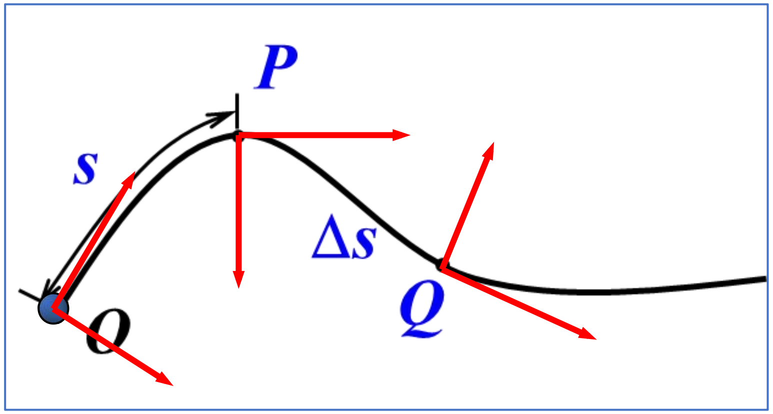
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$



（2）自然坐标系

——把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统。



$$S = S(r),$$

$$\Delta S = S_Q - S_P$$

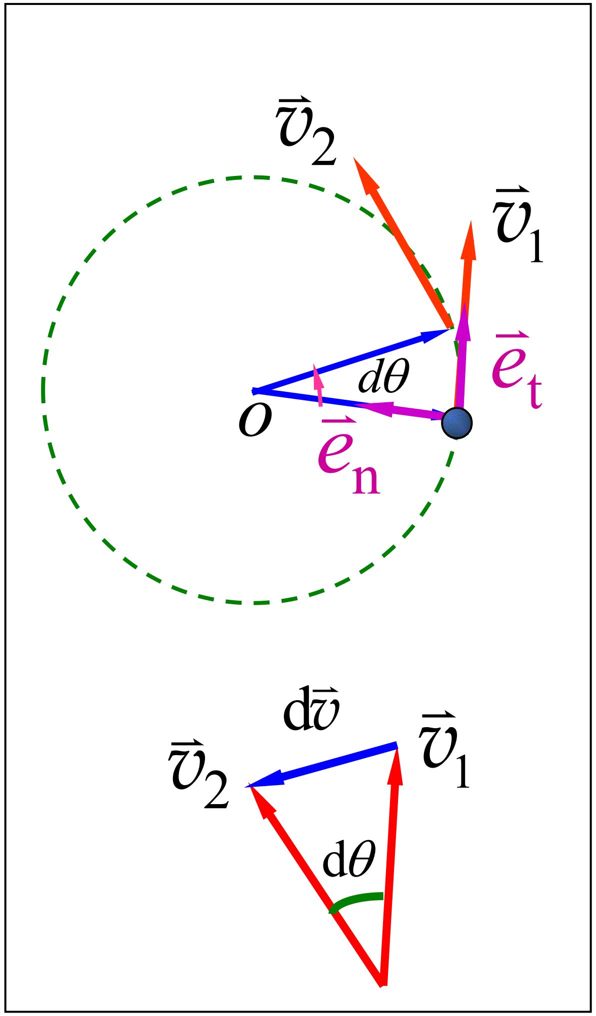
我们正青春年少

（3）匀速率圆周运动

$$\boxed{\theta = \theta(t)} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} = \frac{Rd\theta}{dt}\vec{e}_{\mathrm{t}} = R\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{vd\theta}{dt}\vec{e}_{\mathrm{n}} = \frac{vd\theta}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}\vec{e}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_{\mathrm{n}} = a_n\vec{e}_n$$

