函数与极限

- **映射与函数**
  - 映射
    - 映射概念
      - 定义：设X、Y是两个非空集合,如果存在一个法则f,使得对X中每个元素x,按法则f,在Y中有唯一确定的元素y与之对应,则称f为从X到Y的映射,记作f: X→Y.
      - 相应名词
        - 映射：见上
        - 原像：x称为y(在f下)的一个原像
        - 像：y称为x(在f下)的像
        - 定义域：集合X，记作D_f,即D_f=X
        - 值域：X中所有元素的像所组成的集合，记作R_f或f(X),即R_f= f(X)={ f(X)| x∈X}
        - 算子：映射别称
        - 泛函：从非空集合X到数集Y的映射的惯用名称
        - 变换：从非空集合X到自身的映射的惯用名称
        - 函数：从实数集(或其子集)X到实数集Y的映射的惯用名称
      - 注意
        - 构成映射三要素：定义域、值域、对应法则
        - x的像唯一，y的原像不一定唯一，值域是Y的子集
    - 逆映射与复合映射
      - 逆映射
        - 定义：若f是X到Y的单射，定义一个从R_f到X的新映射g,即g: R_f→X,则称g为f的逆映射，记作f^(-1)
        - 可逆条件：只有一一映射存在逆映射
      - 复合映射
        - 定义：若有两个映射g: X→Y1, f:Y2→Z,且Y1含于Y2,则定义一个从X到Z的法则，这个映射称为g和f构成的复合映射，记作f∘g,即f∘g: X→Z,(f∘g)(x)= f[g(x)], x∈X
        - 可复合条件：R_g含于D_f
        - 注意：映射f和g的复合是有顺序的，即f∘g有意义,但g∘f未必有意义，f∘g与g∘f都有意义,但复合映射f∘g与g∘f未必相同
    - 特殊的映射
      - 满射：R_f=Y,又称f为X到Y上的映射
      - 单射：y的原像唯一
      - 双射：既是满射又是单射，又称一一映射
  - 函数
    - 函数概念
      - 函数定义：设数集D含于R,则称映射f: D→R为定义在D上的函数，记作y= f(x), x∈D
      - 相应名词
        - 自变量：即x
        - 因变量：即y
        - 定义域：即D,记作D_f, D_f=D
        - 函数值：x按相应法则f，有唯一的y与之对应，记作f(x),即y= f(x)
        - 值域：函数值f(x)的全体所构成的集合，记作R_f或f(D),即R_f= f(D)= {y| y= f(x), x∈D}
        - 函数关系：y与x之间的依赖关系
      - 注意
        - f与f(x)：前者表示自变量与因变量之间的对应法则，后者表示与自变量x相对应的函数值；又有"f(x), x∈D"或"y= f(x), x∈D"表示定义在D上的函数，此时理解为由它所确定的函数f
        - 表示函数
          - 记号：可任取，例f、g、F、φ
          - 形式
            - y= g(x),y=φ(x)
            - y= y(x)
          - 三种方法
            - 表格
            - 图形
            - 解析
        - 定义域的确定
          - 根据实际背景：与变量实际意义有关
          - 自然定义域：使算式有意义
    - 函数类型
      - 初等函数
        - 定义：由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子所表示的函数
        - 基本初等函数
          - 反三角函数
          - 幂函数
          - 指数函数
          - 对数函数
          - 三角函数
      - 非初等函数
        - 取整函数
        - 符号函数
        - 绝对值函数
        - 分段函数
    - 函数特性
      - 有界性
        - 有界
          - 定义：如果存在正数M，对任意x∈X,使得| f(x)|≤M都成立，则称f(x)在X上有界
          - 分类
            - 有上界：如果存在数K,对任意x∈X,使得f(x)≤K都成立，则称f(x)在X上有上界，K称为f(x)在X上的一个上界
            - 有下界：如果存在数K,对任意x∈X,使得f(x)≥K都成立，则称f(x)在X上有下界，K称为f(x)在X上的一个下界
