**《线性代数》（第二版）——习题详解**

**习题一**

1.解：（1）.

（2）.

（3）.

（4）.

（5）.

（6）.

2.解：（1）对排列34215而言，3与2,1分别构成一个逆序，4与2,1也分别构成一个逆序，2与1也构成一个逆序，所以.

（2）对排列4321而言，4与3，1，2分别构成一个逆序，3与1,2也分别构成一个逆序，所以.

（3）对排列而言，与均分别构成一个逆序，其逆序数为；与也分别构成一个逆序，其逆序数为，依次类推，2与1也构成一个逆序，因此有

.

（4）对排列而言，3与2构成一个逆序，其逆序数为1；5与4,2分别构成一个逆序，其逆序数为2；……；分别与构成一个逆序，其逆序数为；分别与构成一个逆序，其逆序数为，……；4与2也构成一个逆序，其逆序数为1；因此有



3.解：在四阶行列式中，含因子的项只有两类，分别为和，下面分别判断这两项的符号，因为行标排列已经是自然排列，故只须计算列标排列的逆序数.因为，，所以含的项分别为和.

4.解：（1）



（2）

.

（3）



（4）





（5）





.

（6）



.

（7）



.

（8）



5.证明：（1）



.

（2）





（3）







6.解：（1）因为是方程的3个根，那么必然满足，将其展开得

，

由对应项系数相等可知，

，

即 .

因此 .

（2）在此四阶行列式中，能出现的因子的项只有.由于行标排列已是自然排列，故只须判断列标排列的逆序数，即，所以的符号为负，因此的系数是.

（3）由定理4.1知



（4）由定理4.1可知





7.解：（1）



.

（2）



.

（3）





.

（4）





.

（5）





8.解：（1）



故

（2）





故.

9.解：齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式.因为

，

所以由得或.

10.

证明：

.

**习题二**

1.解：，

.

2.解：（1）.

（2）.

（3）.

（4）.

（5）.

（6）.

3.解：（1）.

（2）.

（3）



.

4.证明：（1）

设矩阵，则根据矩阵的加法与乘积的定义有：

矩阵中第行第列的元素为

；

矩阵中第行第列的元素为

.

由此可以看出，矩阵和中的元素一一对应相等.

因此有

.

（2）设矩阵，则根据矩阵乘积的定义有：

中第行第列的元素为

；

中第行第列的元素为

.

因此

.

5.证明：（1）

设对角矩阵，，则有

，

由此可见，仍为对角矩阵.因此，对角矩阵与对角矩阵的乘积仍是对角矩阵.

（2）设上三角阵，，则

.

可以看出，仍为上三角阵.因此，上三角阵与上三角阵的乘积仍为上三角阵.

同理可证，下三角阵与下三角阵的乘积仍为下三角阵.

6.解：设与可交换的矩阵为，则

，.

由可知，这两个矩阵各行各列的元素分别对应相等，根据所得的九个方程可得

.

因此，所有与可交换的矩阵为，其中.

7.解：（1）当和可交换时，题设等式成立，即



（2）当和可交换时，题设等式成立，即

.

8.解：（1）.

（2）因为

，，，，

，，，，

由此可以看出，

当时，，

当时，，

当时，，

当时，，

这个结果也可以简单写成.

（3）因为

所以，当为偶数时，；当为奇数时，.

（4）



 

.

（5）因为，，，，依此类推，所以.

（6）因为，，

，，

由数学归纳法可以证明，.

9、解：因为，，所以





10、解：设，，则

，又因为，，所以.

11、解：（1）.

（2）.

12、证明：用数学归纳法证明。

当时，等式显然成立。假设当时等式成立，即.

于是当，有



即当时，结论也成立.因此.

13、证明：（1）因为都是阶对称矩阵，所以有.

因此 ，

.

故是对称矩阵，是反对称矩阵.

（2）因为，

，

所以是对称矩阵，也是对称矩阵.

14、证明：因为为对称矩阵，所以





故也是对称矩阵.

15、解：已知若,则. 因此，对于等式,可把其中任意两个矩阵当成一个整体，于是得到

，

即等式



总是成立的. 而题中给出的其余等式均是上述已知恒等式中两个矩阵交换，故不一定成立.

16、解：（1）经计算，知可逆，且

，故.

（2）经计算，知可逆，且

，

故.

（3）经计算，知可逆，且







故.

（4）经计算，知可逆，且



故.