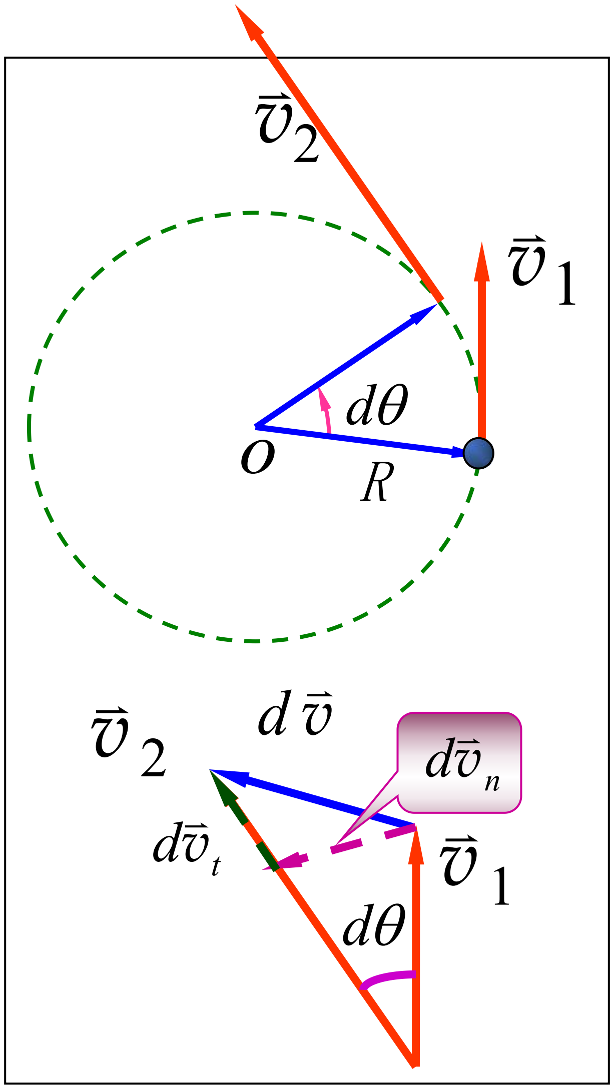


（4）变速率圆周运动

$$\theta = \theta(t) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

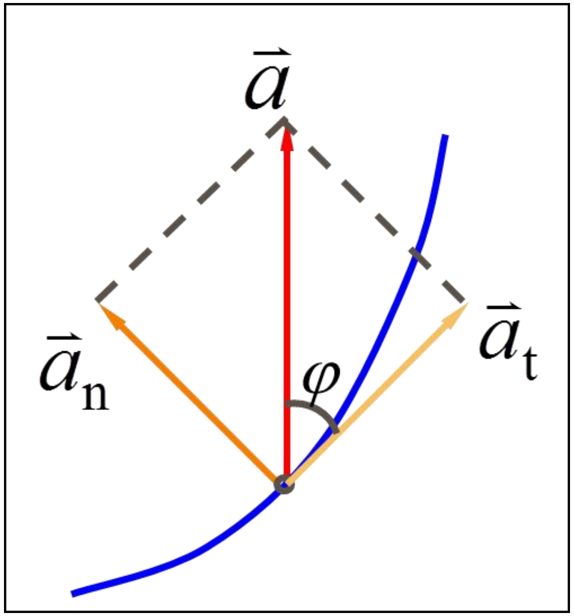
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}} = \frac{Rd\theta}{dt}\vec{e}_{\mathrm{t}} = R\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{R}\vec{e}_{\mathrm{n}} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$



（5）平面曲线运动

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}=v\vec{e}_{\mathrm{t}}=r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$



