第5章　二　次　型

二次型的研究起源于解析几何中化二次曲线与二次曲面的方程为标准形式, 它的理论已广泛应用到自然科学与工程技术之中. ▷

本章首先揭示将二次型化成标准形等同于求与之对应的实对称矩阵的合同标准形, 然后介绍用正交变换和一般可逆线性变换化二次型为标准形, 再在惯性定理的基础上, 讨论二次型与实对称矩阵的正定性, 最后, 作为应用讨论了二次曲面的方程的标准化.

5.1　二次型及其矩阵表示

5.1.1　二次型的定义

在解析几何中, 以平面直角坐标原点为中心的有心二次曲线的一般方程是

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d. \tag{5.1.1}$$

选择适当的坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

便可将 (5.1.1) 式化为标准形式

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d. \tag{5.1.2}$$

由标准形 (5.1.2) 就可以很方便地识别曲线的类型, 研究曲线的性质等. 这种方法也适用于二次曲面的讨论.

我们注意到 (5.1.1) 式左边是一个二次齐次多项式, 称为*二元二次型*. 上述问题表明, 需要研究二次型

$$f(x,y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2$$

经过变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } \boldsymbol{Q} \text{ 为正交矩阵})$$

化为只含平方项的二次型 $a'x'^2 + c'y'^2$. 本章将对一般的二次型研究这样的问题.

▷ 视频: 二次型的历史简介 和 用正交变换化二次型为标准形的一个几何应用.

定义 5.1 n个变量$x_1, \cdots, x_n$的二次实齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots \\ + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为一个n **元二次型**.

如果令$a_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$, 那么上述二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$可以改写成

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + a_{n3}x_nx_3 + \cdots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

将$f(x_1, \cdots, x_n)$的系数排成的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$的**矩阵**. 它是实对称阵. 显然, 二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$的矩阵是唯一的, 它的主对角元依次是$x_1^2, \cdots, x_n^2$的系数, 它的(i, j)元是$x_i x_j$的系数的一半$(i \neq j)$. 令

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}},$$

那么二次型$f(x_1, \cdots, x_n)$ 可以写成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

由此可知, 二次型与实对称阵是一一对应的. 例如二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 对应的二次型为$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

设 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为一个二次型. 在几何上, 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = a$ 代表二次曲面. 同样地, 如果 $f(x_1, x_2)$ 为二次型, 那么方程 $f(x_1, x_2) = a$ 代表二次曲线.

只含平方项, 不含交叉项的二次型称为**标准形式的二次型**, 简称为**标准形**. 很显然 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

就像几何上二次曲面(线)在一个变换下化成标准形一样, 研究二次型的目的之一就是找一个变换把它化成标准形.

令 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$, 如果 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 称为一个**可逆线性变换**.

设 n 元二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 变成

$$g(y_1, \cdots, y_n) = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}.$$

记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

这是一个变量为 $y_1, \cdots, y_n$ 的二次型. 由于

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B},$$

因此 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵, 于是二次型 $g(y_1, \cdots, y_n)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}$.

如果二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $d_1 y_1^2 + \cdots + d_n y_n^2$, 则此时

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}.$$

因此, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 经过可逆线性变换化成标准形等价于对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 找一个可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

5.1.2　矩阵的合同

定义 5.2　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **合同**, 记成 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$.

容易验证, 矩阵的合同关系具有如下性质.

性质 5.1 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.

(1) 反射性: $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 若 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, 那么 $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 若 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$.

可见, 矩阵的合同关系也是一种等价关系.

例 5.1 证明 $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$ 合同.

证明 取 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

由此可见, $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$ 合同. □

一般地, 如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 那么可以验证

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} d_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{i_n} \end{pmatrix}.$$

定理 5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角阵.

证明 由定理 4.9 知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记为}} \boldsymbol{\Lambda},$$

故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$. 由此可见 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\Lambda}$. □

5.2 化二次型为标准形

5.2.1 用正交变换化二次型为标准形

本节我们用一个特殊的可逆线性变换 —— 正交变换, 把二次型化成标准形. 设 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 那么 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 称为一个正交变换. 正交变换在几何上的一个重要作用是它能保持向量的长度. 事实上,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle}=\sqrt{(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\\ &=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}=\sqrt{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}=\sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle}=\|\boldsymbol{y}\|.\end{aligned}$$

定理 5.2 (主轴定理) 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 可经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明 由定理 4.9 知, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 则

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2. \qquad \square$$

例 5.2 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 把二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

化为标准形.

