离 散 数 学

Discrete Mathematics
Discrete Structures
Discrete Mathematical Structures

2022年12月14日星期三

7 内容提要

1. 无向树
2. 生成树
3. 根树

7 本章学习要求

重点掌握 → 一般掌握 → 了解

1
1. 树的基本概念
2. 最小生成树
3. Huffman算法

2
1. 树的应用

3
1. 基本回路系统
2. 基本割集系统
3. 树的应用

新疆大学信息科学与工程学院
新疆大学 Xinjiang University

无向树

- **无向树**: 无回路的连通无向图
- **平凡树**: 平凡图（一个顶点，无边）
- **森林**: 每个连通分支都是树的非连通的无向图
- **树叶**: 树中度数为1的顶点
- **分支点**: 树中度数≥2的顶点

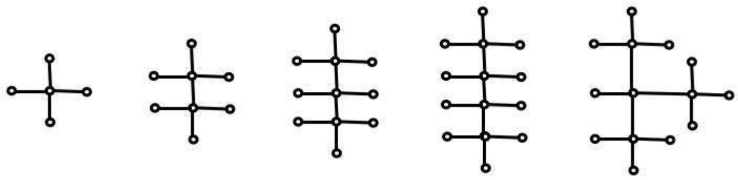
右图为一棵12阶树.

注:本章中所讨论的回路均指简单回路或初级回路

无向树

■ 树的起源

英国数学家凯莱(Arthur Cayley)于19世纪中叶研究饱和碳氢化合物C_nH_{2n+2}的同分异构体时提出树的概念. 当n=1,2,3时, 都只有一棵非同构的树; 当n=4时, 有2棵不同构的树.



甲烷　乙烷　丙烷　丁烷　异丁烷

无向树的性质

■ **定理** 设G=<V,E>是n阶m条边的无向图, 则下面各命题是等价的:

(1) G是树(连通无回路);

(2) G中任意两个顶点之间存在惟一的路径;

(3) G中无回路且m=n-1;

(4) G是连通的且m=n 1;

(5) G是连通的且G中任何边均为桥;

(6) G中没有回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有惟一的一个含新边的圈.

定理 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

无向树的性质

例1 已知无向树T中，有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶. 试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

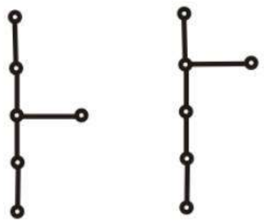
解 用树的性质$m=n-1$和握手定理.

设有x片树叶，于是

$n=1+2+x=3+x$,

$2m=2\times(2+x)=1\times3+2\times2+x$

解得$x=3$，故T有3片树叶.



T的度数列为1, 1, 1, 2, 2, 3

有2棵非同构的无向树.

无向树的性质

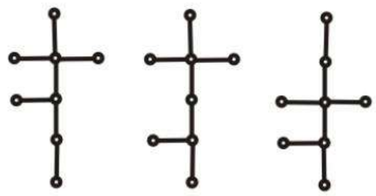
例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4. 求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

解 设T的阶数为n，则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

由握手定理得

$2m=2(n-1)=5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$

解得$n=8$，4度顶点为1个.



T的度数列为1,1,1,1,1,2,3,4

有3棵非同构的无向树

生成树

设G为无向连通图

G的**生成树**: G的生成子图并且是树

生成树T的**树枝**: G在T中的边

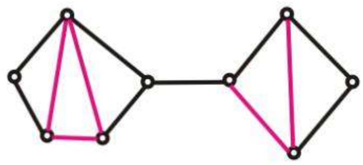
生成树T的**弦**: G不在T中的边

生成树T的**余树** $\overline{T}$: 所有弦的集合的导出子图

注意: $\overline{T}$ 不一定连通, 也不一定不含回路.

黑边构成生成树

红边构成余树



生成树的存在性

定理 任何无向连通图都有生成树.

证 用破圈法. 若图中无圈, 则图本身就是自己的生成树.

否则删去圈上的任一条边, 这不破坏连通性, 重复进行

直到无圈为止,剩下的图是一棵生成树.

