(2015-2016.(第1学期))

一. 单选. 1. C 2. B 3. A 4. B. 5. A 6. A 7. B
8. B 9. B 10. A

二. 填空. 1. 7. 2. $2^{2015}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 3. 秩$(A)=1$ 14. $\lambda=2$ 15. $x=2$

16. $|A|=0$ 17. η_1 (也可以是η_2或η_3) $+k_1(\eta_1-\eta_2)+k_2(\eta_2-\eta_3)$ $(k_1,k_2\in R)$ 18. λ_0^{-2} (或$\frac{1}{\lambda_0^2}$)

19. $\begin{cases}x+2=y+x-1\\-2=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 20. 0

21 (略. 自行查书) 22. 解 由 $AB=A+2B\Rightarrow(A-2E)B=A$

故 $\begin{pmatrix}-2&3&3&0&3&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&1&3&2&5&3\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&4&3\\0&1&1&0&3&3\\0&0&2&2&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&3&3\\0&1&0&-1&2&3\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$

故 $A-2E$ 可逆, 且 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$

23. 解. $(A,b)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 由 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2}\\x_3=2x_4+\frac{1}{2}\end{cases}$ 得到一特解 $\eta=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

由齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$ 得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

故原方程的通解为 $x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in R)$.

24. 解. 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-4(3-\lambda)-4(1-\lambda)=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)$

故A的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=-1$

由 $\lambda_1=2$ 得 $(A-2E)x=0$

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 由 $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_2-x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

$p_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

由 $\lambda_2=5$ 得 $(A-5E)x=0$

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 由 $\begin{cases}2x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$ 得基础解系 $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$p_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

由 $\lambda_3=-1$ 得 $(A+E)x=0$

$$A+E=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 由 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}$ 得基础解系为 $\eta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$p_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

于是 $$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

故由正交变换 $x=Py$ 得到 $f=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$

四. 证明：正确的是 a，d

a. 证明：$\forall x\in\mathbb{R}^n$　$x\neq 0$　$x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx$

由A正定 $\Rightarrow x^TAx>0$　　由B正定 $\Rightarrow x^TBx>0$

故 $x^T(A+B)x=x^TAx+x^TBx>0$　即 $(A+B)$ 正定矩阵

d. 证明：$AA^T=E$，$BB^T=E$　　$AB(AB)^T=ABB^TA^T=AEA^T=E$　可 AB为正交矩阵.

2016－2017.（第一学期）

一. 选择：1. B.　2. B　3. A（故有A答案可得到 $r(A)=r(A,b)=m$）　4. A　5. A

A，B为n阶方阵
$AB\neq BA$
但 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

6. D.　7. C　8. D　9. $[|A|=\lambda_1\lambda_2=(-1)\times 2]$ A　10. B

二. 填空：1. 正（或+或+1）　2. $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{2017}=2^{2016}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$　13. $R(A)=2$　14. 3.

15. 秩$(A)=1$　16. $x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$　17. $|A|=0$　19. $x=0$

20. 0　21. 解 $$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&7\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1-r_3\\r_2-r_3\\r_4-r_3}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-6$$（按行~~按~~列展开）

22. 解 $\left|(2A)^{-1}-5A^{*}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}-5|A|A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{2}A^{-1}-\frac{5}{2}A^{-1}\right| = \left|-2A^{-1}\right|$

$= (-2)^3|A^{-1}| = -8\times 2 = -16$

23. 解: $(A, E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　（本题还可用分块矩阵求解。）

24 解: $(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

于是由 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 得到一特解 $\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

由其对应齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ 得基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

故原方程组的通解为 $x = \eta + k\xi = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k\in\mathbb{R})$

25（同上一套 15-16）

证明题: 26. 证: 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$

$x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1) = 0$

则有 即 $(x_1+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3 = 0$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关　故 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

即 该方程组仅有零解. 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关

26 或(另证). 证 由题意 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ 则 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆. 故 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 与 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 等价

且 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

27. $(A=A^T)$ $(A-2E)(A-2E)^T = (A-2E)(A-2E)$

$= A^2 - 4A + 4E = E$

故 $A-2E$ 为正交矩阵.