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. 由例 4.10 知, 令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是, 作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 则

$$f(x_1, x_2, x_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2. \qquad \square$$

例 5.3 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成 $y_2^2 + 4y_3^2$, 求 a, b 的值及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 和 $y_2^2 + 4y_3^2$ 对应的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

由已知条件可得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, 进而有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5, \quad |\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0,$$

由此两式解出 $a = 3, b = 1$.

容易求得

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

分别为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = 4$ 的单位特征向量. 则

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

即为所求的正交矩阵. □

5.2.2 用配方法化二次型为标准形

上面介绍了用正交变换化二次型为标准形. 正交变换是一类特殊的可逆线性变换, 在许多场合寻求一般的可逆线性变换化简二次型已能满足应用要求. 下面通过两个例题介绍由拉格朗日 (Lagrange) 建立的配方法, 这是一种常见的简便方法.

例 5.4 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

为标准形, 并写出所用的可逆线性变换.

解 因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 中含有 x_1 的平方项, 所以先集中含 x_1 的项, 再配方, 即得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= [x_1^2 - 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] \\ &\quad -(x_2 - x_3)^2 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = \quad\ \ 2x_2 + x_3, \\ y_3 = \qquad\quad\ \ x_3, \end{cases}$$

从中解出 $\boldsymbol{x}$, 得到

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$. 此为所求的可逆线性变换, 在这个变换下二次型的标准形为 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2$. □

例 5.5 化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$$

为标准形, 并求出所用的可逆线性变换.

解 这个二次型不含平方项, 不能直接配方, 可先作可逆线性变换使其出现平方项. 因为这个二次型含有交叉项 x_1x_2, 利用平方差公式, 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - 2y_1y_3 - y_2^2 + 4y_2y_3,$$

把所有含 y_1 的项集中配方, 再把含 y_2 的项集中配方, 即得

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= (y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 + 4y_2y_3 - y_3^2\\ &= (y_1 - y_3)^2 - (y_2 - 2y_3)^2 + 3y_3^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}$, 解出 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{z}$, 代入 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}.$$

此时把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2.$$

进一步, 如果令 $\begin{cases} z_1 = w_1, \\ z_2 = w_3, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}w_2, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{w}$, 此时

$$f(x_1, x_2, x_3) = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2. \qquad \square$$

可以证明, 任何一个二次型都可以像例 5.4 和例 5.5 那样用配方法化为标准型.

5.3 正定二次型

5.3.1 惯性定理

上节我们分别用正交变换和一般可逆线性变换把二次型化成了不同的标准形, 那么, 不同的标准形之间有什么共性呢?

首先, 我们把实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩, 记为 $\mathrm{r}(f)$. 由第 1 章的推论 1.7 知, 如果 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 那么 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})$. 因此二次型的秩在可逆线性变换之下是不变量. 而标准形的秩就是标准形中非零项数. 因此, 同一个二次型的不同标准形中非零项数是相同的.

由例 5.5 可以看出, 用可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将一个二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

之后, 还可以进一步用可逆线性变换化为

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

的形式, 这里 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 这种形式的二次型称为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的**规范形**.

定理 5.3 (惯性定理)　二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的规范形是唯一的.

证明　设二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 下分别化为规范形

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

下证 $p=q$.

如果 $p>q$, 记 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}=(b_{ij})$. 由 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 得 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,

$$z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

此时,

$$z_i=b_{i1}y_1+\cdots+b_{ip}y_p+b_{i(p+1)}y_{p+1}+\cdots+b_{in}y_n,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

考虑线性方程组

$$\begin{cases}b_{11}y_1+\cdots+b_{1p}y_p=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ b_{q1}y_1+\cdots+b_{qp}y_p=0,\end{cases}$$

其中共有 q 个方程, p 个未知量. 因为 $p>q$, 所以该方程组必有非零解. 设

$$(y_1,\cdots,y_p)=(k_1,\cdots,k_p)$$

为上述线性方程组的一个非零解, 记 $\boldsymbol{y}=(k_1,\cdots,k_p,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$, 那么 $z_1=\cdots=z_q=0$,

则有

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=k_1^2+\cdots+k_p^2>0,$$

但与此同时又有

$$z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2=-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2\leqslant 0,$$

这就导出了矛盾.