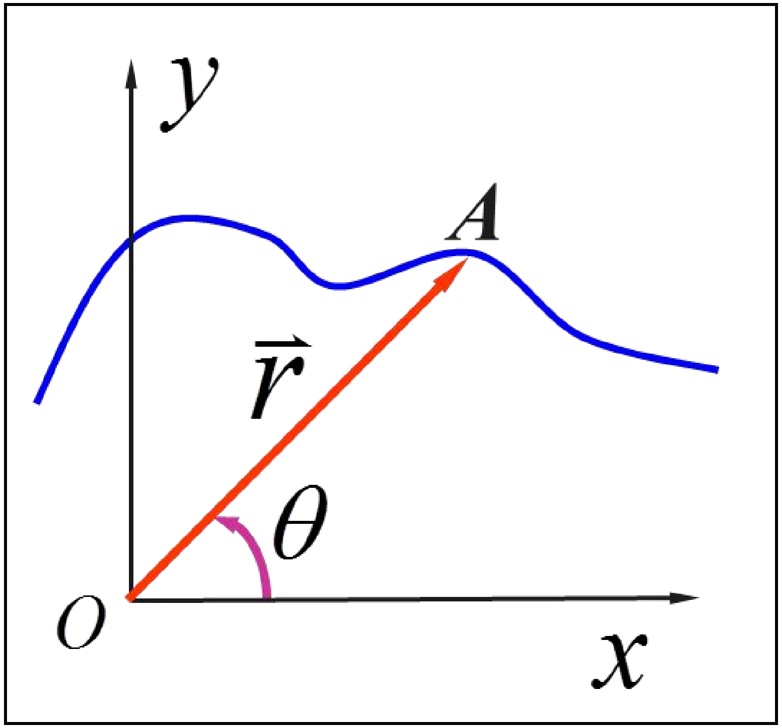
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{r}\vec{e}_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

大小： $|\vec{a}|=\sqrt{a_t^2+a_n^2}$ **方向：** $\tan\varphi=\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$ **曲率半径：** $r=\frac{ds}{d\theta}$

（5）平面曲线运动

$$ds(t) = r d\theta(t)$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{r d\theta(t)}{dt} = r\omega(t)$$



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{r}\vec{e}_n = a_t \vec{e}_t + a_n \vec{e}_n$$

$$a_t = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{r d\omega(t)}{dt} = r\alpha(t)$$

