制御工学
ラプラス変換と線形システム理論

冨田 拓希

概要

目的：システム理論に必要になる数学的基礎を超簡単に概説する。

必要な数学の基礎

線形代数（ベクトルと行列）、複素数、微分と積分

これらを記述するのに、集合と写像も必要。

システム理論の基礎

- 微分方程式
- ラプラス変換（連続時間システム）
- Z 変換（離散時間システム）

定義にはあまり踏み込まず概念の感覚の説明をするので、もっと知りたい場合は本やネットで調べてください。

1. 数学的準備
    - 線形代数（ベクトルと行列）
    - 複素数
    - 微分と積分
2. 線形システム理論の基礎
    - 微分方程式
    - ラプラス変換
    - Z 変換
3. 線形システム理論への応用
    - 電子回路
    - 連続時間線形システム
    - 離散時間線形システム

1. 数学的準備
    - 線形代数（ベクトルと行列）
    - 複素数
    - 微分と積分
2. 線形システム理論の基礎
    - 微分方程式
    - ラプラス変換
    - Z 変換
3. 線形システム理論への応用
    - 電子回路
    - 連続時間線形システム
    - 離散時間線形システム

集合

集合 = ものの集まり

記号

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$：自然数全体の集合
- $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$：非負整数全体の集合
- $\mathbb{Z}$：整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$：有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$：実数全体の集合
- $\mathbb{C}$：複素数全体の集合（後述）

例えば、$\pi \in \mathbb{R}$ は「π は実数である」という意味。

集合の例

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$
- { りんご, いちご, みかん }
- $\mathbb{R}$ 上の連続関数（途切れていない関数）の集合

集合の直積

集合の直積

集合 A, B に対して、

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

を A と B の直積という。特に、$A = B$ であるとき、$A \times A$ を A^2 と書く。

例えば、$\mathbb{R}$ を n 個直積すると、n 個の実数の組全体の集合

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

が得られる。

写像

A, B：集合

写像

写像 $f\colon A \to B$ とは、A の各元に対して B のただ 1 つの元を対応させる規則のこと。

B が $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ など数の集合 $\implies$ f を関数という

写像の例

$f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

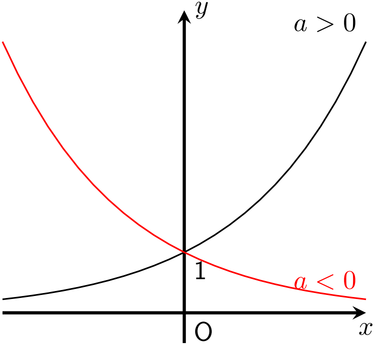
- $f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ とすると、f は写像
- $f(1) = 1, 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2$ とすると、f は写像でない

関数の例

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ とすると、これは関数
（$e := 2.718\ldots$ は自然対数の底という特別な実数）

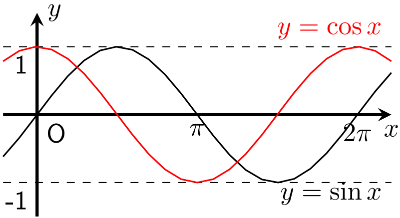
関数の例

指数関数 $y = e^{ax}$



$a < 0$ だと、x が大きくなるにつれて e^{ax} は 0 に近づく！

三角関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$



$\sin x$, $\cos x$ の x の単位は度数でなくラジアン！

これらのように、“途切れていない”関数を連続関数という。

ベクトル

n 個の実数の組全体の集合 $\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$
$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}^n$ の元を n 次元ベクトルという (つまり、ベクトル $=$ 1 次元配列)

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$ に対して、和 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー倍 $r\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が定まっている。

ベクトルは $(x_1, \ldots, x_n)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ などと書いたりする。

ベクトルの内積

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の標準内積（単に内積）という。

ベクトルのノルム（大きさ）

$\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ をベクトル $\mathbf{x}$ のノルム（大きさ）という。

行列

$n \times m$ 行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} =: (a_{ij}) \quad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

と書けるもの。（つまり、$n \times m$ 行列 $=$ 2 次元配列）

$n \times m$ 行列全体の集合を $M_{nm}(\mathbb{R})$ と書く。
$A, B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して、和 $A + B \in M_{nm}(\mathbb{R})$ とスカラー倍 $rA \in M_{nm}(\mathbb{R})$ が定まっている。