同理, 由 $p<q$ 也导出矛盾.

所以 $p=q$. □

二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的规范形中的 p 称为 f 的**正惯性指数**, $r-p$ 称为 f 的**负惯性指数**, 正惯性指数减去负惯性指数所得的差 $2p-r$ 称为 f 的**符号差**. 惯性定理表明, 用不同的可逆线性变换把二次型 f 化为标准形, 这些标准形的共性是: 其中系数为正数的项数都是 p, 系数为负数的项数都是 $r-p$. 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正(负)惯性指数也称为 $\boldsymbol{A}$ 的正(负)惯性指数.

推论 5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&-1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&-1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{p\times p}&&\\&-\boldsymbol{E}_{q\times q}&\\&&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

其中 p,q 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数.

例 5.6 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 求 a 的取值范围.

解 由于二次型的负惯性指数为 f 的标准形中系数为负数的项的个数, 因此先用配方法把 f 化为标准形,

$$\begin{aligned}f&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-x_2^2-a^2x_3^2+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2\\&=y_1^2-y_2^2+(4-a^2)y_3^2,\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{cases}y_1=x_1+ax_3,\\y_2=x_2-2x_3,\\y_3=x_3.\end{cases}$$

因为 f 的负惯性指数为 1, 所以 $4-a^2\geqslant 0$, 即 $-2\leqslant a\leqslant 2$. □

推论 5.2　设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的秩和正惯性指数相同.

证明　(必要性) 如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 合同, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. 于是二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$$

经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$ 化成

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{By}.$$

由惯性定理知, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的秩和正惯性指数相同.

(充分性) 如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的秩和正惯性指数相同, 那么 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均与

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{p\times p} & & \\ & -\boldsymbol{E}_{q\times q} & \\ & & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

合同, 其中 p 为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数, $p+q = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. □

由定理 5.2 知, f 可经正交变换化成 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 于是 f 的正 (负) 惯性指数为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 中的正项 (负项) 的个数. 故由推论 5.2 知, 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值中正、负特征值个数相同.

例 5.7　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 问哪些是等价的矩阵, 相似的矩阵, 合同的矩阵?

解　由于两个矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 等价的充分必要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{N})$, 而 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 的秩均为 1, 于是它们均等价.

因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ 均为实对称矩阵, 且特征值均为 2, 0, 由例 4.11 可知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似.

由于 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 3, 0, 它的两个特征值互不相同, 故 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{C}$, 再由 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的特征值不同可知 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 不相似.

注意到 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 均为实对称矩阵, 且特征值中正数的个数和负数的个数分别相同, 于是 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ 互相合同.

由合同的定义知, 与对称矩阵合同的矩阵一定为对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 不合同. □

5.3.2　二次型的正定性

定义 5.3　若对任意非零实向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, 总有 $f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} > 0\ (< 0)$, 则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为**正定 (负定) 二次型**, 它所对应的矩阵称为**正定 (负定) 矩阵**.

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 是正定二次型, 而

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

不是正定的. 事实上, $g(0, 0, 1) = -1 < 0$, $h(0, 0, 1) = 0$.

如何来判断二次型是否是正定二次型呢? 先看下面的命题.

命题 5.1 二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

是正定的充分必要条件为 d_i $(i = 1, \cdots, n)$ 均大于零.

证明 (必要性) 若 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 正定, 则取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 可得

$$d_i = f(x_1, \cdots, x_n) > 0,$$

这里 $\boldsymbol{e}_i$ 的第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(充分性) 若 $d_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, 则对任意非零向量 $(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,

$$f(x_1, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + \cdots + d_nx_n^2 > 0.$$

因此 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是正定的. □

可见, 若二次型为标准形, 其正定性很容易判别. 若二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 不是标准形, 我们很自然地会想到通过可逆线性变换将 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 化成标准形. 然而通过 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的标准形来判定 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的正定性这种方法可行吗? 事实上, 我们有下面命题.

命题 5.2 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

证明 设二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的, 而且经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 化成二次型 $g(y_1, \cdots, y_n) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

于是, 对于任意的 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵知 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, 因而

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0,$$

又因为

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

所以

$$g(y_1, \cdots, y_n) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} > 0.$$

由此可见 $g(y_1, \cdots, y_n)$ 是正定的. □

由命题 5.1 和 5.2, 根据标准形或规范形可得到判断二次型为正定的方法.