17、解：（1）.

（2）.

(3).

（4）由得，即

.

18、解：由，得，

从而 ，所以

.

19、解：由，得，从而

.

20、解：.

21、解：.

22、证明：（1）充分性.设，则



.

必要性.设，因为，所以

，从而，即.

（2）假设当时，是可逆矩阵，则存在矩阵，使得.

由（1）知当时，有，对其两边同时右乘，得，即，从而，这与是的非零列矩阵相矛盾，故当时，是不可逆矩阵.  
23、证明：（1）由，得，故，因此可逆，且.由知，也可逆，且.

（2）由，得，对该等式两边同取行列式，得

，从而或，所以与中至少有一个是奇异方阵.

24、解：由，得，

即 ，所以.

25、证明：由知，即，所以可逆，且.

26、证明：用数学归纳法证明.

当时，等式显然成立. 假设当时等式成立，即.

当时，有，

即此时结论也成立. 因此，当为正整数时有.

27、解：易知是可逆矩阵，且.

因为，

又易求得 ，故



28、解（1）





.

（2）





.

29、证明：（1）假设，则可逆.

在两边同时右乘可得，即是一个零矩阵。

由的定义可知，这与可逆矛盾，所以当时.

（2）若，则可逆，对两边同时左乘，可得，从而

.

若，则由（1）知.

30、解：（1），

从而.

因为，所以.

（2），

从而，因为，

所以.

31、解：（1），

所以 .

（2）

，

所以 .

32、解：（1），

由于，所以.

（2），

由于，

所以.

（3），

由于，

所以.

33、解：. 在中划去一行，则这一行元素可以分成两类，一类是这一行可由其他行元素经过初等变换得到，则不改变的秩，此时；另一类是这一行不可由其他行元素经过初等变换得到，则有.

34、解：（1），

所以 .

（2），

所以 .

（3）

，

所以 .

（4）

，

所以  .

35、解：（1）



，

所以 .

（2）



，

所以 .

（3）

 

，

所以

.

（4） 



.

由于，，，

所以

.

**习题三**

1. 证明：显然是非空的。设任意，，有；且对任意，有，所以是向量空间。
2. 证明：

（1）因为向量空间对数乘封闭。设是一向量空间，则对任意，，均有，从而取，则有，得证。

（2）因为向量空间对数乘封闭。设是一向量空间，则对任意，，均有，从而取，则有，得证。

1. 解：

（1）不是。因为对任意，而，非向量空间，所以不是的子空间。

（2）是。显然是非空的。对任意，，有；对数，有；且，所以是的子空间。

（3）是。显然是非空的。对任意，，，有，因为；对数，有，且，所以是的子空间。

（4）不是。因为对任意，而，，从而，非向量空间，所以不是的子空间。

（5）不是。因为对，而，并不满足这一条件，从而，非向量空间，所以不是的子空间。

（6）是。显然非空。对任意，，，对任意，，，有.因为，.对任意数，有，因为，，且，所以是的子空间。

4.解：，



5.解：由得

.

6.证明：设有使



即



整理得



因线性无关，有



方程组的系数行列式



齐次方程组只有零解，所以线性无关.

7.证明：利用观察法可以看出，具有以下关系



显然是线性相关的。

8.解：（1）设有实数，使得

，

即

.

由此得



其系数行列式为0，上述齐次方程组有非零解，具有无穷多组解，易求得是它的一组解，从而有

.

因此，线性相关.

（2）设有实数，使得

，

即

.

易得，该齐次方程组只有零解.因此，线性无关.

9.解：设有实数，使得

，

因此得



此方程组的系数行列式为

.

（1）当时，，方程组有非零解，从而线性相关.

（2）当时，，方程组只有零解，从而线性无关.

（3）当线性相关时，易求得是方程组的一组解，从而

，

即

.

10.解：（1）由

，

知，列向量组即向量组的秩为2，所以线性相关.

（2）由

，

知，列向量组即向量组的秩为3，所以线性无关.

（3）由

，

知，列向量组即向量组的秩为3，所以线性无关.

11.解：不一定线性相关，例如当时，，二者线性无关.

12.解：不一定线性无关，例如当，这三个矩阵满足题干中的条件，但是，，很明显二者线性相关.

13.解：是线性无关的向量组.

证明：若是线性相关的向量组，则存在一组不全为零的数使，而，则，因此是一个线性相关的向量组，与题干矛盾，因此是线性无关的向量组.