ベクトルは行列の一種！

n 次元横ベクトルは $1 \times n$ 行列、n 次元縦ベクトルは $n \times 1$ 行列である。

行列の積

写像 $M_{nl}(\mathbb{R}) \times M_{lm}(\mathbb{R}) \to M_{nm}(\mathbb{R});\ (A, B) \mapsto AB$ を行列の積という。
行列の積はかける順番を交換できない！

行列の基礎用語

$M_n(\mathbb{R}) := M_{nn}(\mathbb{R})$ とするとき、この元を n 次正方行列という。

対角行列

$i \neq j$ のとき $a_{ij} = 0$ となる行列 $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を対角行列という。
$A =: \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ とも書く。

単位行列，零行列

$$I = I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad O = O_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

I を単位行列 (積の単位元)、O を零行列 (和の零元) という。これを
$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$, $O = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0)$ とも書く。

行列の基礎用語

行列式

写像 $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ として、$\det A$ を A の行列式という。

正則行列、逆行列

$A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、$AB = I = BA$ となる $B \in M_n(\mathbb{R})$ が存在するとき、A を正則行列といい、B を A の逆行列といい A^{-1} と書く。n 次正則行列全体の集合を $GL_n(\mathbb{R})$ と書く。

行列の対角化

$A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、対角行列 $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ と正則行列 $P \in GL_n(\mathbb{R})$ が存在して $P^{-1}AP = \Lambda$ を満たすとき、A は対角化可能であるという。

行列指数関数

$A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して行列指数関数 $e^{At} \in M_n(\mathbb{R})$ が定義できる。これは指数関数 e^{ax} と似た性質が成り立つ。

固有値・固有ベクトル

行列の固有値・固有ベクトル

$A \in M_n(\mathbb{R})$ とする。$\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

を満たすとき、λ を A の固有値といい、$\mathbf{u}$ を A の固有値 λ の固有ベクトルという。

n が大きくなるほど、固有値を求めるのは特殊な行列以外は超難しい。

固有値は超重要

固有値は数学（A^m の計算など）だけでなく、物理や化学など至る所に現れる。もちろん、電子回路の安定性の判定にも出てくる。

複素数

$i^2 = -1$ となる数を虚数単位という。つまり

$$i := \sqrt{-1} \text{（電子工学では } j \text{ と書く）}$$

$\mathbb{C} := \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ の元 $a + bj$ を複素数という。複素数は四則演算が成り立つ。

複素数の計算

- $(a + bj) + (c + dj) = (a + b) + (c + d)j \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$
- $(2 - j)^3 = 8 - 4j + 2j^2 - j^3 = 8 - 4j - 2 + j = 6 - 3j$
- $\dfrac{1 + j}{1 - j} \overset{\text{有理化}}{=} \dfrac{(1 + j)^2}{(1 - j)(1 + j)} = \dfrac{1 + 2j + j^2}{1 - j^2} = \dfrac{1 + 2j + (-1)}{1 - (-1)} = j$

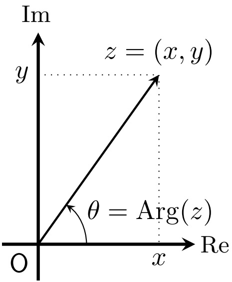
複素数 $z = x + yj$ に対して、x を z の実部、y を z の虚部といい、$\mathrm{Re}(z) := x$, $\mathrm{Im}\,(z) := y$ と書く。

複素共役

複素数 $z = x + yj$ に対して、$\overline{z} := a - bj$ を z の複素共役という。

複素平面

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
z = x + yj & \longmapsto & (x, y)
\end{array}
$$

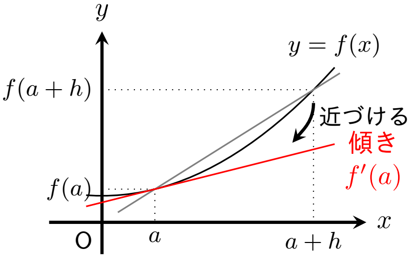


ベクトル (x, y) と実軸のなす角で一周はしない角を z の**偏角**といい、$\mathrm{Arg}(z)$ と書く。

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

微分可能



$C^1(\mathbb{R})$：“良い性質を持った”関数の集合、$C(\mathbb{R})$：連続関数の集合

微分

$$\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}); f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$$

