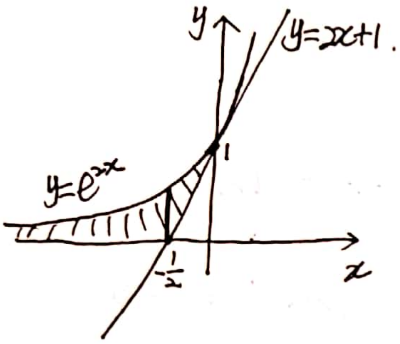
第六章 历年考题

2004–2005.

1. 求由曲线 $y=e^{2x}$，x 轴及该曲线在点 $(0,1)$ 处的切线所围成的平面图形面积

解. $y=e^{2x}$. $y'=2e^{2x}$. $k_{切}=2$. 切线方程：$y-1=2x$. 即 $y=2x+1$.



法一：$S=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}e^{2x}dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}[e^{2x}-(2x+1)]dx$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}-x^2-x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-1}-0+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

法二. $y=2x+1\Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$. $y=e^{2x}\Rightarrow x=\frac{\ln y}{2}$

$$S=\int_0^1\left(\frac{y-1}{2}-\frac{\ln y}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^1(y-1)dy-\int_0^1\ln y\,dy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_0^1-[y\ln y]_0^1+\int_0^1 y\cdot\frac{1}{y}dy\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-0+[y]_0^1\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

其中. $\lim\limits_{y\to0}y\ln y=\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln y}{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}(-y)=0$.

2005–2006.

1. 由 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x$ $(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为（D）

A. $\frac{4}{3}$.　B. $\frac{2}{3}\pi$.　C. $\frac{2}{3}\pi^2$.　D. $\frac{4}{3}\pi$

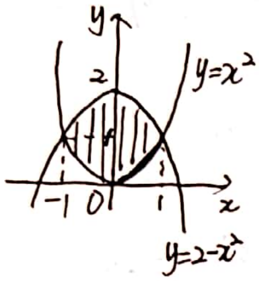
解. $V=\int_0^\pi\pi\left(\sin^{\frac{3}{2}}x\right)^2dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,d\cos x$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\,d\cos x=-2\pi\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2\pi\left[0-1+\frac{1}{3}\right]=\frac{4}{3}\pi$$

2. 求由抛物线 $y=x^2$ 和 $y=2-x^2$ 所围图形面积，并求此图形绕 x 轴旋转一周所围旋转体体积.

解：$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow$ 交点 $(-1,1)$，$(1,1)$



$$S=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=2\int_0^1(2-2x^2)dx=4\int_0^1(1-x^2)dx$$

$$=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

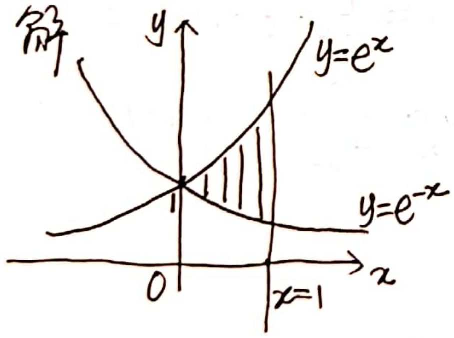
$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left[(2-x^2)^2-(x^2)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)dx$$

$$=8\pi\int_0^1(1-x^2)dx=8\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=8\pi\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}\pi.$$

2007-2008.

1. 把由曲线 $y=e^x$、$y=e^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转，计算所得的旋转体体积.

解



$$V=\int_0^1\pi\left[e^{2x}-e^{-2x}\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^2+e^{-2}-2)$$

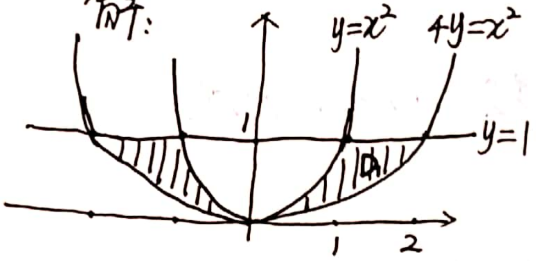
2008-2009.