14.解：（1）若，，则无论如何不可能由线性表示.

（2）当，，，时，线性相关，但是线性无关.

（3）当，，时，线性无关，但是线性相关.

（4），，，线性相关，但是线性相关，但两个式子不能同时为零.

15.解：

，

由线性相关，可知，从而，得.

16.证明：因可由线性表示，所以有在，使得

.

又因可由线性表示，所以有在，使得

，

从而

，

所以可由线性表示.

17.解：因为这两个行向量的秩为2，要作一个秩为4的方阵，只须再加上两个与前面行向量线性无关的行向量和一个相性相关的行向量即可，所以得到的一个方阵为

.（答案不唯一）

18.证明：设线性相关，则有在不全为零的数使得

.

若，则由不全为零，知线性相关，与题设矛盾，因此，

从而

.

因为可由线性表示，进而也可由线性表示，这与题设相矛盾，所以线性无关.

19.解：因线性相关，所以存在不全为零的数，使得

.

（1）因为，否则线性相关，与题设矛盾，所以

.

因此，能由线性表示.

（2）设，则有

，

即

.

上式说明的系数不全为零，这与它们线性无关相矛盾，故不能由线性表示.

20.证明：因是维单位向量组，从而可由线性表示，而可由线性表示，所以与等价，则有

.

故线性无关.

21.证明：充分性.设任一维向量都可由线性表示，则维单位向量组必可由线性表示，从而由20题知，线性无关.

必要性.设线性无关，则可以作为向量空间的一个量，因此，对任一维向量都可由线性表示.

22.证明：因为

，

所以向量组可由向量组线性表示，则有，同理可得，因此有

.

设和分别是向量组和的最大无关组，则向量组可由它们线性表示，所以.

23.证明：设，，令，其中为的列向量，为的列向量，则

.

再设，，且为的一个最大线性无关组，为的一个最大线性无关组.

作向量组（I）；（II），则（I）可由（II）线性表示，所以

.

同理可证，.

24.解：（1）对以为列构成的矩阵，作初等行变换得

，

知，所以向量组的秩为3，是它的一个最大无关组，且

.

（2）对以为列构成的矩阵，作初等行变换得

，

以向量组的秩为3，是它的一个最大无关组，且

，.

（3）对以为列构成的矩阵，作初等行变换得

，

所以向量组的秩为3，是它的一个最大无关组，且

，.

25.证明：必要性.设矩阵与等价，则的行向量组与的行向量组等价，从而.

充分性.因为与都是矩阵，且，则和具有相同的标准形，即和经过初等行变换后可化为同一标准矩阵，所以和等价.

26.解：由



知，原向量组所有的最大无关组分别为；；；；；.

27.证明：由

知，即由所生成的向量空间的维数是3，所以.

28.证明：由



知，且，.

由



知，且 从而向量组和是等价的. 设任意向量，则存在，使得

，

即



所以，从而.

同理可证.

综上所述，可知.

29、解：由



知，所以为的一组基.

又由



知

因此，在基下的坐标分别为

30、解：由



知当时，能由线性表示.

31、解:由

，

知，所以向量组是的一组基，且在这组基下的坐标为.

32、解：

（1）



.

（2）







**习题四**

1. 解：（1）对此齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换，得

，

由此得



令，即得到该齐次线性方程组的一个基础解系：

.

（2）对此齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换，得

，

由此得



分别令，即得该齐次线性方程组的一个基础解系：

 ， .

（3）对此齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换，得

，

因此，该齐次线性方程组只有零解.

（4）对此齐次线性方程组的系数矩阵进行初等行变换，得

,

由此得



分别令，即得该齐次线性方程组的一个基础解系：

 ， .

1. 解：
2. 对增广矩阵进行初等行变换，得



即得



分别令，即得该方程组对应的齐次线性方程组的一个基础解系为

-1,1，0,0,0；

1/2,0，-1/2,1,0

1,0，-1，0,1

通解

.

（2）对增广矩阵进行初等行变换，得



知，该方程组无解.

1. 解：

由增广矩阵



知该方程组有解的充要条件是,即

当时，有



因此，该方程组的通解为



1. 解：

.

（1）当，即时，方程组有唯一解，能由线性表示，且表示法唯一.

（2）当时，由增广矩阵

，

知，所以不能由线性表示.

（3）当时，由增广矩阵

，

可知能由线性表示，但表示法不唯一.