单选题 10分

设置

下列说法正确的是

A 切向加速度只改变质点的速度方向

B 法向加速度等于零时质点将做直线运动

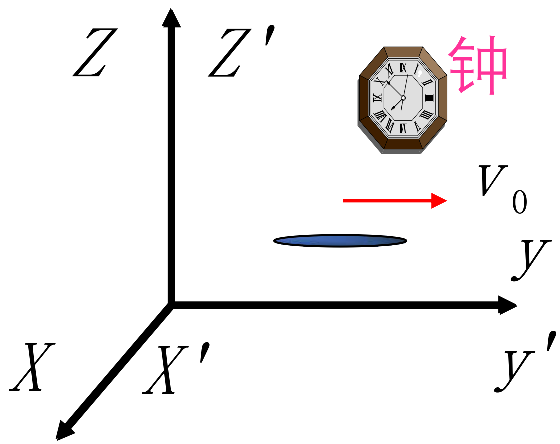
C 法向加速度只改变质点的速度大小

D 切向加速度等于零时质点的速度将保持不变

提交

1.1.4 相对运动

一、经典时空观



（1）时间的绝对性

S系：$\Delta t = t_2 - t_1$

S'系：$\Delta t' = t_2' - t_1'$

$\Rightarrow t_2 = t_2',\quad t_1 = t_1' \Rightarrow \Delta t' = \Delta t$

（2）空间的绝对性

S系：$\Delta y = y_2 - y_1$

S'系：$\Delta y' = y_2' - y_1'$

$y_2 = y_2' + v_0 t', y_1 = y_1' + v_0 t'$

$\Rightarrow \Delta y = \Delta y'$

二、相对运动

（1）位移变换式

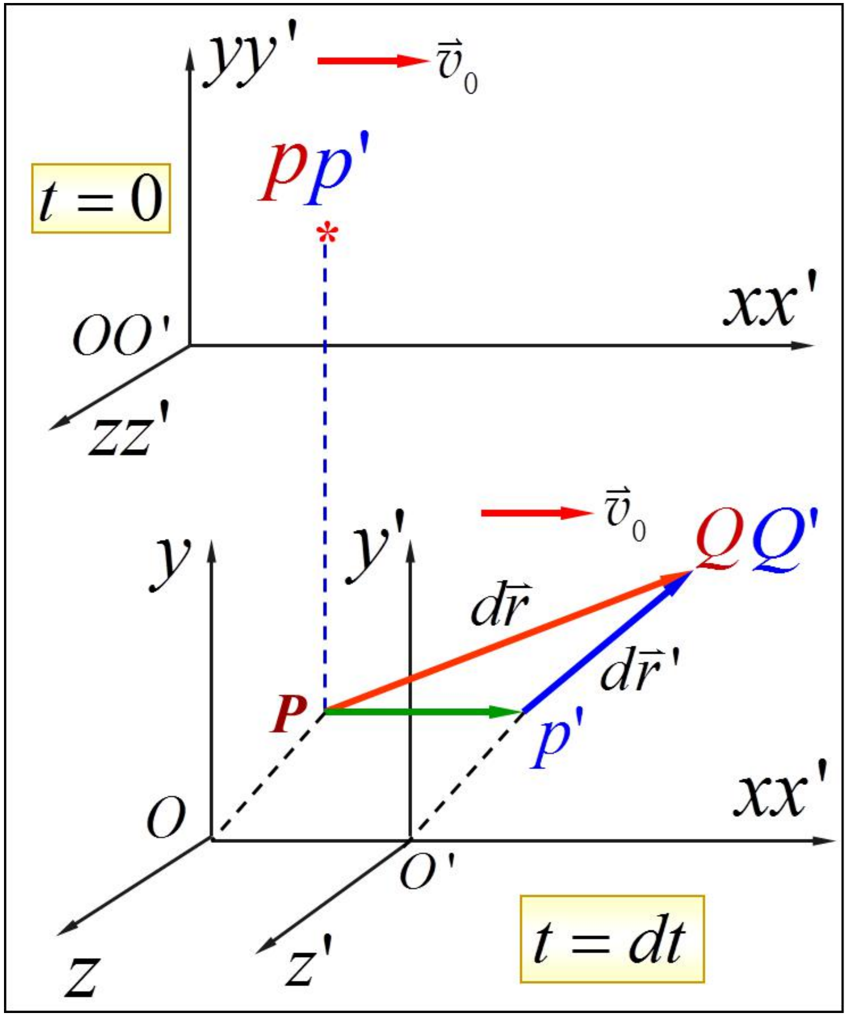
$$d\vec{r} = d\vec{r}' + \vec{v}_0 dt$$

（2）伽利略速度变换式

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

（3）加速度变换式

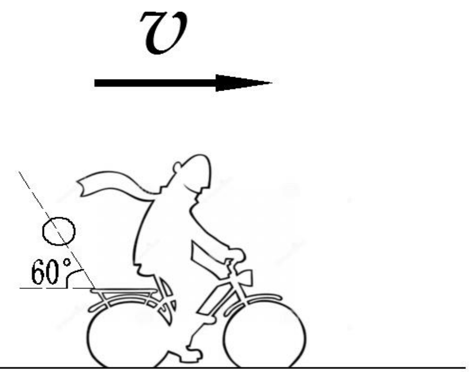
$$\vec{a} = \vec{a}'$$



1.1.4 相对运动

例　一个人骑着自行车以的速率 $8m\cdot s^{-1}$ 沿直线匀速骑行，自行车后座位上载着的弹射器以与车前进的反方向呈 60°斜向上弹出一个小球，此时站在地面上的另一个人看到小球沿竖直向上方向运动，求小球弹射的高度。

解： 取地面为S系、自行车为S'系，



由伽利略速度变换式得

$$V_y = V_y' ,\quad V_x = V_x' + V_0 = 0$$

$$V_y' = V_x' \tan 60° = 8\tan 60° = 13.8(m\cdot s^{-1})$$

$$y = \frac{v^2}{2g} = \frac{13.8^2}{2\times 9.8} = 9.7(m)$$