历年考研数学一真题1987-2016

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（一）试 题 及 解 答

本文档仅供学习交流之用. 试题来源于网络, 解答由孟庆鑫提供, 个人观点仅供参考.

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 若反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 [C]

(A) $a<1$ 且 $b>1$. (B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$. (D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 [D]

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

3. 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 则 $q(x)=$ [A]

(A) $3x(1+x^2)$. (B) $-3x(1+x^2)$. (C) $\dfrac{x}{(1+x^2)}$. (D) $-\dfrac{x}{(1+x^2)}$.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则 [D]

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 [C]

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似. (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似. (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 [B]

(A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面. (D) 柱面.

7. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leqslant \mu + \sigma^2\}$, 则 [B]

(A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.

8. 设随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示两次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 [A]

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t\ln(1 + t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1 - \cos x^2} = \underline{\frac{1}{2}}$.

10. 向量场 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x + y + z)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A} = \underline{\boldsymbol{j} + (y-1)\boldsymbol{k}}$.

11. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = \underline{-\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y}$.

12. 设函数 $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1 + ax^2}$, 且 $f''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\frac{1}{2}}$.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \underline{\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4}$.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\overline{X} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{(8.2, 10.8)}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leqslant r \leqslant 2(1 + \cos\theta), -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$,

计算二重积分 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 换成极坐标计算,

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta \cdot r\,\mathrm{d}r$$
$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta + \cos^3\theta + \frac{1}{3}\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta$$
$$= 16\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{32}{3} + 5\pi. \qquad \square$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

(I) 证 $y'' + 2y' + ky = 0,\ 0 < k < 1 \Rightarrow y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$,

其中 C_1, C_2 是任意常数, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ 是特征方程的两个根 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(II) 解 $y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}\right)\mathrm{d}x = -\left(\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{3}{k}. \qquad \square$$

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y + 1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$,

并求 $I(t)$ 的最小值.

解 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x-y}$, $f(0, y) = y + 1 \Rightarrow f(x, y) = xe^{2x-y} + y + 1$,

$$I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int_{L_t} \mathrm{d}f(x, y) = f(1, t) - f(0, 0) = e^{2-t} + t.$$

$I'(t) = 1 - e^{2-t} \overset{令}{=} 0 \Rightarrow t = 2$. $I(t)$ 的最小值为 3. $\square$

18. (本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　利用 Gauss 公式有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+1)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(3z)\right)\,\mathrm{d}V \\ &= \iiint_{\Omega}(2x+1)\,\mathrm{d}V\,, \end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}V=(1-x)^2\,\mathrm{d}x$, 于是 $I=\int_0^1(2x+1)(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. □

19. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=1$, $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ 证明:

(I) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(I) 证　利用中值定理有

$$\begin{aligned} |\,x_{n+1}-x_n\,| &= |\,f(x_n)-f(x_{n-1})\,| \\ &= f'(\xi_{n-1})\;|\,x_n-x_{n-1}\,| && (\xi_{n-1}\text{介于}x_n,\,x_{n-1}\text{之间}) \\ &= f'(\xi_{n-1})\;|\,f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\,| \\ &= f'(\xi_{n-1})f'(\xi_{n-2})\;|\,x_{n-1}-x_{n-2}\,| && (\xi_{n-2}\text{介于}x_{n-1},\,x_{n-2}\text{之间}) \\ &= \cdots \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}f'(\xi_i)\right)\;|\,x_2-x_1\,| && (\xi_i\text{介于}x_{i+1},\,x_i\text{之间}) \\ &< |\,x_2-x_1\,|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && (1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(II) 证　$F(x)\overset{\text{令}}{=}f(x)-x$, $F'(x)=f'(x)-1\in\left(-1,\,-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow F(x)$ 严格递减, (2)

$f(0)=1$, $0<f'(x)<\dfrac{1}{2}\overset{\int_0^x}{\Longrightarrow}1<f(x)<\dfrac{1}{2}x+1\ (x>0)\ \Rightarrow\ F(1)>0$, $F(2)<0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(1,\,2)$, 使得 $F(\xi)=0$. (3)

由 (1) 式知, 当 $n\to\infty$ 时, $x_{n+1}-x_n\to 0$, 即 $F(x_n)\to 0$. 结合 (2) (3) 式知 $x_n\to\xi$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in(1,\,2)\subset(0,\,2)$. □

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)$

当 $a=-2$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解；

当 $a=1$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&3\\-C_1-1&-C_2-1\\C_1&C_2\end{pmatrix}$，$\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$；

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$. □

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(I) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(II) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(I) 解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$，$\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{令}{=}\boldsymbol{\Lambda}$，

$$\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(II) 解 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{BA}^{99}$，即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-2+2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.$$ □

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{ (x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x} \}$ 上服从均匀分布，令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leqslant Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

（I）写出 (X, Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

（I）解 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\iint_D \mathrm{d}\sigma}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（II）解 设 $0 < a, b < 1$，则 $P\{U \leqslant a, X \leqslant b\} = P\{X > Y, X \leqslant b\} = \dfrac{3}{2}b^2 - b^3$,

$P\{U \leqslant a\} = P\{X > Y\} = \dfrac{1}{2}$, $P\{X \leqslant b\} = 2b^{\frac{3}{2}} - b^3$,

$P\{U \leqslant a, X \leqslant b\} \neq P\{U \leqslant a\} \cdot P\{X \leqslant b\}$，即 U 与 X 不独立.

（III）解 $F(z) = P\{U + X \leqslant z\} = P\{U + X \leqslant z, U = 0\} + P\{U + X \leqslant z, U = 1\}$

$$= P\{X \leqslant z, X > Y\} + P\{1 + X \leqslant z, X \leqslant Y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1, \\ \dfrac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2. \end{cases}$$

□

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数，X_1, X_2, X_3 为来自该总体 X 的简单随机样本，令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(Ⅰ) 求 T 的概率密度;

(Ⅱ) 确定 a, 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

(Ⅰ) 解 $F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{\max(X_1, X_2, X_3)\leqslant t\}=(P\{X_1\leqslant t\})^3$

即 $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \left(\displaystyle\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}\,\mathrm{d}\theta\right)^3, & 0\leqslant z<\theta,\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}\Rightarrow f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<z<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

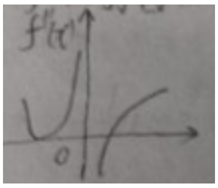
(Ⅱ) 解 $EaT=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}a\,t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{令}}{=}\theta\Rightarrow a=\frac{10}{9}.$ □

2015 年考研数学一真题

一、选择题:1　8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3



(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则 (　)

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 (　)

(A) 收敛点，收敛点
(B) 收敛点，发散点
(C) 发散点，收敛点
(D) 发散点，发散点

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$　　　　　　　　(　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为 (　)

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$

(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$

(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 (　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则 (　)

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$　　(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)P(B)}{2}$　　(D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)P(B)}{2}$

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2,EY=1,DX=3$，则 $E\left[X(X+Y-2)\right]=$ (　)

(A) -3　　(B) 3　　(C) -5　　(D) 5

二、填空题：9　14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$ ________.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ________.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$ ________.

(14)设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f\left(x\right)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f\left(x\right)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f\left(0\right)=2$，求 $f\left(x\right)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x,y\right)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f\left(x,y\right)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（II）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\ z=x,\end{cases}$ 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分 $I=\int_L\left(y+z\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

(20)（本题满 11 分）

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 内 R^3 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 为 R^3 的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 下的坐标相同，并求所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（I）求 a,b 的值；

（II）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. .

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2,x>0,\\0,\qquad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, \theta \le x \le 1,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

其中θ为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为来自该总体的简单随机样本.

(I)求θ的矩估计量.
(II)求θ的最大似然估计量.

数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）B

（2）D

（3）D

（4）B

（5）B

（6）A

（7）（B）

（8）（D）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$2x-y-z-1=0$

（10）$f(-1)=1$

（11）$ln\dfrac{y}{x}=2x+1$

（12）π

（13）[-2,2]

（14）$\dfrac{2}{5n}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2 ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$$

令$u=\frac{1}{x}$,

则$\lim_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

$$3y^2y'+y^2+x\cdot2yy'+2xy+x^2y'=0$$

$$y^2+2xy=0$$

$$y(y+2x)=0$$

$y=0$(舍)或$y=-2x$。

$y=-2x$ 时，

$$y^3+xy^2+x^2y+6=0$$

$$-8x^3+x\cdot(4x^2)+x^2\cdot(-2x)+6=0$$

$$-8x^3+4x^3-2x^3+6=0$$

$$-6x^3+6=0$$

$$x^3=1\Rightarrow x=1,y=-2$$

$$6(y')^2y+3y^2y''+2yy'+2y'y+x\cdot2(y')^2+x\cdot2yy''+2y+2xy'+2xy'+x^2y''=0$$

$$12y''(1)-4y''(1)-4+y''(1)=0$$

$$9y''(1)=4$$

$$y''(1)=\frac{9}{4}>0$$

所以 $y(1)=-2$ 为极小值。

（17）【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$
$$\frac{\partial E}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y)$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y)$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4E+e^x\cos y)e^{2x}$$
$$f''(e^x\cos y)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

令 $e^x\cos y=u$，

则 $f''(u)=4f(u)+u$，

故 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4},(C_1,C_2\text{为任意常数})$

由 $f(0)=0,f'(0)=0,$ 得

$$f(u)=\frac{e^{2u}}{16}-\frac{e^{-2u}}{16}-\frac{u}{4}$$

（18）【答案】

补 $\sum_1:\{(x,y,z)|z=1\}$ 的下侧，使之与 Σ 围成闭合的区域 Ω，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$
$$=-\iiint\limits_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dxdydz$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3(\rho\cos\theta-1)^2+3(\rho\sin\theta-1)^2+1]\rho dz$$
$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3\rho^2-6\rho^2\cos\theta-6\rho^2\sin\theta+7\rho]dz$$
$$=-2\pi\int_0^1(3\rho^3+7\rho)(1-\rho^2)d\rho=-4\pi$$

（19）【答案】

（1）证 $\{a_n\}$ 单调

由 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，根据单调有界必有极限定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，

故由 $\cos a_n-a_n=\cos b_n$，两边取极限（令 $n\to\infty$），得 $\cos a-a=\cos 0=1$。

解得 $a=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（20）【答案】①$\left(-1,2,3,1\right)^T$ ②$B=\begin{pmatrix} -k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}\left(k_1,k_2,k_3\in R\right)$

（21）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

（22）【答案】（1）$F_Y\left(y\right)=\begin{cases} 0, y<0, \\ \frac{3}{4}y, 0\le y<1, \\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}y\right), 1\le y<2, \\ 1, y\ge 2. \end{cases}$

（2）$\frac{3}{4}$

（23）【答案】（1）$EX=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}, EX^2=\theta$

（2）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（3）存在

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是　　　　（　）

(A) $y = x + \sin x$　　　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$　　　　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　）

(A)当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　　　　(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时，$f(x) \geq g(x)$　　　　(D) 当 $f''(x) \leq 0$ 时，$f(x) \leq g(x)$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx =$　　　　（　）

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x - a\cos x - b\sin x)^2 dx\right\}$,则

$a_1\cos x + b_1\sin x =$　　　　（　）

(A) $2\sin x$　　(B) $2\cos x$　　(C) $2\pi\sin x$　　(D) $2\pi\cos x$

(5)行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量，则对任意常数$k,l$，向量$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量

α_1,α_2,α线性无关的

(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

(7) 设随机事件A与B相互独立，且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$ ( )

(A)0.1 (B)0.2 (C)0.3 (D)0.4

(8) 设连续性随机变量X_1与X_2相互独立，且方差均存在，X_1与X_2的概率密度分别为$f_1(x)$与

$f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，

则 ( )

(A)$EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$ (B)$EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$

(C)$EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$ (D)$EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$

二、填空题：9~14小题,每小题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面$z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点$(1,0,1)$处的切平面方程为________.

(10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则$f(7)=$________.

(11) 微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解为$y=$________.

(12) 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，

则曲面积分$\oint_L zdx+ydz=$________.

(13) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\ 0,其他\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，X_1、X_2,…，X_n 为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计，则 $c=$________.

三、解答题：15~23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f\left(x\right)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f\left(u\right)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f\left(e^x\cos y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=4\left(z+e^x\cos y\right)e^{2x}$.若 $f\left(0\right)=0,f'\left(0\right)=0$，求 $f\left(u\right)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\ (z\le1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

(19)(本题满分 10 分)设数列 $\left\{a_n\right\},\left\{b_n\right\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

(II) 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛。

(20)(本题满分 11 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；　(II) 求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\mathbf{B}$.

(21)(本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,\ i)(i=1,2.)$

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

(II) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\ \theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}},\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$，其中 θ 是未知参数且大于零. X_1、X_2、…、X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$.；

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

(III) 是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$？

2013 硕士研究生入学考试

数学一

1.已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k，c 为常数，且$c\neq 0$，则（　）

A.　$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$ B.　$k=2,c=\dfrac{1}{2}$ C.　$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$ D.　$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2.曲面$x^2+\cos(xy)+yz+x=0$在点$(0,1,-1)$处的切平面方程为（　）

A.　$x-y+z=-2$　B.　$x+y+z=0$　C.　$x-2y+z=-3$　D.　$x-y-z=0$

3.设$f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$，令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则$S(-\dfrac{9}{4})=$（　）

A．$\dfrac{3}{4}$　　B.　$\dfrac{1}{4}$　　C.　$-\dfrac{1}{4}$　　D.　$-\dfrac{3}{4}$

4.设$L_1:x^2+y^2=1$，$L_2:x^2+y^2=2$，$L_3:x^2+2y^2=2$，$L_4:2x^2+y^2=2$为四条逆时针方向的平面曲线，记$I_i=\int\limits_{L_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则$\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A.　I_1　　B.　I_2　　C.　I_3　　D　I_4

5.设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 AB=C，且 B 可逆，则（　　）

A.矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

6.矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为（　　）

A.　$a=0,b=2$　　B.　$a=0,b$ 为任意常数

C.　$a=2,b=0$　　D.　$a=2,b$ 为任意常数

7. 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 X_1　$N(0,1)$，X_2　$N(0,2^2)$，X_3　$N(5,3^2)$，$P_i=P\{-2\leq X_i\leq 2\}(i=1,2,3)$，则（　　）

A.　$P_1>P_2>P_3$　　B.　$P_2>P_1>P_3$　　C.　$P_3>P_2>P_2$　　D $P_1>P_3>P_2$

8. 设随机变量 $X \quad t(n)$，$Y \quad F(1,n)$，给定 $a(0<a<0.5)$，常数 c 满足 $P\left\{X>c\right\}=a$，则 $P\left\{Y>c^2\right\}=$（　　）

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to 0} n[f(\frac{1}{n})-1]$＝____。

10. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解 y=____。

11. 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____。

12. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$______。

13. 设 A=(a_{ij})是 3 阶非零矩阵，$|A|$为 A 的行列式，A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0$(i，j=1,2,3)，则 |A| ＝______。

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 P{Y≤a+1|Y＞a}=

三. 解答题：

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt.$

(16)(本题 10 分)

设数列｛a_n｝满足条件：$a_0=3, a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$. S（x）是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数.

（1）证明：$S''(x)-S(x)=0$;

（2）求 $S(x)$的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（Ⅰ）存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi)=1$.

（Ⅱ）存在$\eta \in (-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 A(1,0,0),B(0,1,1)两点将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面Σ，Σ与平面$z=0,z=2$所围成的立体为Ω。

（1）求曲面Σ的方程；

（2）求Ω的形心坐标。

20.（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 AC-CA=B,并求所有矩阵 C。

21.（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（1）证明二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2）若α,β正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$。

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & 其他\end{cases}$令随机变量$Y=\begin{cases}2, & x\le 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（1）求 Y 的分布函数；

（2）求概率$P\{X\le Y\}$.

23.(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$其中$\theta$为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本。

（1）求θ的矩估计量；

（2）求θ的最大似然估计量。

2013年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、 选择题

1、D

2、A

3、C

4、B

5、B

6、B

7、A

8、C

二、 填空题

9、1

10、 $C_1e^{3x}+C_2e^{x}+xe^{2x}$

11、 $\sqrt{2}$

12、 $-\ln 2$

13、 -1

14、 $1-e^{-1}$

三、 解答题

15. $8-2\pi-4\ln 2$

16.（II） $2e^{x}+e^{-x}$

17.极小值点$\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$。极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$

22. （i） $F_Y(y)=\begin{cases} 0, y<1 \\ \dfrac{18}{27}+\dfrac{y^2}{27}, 1\le y<2 \\ 1, y\ge 2 \end{cases}$

（ii） $P\{X\le Y\}=\dfrac{8}{27}$

23. （i） $\widehat{\theta}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

（ii） $\widehat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{X_i}}$

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f^{'}(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$　　（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1<I_2<I_3.$　　(B) $I_2<I_2<I_3.$　　(C) $I_1<I_3<I_1,$　　(D) $I_1<I_2<I_3.$

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A 为3阶矩阵，P 为3阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量x与y相互独立，且分别服从参数为1与参数为4的指数分布，则 $p\{x<y\}=$（）

$(A)\frac{1}{5}$　$(B)\frac{1}{3}$　$(C)\frac{2}{5}$　$(D)\frac{4}{5}$

（8）将长度为1m的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（）

$(A)\ 1$　$(B)\ \frac{1}{2}$　$(C)\ -\frac{1}{2}$　$(D)\ -1$

二、填空题：9–14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$_________。

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$ _________。

（11）$\left.\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}$ _________。

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2ds=$_________。

（13）设X为三维单位向量，E为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为_________。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\bar{C})=$_________。

三、解答题：15—23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分10分）

求 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线

，其中函数$f(t)$具有连续导数，且$f(0)=0$，$f(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数$f(t)$的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

（19）（本题满分 10 分）

已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分$J=\int_L 3x^2ydx+\left(x^2+x-2y\right)dy$。

（20）（本题满分 10 分）

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求$|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组$Ax=b$有无穷多解，求a，并求$Ax=b$的通解。

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$为矩阵$A$的转置，已知$r(A^TA)=2$，且二次型$f=x^TA^TAx$。

1）求a　　　2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量X,Y以及XY的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：(1) $P(X=2Y)$；　(2) $\operatorname{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，设 $Z=X-Y$，

(1)　求 z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2)　设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3)　证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

1987年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)当x=______________时,函数$y=x\cdot 2^x$取得极小值.

(2)由曲线$y=\ln x$与两直线$y=e+1-x$及$y=0$所围成的平面图形的面积是______________.

(3)与两直线$\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$

及$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$都平行且过原点的平面方程为______________.

(4)设L为取正向的圆周$x^2+y^2=9$,则曲线积分$\int_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$= ______________.

(5)已知三维向量空间的基底为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$,则向量$\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)$在此基底下的坐标是______________.

二、(本题满分8分)

求正的常数a与b,使等式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$成立.

三、(本题满分7分)

(1)设f、g为连续可微函数,$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

(2)设矩阵$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$满足关系式$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$,其中$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$,求矩阵$\mathbf{B}$.

四、(本题满分8分)

求微分方程$y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$的通解,其中常数$a>0$.

五、选择题(本题共4小题,每小题3分,满分12分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在$x=a$处

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $t>0,s>0$，则 I 的值

(A)依赖于 s 和 t　　(B)依赖于 s、t 和 x

(C)依赖于 t、x，不依赖于 s　　(D)依赖于 s，不依赖于 t

(3)设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$

(A)发散　　(B)绝对收敛

(C)条件收敛　　(D)散敛性与 k 的取值有关

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=a\neq 0$，而 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\mathbf{A}^*|$ 等于

(A) a　　(B) $\dfrac{1}{a}$

(C) a^{n-1}　　(D) a^n

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

七、(本题满分 10 分)

求曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中 Σ 是由曲线 $f(x)=\begin{cases}z=\sqrt{y-1} & 1\le y\le 3\\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而成的曲面，其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使得 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a,b 为何值时，现线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设在一次实验中,事件 A 发生的概率为 $p,$ 现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为____________;而事件 A 至多发生一次的概率为____________.

(2)有两个箱子,第 1 个箱子有 3 个白球,2 个红球, 第 2 个箱子有 4 个白球,4 个红球.现从第 1 个箱子中随机地取 1 个球放到第 2 个箱子里,再从第 2 个箱子中取出 1 个球,此球是白球的概率为____________.已知上述从第 2 个箱子中取出的球是白球,则从第一个箱子中取出的球是白球的概率为____________.

(3)已知连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1},$ 则 X 的数学期望为____________,X 的方差为____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$, 求 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

1988年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$的收敛域.

(2)设$f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$且$\varphi(x)\geq 0$,求$\varphi(x)$及其定义域.

(3)设Σ为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy.$

二、填空题(本题共4小题,每小题3分,满分12分.把答案填在题中横线上)

(1)若$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,则$f'(t)=$ ________.

(2)设$f(x)$连续且$\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$,则$f(7)=$________.

(3)设周期为2的周期函数,它在区间$(-1,1]$上定义为$f(x)=\begin{cases}2 & -1<x\leq 0\\ x^2 & 0<x\leq 1\end{cases}$,则的傅里叶$(Fourier)$级数在$x=1$处收敛于________.

(4)设4阶矩阵$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,$\mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$均为4维列向量,且已知行列式$|\mathbf{A}|=4,|\mathbf{B}|=1,$则行列式$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=$ ________.

三、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设$f(x)$可导且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则$\Delta x\to 0$时,$f(x)$在x_0处的微分dy是

(A)与Δx等价的无穷小　　(B)与Δx同阶的无穷小

(C)比Δx低阶的无穷小　　(D)比Δx高阶的无穷小

(2)设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解且$f(x_0)>0,f'(x_0)=0,$则函数$f(x)$在点x_0处

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增加　　(D)某邻域内单调减少

(3)设空间区域$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leq R^2,z\geq 0,\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leq R^2,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,$则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} dv$

(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$

(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

(4)设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛,则此级数在$x=2$处

(A)条件收敛

(B)绝对收敛

(C)发散

(D)收敛性不能确定

(5)n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\le s\le n)$线性无关的充要条件是

(A)存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq 0$

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量均线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在一个向量都不能用其余向量线性表示

四、(本题满分 6 分)

设$u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$,其中函数$f$、$g$具有二阶连续导数,求$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$,其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x-1$在该点处的切线重合,求函数$y=y(x)$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点$(0,1)$的质点A对质点M的引力大小为$\frac{k}{r^2}(k>0$为常数,r为A质点与M之间的距离),质点M沿直线$y=\sqrt{2x-x^2}$自$B(2,0)$运动到$O(0,0)$,求在此运动过程中质点A对质点M的引力所作的功.

七、(本题满分 6 分)

已知$\mathbf{AP}=\mathbf{BP}$,其中$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$,求$\mathbf{A},\mathbf{A}^5$.

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似.

(1)求x与y.

(2)求一个满足$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{B}$的可逆阵$\mathbf{P}$.

九、(本题满分 9 分)

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且在(a,b)内有$f'(x)>0$,证明:在(a,b)内存在唯一的ξ,使曲线$y=f(x)$与两直线$y=f(\xi),x=a$所围平面图形面积S_1是曲线$y=f(x)$与两直线$y=f(\xi),x=b$所围平面图形面积S_2的 3 倍.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设在三次独立试验中,事件A出现的概率相等,若已知A至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$,则事件A在一次试验中出现的概率是____________.

(2)若在区间$(0,1)$内任取两个数,则事件”两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率为____________.

(3)设随机变量X服从均值为 10,均方差为 0.02 的正态分布,已知

$$\phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du,\phi(2.5)=0.9938,$$

则X落在区间$(9.95,10.05)$内的概率为____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X的概率密度函数为$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1-x^2)}$,求随机变量$Y=1-\sqrt[3]{X}$的概率密度函数$f_Y(y)$.

1989年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ______________.

(2)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$,则 $f(x)=$______________.

(3)设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$______________.

(4)向量场 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=$______________.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则矩阵 $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^{-1}=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线　　(B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线,又有铅直渐近线　　(D)既无水平渐近线,又无铅直渐近线

(2)已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点的坐标是

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,2)$

(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

(3)设线性无关的函数都是二阶非齐次线性方程的解是任意常数,则该非齐次方程的通解是

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$　　(B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$　　(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

(4)设函数 $f(x)=x^2,0\le x<1$,而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<+\infty$,其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n=1,2,3,\cdots$,则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

(5)设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$,则 $\mathbf{A}$ 中

(A)必有一列元素全为 0　　(B)必有两列元素对应成比例

(C)必有一列向量是其余列向量的线性组合　　(D)任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2)设曲线积分 $\int_c xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$,计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 的值.

(3)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

假设λ为n阶可逆矩阵$\mathbf{A}$的一个特征值,证明

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$为$\mathbf{A}^{-1}$的特征值.

(2) $\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*$的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为R的球面Σ的球心在定球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$上,问当R为何值时,球面Σ在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分. 把答案填在题中横线上)

(1) 已知随机事件A的概率$P(A)=0.5,$随机事件B的概率$P(B)=0.6$及条件概率$P(B\mid A)=0.8,$则和事件$A\cup B$的概率$P(A\cup B)$=____________.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,现已知目标被命中,则它是甲射中的概率为____________.

(3) 若随机变量ξ在$(1,6)$上服从均匀分布,则方程$x^2+\xi x+1=0$有实根的概率是____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X与Y独立,且X服从均值为 1、标准差(均方差)为$\sqrt{2}$的正态分布,而Y服从标准正态分布. 试求随机变量$Z=2X-Y+3$的概率密度函数.

1990年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)过点$M(1,2-1)$且与直线$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$垂直的平面方程是______________.

(2)设a为非零常数,则$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=$______________.

(3)设函数$f(x)=\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,则$f[f(x)]=$______________.

(4)积分$\int_0^2 dx\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}dy$的值等于______________.

(5)已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,

则该向量组的秩是______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设$f(x)$是连续函数,且$F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)dt$,则$F'(x)$等于

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$ (B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$ (D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(2)已知函数$f(x)$具有任意阶导数,且$f'(x)=[f(x)]^2$,则当n为大于2的正整数时,$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

(3)设a为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$

(A)绝对收敛 (B)条件收敛

(C)发散 (D)收敛性与a的取值有关

(4)已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续,且$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点$x=0$处$f(x)$

(A)不可导　　(B)可导,且 $f'(0)\neq 0$

(C)取得极大值　　(D)取得极小值

(5)已知$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次线性方程组$\mathbf{AX}=b$的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$是对应其次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的基础解析,k_1、k_2为任意常数,则方程组$\mathbf{AX}=b$的通解(一般解)必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

(2)设$z=f(2x-y,y\sin x)$,其中$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$

(3)求微分方程$y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分

$$I=\iint\limits_S yzdzdx+2dxdy$$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=4$外侧在$z\geq 0$的部分.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$.证明在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$f'(\xi)>0.$

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

且矩阵$\mathbf{A}$满足关系式

$$\mathbf{A}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})'\mathbf{C}'=\mathbf{E}$$

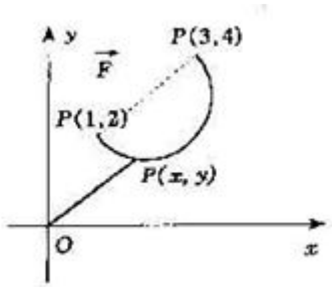
其中$\mathbf{E}$为四阶单位矩阵,$\mathbf{C}^{-1}$表示$\mathbf{C}$的逆矩阵,$\mathbf{C}'$表示$\mathbf{C}$的转置矩阵.将上述关系式化简并求矩阵$\mathbf{A}$.

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$成标准型.

九、(本题满分 8 分)

质点P沿着以AB为直径的半圆周,从点$A(1,2)$运动到点$B(3,4)$的过程中受变力$\vec{F}$作用(见图).$\vec{F}$的大小等于点P与原点O之间的距离,其方向垂直于线段OP且与y轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$.求变力$\vec{F}$对质点P所作的功.



十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知随机变量X的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

则X的概率分布函数$F(x)$=____________.

(2)设随机事件A、B及其和事件的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6,若$\bar{B}$表示B的对立事件,那么积事件$A\bar{B}$的概率$P(A\bar{B})$=____________.

(3) 已知离散型随机变量X服从参数为 2 的泊松$(Poisson)$分布,即$P\{X=k\}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-2}}{k!},k=0,1,2,\cdots$,则随机变量$Z=3X-2$的数学期望$E(Z)$=____________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量(X,Y)**在区域**$D:0<x<1,|y|<x$**内服从均匀分布，求关于**X**的边缘概率密度函数及随机变量**$Z=2X+1$**的方差**$D(Z)$.

1991年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=\cos t \end{cases}$,则$\frac{d^2y}{dx^2}=$______________.

(2) 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$______________.

(3)已知两条直线的方程是$l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1};l_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.则过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程是______________.

(4)已知当$x\to 0$时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小,则常数$a=$______________.

(5)设4阶方阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则$\mathbf{A}$的逆阵$\mathbf{A}^{-1}=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)曲线$y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A)没有渐近线

(B)仅有水平渐近线

(C)仅有铅直渐近线

(D)既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2)若连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2\pi} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$,则$f(x)$等于

(A) $e^x\ln 2$

(B) $e^{2x}\ln 2$

(C) $e^x+\ln 2$

(D) $e^{2x}+\ln 2$

(3)已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5,$则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$等于

(A)3

(B)7

(C)8　　　　　　　　　　　　　　　(D)9

(4)设D是平面xoy上以$(1,1)$、$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1是D在第一象限的部分,则

$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy$等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$　　　　　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　　　(D)0

(5)设n阶方阵$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$满足关系式$\mathbf{ABC}=\mathbf{E}$,其中$\mathbf{E}$是n阶单位阵,则必有

(A) $\mathbf{ACB}=\mathbf{E}$　　　　　　　　(B) $\mathbf{CBA}=\mathbf{E}$

(C) $\mathbf{BAC}=\mathbf{E}$　　　　　　　　(D) $\mathbf{BCA}=\mathbf{E}$

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{2}}$.