定理 5.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则以下条件是等价的:

(1) $\boldsymbol{A}$ 是正定阵;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n;

(3) $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零;

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同;

(5) 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

证明　(1)⇒(2). 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形

$$d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

由命题 5.1 和 5.2 知, $d_i>0\ (i=1,\cdots,n)$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n.

(2)⇒(3). 由主轴定理 (定理 5.2), 存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $(i=1,\cdots,n)$. 由 (2) 知, $\lambda_i>0\ (i=1,\cdots,n)$.

(3)⇒(4). 由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值大于零, 由主轴定理与惯性定理知, $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n, 于是由推论 5.1 知, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同.

(4)⇒(5). 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$, 故

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 且 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵.

(5)⇒(1). 任取 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 所以 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}>0.$$

由此可见 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵. □

判断二次型为正定, 我们还可以用行列式来判断.

定理 5.5 (西尔维斯特 (Sylvester) 定理)　二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的充分必要条件是其矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的各阶顺序主子式

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

均大于零. ▷

▷ 视频: 西尔维斯特定理的证明.

例 5.8 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

的正定性.

解 (解法一) $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. 现求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由于

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 6),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$ 均大于零. 因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定二次型.

(解法二) $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式为

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = |\boldsymbol{A}| = 24 > 0,$$

因此 $f(x_1, x_2, x_3)$ 是正定二次型. □

例 5.9 问 a 为何值时, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型.

解 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 其顺序主子式

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2, \quad \Delta_3 = |\boldsymbol{A}| = -a(5a + 4).$$

由定理 5.5 知, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定的充分必要条件为 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 全大于零, 即

$$\begin{cases} 1 - a^2 > 0, \\ -a(5a + 4) > 0, \end{cases}$$

也就是 $-\dfrac{4}{5} < a < 0$. □

例 5.10 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正定阵, 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也是正定阵.

证明　首先, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是实对称阵.
其次, 任取 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 正定, 根据定义有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$, 于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0.$$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定阵. □

例 5.11　已知实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵.

证明　设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 那么 $\lambda^2-3\,\lambda+2$ 为 $\boldsymbol{A}^2-3\,\boldsymbol{A}+2\,\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 的特征值, 故 $\lambda^2-3\,\lambda+2=0$. 由此可得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$, 可见 $\boldsymbol{A}$ 的一切可能特征值均大于零, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵. □

例 5.12　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵, 证明 $|\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\,|>1$.

证明　由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$. 由主轴定理 (定理 5.2), 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1\end{pmatrix}.$$

上式两边取行列式得

$$|\,\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}\,|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

另一方面,

$$|\,\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{Q}\,|=|\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,|\,|\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\,|\,|\,\boldsymbol{Q}\,|=|\,\boldsymbol{Q}\,|^{-1}\,|\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\,|\,|\,\boldsymbol{Q}\,|=|\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\,|,$$

所以 $|\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\,|>1$. □

5.4　二 次 曲 面

本节介绍二次曲面方程的化简与曲面的分类问题. 由于正交变换保持向量的长度不变, 即保持几何图形不变, 因此用正交变换化二次型为标准形的问题可应用到几何中二次曲面的分类问题.

设空间中一般二次曲面的方程为

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2\,a_{12}x_1x_2 + 2\,a_{13}x_1x_3 + 2\,a_{23}x_2x_3 \\
& \quad + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0,
\end{aligned}
$$

其中 x_1, x_2, x_3 分别表示空间中一点的横标、纵标、立标.

利用矩阵运算, 上述方程可写成

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + c = 0,$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B} = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, 这里 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. 再利用主轴定理, 作正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2.$$

相应地,

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = b_1'y_1 + b_2'y_2 + b_3'y_3.$$

这样, 二次曲面的方程化成

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 + b_1'y_1 + b_2'y_2 + b_3'y_3 + c = 0.$$

再对上式进行适当的平移便可以得到二次曲面的标准形式. 根据 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的不同取值, 可得到二次曲面的 17 种标准方程.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (椭球面)

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$ (虚椭球面)

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$ (点)

(4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (单叶双曲面)

(5) $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (双叶双曲面)

(6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$ (二次锥面)

(7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z.$ (椭圆抛物面)

(8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z.$ (双曲抛物面)

(9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (椭圆柱面)

(10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1.$ (虚椭圆柱面)

(11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0.$ (直线 z 轴)

(12) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (双曲柱面)

(13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$ (一对相交平面)

(14) $x^2=a^2.$ (一对平行平面)

(15) $x^2=-a^2.$ (一对虚平行平面)

(16) $x^2=0.$ (一对重合平面)

(17) $x^2=2py.$ (抛物柱面)

例 5.13 已知二次曲面的方程

$$x_1^2+3\,x_2^2+x_3^2+2\,ax_1x_2+2\,x_1x_3+2\,x_2x_3=4$$

的图形为柱面, 求此柱面的母线的方向向量, 并说出此柱面的名称.

