第 4 章　矩阵的特征值和特征向量

在工程技术领域, 有许多问题, 诸如振动问题、稳定性问题、弹性力学问题等常常归结为求矩阵的特征值和特征向量. ▷ 在数学上, 解微分方程及简化矩阵计算等等也要用到特征值理论. 本章介绍了特征值、特征向量和矩阵相似的概念及性质, 讨论了矩阵相似于对角矩阵的条件, 证明了实对称矩阵一定相似于对角阵, 并介绍了把实对称矩阵正交相似对角化的方法.

4.1　相似矩阵

我们先来看一个实例. ▷

设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} - y_{n-1}, \\ y_n = -x_{n-1} + 3y_{n-1}, \end{cases}$ 其中 $x_0 = y_0 = 1$. 我们来求 x_n, y_n. 将上述公式转化成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. 利用此递推公式得

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此, 求 $\boldsymbol{A}^n$ 就是解决问题的关键. 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$. 并且 $\boldsymbol{D}^n$ 容易计算, 那么

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1})^n = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1})\cdots(\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1},$$

于是 $\boldsymbol{A}^n$ 就容易计算了. 为此我们引出下述概念.

定义 4.1　设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 如果存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

▷ 视频: 特征值、特征向量以及相似矩阵的历史简介.

▷ 视频: 求方阵的幂 —— 对角矩阵的一个应用.

例 4.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ a & \lambda_1\end{pmatrix}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 特别地, $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$ 相似.

证明 比较 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可知, $\boldsymbol{A}$ 可以经过初等变换化成 $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & a\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{r}_1\leftrightarrow \mathrm{r}_2}\begin{pmatrix}0 & \lambda_2\\ \lambda_1 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{c}_1\leftrightarrow \mathrm{c}_2}\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ a & \lambda_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

记 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. □

容易看到, 矩阵的相似关系具有如下性质.

性质 4.1 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.

(1) 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

(2) 对称性: 如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 那么 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性: 如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

可见, 矩阵的相似关系是一种等价关系. 相似的矩阵还具有如下性质.

性质 4.2 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $f(x)$ 是一个多项式, 那么 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $f(\boldsymbol{B})$ 相似.

证明 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 那么 $f(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$, 于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^s$. 故

$$f(\boldsymbol{B})=\sum_{s=0}^{n}a_s\boldsymbol{B}^s=\sum_{s=0}^{n}a_s(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\sum_{s=0}^{n}a_s\boldsymbol{A}^s\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}.$$

可见, $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$. □

性质 4.3 相似矩阵的行列式相等.

证明 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 从而

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}|^{-1}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}|.$$ □

性质 4.4 相似矩阵有相同的秩.

证明 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价. 因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$. □

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角线上元素之和称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹, 记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, 即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

矩阵的迹有如下性质.

性质 4.5 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, k 为任意数, 则

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$;

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$;

(3) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA})$.

证明 容易证明前面二式, 这里只证第三式. 记

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \quad \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n}, \quad \boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{n\times n} \quad \boldsymbol{BA} = (d_{ij})_{n\times n},$$

则

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA}). \qquad \square$$

性质 4.6 相似矩阵有相同的迹.

证明 设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$. 于是

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AP})) = \mathrm{tr}\,((\boldsymbol{AP})\boldsymbol{P}^{-1}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}). \qquad \square$$

注意到对角矩阵的幂很容易计算. 事实上,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

因此, 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵, 我们就很容易计算 $\boldsymbol{A}^m$. 这样一个自然的问题是任一 n 阶矩阵均相似于对角阵吗? 我们有如下定理.

定理 4.1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件是存在 n 个线性无关的列向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和 n 个数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得 $\boldsymbol{A\xi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. 此时, 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$, $\boldsymbol{\varLambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\varLambda}$.