を微分 (作用素) という。$\frac{d}{dx} f(x)$ は $\frac{df}{dx}(x)$, $f'(x)$ などとも書く。

$f'(x)$ は f の接線の傾きについての関数である。

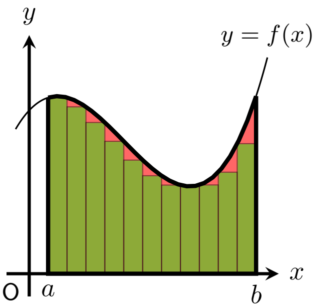
微分の例

大体の初等関数の微分は sympy などで計算できる（何でも微分できるとは限らないので注意！）

微分の例

- $\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 10^{100}) = 2x + 3$
- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx}x^{\pi} = \pi x^{\pi - 1}$
- $\frac{d}{dx}(\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$
- $\dfrac{d}{dx}(\log_2 x) = \dfrac{1}{x \log 2}$

積分



縦は $f(x)$、横は微小な量 dx である長方形の面積 $f(x)dx$ を $a \leq x \leq b$ まで足し合わせることで、図の $y = f(x)$ と x 軸に囲まれた面積 (赤部) になる。これを数学の言葉で書いたものが**定積分**

$$\int_a^b f(x)dx \quad \in \mathbb{R}$$

と書く。

b を変数 t にすることで、

$$\int_a^t f(x)dx$$

は t の関数になり、これを**不定積分**という。
だいたいの初等関数の不定積分は sympy で計算できる（一部不可能！）。計算機では定積分の計算にモンテカルロ法などを用いて計算している（一般には定積分は困難！）。

微分と積分の関係

微分積分学の基本定理

$a \in \mathbb{R}$ が任意の定数、f が連続関数であるとき、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

が成り立つ。

つまり、不定積分 $\displaystyle\int_a^x \cdot\, dt$ と微分 $\dfrac{d}{dx}$ は互いに逆変換！

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f(x)} \arrow[r, shift left, "\int_a^x \cdot\, dt"] & \boxed{F(x)} \arrow[l, shift left, "\frac{d}{dx}"]
\end{tikzcd}$$

1. 数学的準備
   - 線形代数（ベクトルと行列）
   - 複素数
   - 微分と積分
2. 線形システム理論の基礎
   - 微分方程式
   - ラプラス変換
   - Z 変換
3. 線形システム理論への応用
   - 電子回路
   - 連続時間線形システム
   - 離散時間線形システム

微分方程式とは

微分方程式 $=$ 未知関数とその導関数の関係式
微分方程式を解くとは、その未知関数を求めること

e.g. 物理だと、微分方程式は現象の時間発展を表す方程式など

微分方程式の例

- $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ (線形斉次微分方程式)
- $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x$ (線形非斉次微分方程式)
- $f'(x) = p(x)(f(x))^2 + q(x)f(x) + r(x)$ (非線形線形微分方程式)
- $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}, t)\right)\Psi(\mathbf{x}, t)$ (線形偏微分方程式)

線形微分方程式

未知関数 $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と既知の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。線形微分方程式

(1) $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} = f(t)$$

(2) $$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} = 0$$

は無限個の解を持つ。これらをまとめた形の解を**一般解**という。

線形方程式の解構造

(1) の一般解 $x(t)$ は、(1) の 1 つの解 (特殊解) $x_0(t)$ と (2) の一般解 $X(t)$ を用いて、$x(t) = x_0(t) + X(t)$ と表せる。

n が小さく (2 以下くらい) 特殊な形の線形微分方程式くらいなら sympy などでも解ける！（何でも解ける訳ではない！）

ベクトル値関数

ベクトル値関数

関数 $\mathbf{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ をベクトル値関数という。

これを使えば、連立方程式を行列とベクトル値関数を使って書ける！

$$\begin{cases} tx_1(t) + 2tx_2(t) = 3 \\ 3x_1(t) + \ \ tx_2(t) = 2t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t & 2t \\ 3 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}(t)$$

ベクトルの微分

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

をベクトルの微分という。$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)$ は $\mathbf{x}'(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ などとも書く。

ちなみに、電子工学では使わないが、統計（機械学習）では関数をベクトルで微分することがある。

連立線形微分方程式

未知関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$、既知の関数 $a_{ij}(t), f_i(t)$ に対して

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

を 1 階連立線形微分方程式という。(これが線形システム理論のメイン)

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

とおくと、1 階連立線形微分方程式は

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)}$$

と書ける!