推论 设n阶无向连通图有m条边, 则$m\geq n-1$.

基本回路与基本回路系统

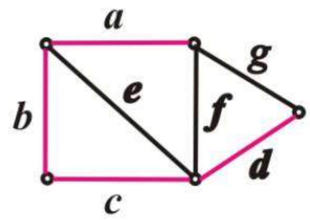
定义设T是连通图G的一棵生成树, 对每一条弦e, 存在惟一的由弦e和T的树枝构成的初级回路C_e, 称C_e为对应于弦e的**基本回路**. 称所有基本回路的集合为对应生成树T的**基本回路系统**.

求基本回路的算法: 设弦$e=(u,v)$, 先求T中u到v的路径Γ_{uv}, 再加上弦e.

例如

$C_e=e\ b\ c$, $C_f=f\ a\ b\ c$, $C_g=g\ a\ b\ c\ d$,

$C_{基}=\{C_e, C_f, C_g\}$.



基本割集与基本割集系统

定义设T是连通图G的一棵生成树, 对T的每一条树枝a, 存在惟一的由树枝a, 其余的边都是弦的割集S_a, 称S_a为对应树枝a的**基本割集**, 称所有基本割集的集合为对应生成树T的**基本割集系统**.

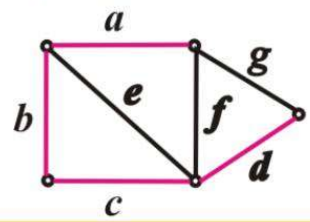
求基本割集的算法: 设a为生成树T的树枝, $T-a$由两棵子树T_1与T_2组成, 则

$S_a=\{e \mid e\in E(G)$且e的两个端点分别属于T_1与$T_2\}$.

例如 $S_a=\{a, f, g\}$, $S_b=\{b, e, f, g\}$,

$S_c=\{c, e, f, g\}$, $S_d=\{d, g\}$,

$S_{基}=\{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.



无向图与最小生成树

对无向图或有向图的每一条边e附加一个实数$w(e)$, 称作**边e的权**. 图连同附加在边上的权称作**带权图**, 记作$G=<V,E,W>$.

设T是G的生成树, T所有边的权的和称作**T的权**, 记作$W(T)$.

最小生成树: 带权图权最小的生成树

避圈法 (Kruskal) ——求最小生成树的算法

设G是n阶无向连通带权图G.

(1) 按权从小到大排列边(环除外), 设$W(e_1)\le W(e_2)\le\ldots\le W(e_m)$.

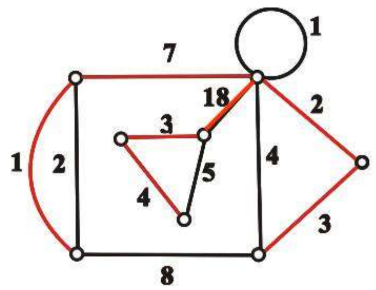
(2) 令$T\leftarrow\varnothing$, $i\leftarrow 1$, $k\leftarrow 0$.

(3) 若e_i与T中的边不构成回路，则令$T\leftarrow T\cup\{e_i\}$, $k\leftarrow k+1$.

(4) 若$k<n-1$, 则令$i\leftarrow i+1$, 转(3).

实例

例 求图的一棵最小生成树



w(T)=38

有向树与根树

有向树: 基图为无向树的有向图

根树: 有一个顶点入度为0, 其余的入度均为1的非平凡的有向树

树根: 有向树中入度为0的顶点

树叶: 有向树中入度为1, 出度为0的顶点

内点: 有向树中入度为1, 出度大于0的顶点

分支点: 树根与内点的总称

顶点v的层数: 从树根到v的通路长度

树高: 有向树中顶点的最大层数

新疆大学信息科学与工程学院
新疆大学 Xinjiang University

根树(续)

根树的画法: 树根放上方, 省去所有有向边上的箭头

如右图所示

a是树根

b,e,f,h,i是树叶

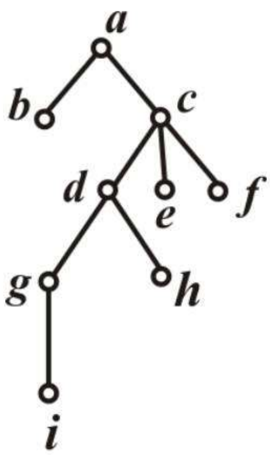
c,d,g是内点

a,c,d,g是分支点

a为0层; 1层有b,c; 2层有d,e,f;

3层有g,h; 4层有i.