证明 (必要性) 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\varLambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 那么存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\varLambda}$, 即 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P\varLambda}$. 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n) = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{A\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{A\xi}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{\xi}_n).$$

于是 $\boldsymbol{A\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i$, $i = 1, \cdots, n$. 因为 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 故 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关.

(充分性) 若存在 n 个线性无关的列向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 满足

$$\boldsymbol{A\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n)$, 则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 且

$$\boldsymbol{AP} = (\boldsymbol{A\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{A\xi}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \lambda_n \boldsymbol{\xi}_n) = \boldsymbol{P\Lambda}.$$

由此可得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵. □

定义 4.2 如果 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ *可相似对角化*, $\boldsymbol{\Lambda}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的*相似标准形*.

4.2 特征值与特征向量

上节证明了 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件是存在 n 个线性无关的列向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和 n 个数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\boldsymbol{A\xi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

因此, 矩阵的相似对角化问题转化为寻求满足 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$ 的 $\boldsymbol{\xi}$ 和 λ. 尽管 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$ 一定满足 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 但由于我们最终还要用这些向量来构造可逆矩阵, 所以我们考虑是否存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$.

定义 4.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 如果存在数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{\xi}$, 满足 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个*特征值*, 称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的*特征向量*.

例如, 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A\xi} = 2\boldsymbol{\xi}$, 可见, 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是属于特征值 2 的一个特征向量.

如果 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$ 那么对任意 k, 有

$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi}) = k(\boldsymbol{A\xi}) = k(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda(k\boldsymbol{\xi}).$$

因此, 当 $k \neq 0$ 时, $k\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 所以属于特征值 λ 的特征向量是不唯一的.

那么如何求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量? 下面讨论这一问题.

设 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 为属于特征值 λ_0 的一个特征向量, 即 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$, 于是 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$. 换句话说, $\boldsymbol{\xi}$ 为 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, 由推论 3.2 可知, $|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

定义 4.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵, 则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的*特征矩阵*,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的*特征多项式*, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的*特征方程*.

根据前文的推导可得以下定理.

定理 4.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 则

(1) λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的一个根;

(2) $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量当且仅当 $\boldsymbol{\xi}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

由定理 4.2 可知, 求特征值与特征向量的方法为:

第一步, 计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$;

第二步, 计算 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的全部根, 这些根就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

第三步, 对每一个特征值 λ_i, $i=1,2,\cdots,n$, 求齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\eta}_t$, 其中 $k_1,\cdots,k_t$ 为任意不全为零的数.

这里, 我们强调两点, 其一是由定义 4.3 知, 零向量不是特征向量; 其二是实矩阵未必有实的特征值.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, 那么从几何意义上来看, $\boldsymbol{A\xi}$ 表示平面上把 $\boldsymbol{\xi}$ 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 得到的向量. 因此, 当 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{A\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 不共线, 换言之, 不存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 没有实特征值. 事实上, 我们也可以从 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1$ 看出, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 没有实根.

例 4.2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 直接计算得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2.$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$, 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 对特征矩阵作初等行变换

$$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此得 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

于是, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ (k_1, k_2 不全为零) 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的全部特征向量.

对于特征值 $\lambda_3=5$, 对特征矩阵作初等行变换

$$\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

由此得 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

于是, $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ ($k_3\neq 0$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=5$ 的全部特征向量. □

例 4.3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

令 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$, 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 求得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

于是, $k_1\boldsymbol{\xi}_1$ ($k_1 \neq 0$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的全部特征向量.

对于特征值 $\lambda_3 = 2$, 求得 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

于是, $k_3\boldsymbol{\xi}_3$ ($k_3 \neq 0$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3 = 2$ 的全部特征向量. □

例 4.4　设 λ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 为相应的特征向量. 若 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的一个特征值及相应的特征向量.

解　由假设知, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 那么, 两边左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi},$$

于是,

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}).$$

由此可见 λ 为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ 为相应的特征向量. □

例 4.5　设 λ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 证明 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 其中 $\varphi(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$.