(2)设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量,求函数$u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

(3)$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z)dv$,其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=4$所围城的立体.

四、(本题满分6分)

过点$O(0,0)$和$A(\pi,0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中,求一条曲线L,使沿该曲线O从到A的积分$\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$的值最小.

五、(本题满分8分)

将函数$f(x)=2+|x|(-1\le x\le 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数,并由此求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和.

六、(本题满分7分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(0)$,证明在$(0,1)$内存在一点$c$,使$f'(c)=0$.

七、(本题满分8分)

已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$及$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a、b为何值时,$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合?

(2) a、b为何值时,$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一的线性表示式?写出该表示式.

八、(本题满分 6 分)

设$\mathbf{A}$是n阶正定阵,$\mathbf{E}$是n阶单位阵,证明$\mathbf{A}+\mathbf{E}$的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点$P(x,y)$处的曲率等于此曲线在该点的法线段PQ长度的倒数(Q是法线与x轴的交点),且曲线在点$(1,1)$处的切线与x轴平行.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1) 若随机变量X服从均值为 2、方差为σ^2的正态分布,且$P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}$=______________.

(2) 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为____________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量$Z=X+2Y$的分布函数.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}=$______________.

(2)函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad}u\big|_M=$______________.

(3)设 $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x\le 0 \\ 1+x^2 & 0<x\le\pi \end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于______________.

(4)微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$______________.

(5) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i\ne 0,b_i\ne 0,(i=1,2,\cdots,n)$. 则矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$______________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)当 $x\to 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A)等于 2　　(B)等于 0

(C)为 ∞　　(D)不存在但不为 ∞

(2)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{a}{n})$(常数 $a>0$)

(A)发散　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　(D)收敛性与 a 有关

(3)在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A)只有 1 条　　(B)只有 2 条

(C)至少有 3 条　　(D)不存在

(4)设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(5)要使$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$都是线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的解,只要系数矩阵$\mathbf{A}$为

(A)$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2)设$z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中f具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\le 0\\ e^{-x} & x>0\end{cases}$,求$\int_1^3 f(x-2)dx$.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程$y''+2y'-3y=e^{-3x}$的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设$f''(x)<0,f(0)=0$,证明对任何$x_1>0,x_2>0$,有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力$\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限的点$M(\xi,\eta,\zeta)$,问当$\xi$、$\eta$、$\zeta$取何值时,力$\vec{F}$所做的功$W$最大?并求出$W$的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,问:

(1)α_1能否由α_2,α_3线性表出?证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出?证明你的结论.

九、(本题满分 7 分)

设 3 阶矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,$对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\text{又向量}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(1)将$\boldsymbol{\beta}$用ξ_1,ξ_2,ξ_3线性表出.

(2)求$\mathbf{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$为自然数).

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6},$则事件$A$、$B$、$C$全不发生的概率为____________.

(2)设随机变量X服从参数为 1 的指数分布,则数学期望$E\{X+\mathrm{e}^{-2X}\}$=____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X与Y独立,X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2),Y$服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布,试求$Z=X+Y$的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数Φ表示,其中$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

1993年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为______________.

(2)由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为______________.

(3)设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,则其中系数 b_3 的值为______________.

(4)设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$______________.

(5)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为零,且 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$,则线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的通解为______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt,g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A)等价无穷小 (B)同价但非等价的无穷小

(C)高阶无穷小 (D)低价无穷小

(2)双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$ (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos2\theta}d\theta$ (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta)^2d\theta$

(3)设有直线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $l_2:\begin{cases}x-y=6\\ 2y+z=3\end{cases}$ 则 l_1 与 l_2 的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(4) 设曲线积分 $\int_L [f(t)-\mathrm{e}^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}$ (B) $\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(C) $\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$ (D) $1-\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(5) 已知 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\mathbf{P}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\mathbf{PQ}=0$，则

(A) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 1 (B) $t=6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 2

(C) $t\neq 6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 1 (D) $t\neq 6$ 时 $\mathbf{P}$ 的秩必为 2

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

(2) 求 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}dx.$

(3) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$，满足初始条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} 2xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

六、(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分)

(1) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geq k>0, f(0)<0$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $n<m$,$\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$,证明 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发,以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动.物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发,其速度大小为 $2v$,方向始终指向 A,试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程,并写出初始条件.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)一批产品共有 10 个正品和 2 个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不再放回,则第二次抽出的是次品的概率为____________.

(2)设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布,则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)$=____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$

(1)求 X 的数学期望 EX 和方差 DX.

(2)求 X 与 $|X|$ 的协方差,并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3)问 X 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?

1994年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot\pi(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=$ ______________.

(2)曲面 $z-e^x+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为______________.

(3)设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$,则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\frac{1}{\pi})$ 处的值为______________.

(4)设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$,则 $\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy=$______________.

(5)已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3],\boldsymbol{\beta}=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$,设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\mathbf{A}^n=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有

(A) $N<P<M$ (B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$ (D) $P<M<N$

(2)二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A)充分条件而非必要条件 (B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分条件又非必要条件

(3)设常数 $\lambda>0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A)发散 (B)条件收敛

(C)绝对收敛 (D)收敛性与 λ 有关

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则必有

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$

(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(5)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组

1994年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot\pi(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$ ______________.

(2)曲面 $z-e^x+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为______________.

(3)设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为______________.

(4)设区域 D 为 $x^2+y^2\leq R^2$,则 $\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})dxdy=$______________.

(5)已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3],\boldsymbol{\beta}=[1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}]$,设 $\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}'$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\mathbf{A}^n=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2)二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A)充分条件而非必要条件　　(B)必要条件而非充分条件

(C)充分必要条件　　　　　　　　　　(D)既非充分条件又非必要条件

(3)设常数$\lambda>0$,且级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A)发散　　　　　　　　　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　　　　　　　　　(D)收敛性与λ有关

(4)$\lim\limits_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq0$,则必有

(A)$b=4d$　　　　　　　　　　(B)$b=-4d$

(C)$a=4c$　　　　　　　　　　(D)$a=-4c$

(5)已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,则向量组

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)设$\begin{cases}x=\cos(t^2)\\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du\end{cases}$,求$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$的值.

(2)将函数$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$展开成$x$的幂级数.

(3)求$\int\frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分$\iint\limits_S\frac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,其中$S$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及$z=R,z=-R(R>0)$两平面所围成立体表面的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设$f(x)$具有二阶连续函数,$f(0)=0,f'(0)=1$,且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$为一全微分方程,求$f(x)$及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

七、(本题满分 6 分)

已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$. 线段 AB 绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S. 求由 S 及两平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体体积.

八、(本题满分 8 分)

设四元线性齐次方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$,

又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$.

(1)求线性方程组(Ⅰ)的基础解析.

(2)问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解. 若没有,则说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零方阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{A}'$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵, 当 $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}'$ 时, 证明 $|\mathbf{A}|\neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分. 把答案填在题中横线上)

(1)已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{AB})$, 且 $P(A)=p$, 则 $P(B)$=______________.

(2)设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布率, 且 X 的分布率为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布率为_____________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{xy}=-\frac{1}{2}$, 设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,

(1)求 Z 的数学期望 EZ 和 DZ 方差.

(2)求X与Z的相关系数ρ_{xz}.

(3)问X与Y是否相互独立?为什么?

1995年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$______________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt=$ ______________.

(3) 设 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=2$, 则 $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=$______________.

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$______________.

(5) 设三阶方阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 满足关系式 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}=6\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{A}$, 且 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{B}=$______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$, 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

(A) 平行于 π (B) 在 π 上

(C) 垂直于 π (D) 与 π 斜交

(2) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(3) 设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分必要条件 (B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

(4) 设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散

(5) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,则必有

(A) $\mathbf{AP}_1\mathbf{P}_2=\mathbf{B}$ (B) $\mathbf{AP}_2\mathbf{P}_1=\mathbf{B}$

(C) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}=\mathbf{B}$ (D) $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{B}$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1) 设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$,其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$.求 $\frac{du}{dx}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma zdS$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leq 2x$ 内的部分.

(2) 将函数 $f(x)=x-1(0\leq x\leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦函数.

五、(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于平面 xOy 的第一象限内,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A.已知 $\left|\overline{MA}\right|=\left|\overline{OA}\right|$,且 L 过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$,求 L 的方程.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x,y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$,求 $Q(x,y)$.

七、(本题满分 8 分)

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,试证:

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

八、(本题满分 7 分)

设三阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,$对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,求$\mathbf{A}$.

九、(本题满分 6 分)

设$\mathbf{A}$为n阶矩阵,满足$\mathbf{A}\mathbf{A}'=\mathbf{I}$($\mathbf{I}$是$n$阶单位矩阵,$\mathbf{A}'$是$\mathbf{A}$的转置矩阵),$|\mathbf{A}|<0,$求$|\mathbf{A}+\mathbf{I}|$.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设X表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,

则X^2的数学期望$E(X^2)$=_____________.

(2)设X和Y为两个随机变量,且

$$P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=\frac{3}{7},P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\frac{4}{7},$$

则$P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$______________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases},$$

求随机变量$Y=e^X$的概率密度$f_Y(y)$.

1996年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$,则$a$=______________.

(2)设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直,则此平面方程为______________.

(3)微分方程$y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$的通解为______________.

(4)函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为______________.

(5)设$\mathbf{A}$是4×3矩阵,且$\mathbf{A}$的秩$r(\mathbf{A})=2$,而$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则$r(\mathbf{AB})$=______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)已知$\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$为某函数的全微分,$a$则等于

(A)-1 (B)0

(C)1 (D)2

(2)设$f(x)$具有二阶连续导数,且$f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$,则

(A) $f(0)$是$f(x)$的极大值

(B) $f(0)$是$f(x)$的极小值

(C) $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值,$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

(3)设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,常数$\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A)绝对收敛 (B)条件收敛

(C)发散 (D)散敛性与λ有关

(4)设有$f(x)$连续的导数,$f(0)=0,f'(0)\neq 0,F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt,$且当$x\to 0$时,$F'(x)$与$x^k$是同阶无穷小,则$k$等于

(A)1 (B)2

(C)3 (D)4

(5)四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$ (B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$ (D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1)求心形线$r=a(1+\cos\theta)$的全长,其中$a>0$是常数.

(2)设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots),$试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1)计算曲面积分$\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy,$其中$S$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le x\le 1),$其法向量与$z$轴正向的夹角为锐角.

(2)设变换$\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$可把方程$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$求常数$a.$

五、(本题满分 7 分)

求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

六、(本题满分 7 分)

设对任意$x>0,$曲线$y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线在y轴上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt,$求$f(x)$的一般表达式.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\le a,|f''(x)|\le b$,其中 a,b 都是非负常数 $,c$ 是 $(0,1)$ 内任意一点.证明 $|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $A=\mathbf{I}-\xi\xi^T$,其中 $\mathbf{I}$ 是 n 阶单位矩阵,ξ 是 n 维非零列向量,ξ^T 是 ξ 的转置.证明

(1) $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ 的充分条件是 $\xi^T\xi=1$.

(2)当 $\xi^T\xi=1$ 时,$\mathbf{A}$ 是不可逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,

(1)求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值.

(2)指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分.把答案填在题中横线上)

(1)设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属 A 生产的概率是____________.

(2)设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N(0,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$ 的随机变量,则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)$=____________.

十一、(本题满分 6 分)

设 ξ,η 是两个相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知 ξ 的分布率为 $P(\xi=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3.$

又设 $X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$.

(1)写出二维随机变量的分布率:

Y \ X	1	2	3
1			
2			
3			

(2)求随机变量X的数学期望$E(X)$.

1997年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______________.

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为______________.

(3) 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为______________.

(4) 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}$为三阶非零矩阵,且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,则 $t=$______________.

(5) 袋中有50个乒乓球,其中20个是黄球,30个是白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,在点 $(0,0)$ 处

(A) 连续,偏导数存在　　(B) 连续,偏导数不存在

(C) 不连续,偏导数存在　　(D) 连续,偏导数不存在

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$.令

$$S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a),S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

则

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$

(3)设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin tdt$,则$F(x)$

(A)为正常数　　　　(B)为负常数

(C)恒为零　　　　(D)不为常数

(4)设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$,则三条直线

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{aligned}$$

(其中$a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$)交于一点的充要条件是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关　　　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

(C)秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$　　　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

(5)设两个相互独立的随机变量X和Y的方差分别为4和2,则随机变量$3X-2Y$的方差是

(A)8　　　　(B)16

(C)28　　　　(D)44

三、(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1)计算$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$,其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周所成的曲面与平面$z=8$所围成的区域.

(2)计算曲线积分$\int_c(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$,其中$c$是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$从$z$轴正向往$z$轴负向看$c$的方向是顺时针的.

(3)在某一人群中推广新技术是通过其中掌握新技术的人进行的,设该人群的总人数为N,在$t=0$时刻已掌握新技术的人数为x_0,在任意时刻t已掌握新技术的人数为$x(t)$(将$x(t)$视为连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数$k>0$,求$x(t)$.

四、(本题共 2 小题, 第(1)小题 6 分, 第(2)小题 7 分, 满分 13 分)

(1)设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上, 而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

(2)设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$, 求 $f(u)$.

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A(A$ 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

六、(本题满分 8 分)

设 $a_1=0, a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})(n=1,2,\cdots)$, 证明

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ 存在.

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

七、(本题共 2 小题, 第(1)小题 5 分, 第(2)小题 6 分, 满分 11 分)

(1)设 $\mathbf{B}$ 是秩为2的 5×4 矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,2,3]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,4,-1]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=[5,-1,-8,9]^T$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解向量, 求 $\mathbf{B}x=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

(2)已知 $\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

1)试确定 a,b 参数及特征向量 ξ 所对应的特征值.

2)问 $\mathbf{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

八、(本题满分 5 分)

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆方阵, 将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\mathbf{B}$.

(1)证明 $\mathbf{B}$ 可逆.

(2)求 $\mathbf{AB}^{-1}$.

九、(本题满分 7 分)

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设再各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是$\frac{2}{5}$.设X为途中遇到红灯的次数,求随机变量X的分布律、分布函数和数学期望.

十、(本题满分 5 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个容量为n的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求θ的估计量.

1998年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______________.

(2)设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y),f,\varphi$ 具有二阶连续导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________.

(3)设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,$ 其周长记为 $a,$ 则 $\oint\limits_L(2xy+3x^2+4y^2)ds=$______________.

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, $|\mathbf{A}|\neq 0,\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵.若 $\mathbf{A}$ 有特征值 $\lambda,$ 则 $(\mathbf{A}^*)^2+\mathbf{E}$ 必有特征值______________.

(5)设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$

(A) $xf(x^2)$ (B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$ (D) $-2xf(x^2)$

(2)函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

(A)3 (B)2 (C)1 (D)0

(3)已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha,$ 且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于

(A) 2π (B) π (C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ (D) $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

(4)设矩阵

$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$是满秩的,则直线$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$

(A)相交于一点　　　　　　　　(B)重合

(C)平行但不重合　　　　　　　(D)异面

(5)设A,B是两个随机事件,且$0<P(A)<1, P(B)>0, P(B|A)=P(B|\overline{A})$,则必有

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

三、(本题满分 5 分)

求直线$l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$在平面$\pi: x-y+2z-1=0$上的投影直线$l_0$的方程,并求$l_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程.

四、(本题满分 6 分)

确定常数λ,使在右半平面$x>0$上的向量$\mathbf{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度,并求$u(x,y)$.

五、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度y(从海平面算起)与下沉速度v之间的函数关系.设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为m,体积为B,海水密度为ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为$k(k>0)$.试建立y与v所满足的微分方程,并求出函数关系式$y=y(v)$.

六、(本题满分 7 分)

计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$,其中$\Sigma$为下半平面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧,$a$为大于零的常数.

七、(本题满分 6 分)

求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

八、(本题满分 5 分)

设正向数列$\{a_n\}$单调减少,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散,试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛?并说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1)试证存在$x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积,等于在区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积.

(2)又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导,且$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的x_0是唯一的.

十、(本题满分 6 分)

已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\xi^2=4$,求$a,b$的值和正交矩阵$\mathbf{P}$.

十一、(本题满分 4 分)

设$\mathbf{A}$是n阶矩阵,若存在正整数k,使线性方程组$\mathbf{A}^k x=\mathbf{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$,且$\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

证明:向量组$\boldsymbol{\alpha},\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathbf{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$是线性无关的.

十二、(本题满分 5 分)

已知方程组

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解析为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^T,\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^T$.试写出线性方程组

$$
(\mathrm{II})\quad \begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \qquad\vdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}
$$

的通解,并说明理由.

十三、(本题满分 6 分)

设两个随机变量 X,Y 相互独立,且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

十四、(本题满分 4 分)

从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,5.4)$ 内的概率不小于0.95,问样本容量 n 至少应取多大?

附:标准正态分布表

$$
\Phi(x)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt
$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990

十五、(本题满分 4 分)

设某次考试的学生成绩服从正态分布,从中随机地抽取36位考生地成绩,算得平均成绩为66.5分,标准差为15分.问在显著性水平0.05下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70 分?并给出检验过程.

附: t 分布表

$$
P\{t(n)\le t_p(n)\}=p
$$

	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

1999年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=$________________.

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$________________.

(3) $y''-4y=e^{2x}$的通解为$y=$________________.

(4)设n阶矩阵A的元素全为1,则A的n个特征值是 ________________.

(5)设两两相互独立的三事件A,B和C满足条件: $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,

且已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则$P(A)=$________________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设$f(x)$是连续函数,$F(x)$是$f(x)$的原函数,则

(A)当$f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数　　(B)当$f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数

(C)当$f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数　(D)当$f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数

(2)设$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\le 0\end{cases}$,其中$g(x)$是有界函数,则$f(x)$在$x=0$处

(A)极限不存在　　(B)极限存在,但不连续

(C)连续,但不可导　　(D)可导

(3)设$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-2x & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$, $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$,

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$,则$S(-\frac{5}{2})$等于

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $-\frac{3}{4}$

(4) 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则

(A) 当 $m>n$ 时, 必有行列式 $|\mathbf{AB}|\neq 0$

(B) 当 $m>n$ 时, 必有行列式 $|\mathbf{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时, 必有行列式 $|\mathbf{AB}|\neq 0$

(D) 当 $n>m$ 时, 必有行列式 $|\mathbf{AB}|=0$

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$

(B) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$

(D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

三、(本题满分 6 分)

设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dx}$.

四、(本题满分 5 分)

求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))dx+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)dy$, 其中 a,b 为正的常数, L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

五、(本题满分 6 分)

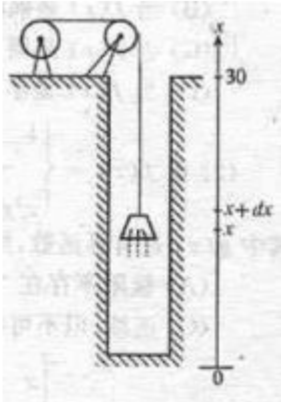
设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1, 区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲线的曲边梯形面积记为 S_2, 并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1, 求曲线 $y=y(x)$ 的方程.

六、(本题满分 7 分)

论证: 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

七、(本题满分 6 分)

为清除井底的淤泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图).已知井深30m,抓斗自重400N,缆绳每米重50N,抓斗抓起的污泥重2000N,提升速度为3m/s,在提升过程中,污泥以20N/s的速率从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?



(说明:①1N×1m=1Jm,N,s,J分别表示米,牛,秒,焦.②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

八、(本题满分7分)

设S为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分,点$P(x,y,z)\in S,\pi$为$S$在点$P$处的切平面,$\rho(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面$\pi$的距离,求$\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS.$

九、(本题满分7分)

设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx:$

(1)求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的值.

(2)试证:对任意的常数$\lambda>0,$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

十、(本题满分8分)

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$,其行列式$|\mathbf{A}|=-1,$又$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*$有一个特征值$\lambda_0$,属于$\lambda_0$的一个特征向量为$\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^T$,求$a,b,c$和$\lambda_0$的值.

十一、(本题满分 6 分)

设$\mathbf{A}$为m阶实对称矩阵且正定, $\mathbf{B}$为$m\times n$实矩阵, $\mathbf{B}^T$为$\mathbf{B}$的转置矩阵, 试证$\mathbf{B}^T\mathbf{A}\mathbf{B}$为正定矩阵的充分必要条件是$\mathbf{B}$的秩$r(\mathbf{B})=n$.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量X与Y相互独立, 下表列出了二维随机变量(X,Y)联合分布率及关于X和关于Y的边缘分布率中的部分数值, 试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\bullet}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分 6 分)

设X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x) & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的简单随机样本

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}$.

(2) 求$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$.

2000年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$=______________.

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,-2)$ 的法线方程为______________.

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为______________.

(4) 已知方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$ 无解,则 $a=$ ______________.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)$=______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $f(x)$、 $g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$

(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(2) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0), S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分,则有

(A) $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

(B) $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

(C) $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

(D) $\iint\limits_S xyzdS=4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则必收敛的级数为

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

(4) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示

(B)向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

(C)向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价

(D)矩阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$与矩阵$\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$等价

(5)设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布,则随机变量$\xi=X+Y$与 $\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为

(A) $E(X)=E(Y)$

(B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$

(D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

三、(本题满分 6 分)

求$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|})$.

四、(本题满分 5 分)

设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})+g(\dfrac{x}{y})$,其中$f$具有二阶连续偏导数,$g$具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分$I=\int_L\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周$(R>1)$,取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S,都有$\iint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-\mathrm{e}^{2x}zdxdy=0$,其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数,且$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,求$f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为R的球体,P_0是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$),求球体的重心位置.

九、(本题满分6分)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0.$试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2,$使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

十、(本题满分6分)

设矩阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$,且$\mathbf{ABA}^{-1}=\mathbf{BA}^{-1}+3\mathbf{E}$,其中$\mathbf{E}$为4阶单位矩阵,求矩阵$\mathbf{B}$.

十一、(本题满分8分)

某适应性生产线每年1月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工.设第n年1月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为x_n和y_n,记成向量$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1)求$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(2)验证$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$是$\mathbf{A}$的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值.

(3)当$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$时,求$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

十二、(本题满分8分)

某流水线上每个产品不合格的概率为$p(0<p<1)$,各产品合格与否相对独立,当出现1个不合格产品时即停机检修.设开机后第1次停机时已生产了的产品个数为X,求X的数

学期望$E(X)$和方差$D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x>\theta\\ 0 & x\le\theta\end{cases}$, 其中$\theta>0$为未知参数. 又设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$X$的一组样本观测值, 求参数$\theta$的最大似然估计值.

2001年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1)设 $y=\mathrm{e}^{x}(a\sin x+b\cos x)(a,b$ 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为______________.

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)}=$ ______________.

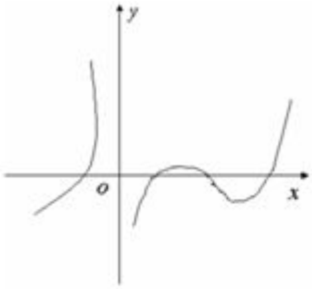
(3)交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx$ =______________.

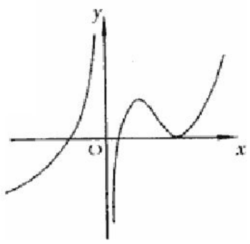
(4)设 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{O}$,则 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=$ ______________.

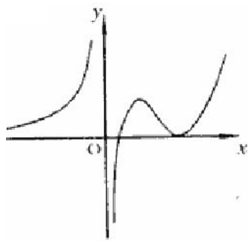
(5) $D(X)=2$,则根据车贝晓夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geq 2\}\leq$ ______________.

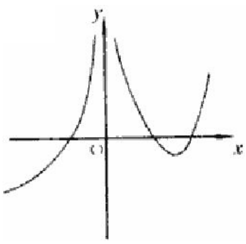
二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

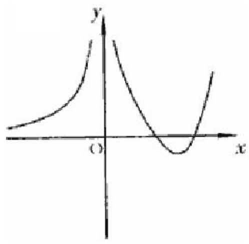
(1)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右图所示,则 $y=f'(x)$ 的图形为



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(2)设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3,f'_y(0,0)=1$ 则

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

(B)曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{3,1,1\}$

(C)曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{1,0,3\}$

(D)曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{3,0,1\}$

(3)设 $f(0)=0$ 则 $f(x)$ 在 x=0 处可导 $\Leftrightarrow$

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

(4)设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$

(A)合同且相似　　(B)合同但不相似

(C)不合同但相似　　(D)不合同且不相似

(5)将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 相关系数为

(A) -1　　(B)0

(C) $\frac{1}{2}$　　(D)1

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 可微，且 $f(1,1)=1,f_x'(1,1)=2,f_y'(1,1)=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\int_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$. 证明:

(1) 对于 $\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=0.5$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间) 的雪堆在融化过程，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(系数为 0.9)，问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少时间?

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ 的一个基础解系，

$$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1,$$

其中 t_1,t_2 为实常数，试问 t_1,t_2 满足什么条件时 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ 的一个基础解系?

十、(本题满分 8 分)

已知三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 和三维向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{x},\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，且满足 $\mathbf{A}^3\boldsymbol{x}=3\mathbf{A}\boldsymbol{x}-2\mathbf{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1) 记 $\mathbf{P}=(\boldsymbol{x},\mathbf{A}\boldsymbol{x},\mathbf{A}^2\boldsymbol{x})$，求 $\mathbf{B}$ 使 $\mathbf{A}=\mathbf{PBP}^{-1}$.

(2) 计算行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立. Y 为中途下车的人数，求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

十二、（本题满分 7 分）

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_{2n} (n \geq 2)$,

样本均值 $\overline{X} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$，$Y = \sum_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2$，求 $E(Y)$.

2002年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{2}x}=$ ______________.

(2)已知 $e^{y}+6xy+x^{2}-1=0$,则 $y''(0)$=______________.

(3) $yy''+y'^{2}=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解是______________.

(4)已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换可化为标准型 $f=6y_1^2$,则 a=______________.

(5)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为0.5,则 μ=______________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数连续,

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的一阶偏导数存在.

则有:

(A)②⇒③⇒①　　(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　(D)③⇒①⇒④

(2)设 $u_n\neq 0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 为

(A)发散　　(B)绝对收敛

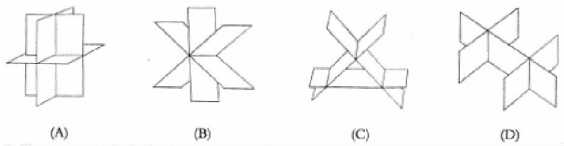
(C)条件收敛　　(D)收敛性不能判定.

(3)设函数 $f(x)$ 在 R^+ 上有界且可导,则

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$　　(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

(C) 当$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$时，必有$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=0$　　(D) 当$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$存在时，必有$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=0$.

(4)设有三张不同平面，其方程为$a_i x+b_i y+c_i z=d_i$（$i=1,2,3$）它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为



(5)设X和Y是相互独立的连续型随机变量，它们的密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则

(A) $f_X(x)+f_Y(y)$必为密度函数　　(B) $f_X(x)\,f_Y(y)$必为密度函数

(C) $F_X(x)+F_Y(y)$必为某一随机变量的分布函数　(D) $F_X(x)\,F_Y(y)$必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域具有一阶连续导数，且$f(0)f'(0)\neq 0$，当$h\to 0$时，若$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$，试求a,b的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$在点$(0,0)$处的切线相同. 求此切线的方程，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数$f(x)$在R上具有一阶连续导数，L是上半平面(y>0)内的有向分段光滑曲线，起点为(a,b)，终点为(c,d).

记$I=\int \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy$，

(1)证明曲线积分I与路径L无关.

(2)当$ab=cd$时，求I的值.

七、(本题满分 7 分)

(1)验证函数$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$($-\infty < x < +\infty$)满足微分方程$y''+y'+y=\mathrm{e}^{x}$.

(2)求幂级数$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为xoy面,其底部所占的区域为$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\le 75\}$,小山的高度函数为$h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1)设$M(x_0,y_0)$为区域D上一点,问$h(x,y)$在该点沿平面上何方向的方向导数最大?若此方向的方向导数为$g(x_0,y_0)$,写出$g(x_0,y_0)$的表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚下寻找一山坡最大的点作为攀登的起点.也就是说要在D的边界线上找出使(1)中$g(x,y)$达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知四阶方阵$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为四维列向量,其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.若$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组$\mathbf{A}x=\boldsymbol{\beta}$的通解.

十、(本题满分 8 分)

设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为同阶方阵,

(1)若$\mathbf{A},\mathbf{B}$相似,证明$\mathbf{A},\mathbf{B}$的特征多项式相等.

(2)举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3)当$\mathbf{A},\mathbf{B}$为实对称矩阵时,证明(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设维随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le x\\ 0 & 其它\end{cases}$$ 对X独立地重复观察 4 次,用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数,求Y^2的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ ($0<\theta<\frac{1}{2}$)是未知参数,利用总体X的如下样本值 3,1,3,0,3,1,2,3.

求θ的矩估计和最大似然估计值.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ =___________ .

(2)曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面的方程是___________ .

(3)设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$,则$a_2$=___________ .

(4)从$\mathbf{R}^2$的基$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到基$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为___________ .

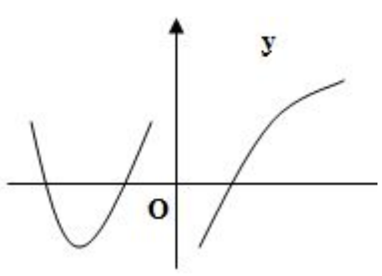
(5)设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$,则$P\{X+Y\le 1\}=$________ .

