第2章　递归与分治策略(4)

内容

2.1 求解递归式

2.2 递归

1. 阶乘函数
2. Fibonacci数列
3. 排列问题
4. 整数划分问题
5. Hanoi塔问题

2.3 分治

1. 二分搜索技术
2. 合并排序
3. 快速排序
4. **线性时间选择**

2.3 分治

1. 二分搜索技术
2. 合并排序
3. 快速排序
4. 线性时间选择

4 线性时间选择

- 给定线性序集中n个元素和一个整数i，1≤i≤n，要求找出这n个元素中第i小的元素。
- 即如果将这n个元素依线性序从小到大排列，排在第i个位置的元素即为要找的元素。
- 特殊情况：

1. **当i=1时，找的是最小元素；**
2. **当i=n时，找的是最大元素；**
3. **当i=(n+1)/2时，找的是中位数。**

线性时间选择两种算法

- 根据选取基准元素的方法：

a) **RandomizedSelect算法**：划分基准是随机产生的

b) **Select算法**：分组得到数组的中位数，以该元素作为划分基准

a) RandomizedSelect算法

- 模仿快速排序算法，其基本思想是对输入数组进行递归划分，与快速排序算法不同的是，它只对划分出的子数组之一进行递归处理。

RandomizedSelect算法

1. **分解**：在A[p..r]中随机选出一个元素作为划分基准，数组A[p..r]被划分成两个子数组A[p..q-1]和A[q+1..r]，使A[p..q-1] ≤ A[q] ≤ A[q+1..r]。
2. **递归求解**：
   ① 计算子数组A[p..q]中元素个数k。
   ② 如果i=k，则第i小的元素为**A[q]**；
   ③ 如果i<k，则在子数组**A[p..q-1]**中寻找第i小的元素；
   ④ 如果i>k，则第i小的元素在子数组**A[q+1..r]**中，且是第i-k小元素。
3. **合并**

RandomizedSelect算法描述

```
RANDOMIZED_SELECT(A, p, r, i)
    if p==r
        return A[p]
    q = RANDOMIZED_PARTITION(A, p, r)
    k = q-p+1
    if i==k
        return A[q]
    else if  i <k
        return RANDOMIZED_SELECT(A, p, q-1, i)
    else return RANDOMIZED_SELECT(A, q+1, r, i-k)
```

RandomizedSelect算法分析

- 在最坏情况下，算法**RandomizedSelect**需要$O(n^2)$计算时间
- 可以证明，在平均情况下，算法**RandomizedSelect**的时间复杂度为$O(n)$

b) Select算法

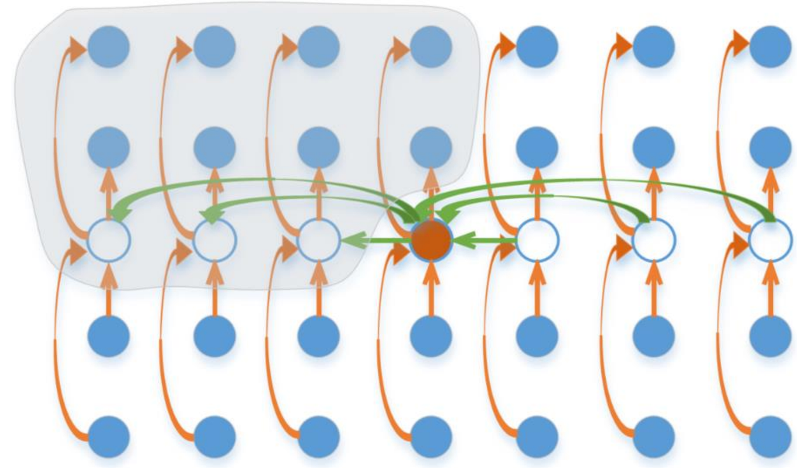
- 如果能在线性时间内找到一个划分基准，使得按这个基准所划分出的2个子数组的长度都至少为原数组长度的ε倍($0<\varepsilon<1$是某个正常数)，那么就可以**在最坏情况下**用$O(n)$时间完成选择任务。
- 例如：
  - 若$\varepsilon=9/10$，算法递归调用所产生的子数组的长度至少缩短1/10。所以，在最坏情况下，算法所需的计算时间$T(n)$满足递归式：