解 把所给方程左端的二次型记作

$$f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

设正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 把 $f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)$ 化成标准形

$$f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2.$$

因为 $f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)=4$ 代表柱面, 故 λ_1, λ_2, λ_3 中至少有一个为零, 即 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 因此 $|\,\boldsymbol{A}\,|=0$. 而 $|\,\boldsymbol{A}\,|=-(a-1)^2$, 由此可得 $a=1$.

当 $a=1$ 时,

$$|\,\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\,|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=4$. 于是二次曲面的标准方程为

$$y_2^2+4\,y_3^2=4.$$

可见它是一个椭圆柱面.

下面求柱面母线的方向. 从柱面的标准方程知柱面母线平行于 y_1 轴, 故柱面母线的方向向量在 $O\text{-}y_1y_2y_3$ 坐标系中的坐标为 $(1,\,0,\,0)^{\mathrm{T}}$. 因而在 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 坐标系中的坐标为 $\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{q}_1,\,\boldsymbol{q}_2,\,\boldsymbol{q}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{q}_1$. 这就是说, 柱面母线的方向向量就是属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{q}_1$.

对 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{q}_1$ 可取为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\,0,\,-1)^{\mathrm{T}}$. □

例 5.14 问二次曲面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+4\,x_1x_2+4\,x_1x_3+4\,x_2x_3=0$$

代表何种曲面.

解 由例 5.2 知, 二次型

$$f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4\,x_1x_2+4\,x_1x_3+4\,x_2x_3$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成

$$f(\,x_1,\,x_2,\,x_3\,)=-y_1^2-y_2^2+5\,y_3^2.$$

此时二次曲面方程变成

$$-y_1^2-y_2^2+5\,y_3^2=0,$$

即

$$5\,y_3^2=y_1^2+y_2^2.$$

由此可见, 该曲面方程代表锥面. □

例 5.15 求 k 的值, 使二次曲面

$$2\,x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\,x_1x_2+kx_2x_3=1$$

表示椭球面.

解 令

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + kx_2x_3,$$

此二次型的矩阵是

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dfrac{k}{2} \\ 0 & \dfrac{k}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$, 所以当且仅当 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定 (即特征值 $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, 3$) 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示椭球面. 此时 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式大于零. 而

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\Delta_3 = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dfrac{k}{2} \\ 0 & \dfrac{k}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{k^2}{2} > 0,$$

解得 $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$.

因此, 当 $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ 时, $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示椭球面. ▷ □

本章小结

本章首先介绍二次型及其矩阵表示, 然后讨论如何化二次型为标准形, 最后介绍正定二次型并给出其等价刻画. 二次曲线与二次曲面为二次型理论提供了几何背景, 实对称矩阵是研究二次型的重要工具. 学习本章可以采用两个方面的策略: 一是用几何的直观来化解代数的抽象, 二是打通本章内容与前四章所学知识之间的联系.

二 次 型

对称矩阵二次型, 相关理论总对应.
是否合同有标准, 惯性指数定分明.
线面多姿无穷尽, 分门别类看方程.
坐标变换寻常事, 斗转星移扭乾坤.

▷ 视频: 用二次型研究二次曲面的类型. 该视频分析了用二次型研究二次曲面的类型的原理.

习 题 5

(A)

一、填空题

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$ 所对应的二次型为________.

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 对应的矩阵是________.

3. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 对应的矩阵是________.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为________, 正惯性指数是________.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的秩为 3, 负惯性指数为 1, 则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的规范形为________.

7. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=6y_1^2$, 则 $a=$________.

8. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是________.

9. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1, $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

二、选择题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2$ 的矩阵为 ( ).

(A) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵为 ( ).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　　).

