第二章 刚体的运动

1. 2.1 刚体运动学
2. 2.2 刚体动力学
3. 2.3 角动量定理及角动量守恒定律
4. 2.4 动能定理及机械能守恒定律

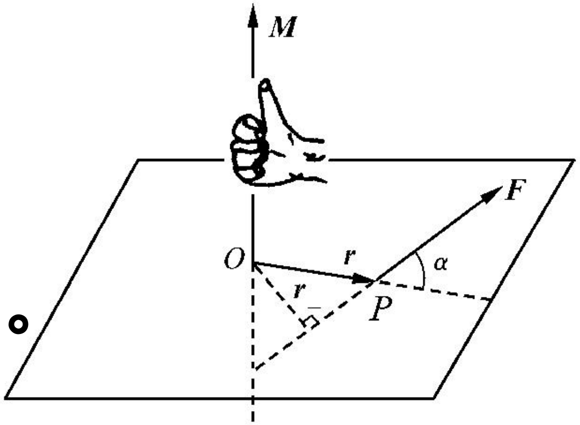
一、力矩的定义

（1）定义：位矢$\vec{r}$ 和力$\vec{F}$ 的矢积定义为力矩，即

$$\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}$$

（2）要素：由力的大小、方向和作用点共同决定；

（3）效果：引起刚体转动状态的改变。



力矩的大小：$M_Z = rF\sin\theta$

力矩的方向：垂直于位矢 $\vec{r}$ 和力 $\vec{F}$ 构成的平面且满足右手螺旋法则。

二、力矩的计算

（1）外力矩

作用到定轴转动刚体上任意一点的外力矩大小等于位矢和切向力的乘积，即 $M_z = rF_t$

（2）内力矩

刚体内各质点间的作用力对转轴的内力矩为零，

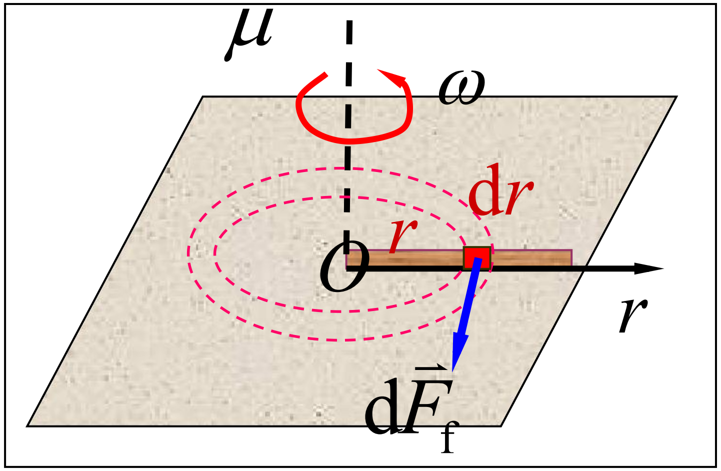
即 $\vec{M} = \sum \vec{M}_{ij} = 0$

（3）合力矩

合力矩等于各分力矩的矢量和，即

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

例 一质量为 m、长为 L 的均匀细棒，可在水平桌面上绕通过其一端的固定轴转动，已知细棒与桌面的摩擦因数为 μ，求棒转动时受到摩擦力矩的大小。



解： 在距转轴为 r 的位置处取一段质元 dm，该质元受到的摩擦力矩为

$$\mathrm{d}M_f = r\mathrm{d}F_f = r(\mu \mathrm{d}mg) = \frac{\mu mg}{L} r\mathrm{d}r$$

$$M = \frac{\mu mg}{L}\int_0^L r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\mu mgL$$