        - 无界：对任意的正数M，存在x∈X,使得| f(x)|≥M，则称f(x)在X上无界
      - 单调性
        - 单调增加：对于区间I上任意两点X1及X2,当X1 < X2时,恒有f(X1) < f(X2)
        - 单调减小：对于区间I上任意两点X1及X2,当X1 > X2时,恒有(fX1) < (fX2)
      - 奇偶性
        - 偶函数
          - 图像特点：关于y轴对称
          - 定义：对任意x∈D, f(-x) = f(x)恒成立
        - 奇函数
          - 图像特点：关于原点对称
          - 定义：对任意x∈ D, f(-x)=-f(x)恒成立
      - 周期性
        - 定义：如果存在一个正数,使得对任意x∈D,且(x±l)∈D,有f(x±l) = f(x)恒成立，则称f(x)为周期函数(D为函数定义域)
        - 相关名词
          - 周期：即l
          - 最小正周期：通常周期函数的周期是指最小正周期
        - 注意：并非所有周期函数都有最小正周期，例:狄利克雷函数，其周期是任何正有理数
    - 反函数与复合函数
      - 反函数
        - 定义：对每一个y∈f(D),有唯一的x∈D使得f(x)=y,即f-1(y) = x,记作y = f-1(x), x∈f(D)
        - 相关名词：直接函数：相对于反函数来说，原来的函数y = f(x)称为直接函数
        - 直接函数与其反函数关系
          - 反函数f^(-1)的对应法则完全由函数f的对应法则确定
          - 直接函数与其反函数图像关于直线y=x对称
          - 直接函数与其反函数的单调性一致
      - 复合函数
        - 定义：设函数y= f(u)的定义域为D_f,函数u = g(x)的定义域为D_g,且其值域R_g含于D_f,即得y = f[g(x)], x∈D_g，记作f∘g,即(f∘g)(x) = f[g(x)]
        - 相应名词：中间变量：即变量u
        - 注意：函数f和g的复合是有顺序的，即f∘g与g∘f未必都有意义，同时未必相同
        - 可复合条件：R_g含于D_f
    - 函数运算
      - 和：(f+g)(x) = f(x) + g(x), x∈D
      - 差：(f - g)(x)= f(x) - g(x), x∈D
      - 积：(f·g)(x) = f(x)·g(x), x∈D
      - 商：(f/g)(x) = f(x)/ g(x), x∈D或{ x| g(x) = 0, x∈D}
- **数列的极限**
  - 数列极限
    - 数列基础
      - 定义：如果按照某一法则，对每一个正整数n,对应着一个确定的实数Xn,这些实数按照下标n从小到大排列得到的一个序列X1,X2,⋯, Xn,⋯ 就叫做数列，简记为数列{Xn}
      - 相应名词
        - 项：数列中每一个数
        - 一般项：又称通项,即第n项Xn
      - 形式
        - 几何上，数列{Xn}可看作数轴上一个动点
        - 函数上，数列{Xn}可看作自变量为正整数n的函数Xn= f(n), n为正整数
      - 分类
        - 收敛：见下
        - 发散：不存在符合条件的a,即数列无极限，或数列发散，lim(x→∞) Xn不存在
    - 数列极限的定义
      - 设{Xn}为一数列，如果存在常数a,对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，总存在正整数N,当n > N时，不等式| Xn-a| < ε都成立，则称常数a是数列{Xn}的极限，或者称数列{Xn}收敛于a，记为lim(n→∞) Xn = a,或Xn→a(n→∞)
      - 对于任意ε > 0，存在正整数N，当n > N时，有|Xn-a| < ε
    - 数列极限的几何解释：数轴上有常数a及数列X1,X2,⋯, Xn,⋯在数轴上用它们的对应点表示出来，并在数轴上作点a的ε邻域即开区间(a-ε, a+ε),当n > N时，所有的点Xn都落在开区间(a-ε, a+ε)内，而只有有限个(至多N个)在该区间以外
  - 收敛数列的性质
    - 唯一性：定理1
      - 如果数列{Xn}收敛，则其极限唯一
      - 证明方法：反证法
    - 有界性
      - 定理2
        - 如果数列{Xn}收敛，则其一定有界
        - 数列收敛与有界关系
          - 有界是收敛的必要条件
          - 收敛是有界的充分条件