证明　设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 即 $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{0}$ 而且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}.$$

由此可得

$$\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}^{s-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}^{s-1}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda\boldsymbol{A}^{s-1}\boldsymbol{\xi} = \cdots = \lambda^s\boldsymbol{\xi},$$

故

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} &= (a_m\boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{\xi} \\ &= a_m\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\xi} + \cdots + a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} + a_0\boldsymbol{E}\boldsymbol{\xi} \\ &= a_m\lambda^m\boldsymbol{\xi} + \cdots + a_1\lambda\boldsymbol{\xi} + a_0\boldsymbol{\xi} \\ &= (a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0)\boldsymbol{\xi} \\ &= \varphi(\lambda)\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

可见, $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $\varphi(\lambda)$ 的特征向量. □

下面我们来看矩阵特征值的一些性质.

性质 4.7　相似矩阵有相同的特征多项式, 因此有相同的特征值.

证明　设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 因而有

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| &= |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}|^{-1}|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| \\ &= |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同, 从而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值相同. □

值得注意的是, 特征多项式相同的矩阵未必相似. 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的特征多项式都是 $(\lambda-1)^2$, 但是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不相似. 事实上, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 相似, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}$. 由此可得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{E}$. 但是上面的 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 并不相等. 此矛盾表明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不相似. 从上述推导过程还可以看出, 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 相似的矩阵只有 $\boldsymbol{E}$ 本身.

性质 4.8 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则

(1) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$;

(2) $\lambda_1 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

证明 一方面,

$$\begin{aligned} |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn}) + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}| \\ &= \lambda^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\boldsymbol{A}|, \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| &= (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

比较 λ^{n-1} 的系数和常数项得

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}|.$$ □

例 4.6 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 和 1. 求 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}|$.

解 令 $f(x) = x + 2$. 因为 2 和 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 由例 4.5 可知 $f(2)$ 和 $f(1)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值, 即 4 和 3 是 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 的特征值. 而 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 是 2 阶矩阵, 故 4 和 3 是 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ 的全部特征值.

由性质 4.8(2) 可知 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = 4 \times 3 = 12$. □

根据性质 4.8(2) 还可以得到如下判断一个方阵是否可逆的方法.

推论 4.1 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值均非零.

▷ 视频: 特征值与迹以及行列式的关系. 该视频对性质 4.8 的证明进行了讲解. 另外还可以观看视频: 求 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值与特征向量, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零的 3 维列向量.

性质 4.9 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

证明 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 即得. □

4.3 矩阵可相似对角化的条件

利用特征值与特征向量, 矩阵可相似对角化的结论 (定理 4.1) 可叙述为下面的定理.

定理 4.3 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$, 那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

现在的问题是如何判断 $\boldsymbol{A}$ 是否有 n 个线性无关的特征向量. 假设 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$, 对每一特征值 λ_i, 求出 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 即 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量. 我们自然要问: 把这 m 组向量合在一起是否线性无关? 下面, 我们就来讨论这一问题.

定理 4.4 设 λ_1,λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 与 λ_2 的线性无关的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

证明 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0}. \tag{4.3.1}$$

两边左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\lambda_2\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0}. \tag{4.3.2}$$

在 (4.3.1) 式两边乘 λ_2, 得

$$k_1\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\lambda_2\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0}. \tag{4.3.3}$$

用 (4.3.2) 式减去 (4.3.3) 式, 得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 故由上式可得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 所以 $k_1 = \cdots = k_s = 0$. 代入 (4.3.1) 式得

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_r\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}.$$

再由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关得到 $l_1 = \cdots = l_r = 0$.

这就证明了 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. □

对 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的个数作归纳法, 可得到如下定理.

定理 4.5 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_j 的线性无关的特征向量, $j = 1, 2, \cdots, m$, 则向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{mr_m}$$

是线性无关的.