我们正青春年少

一、转动惯量的定义

转动惯量是表征物体转动时惯性大小的量度，用符号 J 表示，单位是 $m^2 \cdot Kg$。

二、转动惯量的计算

（1）质点： $J = r^2 m$

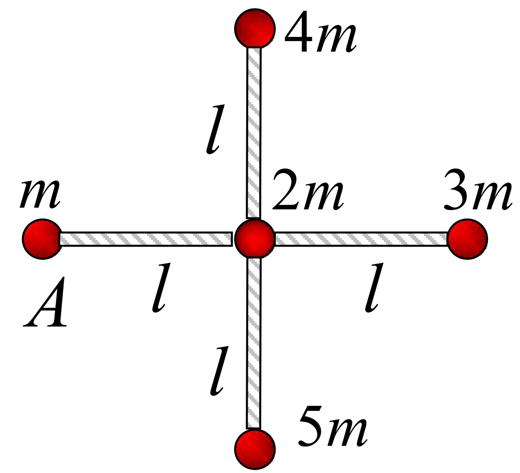
（2）质点系： $J = \sum r_i^2 m_i$

（3）刚体： $J = \int r^2 \mathrm{d}m$

$$\mathrm{d}m = \begin{cases} \rho \mathrm{d}V & \text{体分布} \\ \sigma \mathrm{d}S & \text{面分布} \\ \lambda \mathrm{d}l & \text{线分布} \end{cases}$$

转动惯量取决于刚体自身的性质，即与刚体的**质量、质量分布以及转轴的位置**有关。

例 由长l的轻杆连接的质点如图所示，求质点系对过A点垂直于该平面的轴的**转动惯量**。



解： 由转动惯量的定义式

$$J=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$J=2ml^2+3m(2l)^2+(4m+5m)(\sqrt{2}l)^2$$

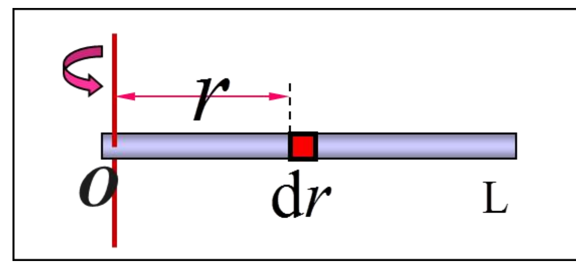
思考： 转轴移至质量为$2m$的杆中心处 $J=?$

2.2.2 转动惯量

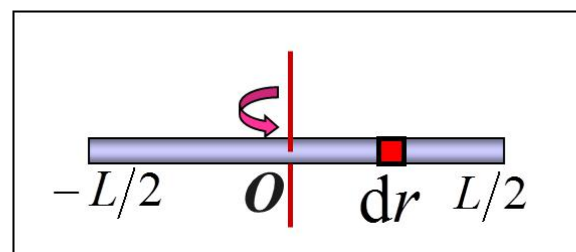
例 一质量为m、长为 L 的均匀细长棒，试求：（1）绕其一端垂直轴的转动惯量；（2）绕其中垂线垂直轴的转动惯量。

解： 在距离坐标原点为 O的位置取线元dr，则

$$dm=\frac{m}{L}dr \qquad \mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=\frac{m}{L}r^2\mathrm{d}r$$



(1) $$J=\frac{m}{L}\int_0^L r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}mL^2$$