(6)已知一批零件的长度X(单位:cm)服从正态分布$N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40 (cm),则μ的置信度为 0.95 的置信区间是___________ .

(注:标准正态分布函数值$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95.$)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导函数的图形如图所示,则$f(x)$有



(A)一个极小值点和两个极大值点

(B)两个极小值点和一个极大值点

(C)两个极小值点和两个极大值点

(D)三个极小值点和一个极大值点

(2)设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$对任意n成立　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

(3)已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续,且$\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,则

(A)点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

(B)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

(D)根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

(4)设向量组 I:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组 II:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示,则

(A)当$r<s$时,向量组 II 必线性相关　　(B)当$r>s$时,向量组 II 必线性相关

(C)当$r<s$时,向量组 I 必线性相关　　(D)当$r>s$时,向量组 I 必线性相关

(5)设有齐次线性方程组$\mathbf{A}x=0$和$\mathbf{B}x=0$,其中$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为$m\times n$矩阵,现有 4 个命题:

① 若$\mathbf{A}x=0$的解均是$\mathbf{B}x=0$的解,则秩$(\mathbf{A})\ge$秩$(\mathbf{B})$

② 若秩$(\mathbf{A})\ge$秩$(\mathbf{B})$,则$\mathbf{A}x=0$的解均是$\mathbf{B}x=0$的解

③ 若$\mathbf{A}x=0$与$\mathbf{B}x=0$同解,则秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{B})$

④ 若秩$(\mathbf{A})=$秩$(\mathbf{B})$, 则$\mathbf{A}x=0$与$\mathbf{B}x=0$同解

以上命题中正确的是

(A)①②　　(B)①③

(C)②④　　(D)③④

(6)设随机变量$X\sim t(n)(n>1),Y=\dfrac{1}{X^2}$,则

(A) $Y\sim\chi^2(n)$　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C) $Y\sim F(n,1)$　　(D) $Y\sim F(1,n)$

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线,该切线与曲线$y=\ln x$及x轴围成平面图形D.

(1)求D的面积A.

(2)求D绕直线$x=\mathrm{e}$旋转一周所得旋转体的体积V.

四、(本题满分 12 分)

将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

五 、(本题满分 10 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$, L为D的正向边界. 试证:

(1) $\int_L x\mathrm{e}^{\sin y}dy-y\mathrm{e}^{-\sin x}dx=\int_L x\mathrm{e}^{-\sin y}dy-y\mathrm{e}^{\sin x}dx$.

(2) $\int_L x\mathrm{e}^{\sin y}dy-y\mathrm{e}^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

六 、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层.汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为$k.k>0$).汽锤第一次击打将桩打进地下am.根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r(0<r<1)$.问

(1)汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?(2)若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?(注:m 表示长度单位米.)

七 、(本题满分 12 分)

设函数$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数,且$y'\neq 0, x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数.

(1)试将$x=x(y)$所满足的微分方程$\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$变换为$y=y(x)$满足的微分方程.

(2)求变换后的微分方程满足初始条件$y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$的解.

八 、(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$连续且恒大于零,

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)dx},$$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$,$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leq t^2\}$.

(1)讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

(2)证明当$t>0$时,$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

九 、(本题满分 10 分)

设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$,$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{P}$,求$\mathbf{B}+2\mathbf{E}$的特征值与特征向量,其中$\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵,$\mathbf{E}$为 3 阶单位矩阵.

十 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为$l_1:\quad ax+2by+3c=0$,$l_2:\quad bx+2cy+3a=0$,$l_3:\quad cx+2ay+3b=0$.试证这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0$.

十一 、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1)乙箱中次品件数的数学期望.

(2)从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二 、(本题满分 8 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)} & x>\theta \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

其中$\theta>0$是未知参数. 从总体X中抽取简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$,记$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1)求总体X的分布函数$F(x)$.(2)求统计量$\hat{\theta}$的分布函数$F_{\hat{\theta}}(x)$.(3)如果用$\hat{\theta}$作为θ的估计量,讨论它是否具有无偏性.

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线$y=\ln x$上与直线$x+y=1$垂直的切线方程为___________ .

(2)已知$f'(e^x)=xe^{-x}$,且$f(1)=0$,则$f(x)$=___________ .

(3)设L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分,则曲线积分$\int_L xdy-2ydx$的值为___________.

(4)欧拉方程$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$的通解为___________ .

(5)设矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵$\mathbf{B}$满足$\mathbf{ABA}^*=2\mathbf{BA}^*+\mathbf{E}$,其中$\mathbf{A}^*$为$\mathbf{A}$的伴随矩阵,$\mathbf{E}$是单位矩阵,则$|\mathbf{B}|$=___________ .

(6)设随机变量X服从参数为λ的指数分布,则$P\{X>\sqrt{DX}\}$= ___________ .

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)把$x\to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β

(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

(8)设函数$f(x)$连续,且$f'(0)>0$,则存在$\delta>0$,使得

(A) $f(x)$在(0,δ)内单调增加　　(B) $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少

(C)对任意的$x\in(0,\delta)$有$f(x)>f(0)$　　(D)对任意的$x\in(-\delta,0)$有$f(x)>f(0)$

(9)设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数,下列结论中正确的是

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$=0,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

(B)若存在非零常数λ,使得$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散

(C)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$

(D)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散, 则存在非零常数$\lambda$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$

(10)设$f(x)$为连续函数,$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$,则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$

(C) $-f(2)$　　(D) 0

(11)设$\mathbf{A}$是3阶方阵,将$\mathbf{A}$的第1列与第2列交换得$\mathbf{B}$,再把$\mathbf{B}$的第2列加到第3列得$\mathbf{C}$,则满足$\mathbf{AQ}=\mathbf{C}$的可逆矩阵$\mathbf{Q}$为

(A)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(12)设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为满足$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$的任意两个非零矩阵,则必有

(A) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关,$\mathbf{B}$ 的行向量组线性相关

(B) $\mathbf{A}$ 的列向量组线性相关,$\mathbf{B}$ 的列向量组线性相关

(C) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关,$\mathbf{B}$ 的行向量组线性相关

(D) $\mathbf{A}$ 的行向量组线性相关,$\mathbf{B}$ 的列向量组线性相关

(13)设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$,对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$,数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若$P\{|X|<x\}=\alpha$,则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　　　(D) $u_{1-\alpha}$

(14)设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布,且其方差为$\sigma^2>0$. 令$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$　　　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$　　　　(D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)

设$e<a<b<e^2$,证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700km/h 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为$k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$,其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq0)$的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程$x^n+nx-1=0$,其中n为正整数.证明此方程存在惟一正实根x_n,并证明当$\alpha>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设$z=z(x,y)$是由$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数,求$z=z(x,y)$的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}$ $(n\geq 2)$,

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 $\mathbf{A}$ 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求:(1)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布. (2) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leq 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

求:(1) β 的矩估计量. (2) β 的最大似然估计量.

2005年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ______________.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______________.

(3)设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}$=. __________.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$______________.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ \mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\mathbf{A}|=1$,那么 $|\mathbf{B}|=$_____.

(6)从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X, 再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y, 则 $P\{Y=2\}$=______________.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导　　(B)恰有一个不可导点

(C)恰有两个不可导点　　(D)至少有三个不可导点

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10)设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域,在此邻域内该方程

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$

(11)设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$　　(B) $\lambda_2\neq 0$

(C) $\lambda_1=0$　　(D) $\lambda_2=0$

(12)设 $\mathbf{A}$ 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\mathbf{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\mathbf{B}.\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的伴随矩阵,则

(A)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\mathbf{B}^*$　　(B)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\mathbf{B}^*$

(C)交换$\mathbf{A}^*$的第 1 列与第 2 列得$-\mathbf{B}^*$　　(D)交换$\mathbf{A}^*$的第 1 行与第 2 行得$-\mathbf{B}^*$

(13)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

Y \ X	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立,则

(A) $a=0.2,b=0.3$　　(B) $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$　　(D) $a=0.1,b=0.4$

(14)设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,$S^2$为样本方差,则

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

三 、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

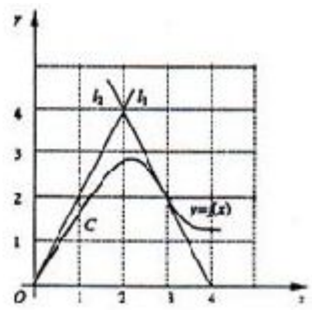
设$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$,$[1+x^2+y^2]$表示不超过$1+x^2+y^2$的最大整数. 计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$的收敛区间与和函数$f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线C的方程为$y=f(x)$,点$(3,2)$是它的一个拐点,直线l_1与l_2分别是曲线C在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线,其交点为$(2,4)$. 设函数$f(x)$具有三阶连续导数,计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx.$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

(1)存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)=1-\xi$.

(2)存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$,使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1.$

(19)(本题满分 12 分)

设函数$\varphi(y)$具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上,曲线积分$\int_L \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.

(1)证明:对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线C,有$\int_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$.

(2)求函数$\varphi(y)$的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为 2.

(1)求a的值;

(2)求正交变换$x=\mathbf{Q}y$,把$f(x_1,x_2,x_3)$化成标准形.

(3)求方程$f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵$\mathbf{A}$的第一行是$(a,b,c),a,b,c$不全为零,矩阵$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$为常数),且$\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,求线性方程组$\mathbf{A}x=0$的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<2x\\0 & \text{其它}\end{cases}$

求:(1) (X,Y)的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$.

(2) $Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本,$\overline{X}$为样本均值,记$Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n.$

求:(1) Y_i的方差$DY_i,i=1,2,\cdots,n$.

(2) Y_1与Y_n的协方差$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

2006年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

(2)微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是______.

(3)设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0\le z\le 1$)的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$______.

(4)点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $z=$______.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}$ 为2阶单位矩阵,矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{BA}=\mathbf{B}+2\mathbf{E}$,则 $|\mathbf{B}|=$______.

(6)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$______.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<dx<\Delta y$

(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$

(D) $dy<\Delta y<0$

(8)设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(9)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

(10)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y^1(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

(B)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$

(D)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(11)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,均为 n 维列向量, $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关.

(12)设$\mathbf{A}$为3阶矩阵,将$\mathbf{A}$的第2行加到第1行得$\mathbf{B}$,再将$\mathbf{B}$的第1列的-1倍加到第2列得$\mathbf{C}$,记$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A) $\mathbf{C}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ (B) $\mathbf{C}=\mathbf{PAP}^{-1}$

(C) $\mathbf{C}=\mathbf{P}^{T}\mathbf{AP}$ (D) $\mathbf{C}=\mathbf{PAP}^{T}$

(13)设A,B为随机事件,且$P(B)>0,P(A|B)=1$,则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$ (B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$ (D) $P(A\cup B)=P(B)$

(14)设随机变量X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,则

(A) $\sigma_1<\sigma_2$ (B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$ (D) $\mu_1>\mu_2$

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分10分)

设区域D=$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$,计算二重积分$I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

(16)(本题满分12分)

设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{\pi+1}=\sin x_n\,(n=1,2,...)$.

求:(1)证明$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$存在,并求之. (2)计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分12分)

将函数$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$展开成x的幂级数.

(18)(本题满分12分)

设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1)验证$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(2)若$f(1)=0,f'(1)=1$,求函数$f(u)$的表达式.

(19)(本题满分12分)

设在上半平面$D=\left\{(x,y)\middle|y>0\right\}$内,数$f(x,y)$是有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有

$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

证明:对L内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有$\int\limits_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解,

(1)证明方程组系数矩阵$\mathbf{A}$的秩$r(\mathbf{A})=2$.

(2)求a,b的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的各行元素之和均为 3,向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$\mathbf{A}x=0$的两个解.

(1)求$\mathbf{A}$的特征值与特征向量.

(2)求正交矩阵$\mathbf{Q}$和对角矩阵$\mathbf{A}$,使得$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{A}$.

(22)(本题满分 9 分)

随机变量x的概率密度为$f_x(x)=\begin{cases} \frac{1}{2},-1<x<0 \\ \frac{1}{4},0\le x<2 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$ 令$y=x^2,F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数.

(1)求Y的概率密度$f_Y(y)$.

(2)$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体X的概率密度为$F(X,0)=\begin{cases} \theta & 0<x<1 \\ 1-\theta & 1\le x<2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$,其中$\theta$是未知参数$(0<\theta<1)$,$X_1,X_2...,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本,记$N$为样本值$x_1,x_2...,x_n$中小于 1 的个数,求$\theta$的最大似然估计.

2007年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1)当$x \to 0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

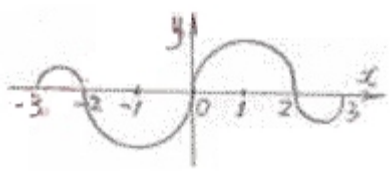
(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

(2)曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$,渐近线的条数为

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(3)如图,连续函数$y=f(x)$在区间$[-3,-2],[2,3]$上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间$[-2,0],[0,2]$的图形分别是直径为2的上、下半圆周,设$F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则下列结论正确的是



(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$　　(D) $F(3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数$f(x)$在$x=0$处连续,下列命题错误的是

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$　　(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则$f(0)=0$

(C)若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则$f'(0)=0$　　(D)若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则$f'(0)=0$

(5)设函数$f(x)$在(0, $+\infty$)上具有二阶导数,且$f''(x)>0$, 令$u_n=f(n)=1,2,\cdots,n,$则下列结论正确的是

(A)若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(B)若$u_1>u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(C)若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必收敛　　(D)若$u_1<u_2$,则$\{u_n\}$必发散

(6)设曲线$L: f(x,y)=1$($f(x,y)$具有一阶连续偏导数),过第2象限内的点M和第Ⅳ象限内的点N,Γ为L上从点M到N的一段弧,则下列小于零的是

(A) $\int_\Gamma (x,y)dx$　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)dy$

(C) $\int_\Gamma f(x,y)ds$　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

(7)设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,则下列向量组线形相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

(8)设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$

(A)合同,且相似　　(B)合同,但不相似

(C)不合同,但相似　　(D)既不合同,也不相似

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$,则此人第4次射击恰好第2次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

(10)设随即变量(X,Y)服从二维正态分布,且X与Y不相关,$f_X(x)$,$f_Y(y)$分别表示X,Y的概率密度,则在$Y=y$的条件下,X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)\ f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题(11－16小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$=________.

(12)设$f(u,v)$为二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}$=_______.

(13)二阶常系数非齐次线性方程$y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为y=_____________.

(14)设曲面$\sum:|x|+|y|+|z|=1$,则$\iint\limits_{\Sigma}(x+|y|)ds$=_______________.

(15)设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则$\mathbf{A}^3$的秩为_________.

(16)在区间$(0,1)$中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为_________.

三、解答题(17－24小题,共86分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分11分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,y\ge 0\}$上的最大值和最小值.

(18)(本题满分10分)

计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$,其中 Σ为曲面$z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$的上侧.

(19)(本题满分11分)

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$,证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分10分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$(-\infty,+\infty)$内收敛,其和函数$y(x)$满足 $y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1.$

(1)证明:$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots.$

(2)求$y(x)$的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$,与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$,有公共解,求a的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设3阶实对称矩阵$\mathbf{A}$的特征向量值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2.\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$是$\mathbf{A}$的属于特征值$\lambda_1$的一个特征向量,记$\mathbf{B}=\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E}$,其中$\mathbf{E}$为 3 阶单位矩阵.

(1)验证$\boldsymbol{\alpha}_1$是矩阵$\mathbf{B}$的特征向量,并求$\mathbf{B}$的全部特征值与特征向量.

(2)求矩阵$\mathbf{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, 0<x<1, 0<y<1 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$

(1)求$P\{X>2Y\}$.　(2)求$Z=X+Y$的概率密度.

(24)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, 0<x<\theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, \theta\le x<1 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$

$X_1,X_2\cdots,X_n$是来自总体x的简单随机样本,$\bar{X}$是样本均值

(1)求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$.

(2)判断$4\bar{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量,并说明理由.

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8小题,每小题4分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

(2)函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

(A) $\boldsymbol{i}$　　(B) $-\boldsymbol{i}$

(C) $\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

(3)在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

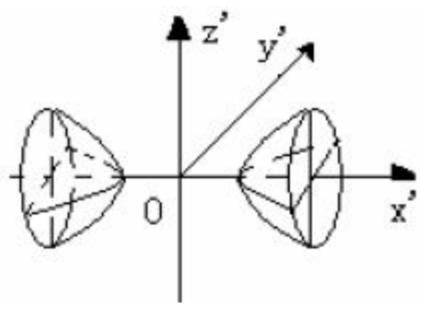
(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^3=0$,则

(A) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆　　(B) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆

(C) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆　　(D) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆

(6)设 $\mathbf{A}$ 为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图,则 A 的正特征值个数为



(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为

(A) $F^2(x)$　　(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9-14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)微分方程$xy'+y=0$满足条件$y(1)=1$的解是$y=$________.

(10)曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点$(0,1)$处的切线方程为________.

(11)已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$在$x=0$处收敛,在$x=-4$处发散,则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$的收敛域为________.

(12)设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧,则$\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$________.

(13)设$\mathbf{A}$为2阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为线性无关的2维列向量,$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则$\mathbf{A}$的非零特征值为________.

(14)设随机变量X服从参数为1的泊松分布,则$P\{X=EX^2\}=$________.

三、解答题(15－23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分10分)

计算曲线积分$\int_L\sin2xdx+2(x^2-1)ydy$,其中$L$是曲线$y=\sin x$上从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的一段.

(17)(本题满分10分)

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$,求曲线$C$距离$XOY$面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分10分)

设$f(x)$是连续函数,

(1)利用定义证明函数$F(x)=\int_0^xf(t)dt$可导,且$F'(x)=f(x)$.

(2)当$f(x)$是以2为周期的周期函数时,证明函数$G(x)=2\int_0^xf(t)dt-x\int_0^2f(t)dt$也是以2为周期的周期函数.

(19)(本题满分10分)

$f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$,用余弦级数展开,并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

(20)(本题满分11分)

$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$,$\boldsymbol{\alpha}^T$为$\boldsymbol{\alpha}$的转置,$\boldsymbol{\beta}^T$为$\boldsymbol{\beta}$的转置.证明:

(1)$r(\mathbf{A})\le2$.　　(2)若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$r(\mathbf{A})<2$.

(21)(本题满分11分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，现矩阵 $\mathbf{A}$ 满足方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{X}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，$\mathbf{B}=\left(1,0,\cdots,0\right)$，

(1)求证 $\left|\mathbf{A}\right|=\left(n+1\right)a^n$.

(2) a 为何值,方程组有唯一解,求 x_1.

(3) a 为何值,方程组有无穷多解,求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\frac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$，

(1)求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$.

(2)求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

2009年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)当 $x \to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 等价无穷小,则

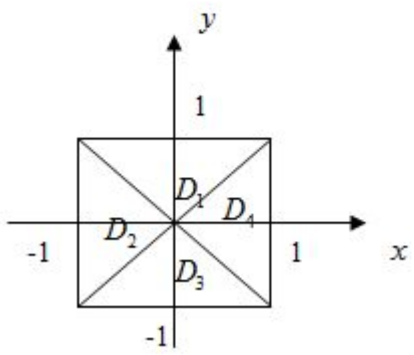
(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$

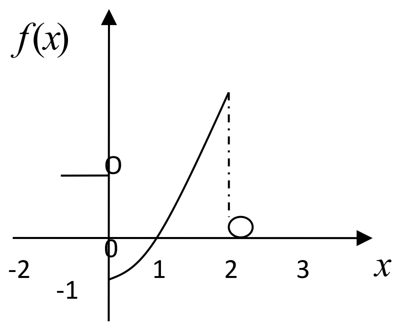
(2)如图,正方形 $\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\,dxdy$,则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$

(A) I_1　　(B) I_2

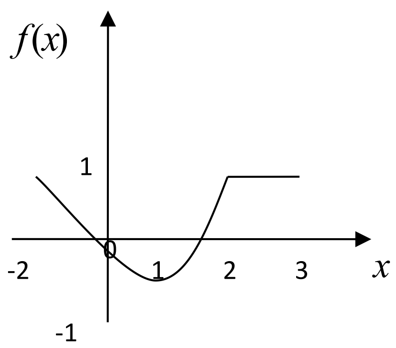
(C) I_3　　(D) I_4



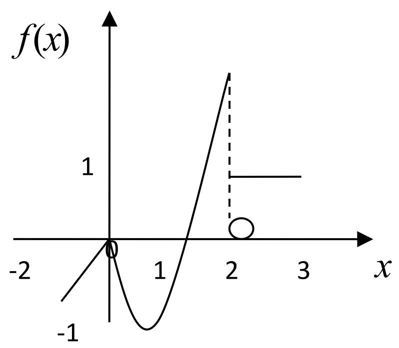
(3)设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



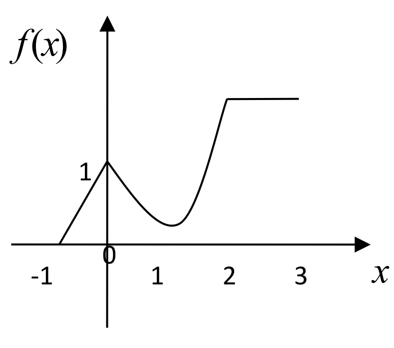
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为



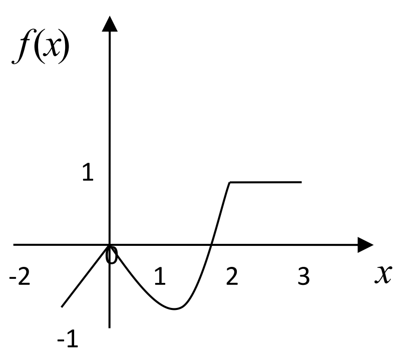
(A)



(B)



(C)



(D)

(4)设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,则

(A)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.　　(B)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.　　(D)当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一组基,则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6)设$\mathbf{A},\mathbf{B}$均为2阶矩阵，$\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*$分别为$\mathbf{A},\mathbf{B}$的伴随矩阵，若$|\mathbf{A}|=2,|\mathbf{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(7)设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$EX=$

(A)0　　(B)0.3

(C)0.7　　(D)1

(8)设随机变量X与Y相互独立，且X服从标准正态分布$N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为

(A)0　　(B)1

(C)2　　(D)3

二、填空题(9-14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________.

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程$y''+ay'+by=0$的通解为$y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程$y''+ay'+by=x$满足条件$y(0)=2,y'(0)=0$的解为$y=$__________.

(11)已知曲线$L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$，则$\int_L xds=$__________.

(12)设$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$，则$\iiint_\Omega z^2dxdydz=$__________.

(13)若3维列向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$满足$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$，其中$\boldsymbol{\alpha}^T$为$\boldsymbol{\alpha}$的转置，则矩阵$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$的非零特征值为__________.

(14)设$X_1,X_2,\cdots,X_m$为来自二项分布总体$B(n,p)$的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差. 若$\overline{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，则$k=$__________.

三、解答题(15－23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分9分)

求二元函数$f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$的极值.

(16)(本题满分9分)

设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}(n=1,2,.....)$所围成区域的面积，记$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求$S_1$与$S_2$的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面S_1是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$绕$x$轴旋转而成,圆锥面$S_2$是过点$(4,0)$且与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$相切的直线绕$x$轴旋转而成.

(1)求S_1及S_2的方程. (2)求S_1与S_2之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(1)证明拉格朗日中值定理:若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)可导,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2)证明:若函数$f(x)$在$x=0$处连续,在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则$f'_+(0)$存在,且$f'_+(0)=A$

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\sum$ 是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$,$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(1)求满足$\mathbf{A}\xi_2=\xi_1$的ξ_2.$\mathbf{A}^2\xi_3=\xi_1$的所有向量ξ_2,ξ_3. (2)对(1)中的任意向量ξ_2,ξ_3证明ξ_1,ξ_2,ξ_3无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1)求二次型f的矩阵的所有特征值; (2)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,求a的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以X,Y,Z分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

求$p\{X=1|Z=0\}$. (2)求二维随机变量(X,Y)概率分布

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda^2xe^{-\lambda x},x>0\\0,其他\end{cases}$,其中参数$\lambda(\lambda>0)$未知,$X_1$,$X_2$,$\cdots X_n$是来自总体$X$的简单随机样本.

(1)求参数λ的矩估计量.

(2)求参数λ的最大似然估计量.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A)1　　(B) e

(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

(2)设函数$z=z(x,y)$由方程$F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$确定,其中$F$为可微函数,且$F_2'\neq 0$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x　　(B) z

(C) $-x$　　(D) $-z$

(3)设m,n为正整数,则反常积分$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$的收敛性

(A)仅与m取值有关　　(B)仅与n取值有关

(C)与m,n取值都有关　　(D)与m,n取值都无关

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(5)设$\mathbf{A}$为$m\times n$型矩阵,$\mathbf{B}$为$n\times m$型矩阵,若$\mathbf{AB}=\mathbf{E}$,则

(A)秩$(\mathbf{A})=m$,秩$(\mathbf{B})=m$　　(B)秩$(\mathbf{A})=m$,秩$(\mathbf{B})=n$

(C)秩$(\mathbf{A})=n$,秩$(\mathbf{B})=m$　　(D)秩$(\mathbf{A})=n$,秩$(\mathbf{B})=n$

(6)设$\mathbf{A}$为 4 阶对称矩阵,且$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$,若$\mathbf{A}$的秩为 3,则$\mathbf{A}$相似于

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(7)设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\le x\le 1\\ 1-e^{-x} & x>2\end{cases}$,则$P\{X=1\}=$

(A)0　　(B)1

(C) $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　　(D) $1-e^{-1}$

(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度,$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度,

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度,则a,b应满足

(A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$

(C) $a+b=1$ (D) $a+b=2$

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设 $x=\mathrm{e}^{-t}, y=\int_0^t \ln(1+u^2)du$,求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ =___________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dy$ =___________.

(11)已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\{x\in[-1,1]\}$,起点是 $(-1,0)$,终点是 $(1,0)$,

则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy$ =______________.

(12)设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$,则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}$ =______________.

(13)设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,\alpha)^T$,若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 形成的向量空间的维数是 2,则 α =______________.

(14)设随机变量 X 概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$,则 EX^2 =______________.

三、解答题(15—23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^x (x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(1)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由

记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 的切平面与 xoy 面垂直,求 P 点的轨迹 C,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$,已知线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1)求 λ, a.

(2)求方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\mathbf{Q}y$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $\mathbf{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1)求 $\mathbf{A}$.

(2)证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 为正定矩阵,其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X+Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$,求常数及 A 条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta\in(0,1)$ 未知,以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$,试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

1、 一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

2、 曲线 $y=x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是( )

A (1,0) B (2,0) C (3 ,0) D (4,0)

2、设数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 无界,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为( )

A $(-1\quad 1]$ B $[-1\quad 1)$ C $[0\quad 2)$ D $(0\quad 2]$

3、 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数,且 $f(x)>0$.$f'(0)=0$。则函数 $z=\ln f(x)f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是( )

A $f(0)>1\quad f''(0)>0$ B $f(0)>1\quad f''(0)<0$

C $f(0)<1\quad f''(0)>0$ D $f(0)<1\quad f''(0)<0$

4、设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx$　$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx$　$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则 I　J　K 的大小关系是（　　）

A　$I<J<K$　　B　$I<K<J$　　C　$J<I<K$　　D　$K<J<I$

5、设A为3阶矩阵，把A的第二列加到第一列得到矩阵B，再交换B的第二行与第3行得到单位阵E，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，

则A=（　　）

A　P_1P_2　　B　$P_1^{-1}P_2$　　C　P_2P_1　　D　$P_2^{-1}P_1$

6、设$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$是4阶矩阵，$A^*$为A的伴随矩阵。若$(1,0,1,0)^T$是$Ax=0$的一个基础解系，则$A^*x=0$的基础解系可为（　　）

A　α_1　α_3　　B　α_1　α_2　　C　α_1　α_2　α_3　　D　α_2　α_3　α_4

7、设$F_1(x)$　$F_2(x)$为两个分布函数，且连续函数$f_1(x)$　$f_2(x)$为相应的概率密度，则必为概率密度的是（　　）

A　$f_1(x)f_2(x)$　　B　$2f_2(x)F_1(x)$　　C　$f_1(x)F_2(x)$　　D　$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8、设随机变量X,Y相互独立，且EX,EY都存在，记$U=\max\{X,Y\}V=\min\{X,Y\}$，则$EUV=$（　　）

A　$EU\cdot EV$　　B　$EX\cdot EY$　　C　$EU\cdot EY$　　D　$EX\cdot EV$

二、填空题：9—14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定的位置上。

9、曲线$y=\int_0^x\tan tdt\quad(0\le x\le\frac{\pi}{4})$的弧长为______________

10、微分方程$y'+y=e^x\cos x$满足条件$y(0)=0$的解为________________

11、设函数$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}|_{\substack{x=0\\y=2}}=$______________

12、设L是柱面方程$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$_________

13、若二次曲面的方程$x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为$y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}=4$，则$a=$_______

14、设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则$E(XY^2)=$___________

三、解答题：15—23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15、（本题满分10分）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$

16、（本题满分9分）

设函数$z=f(xy,yg(x))$，其中f具有二阶连续的偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$. 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{\substack{x=1\\y=1}}$

17、（本题满分10分）

求方程$k\arctan x-x=0$的不同实根的个数，其中k为参数。

18、（本题满分10分）

①证明：对任意的正整数n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$成立；

②设$a_n=1+\frac{1}{2}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2\dots\dots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

19、（本题满分11分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0, \iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 计算二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$

20、（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示；

（1）求 a 的值；

将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

21、（本题满分 11 分）

A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

求（1）A 的特征值与特征向量　（2） 矩阵 A

22、（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$

求（1）二维随机变量（X，Y）的概率分布；

（2）$Z=XY$ 的概率分布

（3）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}

23、（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X},S^2$ 为样本均值和样本方差.