推论 4.2 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

从定理 4.5 知, 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 为 $(\lambda_j\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系, $j = 1, 2, \cdots, m$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{mr_m}$$

一定线性无关. 如果 $r_1 + \cdots + r_m = n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 如果 $r_1 + \cdots + r_m < n$, 则 $\boldsymbol{A}$ 没有 n 个线性无关的特征向量, 从而 $\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

推论 4.3 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

现在我们回过来看一下例 4.2 和例 4.3. 在例 4.2 中, 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

有 3 个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化. 事实上, 令

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

而在例 4.3 中, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

只有 2 个线性无关的特征向量, 因此 A 不能相似于对角阵.

例 4.7　设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

解　A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a). \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的二重根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时, $|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)$. 由此可得 A 的特征值为 2, 2, 6. 因为矩阵

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

的秩为 1, 所以 $\lambda = 2$ 对应的线性无关的特征向量有两个, 从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方, 从而 $18 + 3a = 16$, 解得 $a = -\dfrac{2}{3}$.

当 $a = -\dfrac{2}{3}$ 时, A 的特征值为 2, 4, 4. 矩阵

$$4E - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个, 从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化. □

例 4.8 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 与 y,

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 故

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}),\quad |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,$$

即 $\begin{cases}2+x=2+y+(-1),\\-2=-2y.\end{cases}$ 由此可得 $x=0, y=1$.

(2) 由 (1) 可知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为对角阵, 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=1, \lambda_3=-1$. 依次求出它们对应的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆阵, 且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$. □

例 4.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-7)(\lambda+2)$ 知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-2$. 此时, 属于 $\lambda_1=7$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,

属于 $\lambda_2=-2$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\begin{pmatrix}1&-4\\1&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0\\0&-2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

由 $\boldsymbol{P}^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5\cdot 7^n + 4(-2)^n & 4\cdot 7^n - 4(-2)^n \\ 5\cdot 7^n - 5(-2)^n & 4\cdot 7^n + 5(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$ □

定理 4.3 给出了 n 阶矩阵相似于对角阵的判别法. 一般说来, 一个 n 阶矩阵未必相似于对角阵. 例如, 形如 $\boldsymbol{J}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{k\times k}$ 的矩阵通常称为 k 阶的若尔当 (Jordan) 块. 当 $k > 1$ 时, $\boldsymbol{J}_0$ 不能相似于对角阵.

进一步我们有如下定理 (略去证明).

定理 4.6 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 一定相似于

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为若尔当块, $i = 1, \cdots, s$. $\boldsymbol{J}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形. 如果不考虑 $\boldsymbol{J}_1, \cdots, \boldsymbol{J}_s$ 的排列次序, $\boldsymbol{J}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定.

根据上述定理可知, 两个 n 阶矩阵相似的充分必要条件是它们具有相同的若尔当标准形.

4.4 实对称阵的相似对角化

一般地, n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值未必是实数, 它也未必相似于对角阵. 上一节给出了 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件. 本节我们证明实对称矩阵的特征值为实数, 而且它一定正交相似于对角阵, 即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵. 为此, 先看一下实对称阵的特征值与特征向量.

定理 4.7 实对称阵的特征值为实数.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵, λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 即为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的解. 由代数基本定理知, λ_0 为复数. 如果 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量, 记 $\boldsymbol{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, 那么 a_i 为复数. 现对任一矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 定义 $\overline{\boldsymbol{B}}=(\overline{b_{ij}})$, 这里 $\overline{b_{ij}}$ 为 b_{ij} 的共轭复数. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 因此, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{A}}$. 对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$, 取共轭后可得

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\xi}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{\xi}}=\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}}=\overline{\lambda_0\boldsymbol{\xi}}=\overline{\lambda}_0\,\overline{\boldsymbol{\xi}}.$$

在上式两边取转置

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\xi}})^{\mathrm{T}}=\overline{\lambda_0}\,\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}},$$