(2) $$J=\frac{m}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{12}mL^2$$

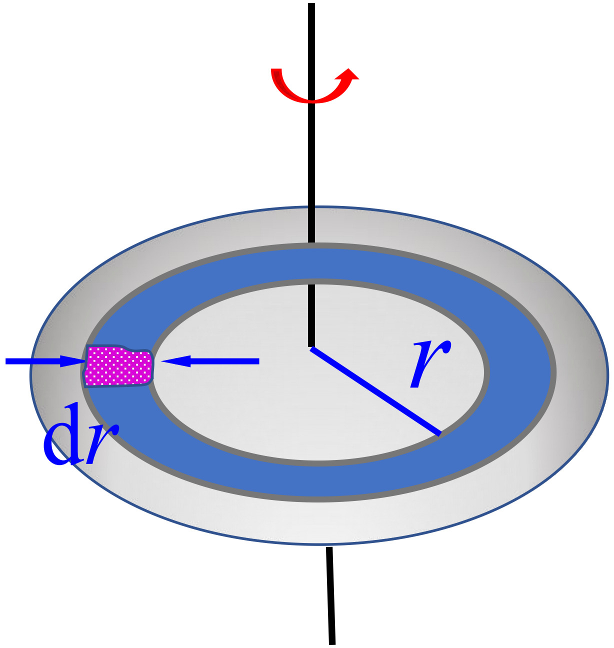
例 一质量为m、半径为R的均匀圆盘，试求该圆盘以其中垂线为转轴的转动惯量。

解： 在距圆心为的位置取微圆环 $dS = 2\pi r dr$，则

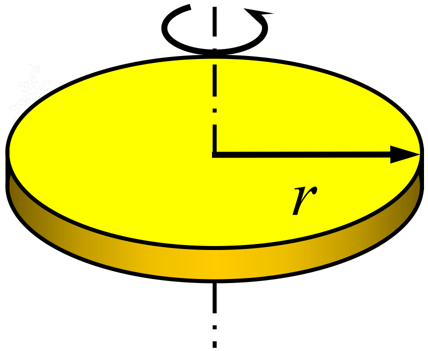
$$dm = \frac{m}{\pi R^2} dS = \frac{2m}{\pi R^2} r dr$$

$$dJ = r^2 dm = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

$$J = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2$$

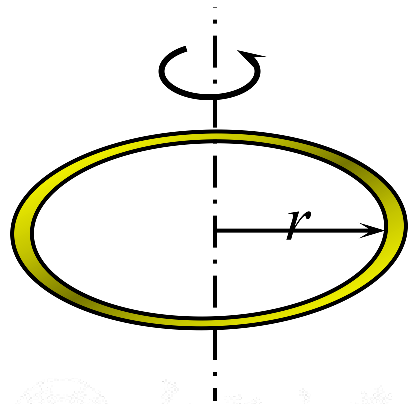


几种常见刚体转动惯量



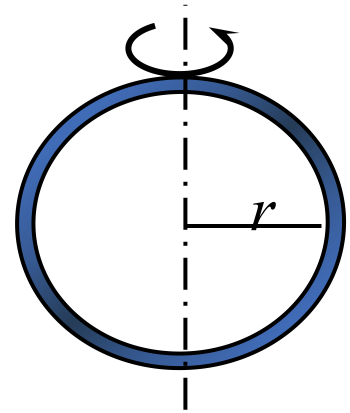
薄圆盘转轴通过中心与盘面垂直

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$



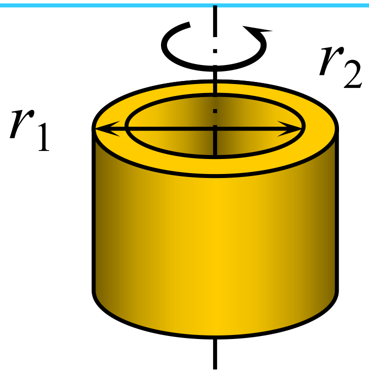
圆环转轴通过中心与盘面垂直

$$J=mr^2$$



圆环转轴沿直径

$$J=\frac{1}{2}mr^2$$



圆筒转轴沿几何轴

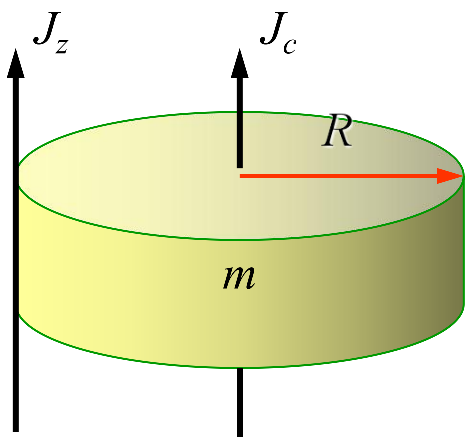
$$J=\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$$