求（1）求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

(2) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共5个小题，每小题3分，满分15分。把正确答案填写在题中横线上。)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$__________

(2) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$__________

(3) $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$________________

(4) 设n 阶矩阵A 的元素全为1，则A 的 n 个特征值是__________

(5) 设两两相互独立的三事件A,B 和C 满足条件：

$$ABC=\phi, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2},\ P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16},$$

则 $P(A)=$__________

二、选择题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。每小题给出得四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在提后的括号内。)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 (   )

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数。

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数。

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数。

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数。

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2 g(x), x\le 0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (   )

(A)极限不存在　　(B)极限存在，但不连续

(C)连续，但不可导　　(D)可导

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}, S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty,$ 其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx, (n=0,1,2,\cdots),$ 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 等于 (   )

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $-\dfrac{3}{4}$

(4)设A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\ne 0$　　(B)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

(C)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\ne 0$　　(D)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

(5)设两个相互独立的随机变量X 和Y 分别服从正态分布$N(0,1)$ 和$N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$. (B) $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$. (D) $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$.

三、(本题满分5分)

设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{dz}{dx}$。

四、(本题满分5分)

求 $I=\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$, 其中$a,b$ 为正常数， L 为从点$A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点$O(0,0)$ 的弧.

五、 (本题满分6分)

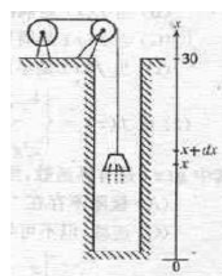
设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$， $y(0)=1$.过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$的方程.

六、(本题满分6分)

试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

七、(本题满分6分)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口见图，已知井深 $30m$ 30m,抓斗自重 $400N$，缆绳每米重 $50N$ ，抓斗抓起的污泥重 $2000N$，提升速度为 $3m/s$,在提升过程中，污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？(说明：①$1N\times 1m=1J$; 其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



八、(本题满分7分)

设S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点$P(x,y,z)\in S$,π为S 在点P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点$O(0,0,0)$ 到平面π的距离，求 $\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

九、(本题满分7分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$,

(1) 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)$的值；

(2) 试证：对任意的常数λ>0, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛

十、(本题满分8分)

设矩阵$A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$, 其行列式$|A|=-1$, 又$A$ 的伴随矩阵A^*有一个特征值λ_0，属于λ_0的一个特征向量为$\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求a,b,c和λ_0的值.

十一、(本题满分6分)

设A 为m 阶实对称矩阵且正定，B为$m\times n$实矩阵，B^T为B的转置矩阵，试证：B^TAB为正定矩阵的充分必要条件是B的秩$r\left(B\right)=n$.

十二、(本题满分8分)

设随机变量X 与Y 相互独立，下表列出了二维随机变量$\left(\mathrm{X,Y}\right)$联合分布律及关于$X$ 和关于Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\left\{X=x_i\right\}=p_i$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\left\{Y=y_j\right\}=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分6分)

设总体X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), 0<x<\theta \\ 0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X 的简单随机样本.

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}$

(2) 求$\hat{\theta}$的方差$D\left(\hat{\theta}\right)$.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5个小题，每小题3分，满分15分.把正确答案填写在题中横线上.)

(1)【答案】$\frac{1}{3}$.

【分析】利用 $x \to 0$ 的等价变换和洛必达法则求函数极限.

【详解】

方法1：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}\overset{\tan x\sim x}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

$$\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\overset{\tan x\sim x}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

方法2：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$

$$\overset{\sin x\sim x}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$$

(2)【答案】$\sin x^2$

【分析】欲求 $\frac{d}{dx}\int_a^b \varphi(x,t)dt$，唯一的办法是作变换，使含有 $\varphi(x,t)$ 中的 x“转移”到 φ 之外

【详解】令 $u=x-t$，则 $dt=-du$，所以有

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dt=\frac{d}{dx}\int_x^0\left(-\sin u^2\right)du=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2du=\sin x^2$$

(3)【答案】$y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

【分析】先求出对应齐次方程的通解，再求出原方程的一个特解.

【详解】原方程对应齐次方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-4=0,$ 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，故 $y''-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x)=e^{2x}$, 因此原方程的特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$, 代入原方程可求得 $A=\frac{1}{4}$，故所求通解为 $y=y_1+y^*=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$

(4)【详解】因为

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{pmatrix}\text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}\text{把第2,…，}n\text{列}\\ \text{加到第1列}\end{matrix}}}\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \dots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda-n & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix}\text{提取第1列}\\ \text{的公因子}\end{matrix}}}(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & -1\\ 1 & \lambda-1 & \dots & -1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & -1 & \dots & \lambda-1\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\ 3\text{行}-1\text{行}\\ \cdots\\ n\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}}(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$$

令$\left|\lambda E-A\right|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$，得$\lambda_1=n(1\text{重})$，$\lambda_2=0((n-1)\text{重})$，故矩阵$A$的$n$个特征值是$n$和0($(n-1)$重)

(5)【答案】$1/4$

【详解】根据加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

因为$P(A)=P(B)=P(C)$，设$P(A)=P(B)=P(C)=p$

由于A,B,C两两相互独立，所以有

$$P(AB)=P(A)P(B)=p\times p=p^2,$$

$$P(AC)=P(A)P(C)=p\times p=p^2,$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=p\times p=p^2,$$

又由于$ABC=\varnothing$，因此有$P(ABC)=P(\varnothing)=0,$

所以 $$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=p+p+p-p^2-p^2-p^2+0=3p-3p^2$$

又$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，从而$P(A\cup B\cup C)=3p-3p^2=\frac{9}{16}$，则有$3p-3p^2-\frac{9}{16}=0$

$\Rightarrow p^2-p+\frac{3}{16}=0$，解得 $p=\frac{3}{4}\text{或p}=\frac{1}{4}$

因 $P(A)=P(B)=P(C)=p<\frac{1}{2}$，故 $p=\frac{1}{4}$，即 $P(A)=\frac{1}{4}$

二、选择题

(1)【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C,$ 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C\overset{u=-t}{=}\int_0^x f(-u)d\left(-u\right)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)du+C=\int_0^x f(t)dt+C=F(x)$$

即 $F(x)$为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数，可排除(B)；

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除(C)；

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数，可排除(D).

(2)【答案】(D)

【详解】由于可导必连续，连续则极限必存在，可以从函数可导性入手.

因为 $$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0,$$

从而，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，故正确选项为(D).

(3)【答案】(C)

【详解】由题设知，应先将 $f(x)$ 从[0,1)作偶延拓，使之成为区间[−1,1]上的偶函数，然后再作周期(周期2)延拓，进一步展开为傅里叶级数，

$$S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})$$

而 $x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点，按狄利克雷定理有，

$$S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}.$$

(4)【答案】B

【详解】

方法1： A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 AB 是 m 阶方阵，因

$$r(AB)\le\min\left[r(A),r(B)\right]\le\min\left(m,n\right).$$

当 $m>n$ 时，有 $r(AB)\le\min[r(A),r(B)]\le n<m$. ($(AB)x=0$ 的系数矩阵的秩小于未知数的个数)，故有行列式 $\left|AB\right|=0$，故应选(B).

方法 2： B 是 $n\times m$ 矩阵, 当 $m>n$ 时, 则 $r(B)=n$ (系数矩阵的秩小于未知数的个数)，方程组 $Bx=0$ 必有非零解，即存在 $x_0\ne 0$，使得 $Bx_0=0$，两边左乘 A，得 $ABx_0=0$，即 $ABx=0$ 有非零解，从而 $\left|AB\right|=0$，故选(B).

方法 3： 用排除法

(A) $m>n$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},B_{n\times m}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$， $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$， $\left|AB\right|=0$，(A)不成立

(C) $n>m$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},B_{n\times m}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$， $AB=0$， $\left|AB\right|=0$，(C)不成立

(D) $n>m$，取 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},B_{n\times m}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $AB=1$， $\left|AB\right|=1$，(D)不成立，故选(B).

(5)【答案】B

【详解】 根据正态分布的性质：服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布.

因 X和Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(1,1)$，所以

$$T_1=X+Y\sim N(u_1,{\sigma_1}^2),\ T_2=X-Y\sim N(u_2,{\sigma_2}^2)$$

其中 $u_1=E(X+Y)$， $\sigma_1^2=D(X+Y)$， $u_2=E(X-Y)$， $\sigma_2^2=D(X-Y)$

由期望的性质： $E(T_1)=E(X+Y)=EX+EY=0+1=1$，

$$E(T_2)=E(X-Y)=EX-EY=0-1=-1$$

由独立随机变量方差的性质： $D(T_1)=D(X+Y)=DX+DY=1+1=2$

$$D(T_2)=D(X-Y)=DX+DY=1+1=2$$

所以 $T_1 = X+Y \sim N(1,2)$，$T_2 = X-Y \sim N(-1,2)$

(一般来说遇到正态分布的小题，主要就考两点，标准化和对称性，考虑问题也是从这两点出发)

A选项：$P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$. 因 $T_1 = X+Y \sim N(1,2)$

由标准化的定义：若 $X \sim N(u,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

所以，$\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，将其标准化有

$$P\{X+Y\le 0\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le \frac{0-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

(保证变换过程中概率不变，所以不等号的左边怎么变，右边也同样的变化)
又因为标准正态分布图像是关于 y 轴对称，所以

$$P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le 0\right\} = \frac{1}{2}，\text{而} P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} < \frac{1}{2}，\text{所以A错.}$$

B选项：$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$P\left\{\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \le 0\right\} = \dfrac{1}{2}$(根据标准正态分布的对称性)

故B正确.

C选项：$P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$P\left\{\dfrac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \le \dfrac{0-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\} > \dfrac{1}{2}$，故C错.

D选项：$P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$.

将其标准化有：$\mathrm{P}\left\{\dfrac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\dfrac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \le \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right\} > \dfrac{1}{2}$，故D错.

三【详解】分别在 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f(x,y) + x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)f'(x,y) \\ F_x' + F_y'\dfrac{dy}{dx} + F_z'\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

整理后得 $\begin{cases} -xf'(x,y)\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f(x,y)+xf'(x,y) \\ F_y'\dfrac{dy}{dx}+F_z'\dfrac{dz}{dx}=-F_x' \end{cases}$

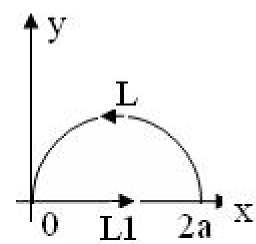
解此方程组，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -xf' & f+xf' \\ F_y' & -F_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F_y' & F_z' \end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F_y'-xf'F_z'}{F_y'+xf'F_z'},(F_y'+xf'F_z'\neq 0)$$

四【详解】

方法1：凑成闭合曲线，应用格林公式.

添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A\left(2\text{a},0\right)$ 的有向直线段 L_1，如图，则



$$I=\int_{L+L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$

$$-\int_{L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$

利用格林公式，前一积分

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$$

其中D为 L_1+L所围成的半圆域，后一积分选择 x 为参数，得 L_1：

$$\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases},\left(0\le x\le 2a\right),$$

可直接积分 $I_2=\int_0^{2a}(-bx)dx=-2a^2b$，故 $I=I_1-I_2=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3$.

方法2：将曲线积分分成两部分，其中一部分与路径无关，余下的积分利用曲线的参数方程计算.

$$I=\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$

$$=\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy-\int_L b(x+y)dx+axdy$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

对后一积分，取 L 的参数方程

$$\begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}，则 \begin{cases} dx = -a\sin t dt \\ dy = a\cos t dt \end{cases}，t 从 0 到 \pi，得$$

$$\int_L b(x+y)dx + axdy$$

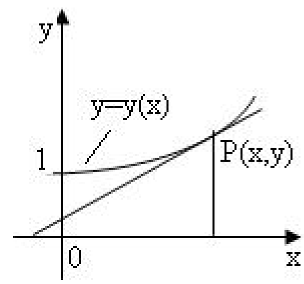
$$= \int_0^{\pi} (-a^2 b\sin t - a^2 b\sin t\cos t - a^2 b\sin^2 t + a^3 \cos t + a^3 \cos^2 t)dt$$

$$= -2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3$$

从而 $I = 0 - (-2a^2 b - \frac{1}{2}\pi a^2 b + \frac{1}{2}\pi a^3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$

五【详解】如图，曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$

所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$



由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1,$ 因此 $y(x) > 0\ (x > 0)$

于是 $S_1 = \frac{1}{2}y\left|x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right| = \frac{y^2}{2y'}.$

又 $S_2 = \int_0^x y(t)dt$，

根据题设 $2S_1 - S_2 = 1,$ 即 $2\bullet\frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t)dt = 1,$ 两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$

这是可降阶得二阶常微分方程，令 $p = y',$ 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\bullet\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$，

则上述方程可化为 $yp\frac{dp}{dy} = p^2,$ 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$，解得 $p = C_1 y,$ 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y,$

从而有 $y = C_1 e^x + C_2$，根据 $y(0) = 1, y'(0) = 1,$ 可得 $C_1 = 1, C_2 = 0,$

故所求曲线得方程为 $y = e^x$

六【详解】构造函数，利用函数的单调性，

证法1：令 $f(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x-1)^2.$ 易知 $f(1) = 0$

又 $f'(x) = 2x\ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, f''(1) = 2 > 0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

可见，当 $0<x<1$ 时，$\begin{cases} f'''(x)<0 \\ f''(x)\searrow \end{cases}$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\begin{cases} f'''(x)>0 \\ f''(x)\nearrow \end{cases}$

因此，$f''(1)=2$ 为 $f''(x)$ 的最小值，即当 $0<x<+\infty$ 时，$f''(x)\geq f''(1)=2>0$，所以 $f'(x)$ 为单调增函数. 又因为 $f'(1)=0$，所以有

$0<x<1$ 时 $f'(x)<0$ ；$1<x<+\infty$ 时 $f'(x)>0$，

所以利用函数单调性可知，$f(1)$ 为 $f(x)$ 的最小值，即 $f(x)\geq f(1)=0$

所以有 $x>0$ 时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$.

证法2：先对要证的不等式作适当变形，当 $x=1$ 时，原不等式显然成立；

当 $0<x<1$ 时，原不等式等价于 $\ln x\leq\dfrac{x-1}{x+1}$;

当 $1<x<+\infty$ 时，原不等式等价于 $\ln x\geq\dfrac{x-1}{x+1}$;

令 $$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$$

则 $$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{x^2+1}{x\left(x+1\right)^2}>0\left(x>0\right)$$

又因为 $f(1)=0$, 利用函数单调性可知

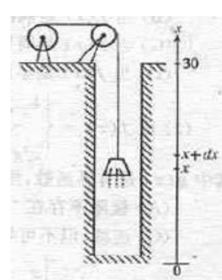
当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$, 即 $\ln x<\dfrac{x-1}{x+1}$; 当 $1<x<+\infty$ 时，$f(x)>0$, 即 $\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$;

综上所述，当 $x>0$ 时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$.

七【详解】建立坐标轴如图所示，

解法1：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$，其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功；W_2 是克服缆绳重力作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1=400N\times30m=12000J.$$



将抓斗由 x 处提升到 $x+dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$dW_2=$ 缆绳每米重×缆绳长×提升高度

$=50(30-x)dx,$

从而 $$W_2=\int_0^{30}50(30-x)dx=22500J.$$

在时间间隔 $[t,t+dt]$ 内提升污泥需做功为

$$dW_3 = (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt)$$
$$= (2000 - 20t)3dt$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\dfrac{30m}{3m/s} = 10s,$

所以 $\quad W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000J.$

因此，共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为W，当抓斗运动到x处时，作用力$f(x)$包括抓斗的自重$400N$，缆绳的重力$50(30-x)N$， 污泥的重力$(2000 - \dfrac{x}{3}\cdot 20)N,$

即 $\quad f(x) = 400 + 50(30 - x) + 2000 - \dfrac{20}{3}x = 3900 - \dfrac{170}{3}x,$

于是 $\quad W = \int_0^{30}\left(3900 - \dfrac{170}{3}x\right)dx = 3900x - \dfrac{85}{3}x^2\Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$

八【分析】先写出切平面方程，然后求$\rho(x,y,z)$，最后将曲面积分化成二重积分.

【详解】点$P(x,y,z)\in S$，S在点P处的法向量为$\vec{n} = \{x, y, 2z\}$，设(X,Y,Z)为π上任意一点，则π的方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0 \text{，化简得} \frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

由点到平面的公式，$O(0,0,0)$到π的距离

$$\rho(x,y,z) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|\frac{x}{2}x + \frac{y}{2}y + z\cdot z\right|}{\sqrt{(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 + z^2}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

从而 $\quad \iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}dS = \iint\limits_S z\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2}\,dS$

用投影法计算此第一类曲面积分，将S投影到xOy平面，其投影域为$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2\}$

由曲面方程知$z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}\right)}, (x,y)\in D,$ 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}},$$

因此 $$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma$$

故有 $$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\iint_S z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}dS$$

$$=\frac{1}{4}\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)d\sigma \underline{\underline{极坐标}} \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3\pi}{2}.$$

九【详解】(1) 因为$\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\tan x\overset{\tan x=t}{=}\frac{1}{n}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n(n+1)}$$

又由部分和数列

$$S_n=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}\left(a_i+a_{i+2}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^n(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}S_n=1,$$

因此 $$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=1.$$

(2) 先估计 a_n 的值，因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx，令 t=\tan x，则 dt=\sec^2 xdx，即 dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

所以 $$a_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由于 $\lambda+1>0$，所以$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{\lambda+1}}$收敛，从而$\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{n^\lambda}$也收敛.

十【详解】根据题设，A^*有一个特征值λ_0，属于λ_0的一个特征向量为$\alpha=(-1,-1,1)^T$，根据特征值和特征向量的概念，有 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$,

把$|A|=-1$代入$AA^*=|A|E$中，得$AA^*=|A|E=-E$，则$AA^*\alpha=-E\alpha=-\alpha$. 把$A^*\alpha=\lambda_0\alpha$代入，于是$AA^*\alpha=A\lambda_0\alpha=\lambda_0A\alpha$，即$-\alpha=\lambda_0A\alpha$

也即 $\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\Rightarrow \lambda_0\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

常数 λ_0 乘以矩阵 $\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}$，需用 λ_0 乘以矩阵的每一个元素

$$\lambda_0\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_0(-a+1+c) \\ \lambda_0(-5-b+3) \\ \lambda_0[-(1-c)-a] \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵相等，则矩阵的对应元素都相同，可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

因 $|A|=-1\neq 0$， A 的特征值 $\lambda\neq 0$，A^* 的特征值 $\lambda^*=\dfrac{|A|}{\lambda}\neq 0$，故 $\lambda_0\neq 0$

由(1),(3)两式得

$$\lambda_0(-a+1+c)=-\lambda_0(-1+c-a),$$

两边同除 λ_0，得 $-a+1+c=-(-1+c-a)$

整理得 $a=c$，代入(1)中，得 $\lambda_0=1$. 再把 $\lambda_0=1$ 代入(2)中得 $b=-3$

又由 $|A|=-1$， $b=-3$ 以及 $a=c$，有

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}\overset{3行+1行}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\overset{2列+1列}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{按第3行展开}{=\!=\!=}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a-1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix}(其中\ (-1)^{3+1}\ 的指数3，1分别是1的行数和列数)$$

$$=3(a-1)-2a=a-3=-1$$

故 $a=c=2$, 因此 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$.

十一【详解】

“必要性”. 设 B^TAB 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^T\left(B^TAB\right)x>0$, 即 $\left(Bx\right)^T A\left(Bx\right)>0$, 于是，$Bx\neq 0$，即对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，都有 $Bx\neq 0$. (若 $Bx=0$，则 $A(Bx)=A0=0$ 矛盾). 因此，$Bx=0$ 只有零解，故有 $r\left(B\right)=n$ ($Bx=0$

有唯一零解的充要条件是 $r\left(B\right)=n$).

"充分性". 因 A 为 m 阶实对称矩阵，则 $A^T=A$，故 $\left(B^TAB\right)^T=B^TA^TB=B^TAB$, 根据实对称矩阵的定义知 B^TAB 也为实对称矩阵. 若 $r\left(B\right)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$. 又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $\left(Bx\right)^T A\left(Bx\right)=x^T\left(B^TAB\right)x>0$, 故 B^TAB 为正定矩阵(对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^T\left(B^TAB\right)x>0$).

十二【详解】离散型随机变量边缘分布律的定义：

$$p_{i\cdot}=P\left\{X=x_i\right\}=\sum_j P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=\sum_j p_{ij},i=1,2,\cdots$$

$$p_{j}=P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_i P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=\sum_i p_{ij},j=1,2,\cdots$$

(通俗点说就是在求关于 X 的边缘分布时，就把对应 x 的所有 y 都加起来，同理求关于 Y 的边缘分布时，就把对应 y 的所有 x 都加起来)

故 $P\left\{Y=y_1\right\}=p_{\cdot 1}=\sum_i P\left\{X=x_i,Y=y_1\right\}=\sum_i p_{i1}$ 即

$$P\left\{Y=y_1\right\}=P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}+P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}$$

而由表知 $P\left\{Y=y_1\right\}=\dfrac{1}{6}$，$P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}=\dfrac{1}{8}$，所以

$$P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}=P\left\{Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

又根据 X和Y 相互独立，则有：

$$P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P\left\{X=x_i\right\}P\left\{Y=y_j\right\} \quad 即\ p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

因 $P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}=\dfrac{1}{24}$，$P\left\{Y=y_1\right\}=\dfrac{1}{6}$，而 $P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}=P\left\{X=x_1\right\}P\left\{Y=y_1\right\}$

所以 $P\left\{X=x_1\right\}=\dfrac{P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}}{P\left\{Y=y_1\right\}}=\dfrac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{4}$

再由边缘分布的定义有

$$P\left\{X=x_1\right\}=P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}+P\left\{X=x_1,Y=y_2\right\}+P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}$$

所以 $P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}=P\left\{X=x_1\right\}-P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_1,Y=y_2\right\}$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

又由独立性知 $P\{X=x_1,Y=y_3\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_3\}$

所以 $$P\{Y=y_3\}=\frac{P\{X=x_1,Y=y_3\}}{P\{X=x_1\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

由边缘分布定义有 $P\{Y=y_3\}=P\{X=x_1,Y=y_3\}+P\{X=x_2,Y=y_3\}$

所以 $$P\{X=x_2,Y=y_3\}=P\{Y=y_3\}-P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

再由 $\sum_i p_{i\cdot}=1$，所以 $P\{X=x_2\}=1-P\{X=x_1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

而 $$P\{X=x_2\}=P\{X=x_2,Y=y_1\}+P\{X=x_2,Y=y_2\}+P\{X=x_2,Y=y_3\}$$

故 $$P\{X=x_2,Y=y_2\}=P\{X=x_2\}-P\{X=x_2,Y=y_1\}-P\{X=x_2,Y=y_3\}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

又 $\sum_j p_j=1$，所以 $P\{Y=y_2\}=1-P\{Y=y_1\}-P\{Y=y_3\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

所以有：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

(1) 矩估计：由期望的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta x\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\int_0^\theta(\frac{6x^2}{\theta^2}-\frac{6x^3}{\theta^3})dx$$

$$=\frac{6}{\theta^2}\int_0^\theta x^2dx-\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx=\frac{6}{\theta^2}\frac{\theta^3}{3}-\frac{6}{\theta^3}\frac{\theta^4}{4}=2\theta-\frac{3\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，

即　$\frac{\theta}{2}=\overline{X}$，解得$\theta$的矩估计量　$\hat{\theta}=2\overline{X}$

(2) 由随机变量方差的性质：$D(cX)=c^2D(X)$，所以 $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})$

又由独立随机变量方差的性质：若 X和Y 独立，则 $D(X+Y)=DX+DY$

因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，所以 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 X 服从同一分布，即 $DX_i=DX\quad i=1,2,\cdots n$

而　$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)$$

$$=\frac{1}{n^2}D(X)\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n}{n^2}D(X)=\frac{1}{n}D(X)$$

方差的定义：$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$，所以求方差只需要求出 $E(X^2)$ 和 $E(X)$

根据二阶原点矩的定义：$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$

故　$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx=\int_0^{\theta}(\frac{6x^3}{\theta^2}-\frac{6x^4}{\theta^3})dx=\frac{6\theta^2}{20}$$

而 $E(X)=\frac{\theta}{2}$，所以

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20}$$

因此 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 的方差为 $D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}.$

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx =$________

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 的法线方程为___________

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_______________

(4) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解，则 $a=$_______

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$ ，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$ =_______

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 则当 $a<x<b$ 时，有 ( )

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(2) 设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0), S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有 ( )

(A) $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$ (B) $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

(C) $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$ (D) $\iint\limits_S xyzdS=4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}.$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2.$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n}).$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1}).$

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m (m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为 ( )

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)$ 与矩阵 $B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$ 等价.

(5) 设二维随机变量 $\left(X\ ,Y\right)$ 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为 ( )

(A) $E(X)=E(Y)$.　　(B) $E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$.　　(D) $E(X^2)+\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)+\left[E(Y)\right]^2$.

三、(本题满分5分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分6分)

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分6分)

计算曲线积分 $I=\oint\limits_L\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是以点 $\left(1,0\right)$ 为中心， R 为半径的圆周 $\left(\mathrm{R}>1\right)$，取逆时针方向.

六、(本题满分7分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,=$ 求 $f(x)$.

七、(本题满分6分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区域，并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分7分)

设有一半径为 R 的球体， P_0 是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

九、(本题满分6分)

设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0,$ 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

十、(本题满分6 分)

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E,$ 其中 E 为4 阶单位矩阵，求矩阵 B .

十一、(本题满分8分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\dfrac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\dfrac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n, y_n 记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. (1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

十二、(本题满分8分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p\left(0<p<1\right)$,各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为 X ，求 X 的数学期望 $E\left(\mathrm{X}\right)$ 和方差 $D\left(\mathrm{X}\right)$.

十三、(本题满分8分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x\ge\theta\\0, \qquad x<\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】$\dfrac{\pi}{4}$

【详解】$I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

解法 1：用换元积分法：设 $x-1=\sin t$，当 $x=0$ 时，$\sin t=-1$，所以下限取 $-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x=1$ 时，$\sin t=0$，所以上限取 0.

所以 $I\overset{x-1=\sin t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left|cost\right|\cos tdt$

由于在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$，函数 $\cos t$ 非负，则 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t=\dfrac{\pi}{4}$

解法 2：由于曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 是以点 $(1,0)$ 为圆心，以 1 为半径的上半圆周，它与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围图形的面积为圆面积的 $\dfrac{1}{4}$，故答案是 $\dfrac{\pi}{4}$

(2)【答案】$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

【详解】曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的法矢量为：

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21,$ 则有

$$F_x{}'\left(1,\text{-}2,2\right)=2x\left|_{(1,\text{-}2,2)}\right.=2,$$
$$F_y{}'\left(1,\text{-}2,2\right)=4y\left|_{(1,\text{-}2,2)}\right.=-8,$$
$$F_z{}'\left(1,\text{-}2,2\right)=6z\left|_{(1,\text{-}2,2)}\right.=12.$$

所以曲面在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-8}=\dfrac{z-2}{12}$. 即 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

(3)【答案】$y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2$

【分析】此方程为二阶可降阶的微分方程，属于 $y"=f(x,y')$ 型的微分方程.

【详解】令 $p=y'$，有 $y"=\dfrac{dp}{dx}$.原方程化为：$x\dfrac{dp}{dx}+3p=0$，$\Rightarrow\dfrac{dp}{dx}+3\dfrac{p}{x}=0$

分离变量： $\dfrac{dp}{p}=-3\dfrac{dx}{x}$

两端积分： $\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-3\int\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|p|=-3\ln|x|+C_1$

从而 $|p|=e^{-3\ln|x|+C_1}=e^{C_1}e^{-3\ln|x|}=e^{C_1}|x|^{-3}=e^{C_1}\dfrac{1}{|x|^3}$

因记$C_2=e^{C_1}>0$是大于零的任意常数，上式可写成 $p=\pm\dfrac{C_2}{x^3}$；

记$C_3=\pm C_2$， $p=\dfrac{C_3}{x^3}$，便得方程的通解$p=C_3x^{-3}$，

即 $\dfrac{dy}{dx}=C_3x^{-3}\Rightarrow dy=C_3x^{-3}dx$，其中$C_3$是任意常数

对上式再积分，得：

$$y=\int C_3x^{-3}dx=-\frac{C_3}{2}x^{-2}+C_4=\frac{C_5}{x^2}+C_4,\left(C_5=-\frac{C_3}{2}\right)$$

所以原方程的通解为：

$$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$$

(4)【答案】-1.

【详解】化增广矩阵为阶梯形，有

$$\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\2&3&a+2&\vdots&3\\1&a&-2&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&a-2&-3&\vdots&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&0&(a-3)(a+1)&\vdots&a-3\end{bmatrix}$$

当$a=-1$时，系数矩阵的秩为2，而增广矩阵的秩为3，根据方程组解的判定，其系数矩阵与增广矩阵的秩不同，因此方程组无解.

当$a=3$时，系数矩阵和增光矩阵的秩均为2，由方程组解的判定，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，而且小于未知量的个数，所以方程组有无穷多解.

(5)【答案】$2/3$(由A,B独立的定义：$P(AB)=P(A)P(B)$)

【详解】由题设，有$P(\overline{A}\overline{B})=\dfrac{1}{9},P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

因为A和B相互独立，所以A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B也相互独立.