一、单选：1. D　2. A　3. D（等价秩相等）　4. C　5. B

判断：6-10：× × × × √

填空：11：6.　12. $|\alpha^T\alpha|=0$　13. E_n　14：$-A$　15. 1　16 $t\le r$　17：$-\frac{1}{2}$

18：$a=1$　19. $k=-2$　20：$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

21：解：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)$

22. 解：$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$　故 A可逆，且 $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

23. 解：$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 9 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & 6 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+5 \end{pmatrix}$

故 $a+5=0$ 即 $a=-5$ 时 方程有解；　$(A, b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

即有 $\begin{cases} x_1 = -4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 + 1 \end{cases}$ 其一特解为 $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　由其对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = -4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}$

得到基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

即原方程组的全部解为 $x = \eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

24. 解：$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 4 & 13 & 20 \end{pmatrix} \underset{r_2-r_1}{\overset{r_4-r_3,\ r_3-r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_2}{\overset{r_4-r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $r(A)=3$，极大无关组为：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，　$\alpha_4 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3$

25. 解: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第一行展开}}} (2-\lambda)^2(1-\lambda)$

故A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 有: $(A-2E)x=0$ $A-2E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 得有 $x_1-x_3=0$

其基础解系为 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 故属于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $k_1p_1+k_2p_2$ (k_1,k_2 不全为0)

当 $\lambda_3=1$ 时 有 $(A-E)x=0$ $A-E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 即 $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$

即 $p_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 故属于 $\lambda_3=1$ 的特征向量为 k_3p_3 ($k_3\neq 0$)

(2) 则A有3个线性无关的特征向量，故A可对角化，令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. 证明: 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_k\alpha_k+x_0\beta=0$

即有: $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+\cdots+x_kA\alpha_k+x_0A\beta=x_0A\beta=0$

而 $A\beta\neq0$ 故 $x_0=0$ 即 $x_1\alpha_1+\cdots+x_k\alpha_k=0$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，则 $x_1=x_2=\cdots=x_k=x_0=0$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta$ 线性无关。

(另证) 证明: 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta$ 线性相关，而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关
(反证)
则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_k\alpha_k$ 则 $A\beta=0$ 与 $A\beta\neq0$ 矛盾.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta$ 线性无关.

27. 证: 由已知 $A\alpha=\lambda\alpha$. 则 $A^5\alpha=\lambda^5\alpha$ $A^3\alpha=\lambda^3\alpha$

$(A^5-4A^3+E)\alpha=A^5\alpha-4A^3\alpha+\alpha=\lambda^5\alpha-4\lambda^3\alpha+\alpha=(\lambda^5-4\lambda^3+1)\alpha$

即 α 是 A^5-4A^3+E 的特征向量.

2017 — 2018 (18届)

一、单选. 1. B 2. C 3. A 4. B 5. B 二、判断 6-10: × ✓ × × ✓

三、填空: 11. $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 12. $A_{41}+A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-9$ 13. $|A^TB^{-1}|=|A|\cdot\frac{1}{|B|}=-\frac{2}{3}$

5

14. $A^{-1}=A-3E$ 15. $t=-3$ 16: $\gamma=(-5,10,3,20)$ 17: $a_1+a_2+a_3+a_4=1$

18: 2 19. $\alpha=-9$ 20. $-1+5+\lambda=3+2+1 \Rightarrow \lambda=2$

21. 解: $\begin{vmatrix} 4&2&2&2\\ 2&4&2&2\\ 2&2&4&2\\ 2&2&2&4 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 1&0&2&0\\ 1&0&0&2 \end{vmatrix} = 80$

22. 解:由 $AB=A+B \Rightarrow (A-E)B=A$ 则 $\begin{pmatrix} A-E, A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&-1&1&0&-1\\ 0&1&1&0&2&1\\ 1&-2&-2&1&-2&-1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1&2&1\\ 0&1&0&1&2&0\\ 0&0&1&-1&0&1 \end{pmatrix}$ 故 $A-E$ 可逆,且 $B=(A-E)^{-1}A=\begin{pmatrix} 1&2&1\\ 1&2&0\\ -1&0&1 \end{pmatrix}$

23. 解: $(A,b)=\begin{pmatrix} 1&0&2&1&2\\ 1&1&1&4&3\\ 1&1&3&-2&1 \end{pmatrix} \underset{r_2-r_1}{\overset{r_3+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1&0&2&1&2\\ 0&1&-1&3&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

即 $\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+2 \\ x_2=x_3-3x_4+1 \end{cases}$ 其一特解为 $\eta=\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$ 由其对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4 \\ x_2=x_3-3x_4 \end{cases}$

得到基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix} -1\\-3\\0\\1 \end{pmatrix}$

故原方程组的通解为 $x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2\\1\\1\\0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1\\-3\\0\\1 \end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in R)$.