1 階連立線形微分方程式の解法

$s \in \mathbb{R}$ を定数とし、$t = s$ のとき $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0$ である（初期値）とする
＝「ある時刻での観測結果があるとする」ということ

1 階連立線形微分方程式の解

初期値問題

$$(1)\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

に対して、(1) の解 $\mathbf{x}(t)$ は、$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}$ の解核行列 $R(t,s) \in M_n(\mathbb{R})$ を用いて次のように書ける：

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{R(t,s)\mathbf{x}_0}_{(2)\text{ の解}} + \underbrace{\int_s^t R(t,\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau}_{(1)\text{ の解}} \quad \in \mathbb{R}^n$$

1 階連立線形微分方程式の解法

$A(t)$ の成分が全て実定数である (つまり A である) とき、さっきの解核行列が分かってしまうので、もっと具体的に解が書ける！！

1 階連立線形微分方程式の解（A が定数のとき）

A を t によらない定数行列とする。このとき、$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ の解核行列は $R(s,t) = e^{A(t-s)}$ であり、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

の解 $\mathbf{x}(t)$ は次のように書ける：

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-s)}\mathbf{x}_0 + \int_s^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad \in \mathbb{R}^n$$

線形システム理論では、初期値を $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ $(s = 0)$ とするので、上の式は次のようにもっとシンプルになる：

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau = e^{At}\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}\mathbf{f}(\tau)d\tau\right)}$$

連立線形微分方程式と線形システム理論

線形システム理論 = 入力 $\mathbf{u}$ と出力 $\mathbf{y}$ の関係を表す方程式が 1 階連立線形微分方程式であるシステムを扱う制御理論

入力 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$、システムの状態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$、出力 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ として、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{nm}(\mathbb{R}), \\ C \in M_{ln}(\mathbb{R}), D \in M_{lm}(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

というタイプの 1 階連立線形微分方程式を扱う。出力 $\mathbf{y}$ を求めるには $\mathbf{x}$ を求めれば良い。$\mathbf{x}$ の解は前のスライドから

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau\right)$$

となる（$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ はシステムの初期状態）。
$\rightsquigarrow$ e^{At} さえ計算できれば、$\mathbf{x}$ がわかる！

e^{At} の計算にラプラス変換 $\mathcal{L}[e^{At}] = \frac{1}{sI-A} = (sI-A)^{-1}$ を使う！
これにより、無限和 e^{At} は n 次行列の逆行列を計算すればいいことになる。（計算機で逆行列を計算するには工夫しないといけない）

ラプラス変換とは

ラプラス変換 $=$ 関数や微分・積分を代数的な関数に変換する写像

ラプラス変換

関数 $f(t)$ に対して、複素関数 $\mathcal{L}[f](s)$ $(s \in \mathbb{C})$ を f のラプラス変換という。
$r > 0$ と複素関数 $F(s)$ に対して、実関数 $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を F の逆ラプラス変換という。

ラプラス変換と逆ラプラス変換の関係

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]](t) = f(t), \quad \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[F]](s) = F(s)$$

ラプラス変換の基本的な例

$$u(t) := \begin{cases} 1 & (t \geq 1) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}, \quad \delta(t) := \begin{cases} 1 & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

とするとき、$u(t)$ を単位ステップ、$\delta(t)$ を単位インパルスという。

初等関数のラプラス変換

1. $\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$
2. $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \geq 1)$
3. $\mathcal{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a} \quad (a \in \mathbb{C})$
4. $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (\omega \in \mathbb{R})$

ラプラス変換の基本的な例

微分・積分のラプラス変換

- $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)] = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$
- $\mathcal{L}[\frac{d^2}{dt^2}f(t)] = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$
- $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau + \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$