1. $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的图形面积 $S=($ B $)$

A. $\int_a^b f(x)dx$. B. $\int_a^b|f(x)|dx$. C. $-\int_a^b f(x)dx$. D. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

2. 求曲线 $y=x^2$, $4y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成的图形的面积.

解:



所围图形如图所示.

$$S=2D_1=2\int_0^1(2\sqrt{y}-\sqrt{y})dy=2\int_0^1\sqrt{y}dy$$

$$=2\times\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

法二. $$S=2D_1=2\left[\int_0^1\left(x^2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_1^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx\right]$$

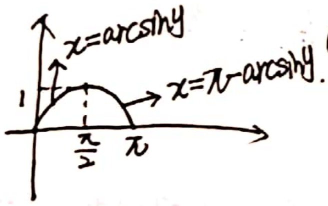
$$=2\left(\int_0^1\frac{3}{4}x^2dx+\left[x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2\right)=2\left(\left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^1+\frac{5}{12}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

3. 求曲线 $y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$ 与 $y=0$ 所围图形绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积.

解. $$V=\int_0^\pi 2\pi x\sin x\,dx=-2\pi\int_0^\pi x\,d\cos x=-2\pi[x\cos x]_0^\pi+2\pi\int_0^\pi\cos x\,dx$$

$$=2\pi^2+2\pi[\sin x]_0^\pi=2\pi^2.$$



(法二)

$$V=\int_0^1\pi\left[(\pi-\arcsin y)^2-(\arcsin y)^2\right]dy$$

$$=\int_0^1(\pi^3-2\pi^2\arcsin y)dy$$

$$=\pi^3[y]_0^1-2\pi^2[y\arcsin y]_0^1+2\pi^2\int_0^1 y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

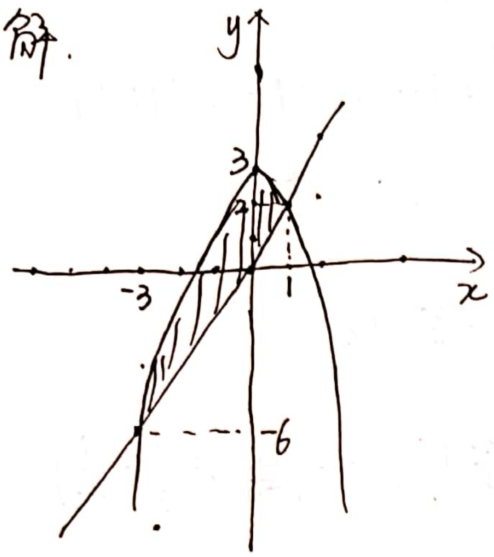
$$=\pi^3-\pi^3-\pi^2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}d(1-y^2)$$

$$=-\pi^2\cdot\left[2\sqrt{1-y^2}\right]_0^1=2\pi^2.$$

2008-2009.

1. 求曲线 $y=2x$. $y=3-x^2$ 所围图形面积

解.



$$\begin{cases} y=2x \\ y=3-x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{交点}.\ (1,2).\ (-3,-6)$$

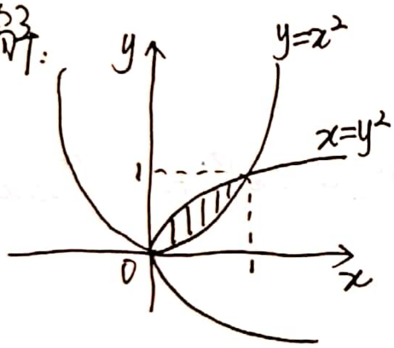
$$S=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{1}$$

$$=\frac{5}{3}+9=\frac{32}{3}.$$

2. 求曲线 $y=x^2$、$x=y^2$ 所围图形绕 y 轴旋转所产生旋转体体积.