$$T(n) \le T(9n/10)+O(n) \Rightarrow T(n)=O(n)$$

选择划分基准

- 分组得到数组的中位数，以该元素作为划分基准
  1. 将n个输入元素划分成$\lfloor n/5 \rfloor$个组，每组5个元素。
  2. 用任意一种排序算法，将每组中的元素排好序，并取出每组的中位数，共$\lfloor n/5 \rfloor$个。
  3. 递归调用Select来找出这$\lfloor n/5 \rfloor$个元素的中位数，以这个元素作为划分基准。如果$\lfloor n/5 \rfloor$是偶数，就找它的2个中位数中较小的一个。

选择划分基准分析



- 设所有元素互不相同
- 找出的基准x至少比下式计算出的元素数大：

$$3 * \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor / 2 \right\rfloor = 3 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$$

- 同理，基准x也至少比该式计算出的元素数小。
- 而当n≥50时，$3 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \geqslant \frac{n}{4}$

所以按此基准划分所得的2个子数组的长度都至少缩短1/4。

Select算法描述和分析(1)

SELECT(A, p, r, i)

n = r-p+1

if n<50

在作业中，这个条件改为n<=5

SORT(A, p, r)

return A[p+i-1]

向下取整得到组数

Divide the n elements of the input array into $\lfloor n/5 \rfloor$ groups of 5 elements each and find the median of each of the $\lfloor n/5 \rfloor$ groups.

Use **SELECT** recursively to find the median x of the $\lfloor n/5 \rfloor$ medians.

…

当组数为偶数时，比如8，则中位数为第4小元素

Select算法描述(2)

SELECT(A, p, r, i)

…

exchange A[r] with x

q←**PARTITION**(A, p, r)

k = q-p+1

if i == k

return A[q]

elseif i <k

return **SELECT**(A, p, q-1, i)

else return **SELECT**(A, q+1, r, i-k)

SELECT()函数，不仅要返回第i小元素，还要返回这个第i小元素在A中的位置。

Select算法复杂度分析(1)

$\boxed{T(n)}$ **SELECT**(A, p, r, i)

$\boxed{\Theta(1)}$
n = p-r+1
if n<50
    SORT(A, p, r)
    return A[p+i-1]

$\boxed{\Theta(n)}$ — Divide the n elements of the input array into $\lfloor n/5 \rfloor$ groups of 5 elements each and find the median of each of the $\lfloor n/5 \rfloor$ groups.

$\boxed{T(n/5)}$ — Use **SELECT** recursively to find the median x of the $\lfloor n/5 \rfloor$ medians.

…

Select算法复杂度分析(2)

```
SELECT(A, p, r, i)
    …
    exchange A[r] with x
    q←PARTITION(A, p, r)
    k = q-p+1
    if i == k
        return A[q]
    elseif  i <k
        return SELECT(A, p, q-1, i)
    else return SELECT(A, q+1, r, i-k)
```

$\boxed{\Theta(n)}$

$\boxed{T(3n/4)}$

Select算法复杂度分析(3)

- 递归式：

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n < 50 \\ T(n/5) + T(3n/4) + \Theta(n) & \text{if } n \geqslant 50 \end{cases}$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n\right)$$

Select算法思考

- 在select算法中，将每一组的大小定为5，并选取50作为是否进行递归调用的分界点，这两点保证了select算法的时间复杂度为O(n)。
- 是否有其他选择？

快速排序改进

- 如何才能使快速排序在最坏情况下以 $O(n \log n)$ 时间运行？
- 每次对待排序的子数组A[p..r]进行分解时，都使用Select算法，选择待排序的(r-p+1)个元素的中位数作为基准元素。

快速排序改进算法描述

```
BEST_CASE_QUICKSORT(A, p, r)
  if p < r
    i = floor((r-p+1)/2)
    x = SELECT(A, p, r, i)  // x是A[p..r]中位数
    exchange A[r] with x
    q=PARTITION(A, p, r)
    BEST_CASE_QUICKSORT(A, p, q-1)
    BEST_CASE_QUICKSORT(A, q+1, r)
```

End