      - 数列有界概念：对于数列{Xn},如果存在正数M，使得对于一切Xn都满足不等式| Xn|≤M,则称数列{Xn}有界；如果不存在正数M符合条件，则数列{Xn}无界
    - 保号性
      - 定理3：如果Xn→a(n→∞),且a > 0(或a < 0),则存在正整数N,当n > N时，Xn > 0(Xn < 0)恒成立
      - 推论：如果数列{Xn}从某项起有Xn≥0(或0≥Xn),且Xn→a(n→∞),则a≥0(或0≥a)
    - 收敛数列与其子数列间的关系
      - 定理4
        - 若数列{Xn}收敛于a，则其任一子数列也收敛，且其极限也为a
        - 推论：如果数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列发散
      - 相应名词
        - 子数列：在数列{ Xn}中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列{Xn}中的先后次序，得到的数列称为原数列的子数列
        - 子列：即子数列
      - 原数列与子数列收敛关系：一个发散数列可能有收敛的子数列
- **函数的极限**
  - 函数极限的定义
    - 自变量趋于有限值时函数的极限
      - 定义
        - 设函数f(x)在点Xo的某一去心邻域内有定义；如果存在常数A，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得当x满足不等式0 < | X-Xo| < δ时，对应的函数值都满足| f(x)-A| < ε,则常数A为函数f(x)当X→Xo时的极限，记作lim(X→Xo) f(x) = A或f(x)→A(当X→Xo)
        - 对于任意ε > 0，存在0 < |X-Xo| < δ时，有| f(x)-A| < ε
      - 相应名词
        - 单侧极限
          - 左极限
          - 右极限
        - 左极限：对任意ε > 0,存在Xo-δ < X < Xo,有|f(x)-A| < ε,记作lim(X→Xo-)(即X从Xo的左侧趋于Xo)f(x)=A或f(Xo-)=A
        - 右极限：对任意ε > 0,存在Xo < X < Xo+δ,有|f(x)-A| < ε,记作lim(X→Xo+)(即X从Xo的右侧趋于Xo)f(x)=A或f(Xo+)=A
      - 注意
        - X→Xo时f(x)有无极限，与f(x)在点Xo是否定义并无关系
        - f(x)当X→Xo时极限存在的充分必要条件是左右极限各自存在且相等
      - 几何解释：对任意给定一正数ε，作平行于x轴的两条直线y = A+ε和y = A-ε,当x属于对应邻域时,界于这两条直线之间是一横条区域
    - 自变量趋于无穷大时函数的极限
      - 定义
        - 设函数f(x)当|x|大于某一正数时有定义；如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数X,使得当x满足不等式|x| > X,对应的函数值都满足不等式|f(x)-A| < ε,则常数A为函数f(x)当x→∞时的极限,记作lim(x→∞)f(x)=A或f(x)→A(当x→∞)
        - 对于任意ε > 0,存在X > 0,当|x| > X时,有|f(x)-A| < ε
      - 分类
        - x > 0且无限增大：对于任意ε > 0,存在X > 0,当x > X,有|f(x)-A| < ε,则lim(x→+∞)f(x)=A
        - x < 0且无限减小：对于任意ε > 0,存在X > 0,当x < -X,有|f(x)-A| < ε,则lim(x→-∞)f(x)=A
      - 几何解释：作直线y=A-ε和y=A+ε,则用总有一个正数存在,使得当|x| > X时，函数y=f(x)的图形位于这两直线之间
      - 相关名词：水平渐近线：若lim(x→∞)f(x)=A,则直线y=A是函数y=f(x)图形的水平渐近线
  - 函数极限的性质
    - 唯一性：定理1：如果lim(X→Xo)f(x)存在,则其极限唯一
    - 局部有界性：定理2：如果lim(X→Xo)f(x)=A,则存在常数M > 0和δ > 0,使得当0 < |X-Xo| < δ时,有M≥|f(x)|
    - 局部保号性：定理3
      - 内容：如果lim(X→Xo)f(x)=A,且A > 0(或A < 0),则存在常数δ > 0,使得当0 < |X-Xo| < δ时,有f(x) > 0(或f(x) < 0)
      - 定理3'：如果lim(X→Xo)f(x)=A(A≠0),则存在Xo的某一去心邻域,对于任意其内的x，总有|f(x)| > |A|/2