上式两边右乘以 $\boldsymbol{\xi}$, 得

$$\overline{\lambda}_0\,\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\lambda_0\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}.$$

故

$$(\lambda_0-\overline{\lambda}_0)\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=0.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$, 因而 $\overline{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\overline{a}_1a_1+\cdots+\overline{a}_na_n\neq 0$. 于是可得 $\lambda_0=\overline{\lambda}_0$, 即 λ_0 为实数. □

定理 4.8 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

证明 设 λ_1, λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, 即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2.$$

由于

$$\begin{aligned}\lambda_1\langle\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle&=\langle\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle=\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle=\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1\\&=\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=\langle\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2\rangle\\&=\langle\boldsymbol{\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle=\lambda_2\langle\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle,\end{aligned}$$

故 $(\lambda_1-\lambda_2)\langle\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle=0$. 又因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $\langle\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\rangle=0$, 即 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 正交. □

定理 4.9 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{Q}$ 的列向量组 $\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的标准正交的特征向量组. [▷]

▷ 视频: 实对称阵均可正交相似对角化.

这里给出求 $\boldsymbol{Q}$ 的具体方法.

第一步, 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, 即 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的全部不同的根.

第二步, 对于每一个特征值 λ_j, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_j \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\xi}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{jr_j}$. 然后把 $\boldsymbol{\xi}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{jr_j}$ 进行施密特正交化和单位化, 得 $\boldsymbol{q}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{q}_{jr_j}$, 它们与 $\boldsymbol{\xi}_{j1}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{jr_j}$ 等价, 因此它们也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_j 的特征向量, 并且它们是标准正交向量组.

第三步, 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_{11},\cdots,\boldsymbol{q}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{q}_{m1},\cdots,\boldsymbol{q}_{mr_m})$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 因此 $r_1+\cdots+r_m=n$. 由定理 4.8 知, $\boldsymbol{Q}$ 的列向量组为正交单位向量组, 从而 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 由于 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 因此

$$
\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left(\begin{array}{ccc:c:ccc}
\lambda_1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & \lambda_1 & & & & \\
\hdashline
& & & \ddots & & & \\
\hdashline
& & & & \lambda_m & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & \lambda_m
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r_1\text{行} \\
\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r_m\text{行}
\end{array}.
$$

例 4.10　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

解　由例 4.2 知, $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=5$. 属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量为

$$
\boldsymbol{\xi}_1=(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}.
$$

属于特征值 λ_3 的线性无关的特征向量为

$$
\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}.
$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 正交化得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1, \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\xi}_2-\frac{\langle \boldsymbol{\xi}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}} \\
&= \frac{1}{2}(-1,\ -1,\ 2)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

再单位化得

$$q_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},$$
$$q_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ -1,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

对 $\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化得

$$q_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q = (q_1,\ q_2,\ q_3)$, 即

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

则 Q 为正交阵, 且 $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. □

例 4.11 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵, 则 A, B 相似的充分必要条件为 A, B 的特征多项式相同, 且此时, 存在正交矩阵 Q, 使 $Q^{-1}AQ = B$.

证明 (必要性) 如果 A, B 相似, 那么由性质 4.7 知, A, B 的特征多项式相同.

(充分性) 若 A, B 的特征多项式相同, 则它们有相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 由定理 4.9 知存在正交阵 Q_1 和 Q_2, 使得

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q_2^{-1}BQ_2,$$

于是 $(Q_1Q_2^{-1})^{-1}AQ_1Q_2^{-1} = B$. 记 $Q = Q_1Q_2^{-1}$, 则 Q 为正交阵且 $Q^{-1}AQ = B$. □

例 4.12 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明: $\boldsymbol{\xi}$ 为属于特征值 λ_2 的特征向量的充分必要条件为 $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, 且 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交;

(2) 求 A.