几何形状不规则的刚体的转动惯量，由实验测定。

2.2.2 转动惯量

平行轴定理: 若刚体对过质心的轴的转动惯量为J_c,则刚体对与该轴相距为d 的平行轴z的转动惯量J_z是

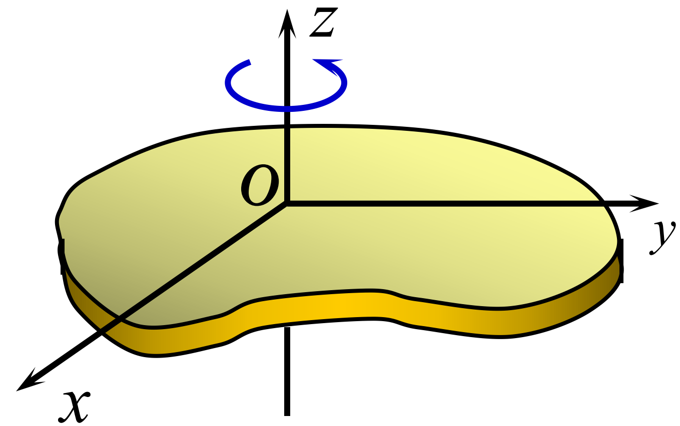
$$\boxed{J_z = J_c + md^2}$$



对圆柱形刚体:

$$J_Z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

正交轴定理:

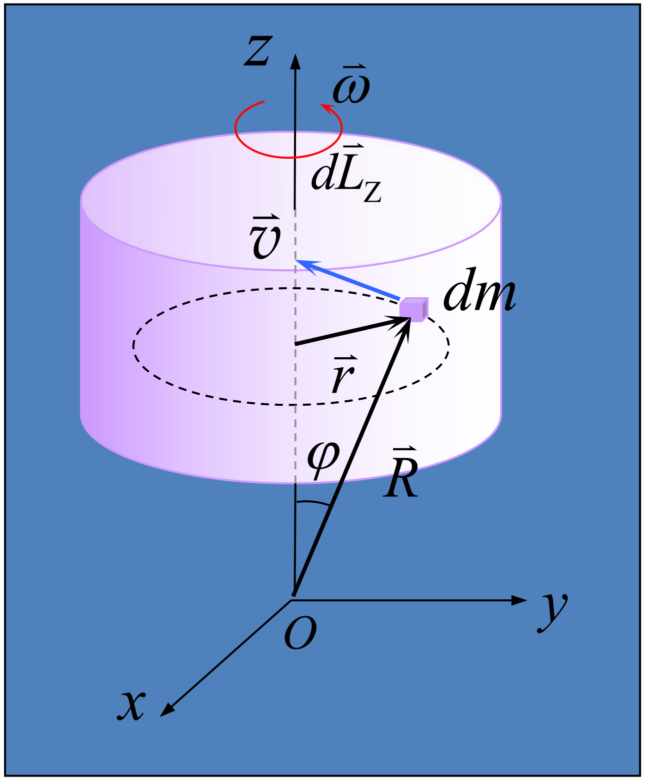


对平面刚体: $\boxed{J_z = J_x + J_y}$

一、转动定律

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比，即

$$M_Z = J\alpha$$



质元dm的角动量为 $d\vec{L} = \vec{R}\times dm\vec{v}$

$$dL_Z = Rdmv\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$= rdmv = r^2 dm\omega$$

$$L_Z = \left(\int dmr^2\right)\omega$$

定轴转动： $M_Z = \dfrac{dL_Z}{dt} = J\dfrac{d\omega}{dt} = J\alpha$

说明:

(1) α 与 M_Z方向相同，**沿轴向**。

(2) M_Z、J、α 对同一转轴，为**瞬时关系**。

(3) 转动中 $M_Z=J\alpha$与平动中$F=ma$ **地位相同**。

解题思路

(1) 选择惯性参考系，确定研究对象，进行受力分析；

(2) 建立坐标系，由转动定律列动力学方程;