      - 推论：如果在Xo的某去心邻域内f(x)≥o(或0≥f(x)),且lim(X→Xo)f(x)=A,则A≥0(或0≥A)
    - 函数极限与数列极限关系：如果极限lim(X→Xo)f(x)存在,{Xn}为f(x)的定义域内任一收敛于Xo的数列,且满足:Xn≠Xo(n∈N+),则相应的函数值数列{f(Xn)}必收敛,且lim(n→∞)f(Xn)=lim(X→Xo)f(x)
- **无穷大与无穷小**
  - 无穷小
    - 定义
      - 内容：如果函数f(x)当X→Xo(或x→∞)时的极限为零，则称函数f(x)为当X→Xo(或x→∞)时的无穷小；以零为极限的数列{Xn}称为n→∞时的无穷小
      - 注意：无穷小不是数，本质上是函数
    - 无穷小与函数极限的关系：在自变量的同一变化过程X→Xo(或x→∞)中,函数f(x)具有极限A的充分必要条件是f(x)=A+α,其中α是无穷小
  - 无穷大
    - 定义
      - 内容：设函数f(x)在Xo的某一去心邻域内有定义(或|x|大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数M(不论它多大)，总存在正数δ(或正数X),只要x适合不等式o < |X-Xo| < δ(或|x| > X),对应的函数值f(x)总满足不等式|f(x)| > M,则称函数f(x)是当X→Xo(或X→∞)时的无穷大
      - 注意
        - 不同于函数极限的定义，即无穷大的函数的极限不存在；我们说函数的极限是无穷大，记作lim(X→Xo)f(x)=∞(或lim(x→∞)f(x)=∞)
        - 无穷大不是数，本质上是函数
      - 内容衍生：将定义中|f(x)| > M换成f(x) > M(或f(x) < -M),则记作limf(x)=+∞(或limf(x)=-∞)
    - 相应名词：铅直渐近线：若lim(X→Xo)f(x)=∞,则称直线X=Xo为函数图形的铅直渐近线
  - 两者关系：在自变量的同一变化过程中，如果f(x)为无穷大，则1/f(x)为无穷小；如果f(x)为无穷小,且f(x)≠0,则1/f(x)为无穷大
- **极限运算法则**
  - 定理1
    - 内容：两个无穷小的和是无穷小
    - 推论：有限个无穷小之和是无穷小
  - 定理2
    - 内容：有界函数与无穷小的乘积是无穷小
    - 推论1：常数与无穷小的乘积是无穷小
    - 推论2：有限个无穷小的乘积是无穷小
  - 定理3
    - 内容：如果limf(x)=A,limg(x)=B,则
      - lim[f(x)±g(x)]=limf(x)±g(x)=A±B
      - lim[f(x)·g(x)]=limf(x)·limg(x)=A·B
      - limf(x)/g(x)=limf(x)/limg(x)=A/B,(B≠0)
    - 推广
      - lim[f(x)+g(x)-h(x)]=limf(x)+limg(x)-limh(x)
      - lim[f(x)·g(x)·h(x)]=limf(x)·limg(x)·limh(x)
    - 推论
      - 推论1：若limf(x)存在,c为常数,则lim[cf(x)]=climf(x)
      - 推论2：若limf(x)存在,n为正整数,则lim[f(x)]^n=[limf(x)]^n
  - 定理4：若有数列{Xn}和{Yn}.且lim(n→∞)Xn=A,lim(n→∞)Yn=B,则
    - lim(n→∞)(Xn±Yn)=A±B
    - lim(n→∞)(Xn·Yn)=A·B
    - lim(n→∞)Xn/Yn=A/B,(Yn=0(n=1,2,⋯)且B≠0)
  - 定理5：内容：若φ(x)≥ψ(x),且limφ(x)=A,limψ(x)=B,则A≥B
  - 定理6
    - 内容：设函数y=f[g(x)]是函数u=g(x)与函数y=f(u)复合而成,f[g(x)]在点Xo的某去心邻域内有定义,若lim(X→Xo)g(x)=Uo,lim(U→Uo)f(u)=A,且存在δo,当x属于该区域时,有g(x)≠Uo,则lim(X→Xo)f[g(x)]=lim(U→Uo)f(u)=A
    - 注意：lim(X→Xo)g(x)=Uo替换为lim(X→Xo)g(x)=∞或lim(x→∞)g(x)=∞,将lim(U→Uo)f(u)=A替换为lim(u→∞)f(u)=A,即的类似定理
- **极限存在准则 两个重要极限**
  - 重要极限
    - lim(x→0)sinx/x=1
    - lim(x→∞)(1+1/x)^x=e
  - 极限存在准则
    - 夹逼准则
      - 准则1：如果数列{Xn},{Yn}及{Zn}满足以下条件则{Xn}的极限存在,且lim(n→∞)Xn=a