解 (1) (必要性) 因为 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}_1$ 为属于不同特征值的特征向量, 那么 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1$ 正交. 又因为 $\boldsymbol{\xi}$ 是特征向量, 所以 $\boldsymbol{\xi} \neq 0$.

(充分性) 由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵可知, 一定存在 $\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 为属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量. 因此, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的基. 故

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3.$$

由 $\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1\rangle=0, \langle\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_1\rangle=0, i=2, 3,$ 可知

$$0=\langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1\rangle=k_1\langle\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1\rangle,$$

于是 $k_1=0$, 因而 $\boldsymbol{\xi}=k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_2 的特征向量.

(2) 由 (1) 知, $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_2 的特征向量就是满足 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=0$ 的非零向量 $\boldsymbol{\xi}$. 令 $\boldsymbol{\xi}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=x_2+x_3=0$. 分别取 $(x_1, x_2)=(1, 0)$ 和 $(x_1, x_2)=(0, 1)$ 得

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_3=(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_2$ 与 $\boldsymbol{\xi}_3$ 已正交, 故只需将 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\|\boldsymbol{\xi}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{\|\boldsymbol{\xi}_2\|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_3=\frac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 而且

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\ &=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 4.13 证明n阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

证明 因为

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - n)\,\lambda^{n-1},$$

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix} = (\lambda - n)\,\lambda^{n-1},$$

所以$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$有相同的特征值 $\lambda_1 = n, \lambda_2 = 0\ (n-1$ 重).

由于$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵, 所以$\boldsymbol{A}$相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

又因为$\mathrm{r}(\lambda_2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = 1$, 所以$\boldsymbol{B}$的属于特征值$\lambda_2 = 0$的特征向量有$n-1$个是线性无关的, 于是$\boldsymbol{B}$也相似于$\boldsymbol{\Lambda}$. 故$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似. $\square$

本章小结

本章介绍了矩阵的相似关系, 并利用特征值与特征向量研究矩阵可相似对角化的条件, 最后证明实对称矩阵一定可以正交相似对角化. ▷ 本章综合运用了前三章的内容, 从而将矩阵、行列式、向量和线性方程组这几个方面的知识有机地联系起来. 仔细体会这些知识点之间的联系, 不仅可以加深对前三章所学内容的理解, 而且有助于下一章的学习.

▷ 视频: 实对称阵的正交相似对角化 —— 例子与点评和能相似对角化的矩阵未必能正交相似对角化.

特征值和特征向量

矩阵相似必等价，　常问可否对角化.
一般方阵难求幂，　对角化后事好办.
为此先求特征值，　解累方程得向量.
特征向量如不足，　标准形归若尔当.

习　题　4

(A)

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^2 =$ ________.

2. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 的属于 $\lambda = 3$ 的特征向量, 则 $(a, b) =$ ________.

4. 设 3 为矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值, 则 $y =$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ, 则 $(\boldsymbol{A}^*)^2 + \boldsymbol{E}$ 必有特征值________.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, -1, 2, 则 $\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}$ 的特征值是________, $|\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E}| =$ ________.

7. 若 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式 $|\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{E}| =$ ________.

8. 设 $\begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ 相似于对角阵, 则 $a =$ ________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

10. 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 2$, 则 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

11. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同, 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为________.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, k)^{\mathrm{T}}$, 若 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k =$________.

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量, 则矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

▷ 视频: 求 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值与特征向量, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零的 3 维列向量. 该视频中介绍的方法可以用于本题.

二、选择题

1. 和矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似的矩阵为 (　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. 设 $\lambda=2$ 为可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于 (　　).

(A) $\frac{4}{3}$;　(B) $\frac{3}{4}$;　(C) $\frac{1}{2}$;　(D) $\frac{1}{4}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为 (　　).

(A) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$;　(B) $\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$;　(C) $\lambda|\boldsymbol{A}|$;　(D) $\lambda|\boldsymbol{A}|^n$.

4. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1, -1, 2, 则下列矩阵中可逆矩阵是 (　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$;　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$;　(C) $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$;　(D) $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$.

5. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$, 其对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3$. 取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1)$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=$ (　　).

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的 (　　).

(A) 充分必要条件;　(B) 充分而非必要条件;

(C) 必要而非充分条件;　(D) 既非充分也非必要条件.

7. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 (　　).

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$;　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量;

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵;　(D) 对任意常数 t, $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}$ 的属于特征值 λ 的特征向量是 (　　).

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$;　(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$;　(C) $\boldsymbol{P\alpha}$;　(D) $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

9. 设 λ_1, λ_2 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是 (　　).

(A) $\lambda_1\neq0$;　(B) $\lambda_2\neq0$;　(C) $\lambda_1=0$;　(D) $\lambda_2=0$.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q}$ 为 2 阶正交矩阵, 且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}=$ (　　).

(A) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$; (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$; (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$; (D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=($　　　$)$.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 (　　　).

(A) $a=0, b=2$;　　(B) $a=0$, b 为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;　　(D) $a=2$, b 为任意常数.

13. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 则下列结论错误的是 (　　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似;　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似;

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似;　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(B)

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵, 证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

2. 如果 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 相似, $\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 相似, 证明 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$ 相似.

3. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换且 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 证明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 与 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$ 可交换.

4. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为*幂等矩阵*. 证明与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换, 再将第 i 列和第 j 列对换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

6. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1) $\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$;　(3) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$;　(5) $\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$;

(6) $\begin{pmatrix}a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&a\end{pmatrix}_{n\times n}$, 其中 $a\neq 0$.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2, 并举例说明 1 或 2 未必一定为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 如果 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 均不可逆, 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.

9. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\,1,\,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 求 a,λ.

10. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,\,-1,\,2$.

(1) 求 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值;

(2) 求 $|\boldsymbol{B}|$;

(3) 求 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|$.

11. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,\,2,\,-3$, 求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

12. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一行中 n 个元素之和都是 λ_0, 证明 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 并求出其对应的一个特征向量.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 证明

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 -1;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都等于 1, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

14. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, 如果 $k_1k_2\neq 0$, 证明 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

15. 求下列矩阵的特征值与特征向量, 并问 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化. 若可以, 则求出对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

18. 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量,

(1) 求参数 $a,\,b$ 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化? 并说明理由.

19. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\,\lambda_2=-2,\,\lambda_3=1$, 对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

20. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix},$$

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

21. 试求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为

(1) $\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,　(3) $\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$,

(4) $\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$.

22. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 求 a, b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

23. 设 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(1,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(2,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}$. 求 $\boldsymbol{A}$.

24. 设 1, 1, -1 为 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ 2,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量. 求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{A}$.

(C)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 若存在正整数 k 使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个幂零矩阵. 证明不为零的幂零矩阵不能相似对角化.

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆阵且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 证明 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 证明: 如果任意 n 维非零列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 那么 $\boldsymbol{A}$ 一定是数量矩阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 若存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, 证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^2)$.

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_2=(1,\ 2,\ 4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\xi}_3=(1,\ 3,\ 9)^{\mathrm{T}}$, 又向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ \cdots,\ a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ \cdots,\ b_n)^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量, 且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$, 记矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$, 求:

(1) $\boldsymbol{A}^2$;　(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

8. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ k,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量, 求常数 k 的值.

9. 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

10. 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足

$$\begin{cases} x_n = 3\,x_{n-1} + 4\,y_{n-1}, \\ y_n = 5\,x_{n-1} + 2\,y_{n-1}, \end{cases}$$

$x_0 = 7$, $y_0 = -2$, 求通项 x_n, y_n.

11. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角阵.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1, 1 的特征向量, 如果 $\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 求证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$;

(3) 证明 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

14. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个解.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{\Lambda}$;

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A} - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$.