1. 解：已知增广矩阵

，

要使方程组有解，需满足，即，解得或.

（1）当时，变为

，

从而，原方程组的通解为

.

（2）当时，变为

，

从而，原方程组的通解为

.

1. 解：已知系数矩阵

，

由解空间的维数是，知，从而，解得.

当时，变为

，

因此，该方程的通解为

.

1. 解：由方程组的增广矩阵

，

知是的一个解，将其带入方程组得



解得.因此，当时，和同解.

1. 解：利用的系数矩阵经过初等行变换可以求得它的通解为

.

设与的公共解为,则存在，使得

， ，

其中, .

两式相减，得

.

则得方程组，其增广矩阵为

，

可知上述方程组的通解为.

将代入即得与的公共解为.

1. 解：设所求齐次方程组为，则依题意有

，即.

也就是说，所求方程组的系数矩阵的行向量是齐次方程组的解向量即可.利用初等行变换，将矩阵化为行最简形：

，

由此可得方程组的一个基础解系为



也就是说，所求方程组的系数矩阵可取为，故以为基础解系的一个齐次线性方程组为  （答案不唯一）.

1. 证明：构造元齐次线性方程组.显然的解一定是 的解.设为的任意解，则有

， 即 .

因是阶实矩阵，则是维实列向量，不妨设为,那么

，

所以



因此也是的解.

综上所述，齐次线性方程组与同解，

从而

，

所以

.

1. 证明：

必要性. 设和同解，则，即.

充分性. 设分别为和的解空间，显然. 因当时，所以，即方程组和同解.

1. 证明：（1）设有常数*k*,，使得

.

对上式同时左乘*A*，得

，

即 . 故由知，且此时有

，

因此 ，

所以线性无关.

（2）设有常数*k*,，使得

 ①

即 

对上式同时左乘，得



所以，即，代入①式得



从而 .

所以线性无关.

1. 解：令



则（Ⅰ）可写成（Ⅲ）：，（Ⅱ）可写成（Ⅳ）：

由题意知，此即 ①

对①式两边同时转置，得，此即

，

所以，，，是的个解.

再由假设知方程的基础解系所含向量个数，

从而，所以，，，线性无关.

而方程的基础解系所含向量个数，

即得，，，是的一个基础解系.

故（Ⅱ）的通解为

.

**习题五**

1、解：（1）的特征多项式为

，

所以的特征值，.

当时，解方程组，由

，

得基础解系为

，

所以属于的全部特征向量为.

当时，解方程组，由

，

得基础解系为

，

所以属于的全部特征向量为.

（2）的特征多项式为

，

所以的特征值为，，.

当时，解方程组，由

，

得基础解系为

，

所以属于的全部特征向量为.

当时，解方程组，由

，

得基础解系为

，

所以属于的全部特征向量为.

当时，解方程组，由

，

得基础解系为

，

所以属于的全部特征向量为.

2、解：（1）的特征多项式为

，

所以的特征值为，.

（2）由可知

，

所以的特征值为.

（3）由（1）知的特征值为，因此的特征值为

.

3、解：

由，

得.

要使有3个线性无关的特征向量，已知对于，可求得线性无关的特征向量恰有1个，故只需对于重根找到2个线性无关的特征向量即可，也就是说，要使方程有2个线性无关的解，也即.

由于

，

所以和应满足.

4、证明：设为的任意一个特征值，为其对应的特征向量，则有

.

因，所以由即得

.

故由即可解得或. 所以的特征值是或.

5、解：

（1）令

，

.

（2）令



.

6、证明：因为,且







.

所以是对称的正交矩阵.

7、证明：

.

8、解：

因为与相似，所以他们有相同的特征值，从而有



即



解得

.

9、解：

由定义有于是

即有



故所求

.

10、解：，

即的特征值为，它们对应的特征向量分别为，

令，则，所以，因此

.

11、解：因为为实对称矩阵，则存在正交矩阵，使，所以

，记，则为的特征值所对应的单位正交特征向量.

因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，且为所对应的特征向量，则对应于的特征向量应满足.

设，则上式即为.

可求得正交的基础解系为.

把正交单位化，得.

于是，所以.

12、解：（1）由，知的特征值为

，从而可求出这3个特征值分别对应的特征向量为

.

将其单位化，得 .

于是所求的正交矩阵为 ，

且 .

（2）由，

知的特征值为.

可求出这3个特征值分别对应的线性无关特征向量为 .