(3) 利用其他约束条件列补充方程；

(4) 先通过符号求解再代入数值计算结果。

例 电风扇在开启后，经时间 t_1 达到额定角速度 ω_0，当关闭电机后，经过时间 t_2 风扇停转，已知风扇的转动惯量为 J，如果摩擦阻力矩和电机的电磁力矩均为常量，求电机的电磁力矩 M。

解： 根据题意，由转动定律得

开启过程： $M - M_{\mathrm{f}} = J\alpha_1$

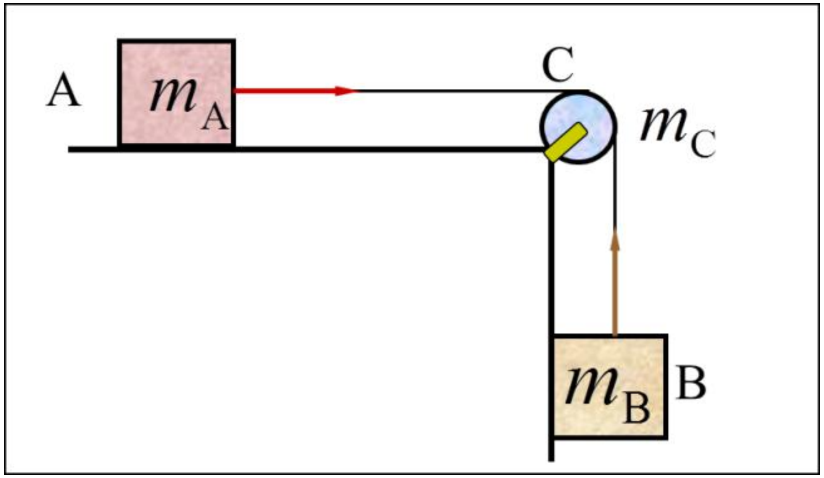
关闭过程： $M_{\mathrm{f}} = J\alpha_2$

$$\omega_0 = \alpha_1 t_1 = \alpha_2 t_2$$

$$M = J\omega_0\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

例 一半径为R、质量为m_C的滑轮C，通过一质量不计的绳索一段系在质量为m_A的物体A上，另一端系在一质量为m_B的物体B上，假设水平面是光滑的、绳索与滑轮间摩擦力忽略不计，试求：(1)两物体的加速度和绳索两端的张力为多少；(2)物体B从静止下落h时的速率是多少。

解： 以地面为参考系，分别对三个物体进行受力分析，运用牛顿第二定律和转动定律分别得动力学方程



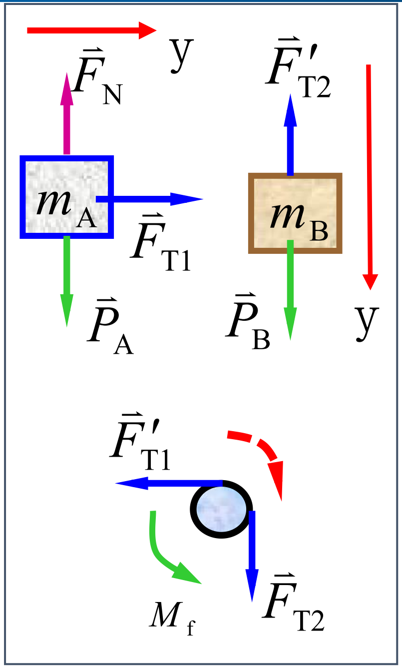
2.2.3 转动定律及应用

物体A： $F_{T1}=m_A a$

物体B： $m_B g-F_{T2}=m_B a$

物体C： $RF_{T2}-RF_{T1}=J\alpha$

$$a=a_t=R\alpha$$



$$a=\frac{m_B g}{m_A+m_B+m_C/2} \qquad F_{T1}=\frac{m_A m_B g}{m_A+m_B+m_C/2} \qquad F_{T2}=\frac{(m_A+m_C/2)m_B g}{m_A+m_B+m_C/2}$$

（2）物体B从静止做匀加速直线运动，下落h时的速率为

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{\frac{2m_B gh}{m_A+m_B+m_C/2}}$$