解:



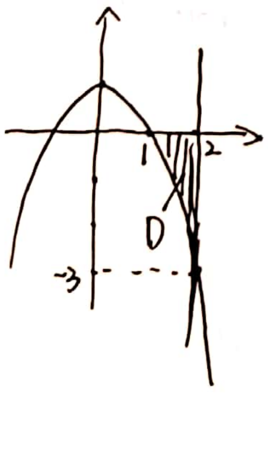
$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow \text{交点}.\ (0.0).\ (1.1).$$

$$V=\int_0^1 \pi(y-y^4)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$$

2009-2010

1. D是 $y=1-x^2$ 和 x 轴及 $x=2$ 所围区域. (1) 求 S_D. (2). 求D绕 x 轴旋转的体积



解. $S_D=\int_1^2 -(1-x^2)\,dx=\int_1^2(x^2-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=\frac{4}{3}$

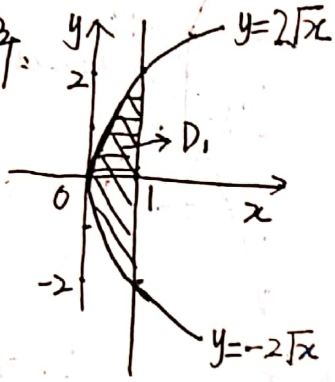
$$V=\int_1^2\pi(1-x^2)^2\,dx=\pi\int_1^2(1-2x^2+x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_1^2=\pi\cdot\frac{11}{5}$$

2010-2011

1. 一平面图形由 $y^2=4x$ 和直线 $x=1$ 所围. 求该平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积

解:



$$\begin{cases} y^2=4x \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow (1,2).\ (1,-2)$$

平面图形 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体体积与所求一致

$$V=\int_0^1 \pi 4x\,dx=\left[2\pi x^2\right]_0^1=2\pi$$

2013-2014.

1. 求由不等式 $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ 所确定区域面积.

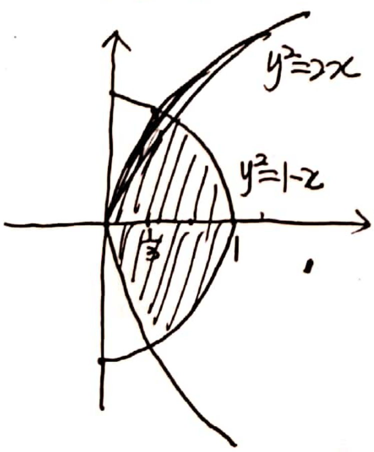
解: $$S=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}d(4-x^2)$$

$$=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[2\sqrt{4-x^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2$$

2013-2014. 开学重考.

1. 求由曲线 $y^2=2x$ 与 $y^2=1-x$ 所围图形面积

解: $$\begin{cases} y^2=2x \\ y^2=1-x \end{cases} \Rightarrow \text{交点}: \left(\frac{1}{3},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \left(\frac{1}{3},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$



$$S=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-y^2-\frac{y^2}{2}\right)dy=\int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{3}{2}y^2\right)dy$$

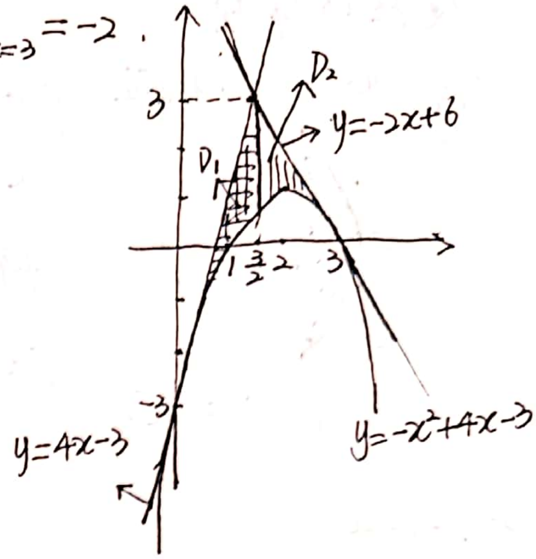
$$=2\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\left(1-\frac{3}{2}y^2\right)dy=2\left[y-\frac{1}{2}y^3\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2014-2015.

1. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围图形面积.

解: $y'=-2x+4$. $k_1=y'|_{x=0}=4$. $k_2=y'|_{x=3}=-2$.