树高为4



家族树

定义 把根树看作一棵**家族树**:

(1) 若顶点 a 邻接到顶点 b, 则称 b 是 a 的**儿子**, a 是b 的**父亲**;

(2) 若b和c为同一个顶点的儿子, 则称b和c是**兄弟**;

(3) 若$a\neq b$且a可达b, 则称a是b的**祖先**, b是a的**后代**.

设v为根树的一个顶点且不是树根, 称v及其所有后代的导出子图为以v为根的**根子树**.

根树的分类

有序树: 将根树同层上的顶点规定次序

r叉树:根树的每个分支点至多有r个儿子

r叉正则树: 根树的每个分支点恰有r个儿子

r叉完全正则树: 树叶层数相同的r元正则树

r叉有序树: 有序的r叉树

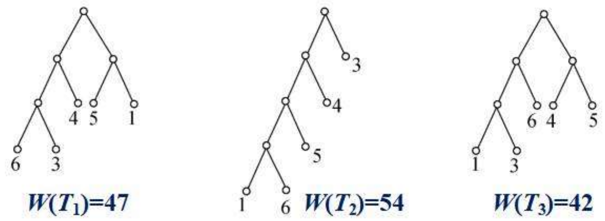
r叉正则有序树: 有序的r叉正则树

r叉完全正则有序树: 有序的r叉完全正则树

最优2叉树

定义 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$, 树叶的权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$, 称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权, 其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有权为$w_1, w_2, \ldots, w_t$的t片树叶的2叉树中, 权最小的2叉树称为**最优 2叉树**.

例如



新疆大学信息科学与工程学院 新疆大学 Xinjiang University

求最优2叉树的算法

Huffman算法:

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$,

① 作t片树叶, 分别以$w_1, w_2, \ldots, w_t$为权.

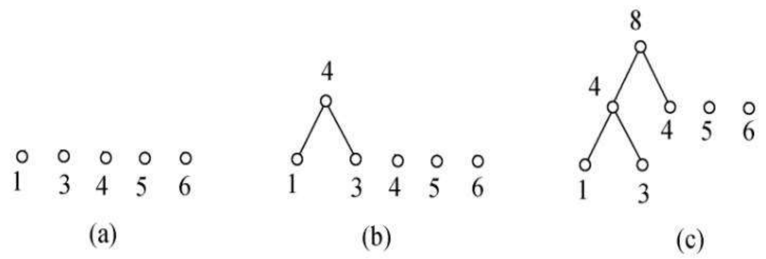
② 在所有入度为0的顶点(不一定是树叶)中选出两个权最小的顶点, 添加一个新分支点, 以这2个顶点为儿子, 其权等于这2个儿子的权之和.

③ 重复②, 直到只有1个入度为0 的顶点为止.

$W(T)$等于所有分支点的权之和

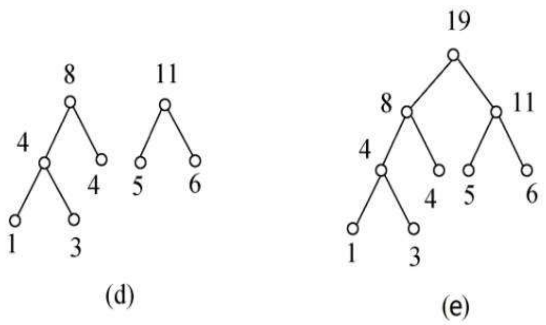
实例

例 求权为 1, 3, 4, 5, 6的最优树.



实例

例(续)



$W(T)$=42， 前面的T_3也是最优的.