        - 从某项起,即存在No∈N+,当N > No时,有Zn≥Xn≥Yn
        - lim(n→∞)Yn=a,lim(n→∞)Zn=a
      - 准则1'：如果f(x),g(x)及h(x)满足一下条件则lim(X→Xo)(或x→∞)f(x)存在,且等于A
        - 当x属于点Xo的某一去心邻域(或|x| > M)时,h(x)≥f(x)≥g(x)
        - lim(X→Xo)(或x→∞)g(x)=A,lim(X→Xo)(或x→∞)h(x)=A
    - 准则2
      - 内容：单调有界数列必有极限
      - 准则2'
        - 设函数f(x)在点Xo的某个左邻域内单调且有界,则f(x)在Xo的左极限f(Xo-)必定存在
        - X→Xo+,x→+∞,x→-∞亦然
      - 相应名词
        - 单调增加：⋯≥Xn+1≥Xn≥⋯≥X3≥X2≥X1
        - 单调减小：X1≥X2≥X3≥⋯≥Xn≥Xn+1≥⋯
        - 单调数列
          - 单调增加和单调减小的数列统称单调数列
          - 含括所有项相同的数列
      - 几何解释：从数轴上看,对应与单调数列的点Xo仅能向一个方向移动,或沿数轴移向无穷远,或无限趋近于一个定点即数列{Xn}趋于一个极限
    - 柯西极限存在准则
      - 内容：数列{Xn}收敛的充分必要条件是:对于任意给定的正数ε,存在正整数N,使得当m > N,n > N时,有|Xn-Xm| < ε
      - 别称：柯西审敛原理
      - 几何意义：数列{Xn}收敛的充分必要条件是:对于任意给定的正数ε,在数轴上一切具有足够大号码的点Xn中,任意两点间的距离小于ε
- **无穷小的比较**
  - 高阶无穷小
    - 若limβ/α=0, 则β是比α高阶的无穷小
    - 记作β=o(α)
  - 同阶无穷小：若limβ/α=c≠0, 则β与α是同阶无穷小
    - c=1
      - β与α是等价无穷小
      - 记作α ~ β
    - 其他
  - 低阶无穷小：若limβ/α=∞, 则β是比α低阶的无穷小
  - k阶无穷小：若limβ/α^k=c≠0,k > 0, 则β是关于α的k阶无穷小
  - 等价无穷小
    - 定义：见上
    - 定理
      - 定理1：β与α是等阶无穷小的充分必要条件为β=α+o(α)
      - 定理2：设α ~ α',β ~ β',且limβ'/α'存在,则limβ/α=limβ'/α'
    - 常用等价无穷小
      - sinx→x(x→0)
      - tanx→x(x→0)
      - arcsinx→x(x→0)
      - arctanx→x(x→0)
      - ln(1+x)→x(x→0)
      - e^x-1→x(x→0)
      - a^x-1→xlna(x→0)(a > 0且a≠1)
      - (1+ax^b)^m-1→amx^b(x→0)
- **函数的连续性与间断点**
  - 函数的连续性
    - 定义
      - 设函数y=f(x)在点Xo的某一邻域内有定义,若lim(Δx→0)Δy=lim(Δx→0)[f(Xo+Δx)-f(Xo)]=0, 则称f(x)在点Xo连续
      - 设函数y=f(x)在某一邻域内有定义,若lim(X→Xo)f(x)=f(Xo), 则称f(x)在点Xo连续
      - 对于任意ε > 0,存在δ > 0,当|X-Xo| < δ时,有|f(x)-f(Xo)| < ε 则称f(x)在点Xo连续
    - 相应名词
      - 增量
        - 设变量u从初值U1变至U2,终值与初值的差U2-U1即为变量u的增量 记作Δu,即Δu=U2-U1
        - 注意：Δu是一个整体不可分开的记号
      - 左连续：若lim(X→Xo)f(x)=f(Xo-)存在且等于f(Xo),即f(Xo-)=f(Xo) 则称函数f(x)在点Xo左连续
      - 右连续：若lim(X→Xo)f(x)=f(Xo+)存在且等于f(Xo),即f(Xo+)=f(Xo) 则称函数f(x)在点Xo右连续
      - 连续函数
        - 定义：在区间上每一点都连续的函数，称为在该区间上的连续函数，或函数在该区间上连续
        - 图形：一条连续而不间断的曲线
        - 分类
          - 左连续：区间包括端点，且函数在右端点左连续
          - 右连续：区间包括端点，且函数在左端点右连续
        - 举例：有理整函数(即多项式),有理分式
  - 函数的间断点
    - 条件：函数f(x)在点Xo的某去心邻域内有定义,且其有后续三种情形之一则f(x)在点Xo为不连续,点Xo称为函数f(x)的不连续点或间断点