(A) 合同且相似;　　(B) 合同但不相似;

(C) 不合同但相似;　　(D) 不合同且不相似.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 (　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$;　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$;　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$;　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

5. 二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有对角元为正是 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为正定的 (　　).

(A) 充分条件但非必要条件;　　(B) 必要条件但非充分条件;

(C) 充分必要条件;　　(D) 既不充分也不必要条件.

6. 二次曲面 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3=1$ 表示 (　　).

(A) 椭球面;　(B) 单叶双曲面;　(C) 双叶双曲面;　(D) 柱面.

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$, 若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{p}_1,-\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 (　　).

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$;　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$;　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$;　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

8. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 (　　).

(A) $a>1$;　(B) $a<-2$;　(C) $-2<a<1$;　(D) $a=1$ 或 $a=-2$.

9. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2, −1, 1, 则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 (　　).

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$;　(B) $y_1^2-y_2^2+y_3^2$;　(C) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$;　(D) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×2 实矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 则以下矩阵中不是正定矩阵的为 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$;　(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　(C) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$;　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(B)

1. 写出下列二次型对应的矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2+2x_1x_3+x_3^2+4x_2x_3$;

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$;

(4) $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2$.

2. 设矩阵 A 与 B 合同, 矩阵 C 与 D 合同, 证明 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$ 合同.

3. 将 A 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行得 B, 再将 B 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列得 C, 证明 A 与 C 合同.

4. 问下列哪些矩阵是等价的, 相似的, 合同的?

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 用正交变换化下列二次型为标准形, 并写出所用的正交变换.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

6. 用配方法化下列二次型为标准形, 并写出所用的可逆线性变换.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$, $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 证明存在可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 使

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = y_1^2.$$

8. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 \quad (a > 0)$$

通过正交变换化为标准形 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 以及所用的正交变换矩阵.

9. 已知二次型

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz,$$

(1) 用正交变换把二次型 $f(x, y, z)$ 化成标准形, 并写出正交矩阵;

(2) 求函数 $f(x, y, z)$ 在单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的最大值与最小值.

10. 设 A, B 为正定矩阵, 证明 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵.

11. 设 A 为正定矩阵, 证明 A^*, A^{-1} 均为正定矩阵.

12. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 为正定阵的充分必要条件为 $\mathrm{r}(A) = n$.

13. 设实对称矩阵 A 满足 $A^3 - 4A^2 + 5A - 2E = O$, 证明 A 为正定阵.

14. 设 A 为正定矩阵且为正交矩阵, 证明 $A = E$.

15. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 已知矩阵 $B = \lambda E + A^{\mathrm{T}}A$, 证明当 $\lambda > 0$ 时, 矩阵 B 为正定矩阵.

16. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

问 λ 为何值时, $f(x_1, x_2, x_3)$ 为正定二次型?

17. 判别下列二次型是否正定:

(1) $f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

(2) $f(x_1, \cdots, x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$.

18. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定矩阵, b_i 为非零常数, $i=1, 2, \cdots, n$, 证明 $\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$ 也是正定矩阵.

19. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$, 求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 并确定 k 为何值时, $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

(C)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量, k 为实数, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$,

(1) 证明 $\boldsymbol{H}$ 为实对称阵;

(2) 证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量, 并求相应特征值;

(3) k 为何值时, $\boldsymbol{H}$ 为正交矩阵;

(4) k 为何值时, $\boldsymbol{H}$ 为可逆矩阵;

(5) k 为何值时, $\boldsymbol{H}$ 为正定矩阵.

2. 证明二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值, 最小值分别为 $\boldsymbol{A}$ 的最大, 最小特征值.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$. 求 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\cdots+\boldsymbol{A}^k|$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3, 求 y;

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

5. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3 \quad (b>0)$$

对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形, 并写出正交变换.

6. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2,

(1) 求参数 a 以及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种曲面.

7. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 均为正定矩阵, λ 是 $\boldsymbol{B}$ 的一个实特征值, 证明 $|\lambda| < 1$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 且满足条件 $\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

(2) 当 k 为何值时, $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 证明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角矩阵.

10. 设二次型

$$f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 为实数. 试问: 当 $a_1, \cdots, a_n$ 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为正定二次型?

11. 求 k 的值, 使

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + kx_2x_3 = 1$$

表示单叶双曲面.

12. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

(1) 求 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

13. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1) 证明 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

14. 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2,

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

15. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.