于是由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$, 有 $P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$

即有 $P(A)\left[1-P(B)\right]=\left[1-P(A)\right]P(B)$,

可得 $P(A)=P(B)$ ， $P(\overline{A})=P(\overline{B})$

从而 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\left[P(\overline{A})\right]^2=\left[1-P(A)\right]^2=\dfrac{1}{9},$

解得 $P(A)=\dfrac{2}{3}.$

二、选择题

(1)【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明，关键在于寻找待证的函数. 题设中已知 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 想到设函数为相除的形式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

【详解】

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\left(F(x)\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$

则 $F(x)$ 在 $a<x<b$ 时单调递减，所以对 $\forall a<x<b$ ， $F(a)>F(x)>F(b)$ ，即

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b)>f(b)g(x),\ a<x<b$ ， (A) 为正确选项.

(2)【答案】C

【性质】第一类曲面积分关于奇偶性和对称性的性质有：

性质 1：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续， S 关于 yoz 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & 若f(x,y,z)关于x为奇函数\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & 若f(x,y,z)关于x为偶函数\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{x\ge 0\}$.

性质 2：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续， S 关于 xoz 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & 若f(x,y,z)关于y为奇函数\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & 若f(x,y,z)关于y为偶函数\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{y\ge 0\}$.

性质 3：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续，S 关于 xoy 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & 若f(x,y,z)关于z为奇函数\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & 若f(x,y,z)关于z为偶函数\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{z\ge 0\}$.

【详解】

方法 1：直接法：

本题中 S 在 xoy 平面上方，关于 yoz 平面和 xoz 平面均对称，而 $f(x,y,z)=z$ 对 x,y 均为偶函数，则

$$\iint_S zdS \overset{性质1}{=} 2\iint_{S\cap\{x\ge 0\}} zdS \overset{性质2}{=} 4\iint_{S_1} zdS$$

又因为在 S_1 上将 x 换为 y，y 换为 z，z 换为 x，S_1 不变(称积分区域 S_1 关于 x,y,z 轮换对称)，从而将被积函数也作此轮换变换后，其积分的值不变，即有

$4\iint_{S_1} zdS=4\iint_{S_1} xdS=4\iint_{S_1} ydS$. 选项 (C) 正确.

方法 2：间接法(排除法)

曲面 S 关于 yoz 平面对称，x 为 x 的奇函数，所以 $\iint_S xdS=0$，而 $\iint_{S_1} xdS$ 中 $x\ge 0$ 且仅在 yoz 面上 $x=0$，从而 $\iint_{S_1} xdS>0$，(A) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称，y 为 y 的奇函数，所以 $\iint_S ydS=0$，而 $\iint_{S_1} xdS>0$，所以 (B) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称，xyz 为 y 的奇函数，所以 $\iint_S xyzdS=0$，而 $\iint_{S_1} xyzdS>0$，所以 (D) 不成立.

(3)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 (　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$.

【答案】D

【详解】

方法 1：直接法. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛.由收敛级数的性质(如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 、σ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right)$ 也收敛，且其和为 $s \pm \sigma$). 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + u_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$. 选项 (D) 成立.

方法 2：间接法. 找反例：

(A)：取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ ，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln(1+n)}$ 是发散的；（关于上述结束的敛散，有下述结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^p(1+n)} \begin{cases} 收敛 & 当p>1 \\ 发散 & 当p \le 1 \end{cases}）$$

(B)：取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

(C)：取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但

$$u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{2n(2n-1)} \sim \frac{1}{n}$$

由比较审敛法的极限形式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 发散.

(4)【答案】(D)

【详解】用排除法.

(A)为充分但非必要条件：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示，则一定可推导 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关，因为若 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关，则 $r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right) < m$，于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关，矛盾. 但反过来不成立，如当m =1时，$\alpha_1 = (1,0)^T, \beta_1 = (0,1)^T$ 均为单个非零向量是线性相关的，但 α_1 并不能用 β_1 线性表示.

(B)为既非充分又非必要条件：如当$m=1$时，考虑 $\alpha_1 = (1,0)^T, \beta_1 = (0,1)^T$ 均线性无关，但并不能由 α_1 线性表示，必要性不成立；又如 $\alpha_1 = (1,0)^T, \beta_1 = (0,0)^T$, 可由 α_1 线性表示，

但 β_1 并不线性无关，充分性也不成立.

(C)为充分但非必要条件：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知，$r\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)=r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=m$，因此 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关，充分性成立；当 $m=1$ 时，考虑 $\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,1)^T$ 均线性无关，但 α_1 与 β_1 并不是等价的，必要性不成立.

(D) 剩下(D)为正确选项. 事实上，矩阵 $A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)$ 与矩阵 $B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$ 等价 $\Leftrightarrow$ $r\left(A\right)=r\left(B\right)\Leftrightarrow r\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)=r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=m$，因此是向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充要条件.

(5)【答案】B.

【详解】ξ 和 η 不相关的充分必要条件是它们的相关系数

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{Cov\left(\xi,\eta\right)}{\sqrt{D\left(\xi\right)}\cdot\sqrt{D\left(\eta\right)}}=0\Leftrightarrow Cov\left(\xi,\eta\right)=0$$

由协方差的性质：$\operatorname{cov}(aX+bY,Z)=a\operatorname{cov}(X,Z)+b\operatorname{cov}(Y,Z)$

故 $$\begin{aligned}Cov\left(\xi,\eta\right)&=Cov\left(X+Y,X-Y\right)\\&=Cov\left(X,X\right)-Cov\left(X,Y\right)+Cov\left(Y,X\right)-Cov\left(Y,Y\right)\\&=Cov\left(X,X\right)-Cov\left(Y,Y\right)=D\left(X\right)-D\left(Y\right)\end{aligned}$$

可见 $$\begin{aligned}Cov\left(\xi,\eta\right)=0&\Leftrightarrow D\left(X\right)-D\left(Y\right)=0\Leftrightarrow D\left(X\right)=D\left(Y\right)\\&\Leftrightarrow E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2\ (\text{由方差定义}\ DX=EX^2-(EX)^2)\end{aligned}$$

故正确选项为(B).

三【分析】由于极限中含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$，故应分别求其左极限与右极限，若左极限与右极限相等，则极限值存在且等于其极限值，否则极限不存在.

【详解】

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1\ ;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1\text{；}$$

左极限与右极限相等，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

四【详解】根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_{11}''x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]y+f_1'+\left[f_{21}''x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]\frac{1}{y}$$

$$+f_2'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+g''\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g''\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

五【详解】

方法 1：(复连通条件下的封闭曲线积分)

设：(1) L_1 与 L_2 是两条分段光滑的简单封闭曲线，具有相同的走向，(2)在 L_1 与 L_2 所包围的有界闭区域 D_1 与 D_2 的内部除一些点外，$P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 连续并具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$. 则

$$\oint_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{L_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

解：以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周的参数方程是：$x=1+R\cos\theta, y=R\sin\theta$，逆时针方向一周为从 $t=0$ 到 $t=2\pi$，代入曲线积分

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

由于分母很繁，计算不方便. 由曲线封闭，可以考虑使用格林公式，但在 L 所包围的区域内部有点 $O(0,0)$，该点处分母为 0，导致被积函数不连续，格林公式不能用.

记 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$, 且 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 满足 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial y}$,

$(x,y)\neq(0,0)$. 作足够小的椭圆：

$$L_1:\varepsilon\begin{cases}x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}(t\in[0,2\pi],C\text{取逆时针方向}),$$

于是 L 与 L_1 及函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 满足“分析”中所述定理的一切条件，于是

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

而后一积分可用参数法计算

$$I=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cos t\cdot\varepsilon\cos t-\varepsilon\sin t\cdot\frac{\varepsilon}{2}(-\sin t)}{\varepsilon^2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\varepsilon^2}dt=\pi$$

方法2：记 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=0$，$(x,y)\neq(0,0)$. 在 L 内加 L_1：

椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 的顺时针方向，则

$$I=\int_{L+L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\iint_D 0dxdy-\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\qquad (D\text{ 由 }L\text{ 与 }L_1\text{ 所围})$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2dxdy\qquad (D_1:4x^2+y^2\le\varepsilon^2)$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$$

六【详解】由题设条件，可以用高斯公式:

$$0=\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy$$

$$=\pm\iiint_\Omega\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dv$$

其中Ω为S所围成的有界闭区域，当 S 的法向量指向 Ω 外时，“$\pm$”中取“$+$”；当 S 的法向量指向 Ω 内时，“$\pm$”中取“$-$”. 由S的任意性，知被积函数应为恒等于零的函数

即 $\quad xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,(x>0)$

变形后得 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},(x>0)$$

这是一阶线性非齐次微分方程，

利用一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

其通解为

$$f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}\left(e^x+C\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}\right)=1$，故必有 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0$，(否则不能满足极限值为1)，即 $C+1=0$，从而 $C=-1$.

因此 $$f(x)=\frac{e^x}{x}\left(e^x-1\right).$$

七【定义概念】幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n,a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数，则该幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho} & \rho\neq0\\ +\infty & \rho=0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$$

开区间 $(-R,R)$ 叫做幂级数的收敛区间.

【详解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[3^n+(-2)^n\right]n}{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right](n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[1+(\frac{-2}{3})^n\right]n}{3\left[1+(\frac{-2}{3})^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径为$R=3$，相应的收敛区间为$\left(-3,3\right)$.

当$x=3$时，因为

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法的极限形式，所以原级数在点$x=3$处发散；

当$x=-3$ 时， 由于

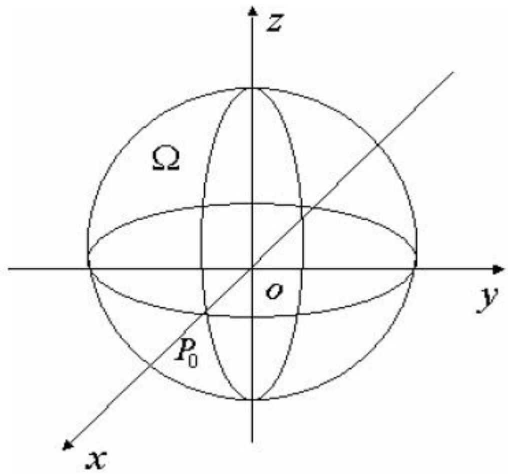
$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{(-3)^n+2^n}{3^n+(-2)^n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\right)\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

分别考虑两个级数，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$是收敛的. 又因$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n=\infty$ ，从而

$$\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}<\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

再由$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，根据比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\right)$收敛. 于是$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\right)$ 收敛，所以原级数在点$x=-3$处收敛. 所以收敛域为$[-3,3)$.

八【详解】本题为一物理应用题，由于重心坐标是相对某一些坐标系而言的，因此本题的关键是建立适当的坐标系，一般来说，可考虑选取球心或固定点P_0作为坐标原点，相应的有两种求解方法.



方法1：记所考虑的球体为Ω，以Ω的球心为坐标原点O, 射线OP_0为正x轴建立直角坐标系，则球面方程为： $x^2+y^2+z^2=R^2$ ，点P_0的坐标为$(R,0,0)$，设Ω的重心位置为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ ，由对称性，得$\overline{y}=0,\overline{z}=0,$ 设μ为Ω上点(x,y,z)处的密度，按题设

$\mu = k\left[\left(x-R\right)^2 + y^2 + z^2\right]$，则

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu dV}{\iiint\limits_{\Omega} \mu dV} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\cdot k\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV}$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega} k\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} k\left(x^2+y^2+z^2+R^2\right)dV - 2kR\iiint\limits_{\Omega} zdV$$

$$= k\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV + k\iiint\limits_{\Omega} R^2 dV - 0 \quad \text{（利用奇函数的对称性）}$$

$$= 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2\cdot r^2 \sin\varphi dr + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

（利用奇偶函数的对称性轮换对称性＋球体体积公式）

$$= 8k\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

$$= 8k\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\cdot\left.\left(\frac{r^5}{5}\right)\right|_0^R + \frac{4k}{3}\pi R^5 \quad \text{（牛-莱公式）}$$

$$= 8k\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi\cdot\frac{R^5}{5} + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

$$= \frac{4k\pi R^5}{5}\left.\left(-\cos\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4k}{3}\pi R^5 \quad \text{（牛-莱公式）}$$

$$= \frac{4k\pi R^5}{5} + \frac{4k}{3}\pi R^5 = \frac{32k\pi R^5}{15}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} kx\left[\left(x-R\right)^2+y^2+z^2\right]dV$$

$$= k\iiint\limits_{\Omega} x(x^2+y^2+z^2+R^2) - 2kR\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV$$

其中第一个积分的被积函数为 z 的奇函数，Ω 对称于 xOy 平面，所以该积分值为零，又由于 Ω 关于 x,y,z 轮换对称，所以 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV$

从而

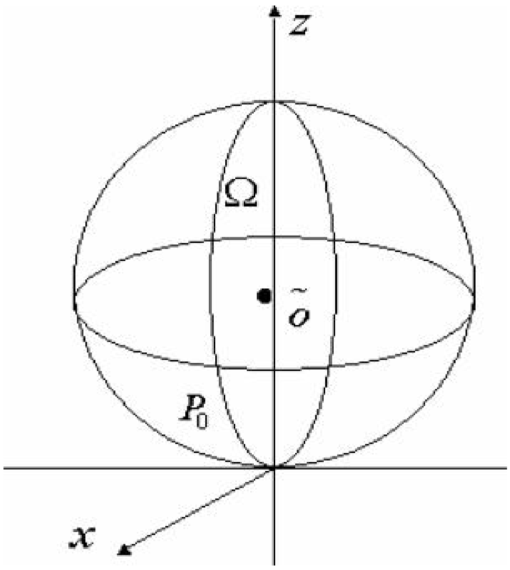
$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_o^R r^2\cdot r^2\sin\varphi dr = \frac{4}{15}\pi R^5$$

于是

$$\iiint_{\Omega} kx\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dV = -2kR\cdot\frac{4}{15}\pi R^5 = -\frac{8k}{15}\pi R^6$$

故 $\overline{x}=-\frac{R}{4}$. 因此，球体Ω的重心位置为 $(-\frac{R}{4},0,0)$

方法2：



用Ω表示所考虑的球体，$\widetilde{O}$ 表示球心，以点 P_0 选为原点，射线 $P_0\widetilde{O}$ 为正z轴建立直角坐标系，则球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$，设Ω的重心位置为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由对称性，得 $\overline{x}=0,\overline{y}=0$，设 μ 为 Ω 上点 (x,y,z) 处的密度，按题设 $\mu=k\left[x^2+y^2+z^2\right]$

所以 $$\overline{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\mu dV}{\iiint_{\Omega}\mu dV}=\frac{\iiint_{\Omega} kz\left(x^2+y^2+z^2\right)dV}{\iiint_{\Omega} k\left(x^2+y^2+z^2\right)dV}$$

因为 $$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint_{\Omega} z\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\overline{z}=\frac{5}{4}R$. 因此，球体Ω的重心位置为 $(0,0,\frac{5R}{4})$.

九【证明】

方法1：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le \pi$，有 $F(0)=0,$ 由题设有 $F(\pi)=0$.

又由题设 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，用分部积分，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)$$

$$=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使

$$0=\int_0^\pi F(x)\sin xdx=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0)$$

因为 $\xi\in(0,\pi)$， $\sin\xi\neq 0$，所以推知存在 $\xi\in(0,\pi),$ 使得 $F(\xi)=0$. 再在区间 $[0,\xi]$ 与 $[\xi,\pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理，推知存在 $\xi_1\in(0,\xi)$， $\xi_2\in(\xi,\pi)$ 使 $F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=0, f(\xi_2)=0$

方法2：由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 及积分中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$. 若在区间 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 仅有一个零点 ξ_1，则在区间 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内 $f(x)$ 异号. 不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$. 于是由 $\int_0^\pi f(x)dx=0, \int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx-\int_0^\pi f(x)\cos\xi_1 dx=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$
$$=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$

当 $0<x<\xi_1$ 时， $\cos x>\cos\xi_1$， $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$；当 $\xi_1<x<\pi$ 时， $\cos x<\cos\xi_1$，仍有 $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$，得到：$0>0$. 矛盾，此矛盾证明了 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 仅有1个零点的假设不正确，故在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 至少有2个不同的零点.

十【分析】本题为解矩阵方程问题，相当于是未知矩阵，其一般原则是先简化，再计算，根据题设等式，可先右乘A ，再左乘 A^*，尽量不去计算 A^{-1}

【详解】**方法 1**：由 $AA^*=A^*A=|A|E$，知 $|A^*|=|A|^{n-1}$，因此有 $8=|A^*|=|A|^3$，

于是 $|A|=2$ ，所以 $A^*A=2$

等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边先右乘 A，得 $ABA^{-1}A=BA^{-1}A+3EA$

再左乘 A^*，得 $A^*ABA^{-1}A=A^*BA^{-1}A+A^*3EA$

化简 $\Rightarrow |A|BE = A^*BE + 3A^*A \Rightarrow 2B = A^*B + 3|A|E$

$$\Rightarrow 2B = A^*B + 6E \Rightarrow \left(2E - A^*\right)B = 6E,$$

于是

$$B = \left(2E - A^*\right)^{-1}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(由初等变换法求得)

方法2: $|A| = 2$ (同解1)，由 $AA^* = A^*A = |A|E$，得

$$A = |A|\left(A^*\right)^{-1} = 2\left(A^*\right)^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

(由初等变换法求得)，可见 $A-E$ 为逆矩阵.

于是，由 $\left(A-E\right)BA^{-1} = 3E$，有 $B = 3\left(A-E\right)^{-1}A$, 而

$$\left(A-E\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

因此

$$B = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

方法3：由题设条件 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，得 $\left(A-E\right)BA^{-1} = 3E$.

知：$A-E$，B 均是可逆矩阵，且

$$B = 3\left(A-E\right)^{-1}A = 3\left[A^{-1}\left(A-E\right)\right]^{-1} = 3\left(E - A^{-1}\right)^{-1} = 3\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}$$

由 $\left|A^*\right|=|A|^{n-1}$，其中 $n=4$，$\left|A^*\right|=8$，得 $|A|=2$ 故

$$B=3\left(E-\frac{A^*}{2}\right)^{-1}=3\cdot\left(\frac{2E-A^*}{2}\right)^{-1}=6\left(2E-A^*\right)^{-1}$$

其中

$$2E-A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix},\ \left(2E-A^*\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix},$$

所以 $$B=6\left(2E-A^*\right)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$$

十一【详解】(1)由题意，$\frac{1}{6}x_n+y_n$ 是非熟练工人数，$\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)$ 是年终由非熟练工人变成的熟练工人数，$\frac{5}{6}x_n$ 是年初支援其他部门后的熟练工人数，根据年终熟练工的人数列出等式(1)，根据年终非熟练工人人数列出等式(2)得

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right) & (1)\\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right) & (2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{1}{15}x_n+\frac{2}{5}y_n\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}，即\ \begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$$

可见

$$A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

(2) 把 η_1，η_2 作为列向量写成矩阵的形式 (η_1,η_2)，因为其行列式

$$\left|(\eta_1,\eta_2)\right|=\begin{vmatrix}4&-1\\1&1\end{vmatrix}=5\neq 0$$

矩阵为满秩，由矩阵的秩和向量的关系可见η_1,η_2线性无关.

又

$$A\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\eta_1,\ A\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2,$$

由特征值、特征向量的定义，得η_1为A的属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，η_2为A 的属于特征值$\lambda_2=\frac{1}{2}$特征向量.

(3)因为

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因此只要计算A^n即可. 令

$$P=(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix},$$

则由$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$，有 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$,

于是

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}^nP^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

其中求逆矩阵的过程为：

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\4 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\\0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

十二【分析】此分布为一典型分布——几何分布.

【详解】显然 X 是一个离散型随机变量. 取值范围为 1，2，3，……现在关键在于建立 X 的分布律. 生产线上每个产品的生产可理解为一个试验. 各个产品合格与否是相互独立的，可以看成是各次试验是相互独立的.生产了个产品停机，应该理解为第 X 个产品是不合格产品，而前 $X-1$ 个产品则必为合格产品，这就不难写出分布律.

记 $q=1-p, X$ 的概率分布为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p, (k=1,2\cdots)$. 由离散型随机变量的数学期望定义得，X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{p}$$

因为

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\left[q\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'\right]'=p\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]'=\frac{2-p}{p^2}$$

(因为幂级数在其收敛区间内可逐项求导的性质，上面求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 时都用到了先求导化为易求和的级数，再积分还原的过程.)

故 X 的方差为

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

十三【概念】最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数. 似然函数的定义：

设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

【详解】似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)\\0, \qquad\qquad 其他\end{cases}$$

当 $x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时， $L(\theta)>0,$ 所以 $\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$

(由于 $\ln L$ 是单调递增函数， L 取最大与 $\ln L$ 取最大取到的 θ 是一致的，而加对数后能把连乘转换成累加，这样求导，找极值比较方便)

而

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0,$$

所以 $L(\theta)$ 单调增加. 要使得 $L(\theta)$ 值最大，θ 是越大越好.

又由于 θ 必须满足 $x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)$，因此当 θ 取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值时，

$x_i\geq\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 恒成立，且此时 $L(\theta)$ 取最大值，所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ (c_1,c_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 ______________

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $div(gradr)|_{(1,-2,2)}=$ _______

(3) 交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$ ______________

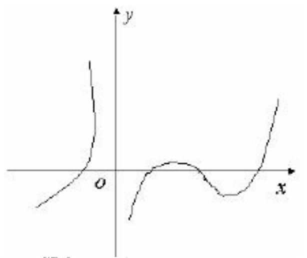
(4) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$,其中 E 为单位矩阵，则 $\left(A-E\right)^{-1}=$ ___________

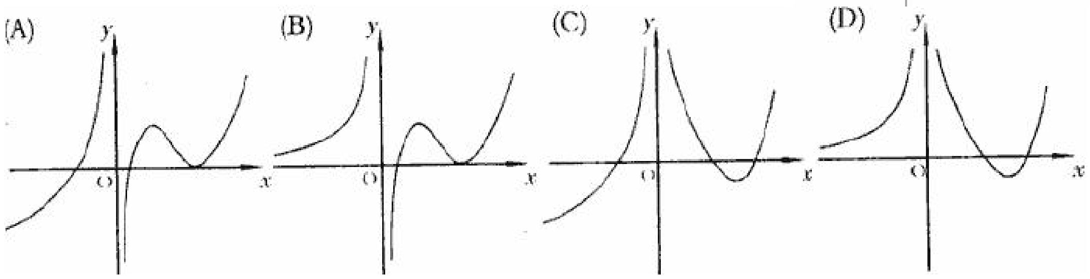
(5) 设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq$ ____

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导， $y=f(x)$ 的图形如右图所示，

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　)





(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1,$ 则 (　　)

(A) $dz|_{(0,0)}=3dx+dy.$

(B)曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为$\{3,1,1\}$.

(C)曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为$\{1,0,3\}$.

(D)曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点(0, 0, f (0,0))的切向量为{3,0,1}.

(3) 设 $f(0)=0$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 (　　)

(A) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.　　(B) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^{h})$ 存在.

(C) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.　　(D) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则（　）

(A)合同且相似 .　　(B)合同但不相似.

(C)不合同但相似 .　　(D)不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于　　（　）

(A)-1　　(B)0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D)1

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{\arctan e^{x}}{e^{2x}}dx$

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1,1) 处可微，且 $f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)).$

求 $\frac{d}{dx}\varphi^{3}(x)\Big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$, 试证：

(1) 对于(−1,1)内的任意 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$ ，使 $f(x)=f(0)+xf'\left[\theta(x)x\right]$ 成立；

(2) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ （t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1,t_2 为实常数.试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x,Ax,A^2x 线性无关，且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x$$

(1) 记 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$，求 2 阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；

(2) 计算行列式 $\left|A+E\right|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $P(0<P<1)$，且途中下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：

(1)在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从证态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\ge 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y''-2y'+2y=0$.

【详解】因为二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $y=e^{\alpha x}(c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x)$ 时，则特征方程 $r^2+pr+q=0$ 对应的两个根为一对共轭复根：$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ ，所以根据题设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$ (c_1,c_2 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，知：$\alpha=1,\beta=1$ ，特征根为 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i=1\pm i,$ 从而对应的特征方程为：$\left(\lambda-(1+i)\right)\left(\lambda-(1-i)\right)=\lambda^2-2\lambda+2=0,$ 于是所求二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

(2)【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【分析】若 $r\left(x,y,z\right)$ 具有连续的一阶偏导数，梯度 $gradr$ 在直角坐标中的计算公式为：

$$gradr=\frac{\partial r}{\partial x}i+\frac{\partial r}{\partial y}j+\frac{\partial r}{\partial z}k$$

设 $A\left(x,y,z\right)=P\left(x,y,z\right)i+Q\left(x,y,z\right)j+R\left(x,y,z\right)k$ ，其中 P,Q,R 具有一阶连续偏导数，散度 $divA$ 在直角坐标中的计算公式为：

$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

若 $r\left(x,y,z\right)$ 具有二阶连续偏导数，则在直角坐标中有计算公式：

$$div(gradr)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

【详解】本题实际上是计算 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\xlongequal{\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}}\frac{r-x\dfrac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

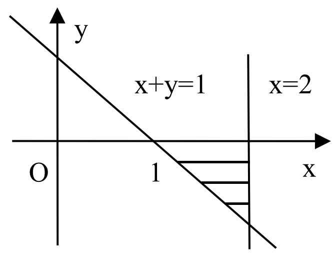
类似可得 $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3}$；$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$，$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$

根据定义有 $div(gradr)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}$

$$=\frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是 $div(gradr)|_{(1,-2,2)}=\left.\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}$

(3)【答案】$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$



【详解】由题设二次积分的限，画出对应的积分区域，如图阴影部分. 但在 $-1\le y\le 0$ 内，$2\ge 1-y$，题设的二次积分并不是 $f(x,y)$ 在某区域上的二重积分，

因此，应先将题设给的二次积分变形为：

$$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|-1\le y\le 0,1-y\le x\le 2\right\}$，再由图所示，又可将 D 改写为

$$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,1-x\le y\le 0\right\},$$

于是 $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=-\int_{-1}^0 dy\int_{1-y}^2 f(x,y)dx=-\int_1^2 dx\int_{1-x}^0 f(x,y)dy$

$$=\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

(4)【答案】 $\frac{1}{2}(A+2E).$

【详解】要求 $(A-E)$ 的逆，应努力把题中所给条件化成 $(A-E)B=E$ 的形式.

由题设 $A^2+A-4E=0\Rightarrow A^2+A-2E=2E\Rightarrow\left(A-E\right)\left(A+2E\right)=2E$

即 $$\left(A-E\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A+2E\right)=E,$$

故 $$\left(A-E\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(A+2E\right).$$

(5)【答案】$1/2$

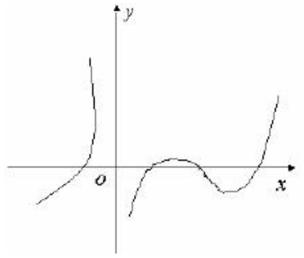
【分析】切比雪夫不等式：$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$

【详解】根据切比雪夫不等式有

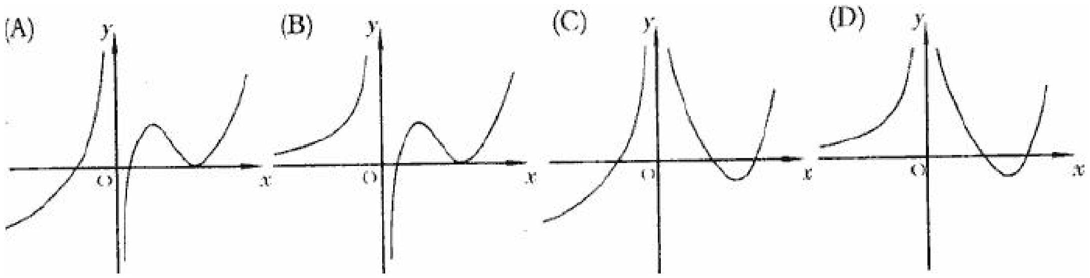
$$P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq\frac{D(X)}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$$

二、选择题

(1) 【答案】(D)



【详解】从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除(A)，(C)；



又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增，所以在这一段内一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，进一步可排除(B)，故正确答案为(D).

(2)【答案】(C)

【详解】题目仅设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义及 $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1,$ 未设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，也没设 $z=f(x,y)$，所以谈不上 dz，因此可立即排除(A)；

令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则有 $F_x'=-f_x', F_y'=-f_y', F_z'=1$. 因此过点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\pm\left\{F_x',F_y',F_z'\right\}=\pm\left\{-f_x',-f_y',1\right\}=\pm\{-3,-1,1\}$，可排除(B)；

曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$可表示为参数形式：$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，点$(0,0,f(0,0))$的切向量为

$\pm\left\{1,0,f_x'(0,0)\right\}=\pm\left\{1,0,3\right\}$. 故正确选项为(C).

(3)【答案】(B)

【详解】**方法 1**：因为

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\xlongequal{1-e^h=x}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1-x)}$$

$$\xlongequal{\ln(1-x)\sim -x}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{-x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{f(0)=0}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

可见，若$f(x)$在点$x=0$可导，则极限$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$一定存在；反过来也成立.

方法 2：排除法：举反例说明(A)，(C)，(D)说明不成立.