      - 在X=Xo没有定义
      - 在X=Xo有定义, 但lim(X→Xo)f(x)不存在
      - 在X=Xo有定义, 且lim(X→Xo)f(x)存在, 但lim(X→Xo)f(x)≠f(Xo)
    - 分类
      - 第一类间断点
        - 定义：若Xo是函数f(x)的间断点,左右极限都存在 则Xo为第一类间断点
        - 分类
          - 可去间断点：左右极限相等
          - 跳跃间断点：左右极限不相等
      - 第二类间断点
        - 定义：左右极限至少有一个不存在
        - 举例
          - 无穷间断点
          - 振荡间断点
- **连续函数的运算与初等函数的连续性**
  - 连续函数的和、差、积、商的连续性：设函数f(x)和g(x)在点Xo连续,则其和,差,积,商(分母不取0)都在Xo连续
  - 反函数与复合函数的连续性
    - 定理2
      - 内容：若函数y=f(x)在区间Ix上单调增加(或单调减小)且连续,则其反函数也在对应区间Iy={y|y=f(x),x∈Ix}上单调增加(或单调减小)且连续
      - 举例：反三角函数
    - 定理3
      - 内容：设y=f[g(x)]由u=g(x)与y=f(u)复合而成，U∘(Xo)含于Df∘g.若lim(X→Xo)g(x)=Uo,而函数y=f(u)在u=Uo连续, 则lim(X→Xo)f[g(x)]=lim(U→Uo)f(u)=f(Uo)
      - 类推：将X→Xo替换为x→∞
    - 定理4：设函数y=f[g(x)]是由函数u=g(x)与函数y=f(u)复合而成,U(Xo)含于Df∘g.若函数u=g(x)在X=Xo连续,且g(Xo)=Uo,而函数y=f(u)在u=Uo连续,则复合函数y=f[g(x)]在X=Xo也连续
  - 初等函数的连续性
    - 相应名词：定义区间：即包含在定义域内的区间
    - 初等函数求极限
      - 幂指函数
        - 定义：形如u(x)^v(x)(u(x) > 0,u(x)≠1)的函数
        - limu(x)^v(x)=a^b (limu(x)=a > 0,limv(x)=b)
      - 一般的初等函数：lim(X→Xo)f(x)=f(Xo)
    - 定理
      - 一切初等函数在其定义区间内都是连续的
      - 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的
- **闭区间上连续函数的性质**
  - 有界性与最大值最小值定理
    - 定理1
      - 内容：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得其最大值和最小值
      - 注意：若函数在开区间内连续或在闭区间上有间断点,则函数在该区间上不一定有界,也不一定有最大值或最小值
    - 相应名词：最大值,最小值
      - 对于在区间I上有定义的函数f(x),如果有Xo∈I,使得对于任一x∈I都有f(Xo)≥f(x) (f(x)≥f(Xo)) 则称f(Xo)在区间I上的最大值(最小值)
      - 注意：二者可以相等
  - 零点定理与介值定理
    - 零点定理
      - 内容：设函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,且f(a)与f(b)异号(即f(a)·f(b)<0)
      - 几何解释：如果连续曲线弧y=f(x)的两个端点位于x轴的不同侧，则该曲线弧与x轴至少有一个交点
    - 介值定理
      - 内容：设函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,且在该区间的端点取不同的函数值f(a)=A及f(b)=B,则对于A与B之间的任意一个数C, 在开区间(a,b)内至少有一点ξ,使得f(ξ)=C(a < ξ < b)
      - 几何解释：连续曲线弧y=f(x)与水平直线y=C至少相交与一点
      - 推论：在闭区间[a,b]上连续的函数f(x)的值域为闭区间[m,M],其中m与M依次为f(x)在[a,b]上的最小值与最大值
  - *一致连续性
    - 定义
      - 内容：设函数f(x)在区间I上有定义.若对于任意给定的正数ε,总存在正数δ,使得对于区间I上任意两点X1,X2,当|X1-X2| < δ时, 有|f(X1)-f(X2)| < ε,则称函数f(x)在区间I上一致连续
      - 注意
        - 在半开区间上连续的函数不一定一致连续
        - 在闭区间上连续的函数一定一致连续
    - 一致连续性定理：若函数f(x)在闭区间[a,b]上连续,则它在该区间上一致连续