24. 解: $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda&0&0\\ 0&3-\lambda&1\\ 0&1&3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$

26(自行完成证明).

故A的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=3, \lambda_3=4$

当 $\lambda_1=2$ 时 $(A-2E)x=0$

$A-2E\begin{pmatrix} +1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ 得: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$ 基础解系为 $\eta_1=\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}$ 特征向量为 $k_1\eta_1$ $(k_1\neq 0)$

当 $\lambda_2=3$ 时 $(A-3E)x=0$ $A-3E=\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ 基础解系为 $\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}$ 特征向量为 $k_2\eta_2$ $(k_2\neq 0)$

当 $\lambda_3=4$ 时 $(A-4E)x=0$ $A-4E=\begin{pmatrix} -1&0&0\\ 0&-1&1\\ 0&1&-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$ 基础解系为 $\begin{pmatrix} 0\\1\\+1 \end{pmatrix}$ 特征向量为 $k_3\eta_3$ $(k_3\neq 0)$

则取 $P=\begin{pmatrix} 0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ 故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&3&0\\ 0&0&4 \end{pmatrix}$;

25 由顺序主子式>0得 $-2<a<1$ f正定

$a=0$ 时 f正定. 正惯性指数为3 负惯性指数为0.

2018－2019（16周）

一.单选：1.A，2.B，3.C　4.B　5.A　判断 6-10　B ×　B ×　A ✓　A ✓　B ×

三.填空：11. －（或负）　12. $|\alpha^T\alpha|=0$　13. $\frac{1}{2}(A-E)$　14. $\begin{pmatrix}1 & 2019\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　15. 3.　16. $(-3,\frac{5}{3},0,-\frac{1}{3})$

17. 秩是 2　18. $\sqrt{15}$　19. 0, 1, 4　20. 2.

21. 解

$$\begin{vmatrix}1&0&a&1\\0&-1&b&-1\\-1&-1&c&-1\\-1&1&d&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&a&1\\0&-1&b&-1\\0&-1&a+c&0\\0&1&a+d&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a+d+b&0\\-1&a+c&0\\1&a+d&1\end{vmatrix}=-(a+b+d)\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}=a+b+d$$

或 $=a\begin{vmatrix}0&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&-1&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&1&0\end{vmatrix}-d\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}0&-1&-1\\-1&0&0\\-1&1&0\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&1&0\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{vmatrix}-d\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&0&0\end{vmatrix}$

$=a+b+d$

22. 解：由 $AB=A+2B$ 得 $(A-2E)B=A$　即有 $(A-2E,A)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}$

则 $A-2E$ 可逆，且 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$

23（略）　24. 解：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故 $r(A)=3<4$　故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

25. 解：~~$|A-\lambda E|$~~ $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\lambda^2$　A的特征值为 3, 0, 0.

当 $\lambda_1=3$ 时　$(A-3E)x=0$　$(A-3E)=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$

其基础解系为 $P_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　特征向量为 $k_1P_1\ (k_1\neq0)$

当 $\lambda_2=\lambda_3=0$　$Ax=0$　$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$ 故其基础解系为 $P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

特征向量为 $k_2P_2+k_3P_3$（k_2,k_3 不全为 0）

(2) A可对角化　$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

26. 证明：由已知得 $E=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)K$

故　$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geq R(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=n$

又有 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leq n\Rightarrow R(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=n$　即 $\alpha_1\cdots,\alpha_n$ 线性无关

27. 证明 $H^T=(E-2xx^T)^T=E-2(x^T)^Tx^T=E-2xx^T=H$　故 H为对称阵.

$H^TH=H^2=(E-2xx^T)^2=E-4xx^T+4x(x^Tx)x^T=E-4xx^T+4xx^T=E$

故 H为正交阵.