比如，$f(x)=|x|$，在$x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{h^2}$$

$$\xlongequal{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)\sim\frac{1}{2}h}\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}=\frac{1}{2}$$，故排除(A)

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\left|\frac{h-\sin h}{h^3}\right|\cdot|h|$$

其中，$\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{h-\sin h}{h^3}\right|=\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{h-\sin h}{h^3}\right|\xlongequal{洛}\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{3h^2}\right|=\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{3h^2}\right|\xlongequal{等}\left|\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{3h^2}\right|=\frac{1}{6}$

根据有界量与无穷小的乘积为无穷小，所以$\lim\limits_{h\to0}\left|\frac{h-\sinh}{h^3}\right|\cdot|h|=0$.故排除(C).

又如$f(x)=\begin{cases} 1,x\neq0 \\ 0,x=0 \end{cases}$在$x=0$处不可导，但$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]=\lim\limits_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$存在，进一步可排除(D).

(4)【答案】 (A)

【详解】**方法 1**：因为 A 是实对称矩阵，必相似于对角阵 Λ.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{2,3,4\text{行分别加到}1\text{行}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4&\lambda-4\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{行提出公因子}(\lambda-4)}{=\!=\!=}(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&\lambda-1&-1&-1\\-1&-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{1\text{行分别加到}2,3,4\text{行}}{=\!=\!=}(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3(\lambda-4)=0$$

得 A 的特征值为：$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, 故必存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此，A与B 相似.由两矩阵合同的充要条件：实对称矩阵 A与B 合同的充要条件是 A与B 相似. 因此，A与B 也合同. 即 A与B 既合同且相似.应选(A).

方法 2：因为 A 是实对称矩阵，故 A 必相似于一对角阵 Λ. 又由相似矩阵有相同的特征值，相同的秩, 知 A 与 Λ 有相同的秩，故 $r(\Lambda)=r(A)=1$, 即 Λ 对角线上有 3 个元素为零.

因此，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的特征值.

求另一个特征值，由特征值的和等于矩阵主对角线元素之和，知 $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=\lambda_4=\sum_{i=1}^{4}a_{ii}=4$. 故，$\lambda_4=4$.

即 A 有特征值 $\lambda=4$和$\lambda=0$ (三重根)，和对角阵 B 的特征值完全一致，故 A,B 相似.又由两矩阵合同的充要条件：实对称矩阵 A与B 合同的充要条件是 A与B 相似. 知 A,B 合同.

(5)【答案】 A

【详解】 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上，所以 $X+Y=n$，从而 $Y=n-X$，

故 $DY = D(n-X) = DX$

由方差的定义：$DX = EX^2 - (EX)^2$，所以

$$DY = D(n-X) = E(n-X)^2 - \left[E(n-X)\right]^2 = E(n^2 - 2nX + X^2) - (n-EX)^2$$

$$= n^2 - 2nEX + EX^2 - n^2 + 2nEX - (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = DX\ )$$

由协方差的性质：$\operatorname{cov}(X,c)=0$（$c$ 为常数）；$\operatorname{cov}(aX,bY) = ab\operatorname{cov}(X,Y)$

$$\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y) = \operatorname{cov}(X_1,Y) + \operatorname{cov}(X_2,Y)\ )$$

所以 $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X,n-X) = \operatorname{cov}(X,n) - \operatorname{cov}(X,X) = 0 - DX = -DX$

由相关系数的定义，得 $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{-DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}} = -1$

三【详解】$\displaystyle\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = \int e^{-2x}\arctan e^x dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}\arctan e^x d\left(-2x\right)$

$$= -\frac{1}{2}\int \arctan e^x d\left(e^{-2x}\right) \underline{\underline{分部}} -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int e^{-2x} d\arctan e^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right) de^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x - \int e^{-2x}de^x + \int \frac{1}{1+e^{2x}}de^x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x\right) + C$$

四【详解】 由题设，

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f(x, f(x,x))\right] = f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\left(f(x,x)\right)'$$

$$= f_1'(x, f(x,x)) + f_2'(x, f(x,x))\left[f_1{}'(x,x) + f_2{}'(x,x)\right]$$

这里 $f_1' = \dfrac{\partial f}{\partial x}$，$f_2' = \dfrac{\partial f}{\partial y}$，

所以 $\left.\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}=\left\{f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\left[f_1{}'(x,x)+f_2{}'(x,x)\right]\right\}_{x=1}$

$$=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\left[f_1{}'(1,1)+f_2{}'(1,1)\right]=2+3\cdot\left[2+3\right]=17$$

又 $f(1,1)=1,\ \varphi(x)=f(x,f(x,x))$，

所以 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))\ \underline{\underline{f(1,1)=1}}\ f(1,1)=1,$

所以 $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right]\Big|_{x=1}$

$$=3\varphi^2(1)\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}\ \underline{\underline{\varphi(1)=1,\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=1}=17}}\ 3\cdot1\cdot17=51$$

五【详解】 首先将 $\arctan x$ 展开.

因为 $\left(\arctan x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

故 $\arctan x=\arctan 0+\int_0^x\left(\arctan x\right)'dx=0+\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in\left(-1,1\right)$$

于是 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x=\dfrac{1+x^2}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=(1+x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=\frac{(-1)^0}{2\cdot0+1}x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-1}}{2\left(n+1\right)-1}x^{2(n+1)}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in\left(-1,1\right),x\neq0$$

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}\right)=1$，且 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $x=0$ 时，$f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$ 也成立. 进而 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$，

又在 $x=\pm 1$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}$ 收敛，

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x^2}{x}\cdot\lim_{x\to 1^-}\arctan x=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=f(1),$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x^2}{x}\arctan x=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x^2}{x}\cdot\lim_{x\to -1^+}\arctan x=-2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}=f(-1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续，在 $x=-1$ 处右连续，所以等式可扩大到 $x=\pm 1$，

从而 $$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\quad x\in[-1,1],$$

变形得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}=\frac{f(x)-1}{2}$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cdot 1^{2n}=\frac{1}{2}\left[f(1)-1\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-1\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

六【详解】**方法 1**：用斯托克斯公式之后化成第一型曲面积分计算.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧，(曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则) D 为 S 在 xoy 坐标面上的投影， $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1\}$

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$$

在 $x+y+z=2$ 中，左右两边关于 x 求偏导，得 $1+z_x'=0$，得 $z_x'=-1$.

在 $x+y+z=2$ 中，左右两边关于 y 求偏导，得 $1+z_y'=0$，得 $z_y'=-1$.

代入上式得

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

为 S 指定侧方向的单位法向量，由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

将题中的空间曲线积分化为第二类曲面积分，而对于第二类曲面积分，一般的解答方法是将它先化为第一类曲面积分，进而化为二重积分进行计算.

把 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz, dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx, dS=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$ 代入上式，

$$I=\iint_S \left[(-2y-4z)\cos\alpha+(-2z-6x)\cos\beta+(-2x-2y)\cos\gamma\right]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S \left[(-2y-4z)+(-2z-6x)+(-2x-2y)\right]dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S \left[-8x-4y-6z\right]dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)dS$$

按第一型曲面积分的算法，将 S 投影到 xoy，记为 σ . dS 与它在 xoy 平面上的投影 $d\sigma$ 的关系是

$$dS=\frac{1}{|\cos\gamma|}d\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,d\sigma$$

故 $dS=\sqrt{3}d\sigma$，将 $x+y+z=2$ 代入

$$I=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S [4x+2y+3(2-x-y)](\sqrt{3}d\sigma)$$

$$=-2\iint_D (x-y+6)d\sigma$$

由于 D 关于 y 轴对称，利用区域的对称性，因为区域关于 y 轴对称，被积函数是关于 x 的奇函数，所以 $\iint_D xd\sigma=0$. D 关于 x 轴对称，利用区域的对称性，因为区域关于 x 轴对称，被积函数是关于 y 的奇函数，故 $\iint_D yd\sigma=0$，所以

$$I=-2\iint_D (x-y+6)d\sigma=-2\iint_D xd\sigma+2\iint_D yd\sigma-12\iint_D d\sigma=-12\iint_D dxdy$$

$=-12\cdot D$的面积 (由二重积分的几何意义知，$\iint_D dxdy$ 即 D 的面积)

其中，D 为$|x|+|y|\le 1$，D 的面积$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$，所以$I=-12\cdot 2=-24$.

方法 2：转换投影法.

用斯托克斯公式，取平面$x+y+z=2$被L所围成的部分为S，按斯托克斯公式的规定，它的方向向上 (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则)，S在xoy平面上的投影域记为

$$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=1\ \}.$$

由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

由 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz, dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx, dS=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，

及 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$

知 $dS=\frac{1}{|\cos\alpha|}dydz=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，$dS=\frac{1}{|\cos\beta|}dzdx=\frac{1}{|\cos\lambda|}dxdy$，

故 $$dydz=\frac{|\cos\alpha|}{|\cos\lambda|}dxdy=\frac{\frac{-z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}dxdy=-z_x'dxdy$$

$$dzdx=\frac{|\cos\beta|}{|\cos\lambda|}dxdy=\frac{\frac{-z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}dxdy=-z_y'dxdy$$

因为S为$z=2-x-y$，式子左右两端分别关于x,y求偏导，$\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1,$ 于是

$$I=\iint_S (-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-6y)dxdy$$

$$=\iint_S \{-2y-4z,-2z-6x,-2x-6y\}\cdot\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}dxdy$$

$$=-2\iint_S (4x+2y+3z)dxdy=-2\iint_D (x-y+6)dxdy$$

因为区域D关于y轴对称，被积函数是关于x的奇函数，所以$\iint_D xd\sigma=0$. 类似的，因为区域D关于x轴对称，被积函数是关于y的奇函数，故$\iint_D yd\sigma=0$，所以

$$I=-2\iint_D (x-y+6)d\sigma=-2\iint_D xd\sigma+2\iint_D yd\sigma-12\iint_D d\sigma=-12\iint_D dxdy$$

$$=-12\cdot D\text{的面积}$$ (由二重积分的几何意义知，$\iint_D dxdy$即D的面积)

D为$|x|+|y|\le 1$，D的面积$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2$，所以

$$I=-12\cdot 2=-24.$$

方法3：降维法.

记S为平面$x+y+z=2$上由L所围成的有界部分的上侧 (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则) ，D为S在xoy坐标面上的投影，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1\}$

把$x+y+z=2$代入I 中， L_1为L 在xoy平面上投影，逆时针.

$$I=\oint_{L_1}(y^2-(2-x-y)^2)dx+(2(2-x-y)^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)(-dx-dy)$$

$$=\oint_{L_1}(y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)dx+(3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)dy$$

$$\underline{\underline{\text{格林公式}}}\oint_{L_1}\left[\frac{\partial(3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$=-2\iint_D (x-y+6)dxdy=-24$$

方法4：用斯托克斯公式后用第二型曲面积分逐个投影法.

记S为平面$x+y+z=2$上由L所围成的有界部分的上侧，(曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则)

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\{-z_x',-z_y',1\}$$

在$x+y+z=2$中，左右两边关于x求偏导，得$1+z_x'=0$，得$z_x'=-1$.

在$x+y+z=2$中，左右两边关于y求偏导，得$1+z_y'=0$，得$z_y'=-1$.

代入上式得

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

为S指定侧方向的单位法向量，由斯托克斯公式得

$$I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_S(-2y-4z)dydz+(-2z-6x)dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

用逐个投影法，先计算 $I_1=\iint_S(-2y-4z)dydz,$ 其中 $D_{yz}=\{(y,z)\mid|2-y-z|+|y|\le 1\}$ 为 S 在 yoz 平面上的投影，分别令 $y\ge 0,y\le 0,2-y-z\ge 0,2-y-z\le 0$，可得到$D_{yz}$的 4 条边界线的方程：

右：$2y+z=3$；上：$z=3$ ；左：$2y+z=1$；下：$z=1$.

于是 $I_1=-2\int_1^3dz\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)}(y+2z)dy=-16$

再计算$I_2=\iint_S(-2z-6x)dzdx$，其中$D_{xz}=\{(x,z)\mid|x|+|2-x-z|\le 1\}$为$S$在$xoz$平面上的投影，分别令$x\ge 0,x\le 0,2-x-z\ge 0,2-x-z\le 0$，可得到$D_{xz}$的 4 条边界线的方程：

右：$2y+z=3$；上：$z=3$ ；左：$2y+z=1$；下：$z=1$.

于是 $I_2=-2\int_1^3dz\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)}(z+3x)dx=\int_1^3(z-6)dz=-8$

再计算$I_3=\iint_D(-2x-2y)dxdy$，其中$D_{xy}=\{(x,y)\mid|x|+|y|\le 1\}$为$S$在$xoy$平面上的投影，因为区域关于$y$轴和$x$轴均对称，被积函数是关于$x$和$y$都是奇函数，

于是 $I_3=-2\iint_S(x+y)dxdy=0$

故 $I=I_1+I_2+I_3=-24.$

方法 5：参数式法.

L是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，是由 4 条直线段构成的封闭折

线，将题中要求的空间曲线积分分成四部分来求.

当 $x \ge 0, y \ge 0$ 时，$L_1: y = 1 - x, z = 2 - x - y$，则 $dy = -dx, dz = -dx$，x 从 1 到 0. 以 x 为参数，于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1-x)^2 - (2-x-y)^2]dx + [2(2-x-y)^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2](-dx)$$

$$= [(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)]dx$$

则 $$\oint_{L_1} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= \int_1^0 \left[(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)\right]dx = \frac{7}{3}.$$

当 $x \le 0, y \ge 0$，$L_2: y = 1 + x, z = 1 - 2x$，则 $dy = dx, dz = -2dx$，x 从 0 到 -1

于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1+x)^2 - (1-2x)^2]dx + [2(1-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (1+x)^2](-2dx)$$

$$= (2x + 4)dx$$

所以 $$\oint_{L_2} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_0^{-1} (2x+4)dx = -3$$

当 $x \le 0, y \le 0$，$L_3: y = 1 - x, z = 3$，则 $dy = -dx, dz = 0$，x 从 -1 到 0，于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(1-x)^2 - 3^2]dx + [2 \cdot 3^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2] \cdot 0$$

$$= (2x^2 + 2x - 26)dx$$

所以 $$\oint_{L_3} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_{-1}^{0} (2x^2 + 2x - 26)dx = -\frac{79}{3}$$

当 $x \ge 0, y \le 0$，$L_4: y = x - 1, z = 3 - 2x$，则 $dy = dx, dz = -2dx$，x 从 0 到 1，

于是

$$(y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$$

$$= [(x-1)^2 - (3-2x)^2]dx + [2(3-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (x-1)^2](-2dx)$$

$$= (-18x + 12)dx$$

所以 $\oint_{L_4}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz=\int_0^1(-18x+12)dx=3.$

所以 $I=\oint_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}=-24.$

七【分析】拉格朗日中值定理：如果 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

【详解】(1) 因为 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，所以一阶导数存在，由拉格朗日中值定理得，任给非零 $x\in(-1,1)$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，$\theta(x)\cdot x\in(-1,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$，$(0<\theta(x)<1)$ 成立.

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调且增加，故 $\theta(x)$ 唯一.

(2)**方法 1**：由(1)知 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$，$(0<\theta(x)<1)$

于是有 $xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)$，即 $f'[\theta(x)x]=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

所以 $\dfrac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$

上式两边取极限，再根据导数定义，得

$$左端=\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\lim_{x\to0}\theta(x)=f''(0)\lim_{x\to0}\theta(x)$$

$$右端=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\overset{导数定义}{=\!=\!=}\frac{1}{2}f''(0)$$

左边=右边，即 $f''(0)\lim_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)$，故 $\lim_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}.$

方法 2：由泰勒公式得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi\in(0，x)$

再与(1)中的 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x](0<\theta(x)<1)$

比较，所以 $xf'[\theta(x)x] = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$

约去 x，有 $f'[\theta(x)x] = f'(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)x,$

凑成 $$\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x) = \frac{1}{2}f''(\xi),$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0)$，$\lim\limits_{x\to 0}f''(x) = \lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi) = f''(0)$

所以 $f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}f''(0)$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}.$

八【详解】$z = h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t)$，所以侧面在 xoy 面上的投影为：

$$D = \left\{(x,y): x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t)\right\}$$

记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则由体积公式

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D zdxdy = \iint_D \left[h(t) - \frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right]dxdy$$

化为极坐标，令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，$0 \leq r \leq \frac{h(t)}{\sqrt{2}}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)}\right) rdr = 2\pi \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)}\right) rdr$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} h(t)rdr - \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} -\frac{2r^2}{h(t)}rdr\right) = 2\pi\left(h(t)\frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} - \frac{r^4}{2h(t)}\bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{h^3(t)}{4} - \frac{h^3(t)}{8}\right) = \frac{\pi}{4}h(t)^3$$

再由侧面积公式：

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(f'_x\right)^2 + \left(f'_y\right)^2}dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}dxdy$$

$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{4x}{h(t)}\right)^2+\left(\frac{4y}{h(t)}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h(t)^2}}dxdy$$

化为极坐标，令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$， $0\le r\le\dfrac{h(t)}{\sqrt{2}},0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}rdr=2\pi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}rdr=\pi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}dr^2$$

$$=\frac{\pi h^2(t)}{16}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}d\frac{16r^2}{h^2(t)}=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{16r^2}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[\left(1+\frac{8h^2(t)}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\pi h^2(t)}{16}\cdot\frac{2}{3}\cdot(27-1)=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $\dfrac{dV}{dt}=-0.9S(t)$，将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得

$$\frac{d\frac{\pi}{4}h(t)^3}{dt}=-0.9\cdot\frac{13\pi h^2(t)}{12}\Rightarrow\frac{3\pi}{4}h^2(t)\frac{dh(t)}{dt}=-0.9\cdot\frac{13\pi h^2(t)}{12}\Rightarrow\frac{dh(t)}{dt}=-1.3$$

积分解得 $\quad h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$

由 $\quad h(0)=130$，得 $C=130$．所以 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130.$

令 $h(t)\to0$，即 $-\dfrac{13}{10}t+130\to0\Rightarrow t\to100$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九【详解】由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，齐次方程组当有非零解时，解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解. 下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0 \tag{*}$$

把 $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$, $\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$, $\cdots$, $\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 代入整理得，

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，由线性

无关的定义，知(*)中其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \qquad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=\!=} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\dfrac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \dfrac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+(-1)^{s+1}\dfrac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1}\left(t_1+(-1)^{s+1}\frac{t_2^s}{t_1^{s-1}}\right)=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

((*)变换：把原行列式第i行乘以$-\dfrac{t_2}{t_1}$加到第$i+1$行，其中$i=1,\cdots,s-1.$)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件，可见，当$t_1^s+(-1)t_2^s\neq 0,$，即$t_1^s\neq(-t_2)^s$，即当s为偶数，$t_1\neq\pm t_2$；当s为奇数，$t_1\neq t_2$时，上述方程组只有零解$k_1=k_2=\cdots=k_s=0,$因此向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，

故当$\begin{cases} s=2n, & t_1\neq\pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1\neq t_2 \end{cases}$时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$也是方程组$Ax=0$的基础解系.

十【详解】(1)

方法 1：求B，使$A=PBP^{-1}$成立，等式两边右乘P，即$AP=PB$成立.

由题设知，$AP=A\left(x,Ax,A^2x\right)=\left(Ax,A^2x,A^3x\right)$，又$A^3x=3Ax-2A^2x$，故有

$$AP=\left(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x\right)=\left(x,Ax,A^2x\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

即如果取$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，此时的$B$满足$A=PBP^{-1}$，即为所求.

方法 2：由题设条件 $P=\left(x,Ax,A^2x\right)$ 是可逆矩阵，由可逆的定义，知有 P^{-1} 使

$$PP^{-1}=P^{-1}P=P^{-1}\left(x,Ax,A^2x\right)=\left(P^{-1}x,P^{-1}Ax,P^{-1}A^2x\right)=E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即有 $P^{-1}x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},P^{-1}Ax=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P^{-1}A^2x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 由题设条件，$A^3x=3Ax-2A^2x$，有

$$P^{-1}A^3x=P^{-1}\left(3Ax-2A^2x\right)=3P^{-1}Ax-2P^{-1}A^2x=3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

由 $A=PBP^{-1}$，得

$$B=P^{-1}AP=P^{-1}A\left(x,Ax,A^2x\right)=P^{-1}\left(Ax,A^2x,A^3x\right)$$

$$=\left(P^{-1}Ax,P^{-1}A^2x,P^{-1}A^3x\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

(2) 由(1)及矩阵相似的定义知，A 与 B 相似. 由矩阵相似的性质：若 $A\sim B$，则 $f(A)\sim f(B)$，则 $A+E$ 与 $A-E$ 也相似. 又由相似矩阵的行列式相等，得

$$\left|A+E\right|=\left|B+E\right|=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\xlongequal[\text{加到2行}]{1\text{行}\times(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}=-4$$

十一【分析】首先需要清楚二项分布的产生背景. 它的背景是：做 n 次独立重复试验，每次试验的结果只有两个(要么成功，要么失败)，每次试验成功的概率都为 p，随机变量 X 表示 n 次试验成功的次数，则 $X\sim B(n,p)$. 在此题中，每位乘客在中途下车看成是一次实验，每个人下车是独立的，有 n 个人相当于做了 n 次独立重复实验，把乘客下车看成实验成功，不下车看成实验失败，而且每次实验成功的概率都为 p，则问题(1)成为 n 重伯努利实验中有 m 次成功.

【详解】 (1)求在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率，相当于求条件概率 $P\left\{Y=m\mid X=n\right\}$，由题设知，此条件概率服从二项分布，因此根据二项分布的分布律有:

$$P\left\{Y=m\mid X=n\right\}=C_n^mP^m(1-P)^{n-m},0\le m\le n,n=0,1,2\cdots$$

(2) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布，其实就是求 $P\left\{X=n,Y=m\right\}$，利用乘法公式，

有 $P\left\{X=n,Y=m\right\}=P\left\{Y=m\mid X=n\right\}P\left\{X=n\right\}$

又 X 服从参数 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，由泊松分布的分布律有 $P\left\{X=n\right\}=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

故 $P\left\{X=n,Y=m\right\}=P\left\{Y=m\mid X=n\right\}P\left\{X=n\right\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$，

其中 $0\le m\le n,n=0,1,2\cdots$

十二【详解】 记 $\overline{X_1}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\overline{X_2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_{n+i}$，则 $\overline{X}=\dfrac{1}{2}\left(\overline{X_1}+\overline{X_2}\right)$，即 $2\overline{X}=\overline{X_1}+\overline{X_2}$

且 $E\overline{X_1}=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i}{n}=\dfrac{nu}{n}=u$，$E\overline{X_2}=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_{n+i}\right)=u$

因此 $E(Y)=E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2\right]=E\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]^2\right\}$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2+2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)+\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]+E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}+E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]$$

因为样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]$ 是总体方差的无偏估计，则 $ES^2=\sigma^2$，即

$$ES^2=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]=\sigma^2$$

所以 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_1}\right)^2\right]=(n-1)\sigma^2$，同理 $E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)^2\right]=(n-1)\sigma^2$

而 $E\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}=2E\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]\right\}$

$$=2\sum_{i=1}^{n}E\left[\left(X_i-\overline{X_1}\right)\left(X_{n+i}-\overline{X_2}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left(X_iX_{n+i}-X_i\overline{X_2}-\overline{X_1}X_{n+i}+\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(EX_iX_{n+i}-EX_i\overline{X_2}-E\overline{X_1}X_{n+i}+E\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right)$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n} (n \geq 2)$ 相互独立同分布，则 X_i与$\overline{X_2}$， $\overline{X_1}$与X_{n+i}， $\overline{X_1}$与$\overline{X_2}$ 也独立($i = 1, 2 \cdots n$). 而由独立随机变量期望的性质(若随机变量 X, Y 独立，且 EX, EY 都存在，则 $EXY = EXEY$)，所以

$$EX_iX_{n+i} = EX_iEX_{n+i} = u^2, \quad EX_i\overline{X_2} = EX_iE\overline{X_2} = u^2$$

$$E\overline{X_1}X_{n+i} = E\overline{X_1}EX_{n+i} = u^2, \quad E\overline{X_1}\,\overline{X_2} = E\overline{X_1}E\overline{X_2} = u^2$$

故有 $$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \overline{X_1}\right)\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(EX_iX_{n+i} - EX_i\overline{X_2} - E\overline{X_1}X_{n+i} + E\overline{X_1}\,\overline{X_2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(u^2 - u^2 - u^2 + u^2\right) = 0$$

即 $$E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_1}\right)^2\right] + E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(X_i - \overline{X_1}\right)\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)\right]\right\} + E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_{n+i} - \overline{X_2}\right)^2\right]$$

$$= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$__________

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$_________.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是_________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准型 $f=6y_1^2$，则 $a=$_______.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$_____

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续， ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微， ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出 Q，则有 (　　)

(A) ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①.　　(B)③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①.

(C) ③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①.　　(D)③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④.

(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,...)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ (　　)

(A) 发散.　　(B)绝对收敛.

(C)条件收敛.　　(D)收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则 (　　)

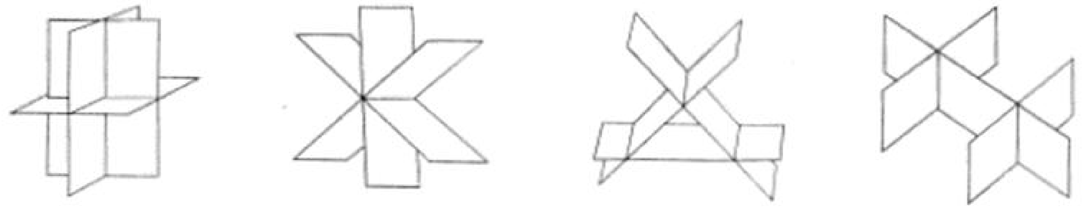
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0$.

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3,$ 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为 ( )



(A) (B) (C) (D)

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则 ( )

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0,$ 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d) .记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]dy$,

(1)证明曲线积分 I 与路径 L 无关；　　(2)当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6\,!}+\frac{x^9}{9\,!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$（$-\infty<x<+\infty$）满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$;

(2)利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山，取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2-xy\le 75\right\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1)设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此反向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 表达式.

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 A,B 为同阶方阵，

(1)如果 A,B 相似，试证 A,B 的特征多项式相等.

(2)举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

(3)当 A,B 均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\le x\le\pi \\ 0, & 其他\end{cases}$

对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$(1-2\theta)$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩阵估计值和最大似然函数估计值.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 ____1____

【详解】先将其转化为普通定积分，求其极限即得广义积分.

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln b}+1\right]=1$$

(2)【答案】 ____-2____

【详解】y 是由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定的 x 的函数，两边对 x 求导，

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0,$$

所以 $y'=-\dfrac{6y+2x}{e^y+6x}$，两边再对 x 求导，得

$$y''=-\frac{(e^y+6x)(6y'+2)-(6y+2x)(e^y y'+6)}{(e^y+6x)^2},$$

把 $x=0$ 代入，得 $y(0)=0$， $y'(0)=0$，代入 y''，得 $y''(0)=-2$.

(3)【答案】 $y=\sqrt{x+1}$

【详解】**方法 1**：这是属于缺 x 的 $y''=f(y,y')$ 类型. 命 $y'=p, y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$.

原方程 $yy''+y'^2=0$ 化为 $yp\dfrac{dp}{dy}+p^2=0$，得

$$p=0 \text{或} y\frac{dp}{dy}+p=0$$

$p=0$，即 $\dfrac{dy}{dx}=0$，不满足初始条件 $y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，弃之；所以 $p\neq 0$

所以，$y\dfrac{dp}{dy}+p=0$，分离变量得 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dp}{p}$，解之得 $p=\dfrac{C_1}{y}$. 即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{C_1}{y}$.

由初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，可将 C_1 先定出来：$\dfrac{1}{2}=\dfrac{C_1}{1}, C_1=\dfrac{1}{2}$. 于是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

解之得，$y^2=x+C_2, y=\pm\sqrt{x+C_2}$.以 $y\big|_{x=0}=1$ 代入，得 $1=\pm\sqrt{C_2}$ ，所以应取“+”号且 $C_2=1$. 于是特解是 $y=\sqrt{x+1}$.

方法 2: 将 $yy''+y'^2=0$ 改写为 $(yy')'=0$，从而得 $yy'=C_1$. 以初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 代入，有 $1\times\frac{1}{2}=C_1$，所以得 $yy'=\frac{1}{2}$. 即 $2yy'=1$，改写为 $(y^2)'=1$. 解得 $y=x+C_2$, $y=\pm\sqrt{x+C_2}$.再以初值代入，$1=\pm\sqrt{C_2}$ 所以应取"+"且 $C_2=1$. 于是特解 $y=\sqrt{x+1}$.

(4)【答案】2

【详解】**方法 1：** 二次型 f 的对应矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，故 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，即

$$A\sim\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为矩阵的 n 个特征值之和等于它的主对角元素之和，$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=3a=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i$，相似矩阵具有相同的特征值，$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i=6+0+0=6$ 故有 $3a=6$，得 $a=2$.

方法 2： 二次型 f 的对应矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，即

$$A \sim \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，知 0 是 A 的特征值，根据特征值的定义，有 $|0E-A|=|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{把第2,3列加到第1列}}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ a+4 & a & 2 \\ a+4 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{提取第1列的公因子}}} (a+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\3\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}} (a+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+4)(a-2)^2=0,$$

得　　$a=-4$ 或 $a=2$，　　(1)

又 6 是 A 的特征值，根据特征值的定义，有 $|6E-A|=0$，由

$$6E-A=\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6-a & -2 & -2 \\ -2 & 6-a & -2 \\ -2 & -2 & 6-a \end{bmatrix} \text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$|6E-A|=\begin{vmatrix} 6-a & -2 & -2 \\ -2 & 6-a & -2 \\ -2 & -2 & 6-a \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{把第2,3列加到第1列}}} \begin{vmatrix} 2-a & -2 & -2 \\ 2-a & 6-a & -2 \\ 2-a & -2 & 6-a \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{提取第1列的公因子}}} (2-a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 6-a & -2 \\ 1 & -2 & 6-a \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix}2\text{行}-1\text{行}\\3\text{行}-1\text{行}\end{matrix}}} (2-a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 8-a & 0 \\ 0 & 0 & 8-a \end{vmatrix}$$

$$=(2-a)(8-a)^2=0$$

得　　$a=2$ 或 $a=8$　　(2)

因为(1)，(2)需同时成立，取它们的公共部分，得 $a=2$.