積分で $\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau$ は初期値であり、電荷の概念につながっている。

いつも結果が簡単とは限らない！

今までの例はラプラス変換後が s の有理関数になるものばかりだが、
$\mathcal{L}[\sqrt[n]{t}] = \frac{1}{s^{1+1/n}}\Gamma(1+\frac{1}{n})$, $\mathcal{L}[u(t-a)] = \frac{1}{s}e^{-as}$, $\mathcal{L}[\log t] = -\frac{1}{s}(\log s + \gamma)$
(γ：オイラー定数) など s の有理関数にならないものもある。

ラプラス変換と微分方程式

微分方程式にラプラス変換を施したものを代数的に変形することで、$\mathcal{L}[f] = (s$ の有理関数) にできる。$\mathcal{L}^{-1}$ を両辺に施すと $f(t)$ を得る！

$$\boxed{f \text{ の微分方程式}} \xrightarrow[\text{初期値}]{\mathcal{L}} \boxed{\mathcal{L}[f] = (s \text{ の有理関数})} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{f(t) = \cdots}$$

例えば、$\dfrac{dy}{dt}(t) + 4\displaystyle\int_0^t y(t)dt + 5y(t) = 2,\ y(0) = 1$ という初期値問題

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} \quad (s\mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 4 \cdot \frac{1}{s}\mathcal{L}[y](s) + 5\mathcal{L}[y](s) = 2 \cdot \frac{1}{s} \\
&\rightsquigarrow \quad \mathcal{L}[y](s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+4}\right) \\
&\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} \quad y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - 2e^{-4t}\right)
\end{aligned}$$

ラプラス変換と微分方程式

例えば、$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$ を解きたい。

$$\overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow}\quad (s^2\mathcal{L}[y](s)-sy(0)-y'(0))+2(s\mathcal{L}[y](s)-y(0))+2\mathcal{L}[y](s)=2\cdot\frac{1}{s}$$

$$\rightsquigarrow\quad \mathcal{L}[y](s)=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+2s+2)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow}\quad y(t)=1+e^{-t}\sin t\quad\left(\because \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega}=\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t]\right)$$

$t\to\infty$ のとき $e^{-t}\to 0$ なので、このとき $y(t)\to 1$ となる。

このように、$t\to\infty$ として微分方程式の解がある値に収束するとき、解は安定であるという。

連立線形微分方程式とラプラス変換

ベクトル値関数 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ に対しても、ラプラス変換 $\mathcal{L}[\mathbf{x}](s)$ を定義できる。連立線形微分方程式は同様にラプラス変換で処理して解くこともできる！

入力 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$、システムの状態 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$、出力 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ として、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) & A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{nm}(\mathbb{R}), \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) & C \in M_{ln}(\mathbb{R}), D \in M_{lm}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} \begin{cases} s\mathcal{L}[\mathbf{x}](s) - \mathcal{L}[\mathbf{x}](0) = A\mathcal{L}[\mathbf{x}](s) + B\mathcal{L}[\mathbf{u}](s) \\ \mathcal{L}[\mathbf{y}](s) = C\mathcal{L}[\mathbf{x}](s) + D\mathcal{L}[\mathbf{u}](s) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{L}[\mathbf{x}](s) = (sI - A)^{-1}(\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(s)) \\ \mathcal{L}[\mathbf{y}](s) = C(sI - A)^{-1}(\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(s)) + D\mathcal{L}[\mathbf{u}](s) \end{cases}$$

初期値を $\mathbf{x}(0) = 0$ とするとき、“入力” と “出力” の比

$$H(s) := \frac{\mathcal{L}[\mathbf{y}](s)}{\mathcal{L}[\mathbf{u}](s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

をこのシステムの伝達関数という。

連立線形微分方程式とラプラス変換

e.g. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とし、入力が $u(t) = 1$ のとき

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathbf{x}](s) &= \left(sI - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} -s^2 - s + 2 \\ s^2 + 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{s} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\frac{1}{s+2}
\end{aligned}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} \quad \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Z 変換とは

Coming soon!!

電磁気学

連続時間線形システムとは

離散時間線形システムとは