过 $(0,-3)$ 切线: $y+3=4x$ 即: $y=4x-3$

过 $(3,0)$ 切线: $y=-2(x-3)$ 即: $y=-2x+6$

$$\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-2x+6 \end{cases} \Rightarrow 交点: \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

$$S=D_1+D_2=\int_0^{\frac{3}{2}}\left[4x-3-(-x^2+4x-3)\right]dx$$

$$+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[-2x+6-(-x^2+4x-3)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}$$

$$=\frac{9}{8}+\left[9-\frac{63}{8}\right]=\frac{9}{4}$$

$$\left(\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x-3)^2d(x-3)=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{9}{8}\right.$$

2015-2016.

1. 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $a\le x\le b$ 的一段弧的长度.

解: $S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$. $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$

$$=\int_a^b\sqrt{1+x}\,dx$$

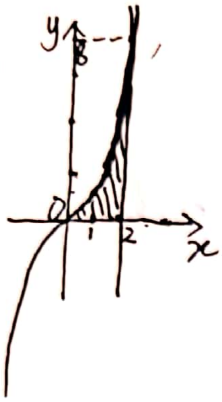
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=\frac{2}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right].$$

2016-2017.

1. 一平面图形由 $y=x^3$ 和直线 $x=2$. $y=0$ 所围. 求 ① 该平面图形面积.

② 该图形绕x轴旋转所得旋转体体积.

解:



$\begin{cases} y=x^3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$ 交点 (2.8).

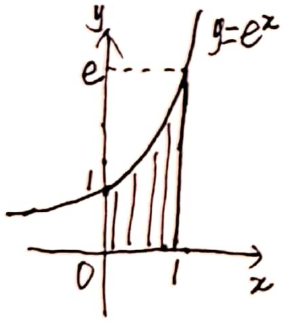
① $S=\int_0^2 x^3 dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4$

② $V=\int_0^2 \pi x^6 dx=\frac{\pi}{7}\left[x^7\right]_0^2=\frac{128}{7}\pi$.

2016-2017 重考.

1. 平面图形由 $y=e^x$ 和直线 $x=1$. x轴. y轴所围. 求

① 该图形面积. ② 该图形绕x轴旋转一周所得旋转体体积.



解: $\begin{cases} y=e^x \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$ 交点: $(1.e)$

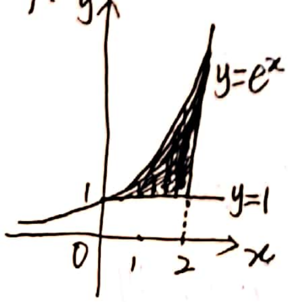
① $S=\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

② $V=\int_0^1 \pi e^{2x} dx=\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

2017-2018

1. 一平面图形由 $y=e^x$ 和直线 $y=1$. $x=2$ 所围成. 求绕x轴旋转的旋转体体积.

解:



$V=\int_0^2 \pi\left[(e^x)^2-1^2\right]dx=\pi\int_0^2 e^{2x}dx-\pi\int_0^2 dx$

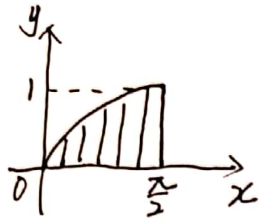
$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2-\pi\left[x\right]_0^2$

$=\frac{\pi}{2}(e^4-1)-2\pi=\pi\left(\frac{e^4}{2}-\frac{5}{2}\right)$

2017-2018 (16周)

1. 求曲线 $y=\sin x$ 与直线 $x=0$. $y=0$. $x=\frac{\pi}{2}$ 所围图形的面积. 及其绕 x 轴旋转所成的旋转体体积.

解:



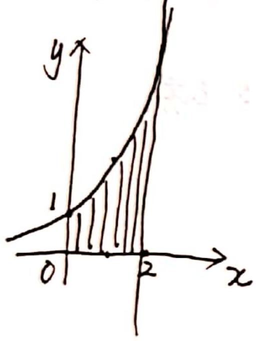
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx.$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

2017-2018 .重考.

1. 一平面由 $y=e^x$ 和直线 $x=0$. $y=0$. $x=2$ 所围. 求此图形绕 x 轴旋……体积.