方法 3： f 的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，即

$$A\sim\begin{bmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，知 A 的特征值，其中一个单根是 6，一个二重根应是 0，直接求 A 的特征值，即由

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda&&\\&\lambda&\\&&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-a&-2&-2\\-2&\lambda-a&-2\\-2&-2&\lambda-a\end{bmatrix}\text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-2&-2\\-2&\lambda-a&-2\\-2&-2&\lambda-a\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1列}]{\text{把第2,3列}}\begin{vmatrix}\lambda-a-4&-2&-2\\\lambda-a-4&\lambda-a&-2\\\lambda-a-4&-2&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取第1列的公因子}}(\lambda-a-4)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-a&-2\\1&-2&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3\text{行}-1\text{行}]{2\text{行}-1\text{行}}(\lambda-a-4)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda-(a-2)&0\\0&0&\lambda-(a-2)\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-(a-4)][\lambda-(a-2)]^2$$

其中单根为 $a+4$，二重根为 $a-2$，故 $a+4=6$，及 $a-2=0$，故知 $a=2$.

方法 4： f 的对应矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}$，经正交变换 $x=Py$，可化成标准型 $f=6y_1^2$，

故 P 为正交矩阵，有 $P^T=P^{-1}$，且对实对称矩阵 A，有 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，即

$$A=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}\sim\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A)=r(\Lambda)=1$，

$$A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第3行的顺序}]{\text{交换第1和}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3行}-1\text{行}\times\frac{a}{2}]{\text{2行}-1\text{行}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 2-a & 2-a^2/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3行}+2\text{行}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & 4-\dfrac{a^2}{2}-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{3行}\times 2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & -(a^2+2a-8) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 0 & a-2 & 2-a \\ 0 & 0 & -(a-2)(a+4) \end{bmatrix}$$

因 $r(A)=1$，故 $a-2=0$，且 $(a-2)(a+4)=0$，故应取 $a=2$.

(5)【答案】4.

【详解】二次方程无实根，即 $y^2+4y+X=0$ 的判别式 $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=16-4X<0$，也就有 $X>4$. 此事发生概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$，

对于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, $P\{X>\mu\}=\frac{1}{2}$，因为正态分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad -\infty<x<+\infty$$

关于 $x=\mu$ 对称；另一方面，由概率的计算公式，$f(x)$ 与 x 轴所围成的面积是1，所以 $x=\mu$ 将面积平分为两份 $P\{X>\mu\}=\frac{1}{2}$，所以 $\mu=4$.

二、选择题

(1)【详解】下述重要因果关系应记住，其中 $A\Rightarrow B$ 表示由 A 可推出 B. 无箭头者无因果关系，箭头的逆向不成立.

$$f_x'(x,y)\text{ 与 }f_y'(x,y)\text{ 连续}\Rightarrow f(x,y)\text{ 可微}\Rightarrow \begin{cases} f_x'(x,y)\text{与}f_y'(x,y)\text{存在} \\ f(x,y)\text{连续} \end{cases}$$

其中均指在同一点处. 记住上述关系，不难回答本选择题，故应选(A).

(2)【详解】首先要分清绝对收敛和条件收敛的定义，通过定义判定级数的敛散性.

考察原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$ 的前 n 项部分和

$$S_n=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4})-\cdots+(-1)^{n+1}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1>0$知，当$n$充分大时，$u_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$(收敛)，

另一方面，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$为正项级数，用比较判别法的极限形式，由题设条件

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$的启发，考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{u_{n+1}+u_n}{u_nu_{n+1}}}{\frac{2n+1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(u_{n+1}+u_n)n(n+1)}{u_nu_{n+1}(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)[\frac{(n+1)}{n}\frac{u_{n+1}}{(n+1)}+\frac{u_n}{n}]}{u_nu_{n+1}\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{n}\frac{u_{n+1}}{(n+1)}+\frac{u_n}{n}}{\frac{u_n}{n}\cdot\frac{u_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n}}=1$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是发散的，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})$也发散，所以选(C).

(3)【详解】**方法 1**：排斥法.

令$f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$有界，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在，故(A)不成立；

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1\neq0$，(C)和(D)不成立，故选(B).

方法 2：证明(B)正确. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在，记$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$，证明$A=0$.

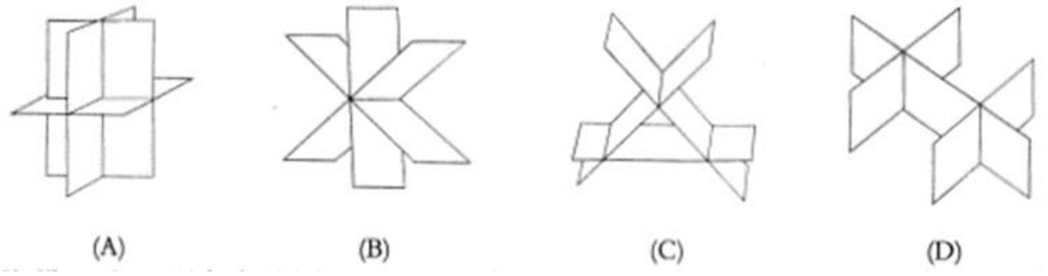
用反证法，若$A>0$，则对于$\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，存在$X>0$，使当$x>X$时，$\left|f'(x)-A\right|<\varepsilon=\frac{A}{2}$，即$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2}$

由此可知，$f'(x)$有界且大于$\frac{A}{2}$.在区间$[x,X]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$$

从而$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题设$f(x)$有界矛盾.类似可证当$A<0$时亦有矛盾. 故$A=0$.

(4) 【答案】(B)



【详解】三张不同平面的方程分别为 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3,$ 判断三个平面有无公共点即判断方程组 $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$ 有无公共解，且方程组有多少公共解平面就有多少公共点，由于方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 $2<3$ (未知量的个数)，所以方程组有解且有无穷多解，故三个平面有无穷多个公共点，故应排除(A)三平面唯一交点(即方程组只有唯一解)(C)、(D)三平面没有公共交点(即方程组无解).

故应选(B)，三个平面相交于一条直线，直线上所有的点均是平面的公共点，即有无穷多个公共点.

(5)【答案】D

【分析】函数 $f(x)$ 成为概率密度的充要条件为：(1) $f(x)\ge 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

函数 $F(x)$ 成为分布函数的充要条件为：(1) $F(x)$ 单调不减；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1;$ (3) $F(x)$ 右连续.

我们可以用以上的充要条件去判断各个选项，也可以用随机变量的定义直接推导.

【详解】**方法 1：**

(A)选项不可能，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx=1+1=2\ne 1$$

也不能选(B)，因为可取反例，令

$$f_1(x)=\begin{cases} 1, & -1<x<0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均是均匀分布的概率密度. 而

$f_1(x)f_2(x)=0$ ，不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx=1$ 条件.

(C)当然也不正确，因为

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x_1)+F(x_2)]=1+1=2\ne 1$$

根据排除法，答案应选(D).

方法 2：令 $X=\max(X_1,X_2)$，显然 X 也是一个随机变量. X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\max(X_1,X_2)\le x\}=P\{X_1\le x,X_2\le x\}$$

$$=P\{X_1\le x\}P\{X_2\le x\}=F_1(x)F_2(x).$$

三【详解】

方法 1：由题设条件知有

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\ne0$，所以 $a+b-1=0$. 又由洛必达法则，

$$\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}(af'(h)+2bf'(2h))=(a+2b)f'(0)$$

由于 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，由高阶无穷小的定义知上式等于 0，又由 $f'(0)\ne0$, 得 $a+2b=0$.

解 $\begin{cases}a+b-1=0\\ a+2b=0\end{cases}$ 联立方程组得，$a=2,b=-1$.

方法 2：分别将 $f(h),f(2h)$ 按佩亚诺余项泰勒公式展开到 $o(h)$，有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o_1(h)\text{，}\quad f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o_2(h)$$

从而 $\quad af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o_3(h)$

由题设条件知，$a+b-1=0,a+2b=0$, 所以 $a=2,b=-1$.

方法 3：由题设条件，有

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$$

由于 $f(0)\ne0$，所以 $a+b-1=0$. 再将 $a=1-b$ 代入 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[af(h)+bf(2h)-f(0)]$，并凑成导数定义形式，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1-b)f(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}[\frac{f(h)-f(0)}{h}-b\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\frac{f(2h)-f(0)}{2h}]\\&=f'(0)-bf'(0)+2bf'(0)=(1+b)f'(0)\end{aligned}$$

从而 $\quad a=2,b=-1$.

四【详解】由 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 知 $y(0)=0$，由变上限积分的求导公式得

$$y'=e^{-(\arctan x)^2}\cdot(\arctan x)' = e^{-(\arctan x)^2}\bullet\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $$y'(0)=e^{-(\arctan 0)^2}\bullet\frac{1}{1+0^2}=1$$

因此，过点 $(0,0)$ 的切线方程为 $y=x.$ $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处与上述曲线有相同的切线方程，于是 $f(0)=0, f'(0)=1$.

$$\lim_{n\to\infty} nf(\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$$

五【详解】应先将 $e^{\max\{x^2,y^2\}}$ 写成分块表达式. 记

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le x\right\}, D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, x\le y\le 1\right\}$$

于是 $$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases} e^{x^2} & (x,y)\in D_1; \\ e^{y^2} & (x,y)\in D_2. \end{cases}$$

从而 $$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma=\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma+\iint_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}d\sigma=\iint_{D_1} e^{x^2}d\sigma+\iint_{D_2} e^{y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^1 e^{y^2}dx=\int_0^1 e^{x^2}xdx+\int_0^1 e^{y^2}ydy$$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}xdx=\int_0^1 e^{x^2}dx^2=\int_0^1 de^{x^2}=e^{x^2}\big|_0^1=(e-1)$$

六【详解】(1) 记 $P(x,y)=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$，$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1])}{\partial x}=\frac{\partial(\frac{x}{y^2})}{\partial x}\times([y^2f(xy)-1])+\frac{x}{y^2}\times\frac{\partial([y^2f(xy)-1])}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{y^2}\times([y^2f(xy)-1])+\frac{x}{y^2}\times\frac{y^2\partial(f(xy)}{\partial x}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+x\times f'(xy)\frac{\partial(xy)}{\partial x}$$

$$=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)])}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial(\frac{1}{y})}{\partial y}([1+y^2f(xy)])+\frac{1}{y}\frac{\partial([1+y^2f(xy)])}{\partial y}$$

$$=-\frac{1}{y^2}([1+y^2f(xy)])+\frac{1}{y}\frac{\partial(y^2)}{\partial y}f(xy)+\frac{1}{y}\times\frac{\partial(f(xy))}{\partial y}\times y^2$$

$$=-f(xy)-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$$

所以，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}(当y>0)$．故在上半平面($y>0$)，该曲线积分与路径无关.

(2)**方法 1：**由该曲线积分与路径无关而只与端点有关所以用折线把两个端点连接起来. 先从点(a,b)到点(c,b), 再到点(c,d)．有

$$I=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)]dx+\int_b^d cf(cy)dy+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

经积分变量变换后，$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)dt$．当$ab=cd$时，推得$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

方法 2:原函数法.

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

$$=\int_L\frac{ydx-xdy}{y^2}+\int_L f(xy)(ydx+xdy)=\int_L d(\frac{x}{y})+\int_L f(xy)d(xy)$$

由原函数法计算第二型曲线积分的公式(与定积分的牛顿—莱布尼茨公式类似)，有

$$\int_L d(\frac{x}{y})=\frac{x}{y}\bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b};$$

$$\int_L f(xy)d(xy)=F(xy)\bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=F(cd)-F(ab)=0,$$

其中$F(u)$为$f(u)$的一个原函数，即设$F'(u)=f(u)$.由此有$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

方法 3：由于与路径无关，又由$ab=cd$的启发，取路径$xy=k$，其中$k=ab$．点(a,b)与点(c,d)都在此路径上. 于是将$x=\frac{k}{y}$代入之后，

$$I=\int_a^d[\frac{1}{y}(1+y^2f(k))(-\frac{k}{y^2})+\frac{k}{y^2}(y^2f(k)-1)]dy$$

$$=\int_b^d(-\frac{2k}{y^3})dy=\frac{k}{y^2}\Big|_b^d=\frac{k}{d^2}-\frac{k}{b^2}=\frac{cd}{d^2}-\frac{ab}{b^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

七【解】(1) $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6\,!}+\frac{x^9}{9\,!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，

由收敛半径的求法知收敛半径为∞，故由幂级数在收敛区间上逐项可导公式得

$$y'(x)=(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!})'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^{3n-1}}{(3n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},$$

同理得 $y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$

从而

$$y''(x)+y'(x)+y(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!})+(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!})+(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\text{(由}e^x\text{的麦克劳林展开式)}$$

$$=e^x$$

这说明，$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$是微分方程$y''+y'+y=e^x$的解，并且满足初始条件

$$y(0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{3n}}{(3n)!}=1,\quad y'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0^{3n-1}}{(3n-1)!}=0.$$

(2)微分方程$y''+y'+y=e^x$对应的齐次线性方程为$y''+y'+y=0$，其特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$，其特征根为$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以其通解为

$$y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x].$$

另外，该非齐次方程的特解形式为$y=ce^x$，代入原非齐次方程得$ce^x+ce^x+ce^x=e^x$，所以$c=\frac{1}{3}$.故微分方程$y''+y'+y=e^x$的通解为

$$y=e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}e^x.$$

故 $$y'=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+e^{-\frac{x}{2}}[-C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos x]+\frac{1}{3}e^x$$

$$=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}(C_2-2C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{x}{2}}(C_1-2C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$$

由初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得

$$\begin{cases}1=e^{-\frac{0}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0]+\frac{1}{3}e^0=C_1+\frac{1}{3}\\ 0=-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{0}{2}}(C_2-2C_1\times\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{0}{2}}(C_1-2C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0+\frac{1}{3}e^0\\ \quad=-\frac{1}{2}C_1+C_2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}C_1+\frac{1}{3}=1\\ -\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}=0\end{cases},$$

于是得到惟一的一组解：$C_1=\frac{2}{3},C_2=0.$ 从而得到满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解，只有一个，为

$$y=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$$

另一方面，由(1)已知 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 也是微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 及初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解，由微分方程解的唯一性，知

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x(-\infty<x<+\infty).$$

八【详解】(1)根据方向导数和梯度的定义，知方向导数的最大值是梯度的模长，

$$gradh(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\left\{\frac{\partial h}{\partial x}|_{(y_0,x_0)},\frac{\partial h}{\partial y}|_{(y_0,x_0)}\right\}=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\}.$$

$$\max \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \left|gradh(x,y)\right|_{(x_0,y_0)} = \sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$
$$= \sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0} \ \underline{\underline{记}}\ g(x_0,y_0).$$

(2) 命 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，求 f 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点. 为此，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$$

则
$$F_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)\ \underline{\underline{令}}\ 0,$$
$$F_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)\ \underline{\underline{令}}\ 0,$$
$$F_\lambda'=75-x^2-y^2+xy\ \underline{\underline{令}}\ 0.$$

由第 1、第 2 两式相加可得 $(x+y)(2-\lambda)=0$. 从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$，再分别讨论之.

若 $\lambda=2$，则解得 $(x,y)_1=(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$ 或 $(x,y)_2=(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$

若 $y=-x$，则解得 $(x,y)_3=(5,-5)$ 或 $(x,y)_4=(-5,5)$

于是得到如上 4 个可能极值点. 将 $(x,y)_i$ 记为 $M_i(i=1,2,3,4)$. 由于

$$f(M_1)=f(M_2)=150, f(M_3)=f(M_4)=450$$

故点 $M_3=(5,-5)$，$M_4=(-5,5)$可作为攀登起点.

九【详解】**方法 1**：记 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]$，由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，即 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，及 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，知

$$r\left[A\vdots\beta\right]=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta\right]=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]=r(A)=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=3$$

系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，故 $Ax=\beta$ 有解.

对应齐次方程组 $Ax=0$，其系数矩阵的秩为 3，故其基础解系中含有 4-3(未知量的个数-系数矩阵的秩)个线性无关的解向量，故其通解可以写成 $k\xi$，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，知 $Ax=\beta$ 的通解为 $k\xi+\eta^*$，其中 $k\xi$ 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的通解，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，因

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4, \text{故} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 - 0\alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = 0,$$

故 $\xi = [1, -2, 1, 0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量，因为 $Ax = 0$ 的基础解系中只含有一个解向量，故 $\xi = [1, -2, 1, 0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

又

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}，\text{即} A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \beta$$

故 $\eta^* = [1,1,1,1]^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，方程组的通解为 $k[1,-2,1,0]^T + [1,1,1,1]^T$.(其中 k 是任意常数)

方法 2： 令 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ ，则线性非齐次方程为

$$Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \beta$$

已知 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ，故

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

将 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 代入上式，得

$$(2\alpha_2 - \alpha_3)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = (2\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow 2\alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2)\alpha_2 - \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 - 3\alpha_2 - \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，根据线性无关的定义，不存在不全为零的常数使得 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$ ，上式成立当且仅当

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，因为 3 阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，其秩为 3，故其齐次线性方程组的基础解系中存在 1 个(4-3)线性无关的解向量，取自由未知量$x_3 = k$，则方程组有解

$$x_4 = 1, x_3 = k, x_1 = x_3 = k, x_2 = -2k + 3$$

故方程组$Ax = \beta$有通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -2k+3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\text{(其中 } k \text{ 是任意常数)}$$

十【**详解**】(1) 因$A \sim B$，由定义知，存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP = B$，故

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P|$$

$$= |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|$$

故A, B有相同的特征多项式.

(2) 取$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2, |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$，则有$|\lambda E - A| = \lambda^2 = |\lambda E - B|, A, B$有相同的特征多项式，但$A$不相似于$B$，因为对任何的 2 阶可逆阵$P$，均有$P^{-1}AP = P^{-1}OP = O \neq B$，故(1)的逆命题不成立.

(3) 即要证如果A, B的特征多项式相等，则A, B相似.

当A, B都是实对称矩阵时，A, B均能相似于对角阵，且该对角阵的对角线元素由A, B的特征值组成. 若A, B有相同的特征多项式，则A, B有相同的特征值(包含重数)，故A, B将相似于同一个对角阵. 设特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则有

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

由相似的传递性，知 $A \sim B$. (1)的逆命题成立.

十一【答案】5.

【详解】如果将观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 这事件理解为试验成功的话，则 Y 表示对 X 独立地重复试验 4 次中成功的次数.即是 $Y \sim B(4,p)$，其中 $p = P\left\{X > \pi/3\right\}$

由一维概率计算公式，$P\left\{a \le X \le b\right\} = \int_a^b f_X(x)dx$，有

$$p = P\left\{X > \frac{\pi}{3}\right\} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2},$$

所以，$Y \sim B(4, \dfrac{1}{2})$.

由公式 $D(Y) = [E(Y)]^2 - E(Y^2)$ 以及若 $Y \sim B(n,p)$，其数学期望和方差分别为

$$E(Y) = np; D(Y) = npq，其中 q = 1 - p.$$

得 $$E(Y^2) = D(Y) + [E(Y)]^2 = npq + (np)^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + (4 \times \frac{1}{2})^2 = 5.$$

十二【分析】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数.

【详解】矩估计：由离散型随机变量期望的定义 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$，有：

$$E(X) = 0 \times \theta^2 + 1 \times 2\theta(1-\theta) + 2 \times \theta^2 + 3 \times (1 - 2\theta) = 3 - 4\theta$$

样本均值 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{1}{8} \times (3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$

用样本均值估计期望有 $EX = \overline{X}$，即 $3 - 4\theta = 2$. 解得的矩估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{1}{4}$.

由离散型随机变量似然函数的定义：设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\theta)=P(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\theta)$$

由于样本值中 0 出现一次，故用 0 的对应概率 θ^2 一次. 样本值中数值 1 出现二次，故用两个 $2\theta(1\text{-}\theta)$ 相乘，数值 2 出现一次，故用 2 的对应概率 θ^2 一次，数值 3 出现四次，故用 $(1\text{-}2\theta)^4$.

总之，对于给定的样本值的似然函数为：

$$L(\theta)=\theta^2\cdot\left[2\theta(1\text{-}\theta)\right]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$L(\theta)>0$，等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 θ 的同一点取得最大值，所以

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$, 因 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$ 与题目中 $0<\theta<\dfrac{1}{2}$ 矛盾，不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} =$ ________

(2) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是__________ .

(3) 设 $x^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx(-\pi \le x \le \pi)$，则 a_2=__________ .

(4) 从 R^2 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为_______ .

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 6x, 0 \le x \le y \le 1, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$ 则 $P\{X + Y \le 1\} =$

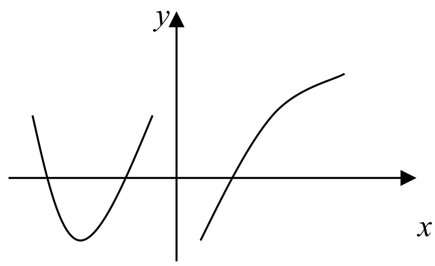
__________ .

(6) 已知一批零件的长度 X (单位：cm cm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 (cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是__________ .

(注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95.$)

二、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，



则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点.
(B)两个极小值点和一个极大值点.
(C)两个极小值点和两个极大值点.
(D)三个极小值点和一个极大值点.

(2) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$，则必有(　　)

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则(　　)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(4) 设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　　)

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

(5) 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则秩(A)$\geq$秩(B)；
② 若秩(A)$\geq$秩(B)，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；
③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则秩(A)=秩(B)；
④ 若秩(A)=秩(B)，　则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.
以上命题中正确的是(　　)
(A) ①　②.　　(B) ①　③.
(C) ②　④.　　(D) ③　④.

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则(　　)

(A) $Y\sim\chi^2(n)$.　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$.

(C) $Y\sim F(n,1)$.　　(D) $Y\sim F(1,n)$.

三 、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A；
(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

四 、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

五 、(本题满分 10 分)

已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$为$D$的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

六 、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为$k,k>0$).汽锤第一次击打将桩打进地下$a\ m$. 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数$r(0<r<1)$. 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

(注：m表示长度单位米.)

七 、(本题满分 12 分)

设函数$y=y(x)$)在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且$y'\ne 0,x=x(y)$是$y=y(x)$的反函数.

(1) 试将$x=x(y)$所满足的微分方程$\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$变换为$y=y(x)$满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件$y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$的解.

八 、(本题满分 12 分)

设函数$f(x)$连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t}f(x^2)dx},$$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

(2) 证明当$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

九 、(本题满分 10 分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}A^{*}P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^{*} 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

十 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0，\quad l_2: bx+2cy+3a=0，\quad l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证: 这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

十一 、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

十二 、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ \quad 0, \qquad x\le\theta,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记

$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

【详解】**方法 1**：求 $\lim u(x)^{v(x)}$ 型极限，一般先化为指数形式

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x)\ln u(x)}$$

然后求 $\lim v(x)\ln u(x)$，再回到指数上去.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}(\text{等价无穷小替换}\ln(1+x)\sim x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}(\text{等价无穷小替换}1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2)$$

故　　原式 $= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

方法 2：令 $y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$，有 $\ln y = \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$，以下同方法 1.

(2)【答案】 $2x+4y-z=5$

【详解】由题意，只要满足所求切平面的法向量与已知平面的法向量平行即可.

平面 $2x+4y-z=0$ 的法向量：$\vec{n}_1=\{2,4,-1\}$；

曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量：$\vec{n}_2=\{z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1\}=\{2x_0,2y_0,-1\}$

由于 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$，因此有

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1}$$

可解得，$x_0=1, y_0=2$，相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$.

所求切平面过点 $(1,2,5)$，法向量为：$\vec{n}_2=\{2,4,-1\}$，故所求的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0，即\ 2x+4y-z=5$$

(3)【答案】1

【详解】将 $f(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数

$$f(x)=x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)\text{，其中 } a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx\ .$$

所以 $$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2d\sin 2x=\frac{1}{\pi}[x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2xdx]$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\cos 2x=\frac{1}{\pi}[x\cos 2x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2xdx]=1$$

(4)【答案】$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

【详解】n 维向量空间中，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵 P 满足

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P\text{，}$$

因此过渡矩阵 P 为：

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n].$$

根据定义，从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为

$$P=[\alpha_1,\alpha_2]^{-1}[\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}.$$

(5)【答案】$\dfrac{1}{4}$.

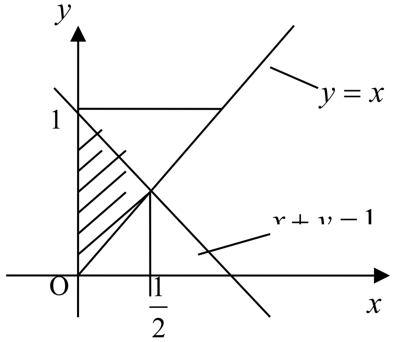
【分析】本题为已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$，求满足一定条件的概率 $P\{g(X,Y)\le z_0\}$. 连续型二维随机变量 (X,Y) 概率的求解方法

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv,$$

此题可转化为二重积分 $P\{g(X,Y)\le z_0\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z_0}f(x,y)dxdy$ 进行计算.

【详解】图中阴影区域为积分区域. 由题设，有

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy$$



$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)dx=\frac{1}{4}$$

(6)【答案】$(39.51,40.49)$.

【分析】可以用两种方法求解：

(1) 已知方差$\sigma^2=1$，对正态总体的数学期望μ进行估计. 因为$X\sim N(\mu,1)$，设有n个样本，样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$，将其标准化，由公式$\frac{\overline{X}-E(X)}{\sqrt{D(X)/n}}\sim N(0,1)$

得：$\frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

由正态分布分为点的定义$P\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\right|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$可确定临界值$u_{\frac{\alpha}{2}}$，进而确定相应的置信区间$(\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

(2)本题是在单个正态总体方差已知条件下，求期望值μ的置信区间问题. 由教材上已经求出的置信区间$(\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，其中$P\{|U|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha,U\sim N(0,1)$，可以直接得出答案.

【详解】**方法 1**：由题设，$1-\alpha=0.95$，可见$\alpha=0.05$. 查标准正态分布表知分位点$u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$. 本题$n=16$，$\overline{x}=40$.

根据$P\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}}\right|<1.96\}=0.95$，有$P\{\left|\frac{40-\mu}{1/\sqrt{16}}\right|<1.96\}=0.95$，

即$P\{39.51<\mu<40.49\}=0.95$，故$\mu$的置信度为 0. 95 的置信区间是$(39.51,40.49)$.

方法 2：由题设，$1-\alpha=0.95$，

$$P\{|U|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<U<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=2\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})-1=0.95,\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=0.975$$

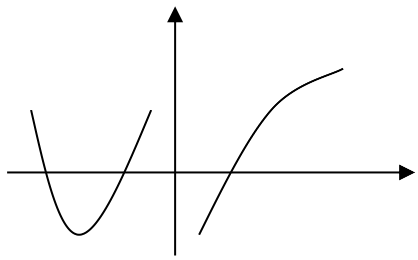
查得$u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$. 将$\sigma=1$，$n=16$，$\overline{x}=40$代入$(\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$得置信区间

$(39.51,40.49)$

二、选择题

(1)【答案】(C)

y



【分析】函数的极值点可能是驻点(一阶导数为零)或导数不存在的点，极值点是极大值点还是极小值点可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.

【详解】根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个(导函数与 x 轴交点的个数)； $x=0$ 是导数不存在的点.

对 3 个一阶导数为零的点左右两侧导数符号均不一致，故必为极值点，其中第一个交点左右两侧导数符号由正变为负，是极大值点；第二个交点和第三个交点左右两侧导数符号由负变为正，是极小值点，则三个驻点中有两个极小值点，一个极大值点；

对导数不存在的点： $x=0$. 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点.

故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选(C).

(2)【答案】(D)

【详解】**方法 1**：推理法

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$ 存在并记为 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=A$,这与

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty} b_nc_n$ 不存在． 所以选项 (D) 正确.

方法 2：排除法

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{n-1}{n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，而 $a_1=1, b_1=0, a_1>b_1$，(A) 不正确；

取 $b_n=\dfrac{n-1}{n}$， $c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，而 $b_1=0>-1=c_1$， (B) 不正确；

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$， $c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nc_n=1$， (C) 不正确.

(3)【答案】(A)

【详解】由 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1 \Rightarrow f(x,y)-xy=(1+\alpha)(x^2+y^2)^2$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0$.

由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续知， $f(0,0)=0$.

取 $y=x$， $|x|$ 充分小， $x\neq0$，有 $f(x,y)=x^2+(1+\alpha)(2x^2)^2>0$；

取 $y=-x$， $|x|$ 充分小， $x\neq0$，有 $f(x,y)=-x^2+(1+\alpha)(2x^2)^2<0$

故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，应选 (A) . (极值的定义)

(4)【分析】 本题为一般教材上均有的比较两组向量个数的定理：若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关． 或其逆否命题：若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且向量组 I 线性无关，则必有 $r\le s$． 可见正确选项为(D)． 本题也可通过举反例用排除法找到答案．

【详解】 用排除法：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$，但 β_1,β_2 线性无关，排除(A)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， 则 α_1,α_2 可由 β_1 线性表示，但 β_1 线性无关，排除(B)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$， α_1 可由 β_1,β_2 线性表示，但 α_1 线性无关，排除(C)．

(5)【答案】(B)

【分析】本题可找反例用排除法进行分析，但①、②两个命题的反例比较复杂一些，关键是抓住③、④，迅速排除不正确的选项．

【详解】若 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则它们的解空间中的基础解系所含向量个数相同，即 n-秩(A)=n-秩(B)，得秩(A)=秩(B)，命题③成立，可排除(A), (C)；

但反过来，若秩(A)=秩(B)，则不能推出 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解，通过举一反例证明，若 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则秩($A$)=秩($B$)=1，但 $AX=0$ 与 $BX=0$ 不同解，可见命题④不成立，排除(D). 故正确选项为(B).