将其正交单位化，得 .

于是所求的正交矩阵为 （答案不唯一），

且 .

**习题六**

1. 解：（1）.

（2）

.

1. 解：（1）二次型的矩阵为

，

的特征多项式为

，

则的特征值为，，.

求得这3个特征值对应的特征值向量分别为

，，.

将其单位化，得

，，.

令 ，

则经过正交变换后，二次型化为标准形.

（2）二次型的矩阵为

，

的特征多项式为

，

则的特征值为，，.

求得这3个特征值对应的两两正交的特征值向量分别为

，，，.

将其单位化得

，，，.

令 ，

则经过正交变换后，二次型化成标准形.

（3）二次型的矩阵为

，

的特征多项式为

，

则的特征值为，.

求得这4个特征值对应的线性无关特征值向量分别为

，，，.

将其正交单位化，得

，，，.

令 ，

则经过正交变换后，二次型化成标准形.

3 解：（1）







令，则有，即得标准形

.

所用的非退化的线性变换为，其中

.

（2）中不含平方项，令，代入可得

，

再配方，得

.

令 即，则有

.

而所用的变换为

，

其中

.

4. 解：（1）





则

，

相应的可逆线性变换为，标准形为

.

（2）





则

，

相应的可逆线性变换为，标准形为

.

5 解：（1）的矩阵为

，

各阶顺序主子式为

，

所以正定，即为正定二次型.

（2）的矩阵为

，

各阶顺序主子式为

，

所以负定，即为负定二次型.

（3）的矩阵为

，

知 ，

从而的各阶顺序主子式为

，

所以正定，即为正定二次型.

6 解：（1）的矩阵为

，

要使正定，需满足的各阶顺序主子式都大于零，因此

，

则当时，正定.

（2）的矩阵为

，

要使正定，需满足的各阶顺序主子式都大于零，因此

，

则当时，正定.

7 证明：因，且，而且正定，所以.

设的个特征值为（都大于0），所以的个特征值为

，也都大于0，故正定.

8 证明：因为，都是正定阵，所以

.

对任意维列向量，有，，从而

，

所以是正定矩阵.

9 证明：必要性.

由正定知是对称阵，即,所以

.

充分性.已知，则有，即是阶实对称阵.

由于正定，因此存在两个可逆矩阵，使得.

于是有，从而有，

因此正定，即它的特征值全为正. 而与相似，故它们的特征值完全相同，即的特征值也全为正.

10 证明：因为，即合同于，所以正定.

11 解：（1）二次型的矩阵为

，

由知，即.

那么的特征多项式为

，

则的特征值为，，.

（2）由（1）知，存在正交阵，使得经过正交变换后，二次型化成标准形

.

故方程表示椭圆柱面.

**习题七**

1. 解：（1）设此方阵集合为，显然非空，因为.

下面分别验证在中8条运算规律均成立.

设，，则有，.

令是一数域，任意，

（ⅰ）；

（ⅱ）令，则有；

（ⅲ）中存在零元素，满足任何，有；

（ⅳ）对任何，只须取，满足；

（ⅴ）；

（ⅵ）；

（ⅶ）

；

（ⅷ）

.

故主对角线上的元素之和等于0的二阶方阵的全体构成主数域上的线性空间.

（2）设主体阶对称阵的集合为，显然非空.

可以验证对8条运算规律均成立，故构成实数域上的线性空间.

（3）设满足的全体阶方阵构成集合，显然非空.

可以验证对8条运算规律均成立，故构成实数域上的线性空间.

2. 解：（1）设满足的维向量集合为.

因为，所以非空.

设任意，任意，是一数域，有

，

.

因为，，所以

，.

即证是的子空间.

（2）设满足的维向量集合为.

因为对任意，有

，，

所以不是的子空间.

3. 证明：设是数域上的线性空间的一个线性变换，则对任意的及，都有

，.

从而





，





，

所以也是线性变换.

4. 证明：（1）设是数域上线性空间的一个变换，则对任意的及，都有



，



，

所以是的线性变换.

（2）对任意阶方程，，有

,





.

因此

.

5. 解：因为，所以

，

，

.

故在基下的矩阵为

.

6. 解：设，由，得

，

即

.

所以在基下的矩阵为

.

7. 解：（1）设，则有

，

所以

.

（2）因为



所以在基（I）下的矩阵为.

（3）因为



所以在基（II）下的矩阵为.