解: $V=\int_0^2\pi e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^2=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$

2018-2019

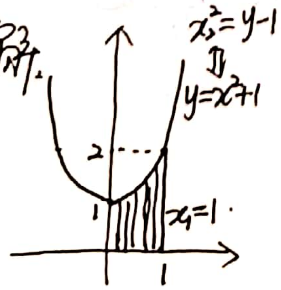
1. 求曲线 $y=1-\ln\cos x$ 上自 $x=0$ 至 $x=\frac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

解: $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx=\left[\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$

$y'=-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=\tan x$

2. 平面图形由 $y=x^2+1$. $x=1$. x 轴、y 轴所围. 求 ① 面积. ②. 绕 y 体积.

解:



① $S=\int_0^1(x^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

② $V=\int_0^1 2\pi x(x^2+1)\,dx=2\pi\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}\pi.$

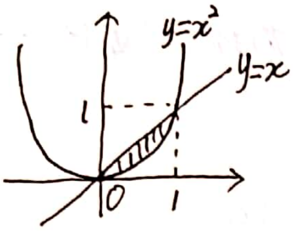
或: $V=\int_0^2\pi x_1^2\,dy-\int_1^2\pi x_2^2\,dy=\int_0^2\pi\,dy-\int_1^2\pi(y-1)\,dy$

$=\pi[y]_0^2-\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^2=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi.$

2018-2019

1. 求由 $y=x^2$. $x=y$ 所围图形绕 y 轴旋------体积.

解: $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y \end{cases} \Longrightarrow$ 交点. $(0,0)$. $(1,1)$



(法一). $V=\int_0^1 2\pi x[x^2-x^4)dx = 2\pi\int_0^1 (x^3-x^5)dx$

$=2\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 2\pi\cdot\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}$

(法二). $V=\int_0^1 \pi y\,dy-\int_0^1 \pi y^2\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1-\pi\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1$

$=\pi\cdot\frac{1}{2}-\pi\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}$.

2018-2019. 重考.

1. 求 $y=\int_0^x \tan t\,dt$ 上自 $x=0$ 至 $x=\frac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

解: $y'=\tan x$.

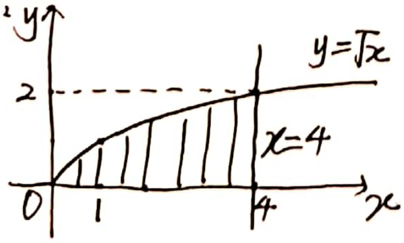
$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx$

$=\left[\ln|\sec x+\tan x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$

2019-2020. (16周).

1. 图形由 $y=\sqrt{x}$. $x=4$. $y=0$ 所围. ①求面积A. ②求绕 y 轴旋转···体积.

解:



① $A=\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$

②. $V=\int_0^4 2\pi x\sqrt{x}\,dx=2\pi\cdot\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\frac{128}{5}\pi$.

(法二). $V=\int_0^2\pi[4^2-y^4]dy=\pi\left[16y-\frac{y^5}{5}\right]_0^2$

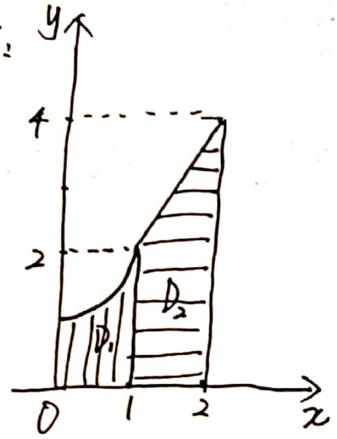
$=\pi\left[32-\frac{32}{5}\right]=\frac{128}{5}\pi$.

2019-2020.

1. 光滑曲线方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(a\le t\le b)$ 的弧长公式 $S=$ $\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

2. 由 $f(x)=\begin{cases} 2^x & 0\le x\le 1 \\ 2x & 1<x\le 3 \end{cases}$、直线 $x=0$、$x=2$、x轴所围图形绕x轴旋---体积.

解:



$$V=\int_0^1 \pi(2^x)^2dx+\int_1^2\pi(2x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 4^x dx+4\pi\int_1^2 x^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1+4\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$=\frac{3\pi}{\ln 4}+\frac{28}{3}\pi$$