(6)【答案】(C).

【分析】求解这类问题关键在于了解产生 χ^2 变量、t 变量、F 变量的典型模式．

(1) χ^2 分布：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布，则随机变量 $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布．记做 $Z\sim\chi^2(n)$.

(2) t 分布：设 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim\chi^2(n)$，且 X_1,X_2 相互独立，则随机变量 $Z=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布．记做 $Z\sim t(n)$

(3) F 分布：设 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X,Y 相互独立，则随机变量 $Z = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从 F 分布，其第一、二自由度分别为 n_1, n_2. 记做 $Z \sim F(n_1, n_2)$.

【详解】其实，由 F 分布的性质以及 t 分布和 F 分布的关系得，

(1) 如果统计量 $T \sim t(n)$，则有 $T^2 \sim F(1,n)$；

(2) 如果统计量 $F \sim F(n_1,n_2)$，则有 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$.

由以上两条性质可以直接得出本题的答案为(C).

先由 t 分布的定义知 $X = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$，其中 $U \sim N(0,1), V \sim \chi^2(n)$，于是

$$Y = \frac{1}{X^2} = \frac{V/n}{U^2} = \frac{V/n}{U^2/1},$$

分母中只含有一个标准正态分布的平方，所以 $U^2 \sim \chi^2(1)$. 由 F 分布的定义知 $Y \sim F(n,1)$. 故应选(C).

三【分析】圆锥体体积公式：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$；旋转体的体积：

(1) 连续曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$ 、$x = b$ 所围成的图形绕直线 $x = x_0$ 旋转一周而成的立体的体积 $V_1 = \pi\int_a^b \left[f(x) - x_0\right]^2 dx$

(2) 连续曲线 $x = g(x)$，直线 $y = c$ 、$y = d$ 所围成的图形绕直线 $y = y_0$ 旋转一周而成的立体的体积 $V_2 = \pi\int_c^d \left[g(y) - y_0\right]^2 dy$

【详解】为了求 D 的面积，首先要求出切点的坐标，设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程是：

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

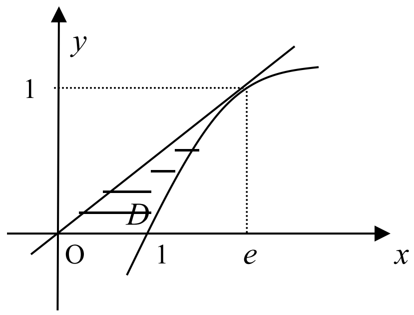
切线的斜率为 $y'\big|_{x_0} = \dfrac{1}{x_0}$，由于该切线过原点，将 $(0,0)$ 点代入切线方程，得 $\ln x_0 - 1 = 0$，从而 $x_0 = e$. 所以该切线的方程为

$$y=\frac{1}{e}x.$$

(1) 利用平面图形 D 的面积公式 $S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|\varphi(y)-\psi(y)\right|dy$ ，得

$$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=\frac{1}{2}e-1.$$

(2) 旋转体体积可用一大立体(圆锥)体积减去一小立体体积进行计算，为了帮助理解，可画一草图.



切线 $y=\frac{1}{e}x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的三角形绕直线 $x=e$ 旋转所得的圆锥体积为：

$$V_1=\int_0^1\pi(e-ey)^2dy=\frac{1}{3}\pi e^2.$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=e$ 所围成的图形绕直线 $x=e$ 旋转所得的旋转体体积为：

$$V_2=\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\pi\int_0^1(e^2-2e\cdot e^y+e^{2y})dy$$

$$=\pi(e^2y-2e\cdot e^y+\frac{1}{2}e^{2y})\Big|_0^1=\pi(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2})$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi e^2-\int_0^1\pi(e-e^y)^2dy=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$

四【分析】幂级数展开有直接法与间接法，一般考查间接法展开，即通过适当的恒等变形、求导或积分等，转化为可利用已知幂级数展开的情形.

另外，由于函数展开成的幂级数，经两边求导或积分(其中一边是逐项求导或逐项积分)后，其新的展开式收敛区间不变，但在收敛区间端点处，求导(积分)后的展开式成立与否，要另行单独处理，设已有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

收敛区间为 (x_0-R,x_0+R) . 如果在 $x=x_0+R$ 处级数收敛，并且 $f(x)$ (左)连续，则展开式成立的范围可扩大到 $x=x_0+R$ 处，在 $x=x_0-R$ 处亦有类似的结论，不过此时 $f(x)$ (左)连续应改称(右)连续.

【详解】本题可先求导，

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)'}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}=\frac{\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\qquad \text{基本求导公式}$$

$$=\frac{-4}{2(1+4x^2)}=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\frac{1}{1+4x^2}$$

对于函数 $\frac{1}{1+4x^2}$，可以利用我们所熟悉的函数 $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\qquad(-1<x<1)$$

所以 $\frac{1}{1+4x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}\qquad -1<-4x^2<1$ （把 x 换成 $-4x^2$）

有 $f'(x)=-2\frac{1}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},\qquad x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$

对上式两边求积分，得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=-2\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\right)dt$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^n\int_0^x t^{2n}dt=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ ,$$

又因为 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

即 $\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).\qquad (*)$

在 $x=\frac{1}{2}$ 处，右边级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}$，收敛(利用莱布尼茨定理)，左边函数 $f(x)$ 连续，所以成立范围可扩大到 $x=\frac{1}{2}$ 处. 而在 $x=-\frac{1}{2}$ 处，右边级数虽然收敛，但左边函数 $f(x)$ 不连续，所以成立范围只能是 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

为了求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，令 $x=\frac{1}{2}$ 代入(*)得

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}]=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

再由 $f(\frac{1}{2})=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

五【详解】(1) **方法 1**：用格林公式证明. 由曲线为正向封闭曲线，自然想到用格林公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ .$$

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$

所以 $\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy$

因为积分区域 D 关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy\overset{x与y互换}{=}\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy$$

故 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

方法 2：化为定积分证明

$$左边=\oint_L xe^{\sin y}dy-\oint_L ye^{-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$$

$$右边=\oint_L xe^{-\sin y}dy-\oint_L ye^{\sin x}dx=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$$

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$.

(2) **方法 1**：用格林公式证明

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$$

$$=\iint_D e^{\sin y}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy=\iint_D e^{\sin x}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy \quad 利用轮换对称性$$

$$=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy\ge\iint_D 2dxdy\ =2\pi^2$$

(因为 $a+b\ge 2\sqrt{ab},a>0,b>0$)

方法 2：由(1)知，$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\pi\int_0^{\pi}2dx\ =2\pi^2$

六【详解】(1) 建立坐标系，地面作为坐标原点，向下为 x 轴正向，设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤所作的功为 $W_n\,(n=1,2,3,\cdots)$. 由题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，汽锤所作的功等于克服阻力所做的功.

$$W_1=\int_0^{x_1}kxdx=\frac{k}{2}x_1^2\text{，}W_2=\int_{x_1}^{x_2}kxdx=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)\text{，}W_3=\int_{x_2}^{x_3}kxdx=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)\text{，}x_1=a$$

从而 $W_1+W_2+W_3=\frac{k}{2}x_3^2$

又 $W_2=rW_1$，$W_3=rW_2=r^2W_1$，

从而 $\frac{k}{2}x_3^2=W_1+W_2+W_3=(1+r+r^2)W_1=(1+r+r^2)\frac{k}{2}a^2$

于是 $x_3=a\sqrt{1+r+r^2}$.

(2) 第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤所作的功为 $W_n(n=1,2,3,\cdots)$. 则汽锤前 n 次所功的和等于克服桩被打进地下 x_n m 所做的功.

$$\int_0^{x_n}kxdx=W_1+W_2+\cdots+W_n=(1+r+\cdots+r^{n-1})W_1$$

而 $W_1=\int_0^{a}kxdx=\frac{k}{2}a^2$ 牛-莱公式

所以 $\frac{k}{2}{x_n}^2=(1+r+\cdots+r^{n-1})\frac{k}{2}a^2$

从而 $x_n=a\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}=a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}.$ 等比数列求和公式

由于 $0<r<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{a}{\sqrt{1-r}}$.

七【详解】 (1) 将题中的 $\frac{dx}{dy}$ 与 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 变换成以 x 为自变量 y 为因变量的导数 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 来表示(即通常所说的反函数变量变换)，有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{y'}\text{，}\quad\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{y'})\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}\ .$$

代入原方程，得 $y''-y=\sin x.$ (*)

(2) 方程(*)所对应的齐次方程为 $y''-y=0$，特征方程为 $r^2-1=0$，根 $r_{1,2}=\pm1$，因此通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 由于 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程得根，所以设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

则 $y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$，$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$

代入方程(*)，得：$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = -2A\cos x - 2B\sin x = \sin x$

解得 $A=0, B=-\frac{1}{2}$，故 $y^* = -\frac{1}{2}\sin x$. 从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$. 故变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

且 $y(x)$ 的导函数 $y'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x > 0$，满足题设 $y' \neq 0$ 条件.

八【详解】(1) 首先对 $F(t)$ 进行化简，三重积分转化为在球面坐标系中的计算；二重积分转化为在极坐标系中的计算.

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin\varphi dr = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr$$

$$= 2\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot \left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr \qquad \text{(球面坐标)}$$

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr = 2\pi \int_0^t f(r^2) r dr \qquad \text{(极坐标)}$$

所以

$$F(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr} = \frac{4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{2\pi \int_0^t f(r^2) r dr} = \frac{2\int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr}$$

为了讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性，对 $F(t)$ 求导：

$$F'(t) = 2\frac{t^2 f(t^2)\cdot \int_0^t f(r^2) r dr - \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot f(t^2) t}{[\int_0^t f(r^2) r dr]^2} = 2\frac{t f(t^2)\cdot \int_0^t f(r^2) r (t-r) dr}{[\int_0^t f(r^2) r dr]^2}$$

由于 $f(t)>0, r>0, t-r>0$，所以 $f(r^2) r (t-r) > 0$. 再利用定积分的性质：若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，则 $\int_a^b f(x)dx > 0$. 所以 $F'(t)>0$，所以 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

(2) 将待证的不等式作适当的恒等变形后，构造辅助函数，再用单调性进行证明即可.

因为 $\int_{-t}^t f(x^2)dx = 2\int_0^t f(x^2)dx = 2\int_0^t f(r^2)dr$，

所以

$$G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx} = \frac{2\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{2\int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}$$

要证明$t>0$时$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$，只需证明$t>0$时，$F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$，即

$$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}-\frac{2\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$$

$$=\frac{2\left[\left(\int_0^t f(r^2)r^2dr\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)dr\right)-\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2\right]}{\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)dr\right)}$$

令 $$g(t)=\left(\int_0^t f(r^2)r^2dr\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)dr\right)-\left(\int_0^t f(r^2)rdr\right)^2$$

$$g'(t)=f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)dr+f(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2dr-2f(t^2)t\int_0^t f(r^2)rdr$$

$$=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0 \qquad t>0$$

故$g(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加，又因为$g(0)=0$，所以当$t>0$时，有$g(t)>g(0)=0$，

从而$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t).$

九【分析】 法 1：可先求出A^*,P^{-1}，进而确定$B=P^{-1}A^*P$及$B+2E$，再按通常方法确定其特征值和特征向量；法 2：先求出A的特征值与特征向量，再相应地确定A^*的特征值与特征向量，最终根据$B+2E$与A^*+2E相似求出其特征值与特征向量.

【详解】**方法 1**：经计算可得

$$A^*=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

所以 $$B=P^{-1}A^*P=\begin{bmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{bmatrix},\quad B+2E=\begin{bmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{bmatrix}.$$

令 $$|\lambda E-(B+2E)|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-9)^2(\lambda-3)=0,$$

故$B+2E$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=9,\lambda_3=3.$

当$\lambda_1=\lambda_2=9$时，解$(9E-A)x=0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \eta_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},$$

所以属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=9$的所有特征向量为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$，其中k_1,k_2是不全为零的任意常数.

当$\lambda_3=3$时，解$(3E-A)x=0$，得线性无关的特征向量为

$$\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

所以属于特征值$\lambda_3=3$的所有特征向量为$k_3\eta_3=k_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，其中$k_3\neq 0$为任意常数.

方法 2: 设A的特征值为λ，对应的特征向量为η，即$A\eta=\lambda\eta$. 由于$|A|=7\neq 0$，所以$\lambda\neq 0$.

所以 $$A^*A=|A|E\Rightarrow A^*A\eta=|A|E\eta\Rightarrow A^*(A\eta)=|A|(E\eta)$$

$$\Rightarrow A^*(\lambda\eta)=|A|\eta\Rightarrow \lambda A^*\eta=|A|\eta\Rightarrow A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta,$$

于是 $$B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta),$$

$$(B+2E)P^{-1}\eta=(\frac{|A|}{\lambda}+2)P^{-1}\eta.$$

因此，$\frac{|A|}{\lambda}+2$为$B+2E$的特征值，对应的特征向量为$P^{-1}\eta$.

由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$，故$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，对应的线性无关特征向量可取为$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3 = 7$ 时，对应的一个特征向量为 $\eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

由 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，得 $P^{-1}\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$P^{-1}\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P^{-1}\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

因此，$B+2E$ 的三个特征值分别为 9，9，3．对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1 P^{-1}\eta_1 + k_2 P^{-1}\eta_2 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}，其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数；$$

对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3 P^{-1}\eta_3 = k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，其中 k_3 是不为零的任意常数.$$

十【分析】三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有唯一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

【详解】**方法 1**：“必要性”．设三条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c, \\ bx + 2cy = -3a, \\ cx + 2ay = -3b, \end{cases} \qquad (*)$$

有唯一解，故系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A} = \begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $\left|\overline{A}\right| = 0$.

$$\left|\overline{A}\right| = \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 2(b+c+a) & -3(c+a+b) \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = -6(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & c-b & a-b\\ c & a-c & b-c\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}c-b & a-b\\ a-c & b-c\end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)[(c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)]$$

$$=-6(a+b+c)(bc-c^2-b^2+bc-a^2+ac+ab-bc)$$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-ab-bc)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

由于三条直线互不相同，所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

“充分性”．由$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$\left|\overline{A}\right|=0$，故秩$(\overline{A})<3$.

由于

$$\begin{vmatrix}a & 2b\\ b & 2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故秩$(A)=2$．于是，秩(A)=秩$(\overline{A})$=2．因此方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点.

方法 2：“必要性”

设三直线交于一点(x_0,y_0)，则$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{bmatrix}$为$BX=0$的非零解，其中$B=\begin{bmatrix}a & 2b & 3c\\ b & 2c & 3a\\ c & 2a & 3b\end{bmatrix}$.

所以$|B|=0$．而

$$\left|B\right|=\begin{vmatrix}a & 2b & 3c\\ b & 2c & 3a\\ c & 2a & 3b\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a & 2b & -3c\\ b & 2c & -3a\\ c & 2a & -3b\end{vmatrix}=-\left|\overline{A}\right|$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$,(解法同方法 1)

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0$.

“充分性”：考虑线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a,\\ cx+2ay=-3b,\end{cases}\qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$.可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] = -[a^2+b^2+(a+b)^2] \neq 0$,

故方程组(* *)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

十一【详解】乙箱中可能的次品件数为 $0,1,2,3,$ 分别求出其概率，再按定义求数学期望即可；而求从乙箱中任取一件产品是次品的概率，涉及到两次试验，是典型的用全概率公式的情形，第一次试验的各种可能结果(取到的次品数)就是要找的完备事件组.

(1) **方法 1**：X 的可能取值为 $0,1,2,3,$ 取出 k 件次品 $(k=0,1,2,3)$ 的取法有 $C_3^k C_3^{3-k}$ 种；

样本空间即从两个箱子中取出 3 件产品的总的取法数为 C_6^3. 所以有，X 的概率分布为

$$P\{X=k\} = \frac{C_3^k C_3^{3-k}}{C_6^3}, \quad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

因此，由离散型数学期望的定义

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P\{X = x_k\}$$

易得 $E(X) = 0\times\frac{1}{20} + 1\times\frac{9}{20} + 2\times\frac{9}{20} + 3\times\frac{1}{20} = \frac{3}{2}.$

方法 2：本题对数学期望的计算也可用分解法：

设

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{从甲箱中取出的第}i\text{件产品是合格品}, \\ 1, & \text{从甲箱中取出的第}i\text{件产品是次品}. \end{cases}$$

则 X_i 的概率分布为

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$i=1,2,3.$

因为 $X = X_1 + X_2 + X_3$，所以由数学期望的线性可加性，有

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{3}{2}.$$

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于 $\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$ 构成完备事件组，因此根据全概率公式，有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{6}E(X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

十二【分析】本题表面上是一数理统计问题，实际上考查了求分布函数、随机变量的函数求分布和概率密度以及数学期望的计算等多个知识点.将数理统计的概念与随机变量求分布与数字特征结合起来是一种典型的命题形式.

求分布函数 $F(X)$ 是基本题型：求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$，可作为多维相互独立且同分布的随机变量函数求分布函数，直接用定义即可；是否具有无偏性，只需检验 $E\hat{\theta}=\theta$ 是否成立.

【详解】(1) 由连续型随机变量分布函数的定义，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$$

(2) 由题给 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.，有

$$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\le x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le x\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}$$

$$=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$$

(3) 由连续型随机变量概率密度是分布函数在相应区间上的微分得 $\hat{\theta}$ 概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{dF_{\hat{\theta}}(x)}{dx}=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, x>\theta,\\ 0, \quad x\le\theta.\end{cases}$$

因为 $$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}\ne\theta,$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 __________.

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$________.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 ________.

(4) 欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为________.

(5) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$ _________

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ________.

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$，排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

(8) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$，使得 (　　)

(A) $f(x)$ 在(0，δ) 内单调增加.　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$.

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$.

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是 (　　)

(A)　若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(C) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 则存在非零常数$\lambda$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

(10) 设$f(x)$为连续函数，$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于 ( )

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

(11) 设A是3阶方阵,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C, 则满足$AQ = C$的可逆矩阵Q为 ( )

(A)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (D)$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(12) 设A, B为满足$AB = 0$的任意两个非零矩阵，则必有 ( )

(A) A的列向量组线性相关，B的行向量组线性相关.
(B) A的列向量组线性相关，B的列向量组线性相关.
(C) A的行向量组线性相关，B的行向量组线性相关.
(D) A的行向量组线性相关，B的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$)，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$，若$P\{|X| < x\} = \alpha$，则$x$等于( )

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

(14) 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$独立同分布，且其方差为$\sigma^2 > 0$. 令$Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，则( )

(A) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $Cov(X_1, Y) = \sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 12 分)

设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为$k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(注 kg 表示千克，kg/h 表示千米/小时.)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中$\sum$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程$x^n+nx-1=0$，其中n为正整数. 证明此方程存在惟一正实根x_n，并证明当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设$z=z(x,y)$是由$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$确定的函数，求$z=z(x,y)$的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A , B 为随机事件，且 $P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B|A) = \dfrac{1}{3}, P(A|B) = \dfrac{1}{2}$ ，令

$$X = \begin{cases} 1, & A\text{发生}, \\ 0, & A\text{不发生}; \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & B\text{发生}, \\ 0, & B\text{不发生}. \end{cases}$$

求：(I)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\beta) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^{\beta}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

求：(I) β 的矩估计量；　　(II) β 的最大似然估计量.

2004年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】$y = x - 1$

【详解】**方法1**：因为直线$x+y=1$的斜率$k_1=-1$，所以与其垂直的直线的斜率k_2满足

$k_1k_2=-1$，所以$-k_2=-1$，即$k_2=1$，

曲线$y=\ln x$上与直线$x+y=1$垂直的切线方程的斜率为1，即

$y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$，得$x=1$，把$x=1$代入$y=\ln x$，得切点坐标为$(1,0)$，根据点斜式公式得所求切线方程为：$y-0=1\cdot(x-1)$，即$y=x-1$

方法2：本题也可先设切点为$(x_0,\ln x_0)$，曲线$y=\ln x$过此切点的导数为$y'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}=1$，

得$x_0=1$，所以切点为$(x_0,\ln x_0)=\left(1,0\right)$，由此可知所求切线方程为$y-0=1\cdot(x-1)$，

即 $y=x-1$.

(2)**【答案】**$\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

【详解】 先求出$f'(x)$的表达式，再积分即可.

方法1：令$e^x=t$，则$x=\ln t$，$e^{-x}=\dfrac{1}{t}$，于是有$f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，即$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

两边积分得 $f(x)=\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}dx=\int \ln xd\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

利用初始条件$f(1)=0$，代入上式：$f(1)=\dfrac{1}{2}(\ln 1)^2+C=C=0$，即$C=0$，故所求函数为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

方法2：由$x=\ln e^x$，所以$f'(e^x)=xe^{-x}=\ln e^x\cdot e^{-x}=\dfrac{\ln e^x}{e^x}$，所以$f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.下同.

(3)【答案】$\dfrac{3}{2}\pi$

【详解】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分.

L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，用参数式可表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta: 0 \to \frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sqrt{2}\cos\theta d\sqrt{2}\sin\theta-2\sqrt{2}\sin\theta d\sqrt{2}\cos\theta\right]$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\cos^2\theta+4\sin^2\theta]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+2\sin^2\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2+2\sin^2\theta]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\pi+\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d2\theta=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin 0\right)=\frac{3\pi}{2}-0=\frac{3\pi}{2}$$

(4)【答案】$y=\dfrac{c_1}{x}+\dfrac{c_2}{x^2}$

【详解】欧拉方程的求解有固定方法，作变量代换$x=e^t$化为常系数线性齐次微分方程即可.

令$x=e^t$，有$t=\ln x,\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\underline{\underline{d\left(uv\right)=vdu+udv}}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

代入原方程：$x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)+4x\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}+2y=0$，整理得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0,$$

此式为二阶齐次线性微分方程，对应的特征方程为$r^2+3r+2=0$，所以特征根为：

$r_1=-1,r_2=-2$，$r_1\neq r_2$，所以$\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$的通解为

$$y=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

又因为$x=e^t$，所以$e^{-t}=\frac{1}{x},e^{-2t}=\frac{1}{x^2}$，代入上式得

$$y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}.$$

(5)【答案】$\frac{1}{9}$

【详解】

方法 1：已知等式两边同时右乘A，得$ABA^*A=2BA^*A+A$，

由伴随矩阵的运算规律：$A^*A=AA^*=|A|E$，有$AB|A|=2B|A|+A$，而

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3,$$

于是有 $3AB=6B+A$，移项、合并有 $(3A-6E)B=A$，再两边取行列式，由方阵乘积的行列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，有

$$|(3A-6E)B|=|3A-6E||B|=|A|=3,$$

而 $$|3A-6E|=\left|3\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}6&3&0\\3&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}(-3)\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=(-3)\times3\times3=27,$$

故所求行列式为$|B|=\frac{|A|}{|3A-6E|}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

方法 2：由题设条件$ABA^*=2BA^*+E$，得 $ABA^*-2BA^*=(A-2E)BA^*=E$

由方阵乘积行的列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，故两边取行列式，有 $|(A-2E)BA^*|=|A-2E||B||A^*|=|E|=1$

其中$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3;$$

由伴随矩阵行列式的公式：若A是n阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

所以，$\left|A^*\right| = \left|A\right|^{3-1} = \left|A\right|^2 = 9$ ； 又 $\left|A-2E\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

故$\left|B\right| = \dfrac{1}{\left|A-2E\right|\left|A^*\right|} = \dfrac{1}{9}$.

(6)【答案】$\dfrac{1}{e}$

【详解】本题应记住常见指数分布等的期望与方差的数字特征，而不应在考试时再去推算. 指数分布的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 若 x > 0 \\ 0 & 若 x \le 0 \end{cases}，其方差 DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

于是，由一维概率计算公式，$P\left\{a \le X \le b\right\} = \int_a^b f_X(x)dx$，有

$$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

二、选择题

(7)【答案】 (B)

【详解】

方法 1：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} \xlongequal{洛必达} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2} = 0$，则$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，

根据题设，排在后面的是前一个的高阶无穷小，所以可排除(C),(D)选项，

$$又 \lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt} \xlongequal{洛必达} \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$$

$$\xlongequal{等价无穷小替换} \frac{1}{4}\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2} = \infty，$$

可见γ是比β低阶的无穷小量，故应选(B).

方法 2：用x^k(当$x\to0$时)去比较.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} \xlongequal{洛} \lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取 $k=1$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos t^2}{x^0}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+}\cos t^2}{\lim\limits_{x\to 0^+}x^0}=1$，

所以(当 $x\to 0^+$ 时) α 与 x 同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{kx^{k-3}}$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取 $k=3$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\beta}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x}{3x^{3-2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x}{3x}=\dfrac{2}{3}$，

所以(当 $x\to 0^+$ 时) β 与 x^3 同阶.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取 $k=2$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2\cdot 2x^{2-1}}=\dfrac{1}{4}$，

所以(当 $x\to 0^+$ 时) γ 与 x^2 同阶.因此，后面一个是前面一个的高阶小的次序是 α,γ,β，选(B).

(8)【答案】 (C)

【详解】函数 $f(x)$ 只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B).

由导数的定义，知 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

根据极限的保号性，知存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$.

即当 $x\in(-\delta,0)$ 时， $x<0$ ，有 $f(x)<f(0)$；而当 $x\in(0,\delta)$ 时， $x>0$ 有 $f(x)>f(0)$.

(9)【答案】 (B)

【详解】 对于敛散性的判定问题，若不便直接推证，往往可通过反例排除找到正确选项.

方法 1：排除法. 取 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}\begin{cases}\text{收敛，当}p>1\\\text{发散，当}p\le 1\end{cases}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散，排除 A，D;

又取 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，因为 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛，当}p>1\\\text{发散，当}p\le 1\end{cases}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收

敛，但$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$，排除(C)，故应选(B).

方法 2：证明(B)正确. $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$.因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，

由比较判别法的极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也发散，故应选(B)..

(10)【答案】(B)

【详解】在应用变限的积分对变量x求导时，应注意被积函数中不能含有变量x：

$$[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt]' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

否则，应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量x换到积分号外或积分线上.

方法 1：交换积分次序,使得只有外面这道积分限中才有t，其他地方不出现t

由$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$知：$\begin{cases} y < x < t \\ 1 < y < t \end{cases}$，交换积分次序$\begin{cases} 1 < x < t \\ 1 < y < x \end{cases}$，得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t [\int_1^x f(x)dy]dx = \int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t) = f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2) = f(2)$，故应选(B).

方法 2：设$\Phi'(x) = f(x)$，于是

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t dy \int_y^t \Phi'(x)dx = \int_1^t dy \int_y^t d\Phi(x)$$

$$= \int_1^t [\Phi(t) - \Phi(y)]dy = \Phi(t)(t-1) - \int_1^t \Phi(y)dy$$

所以 $F'(t) = \Phi'(t)(t-1) + \Phi(t) - \Phi(t) = f(t)(t-1),$

所以 $F'(2) = f(2)$，选(B).

(11)【答案】(D)

【详解】由题设，将A的第 1 列与第 2 列交换，即

$$AE_{12} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,$$

将B的第 2 列加到第 3 列，即

$$B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=AQ.$$

故$Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，应选(D).

(12)【答案】(A)

【详解】**方法 1**：由矩阵秩的重要公式：若 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵，如果 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，由 $AB=0$ 知，$r(A)+r(B)\le n$，其中 n 是矩阵 A 的列数，也是 B 的行数

因 A 为非零矩阵，故 $r(A)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(B)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵，故 $r(B)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(A)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 A 的列向量组线性相关.

故应选(A).

方法 2：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，将 B 按列分块，由 $AB=0$ 得，

$$AB=A\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right]=0,A\beta_i=0,i=1,2,\cdots,s.$$

因 B 是非零矩阵，故存在 $\beta_i\ne 0$，使得 $A\beta_i=0$. 即齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件 $r(A)<n$，知 $r(A)<n$. 所以 A 的列向量组线性相关.

又 $(AB)^T=B^TA^T=0$，将 A^T 按列分块，得

$$B^TA^T=B^T[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T]=0,B^T\alpha_i^T=0,i=1,2,\cdots,m.$$

因 A 是非零矩阵，故存在 $\alpha_i^T\ne 0$，使得 $B^T\alpha_i^T=0$，即齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解的充要条件，知 B^T 的列向量组线性相关，由 B^T 是由 B 行列互换得到的，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

方法 3：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，将 A 按列分块，记 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\end{pmatrix}$

$$\text{由 } AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$=\left(b_{11}A_1+\cdots+b_{n1}A_n, \quad \cdots \quad ,b_{1s}A_1+\cdots+b_{ns}A_n\right)=0 \qquad (1)$$

由于 $B\neq 0$，所以至少有一个 $b_{ij}\neq 0$ ($1\le i\le n, 1\le j\le s$)，又由(1)知，$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{ij}A_i+\cdots+b_{nj}A_n=0$，所以 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性相关. 即 A 的列向量组线性相关.

(向量组线性相关的定义：如果对 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in R^n$，有 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in R$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.)

又将 B 按行分块，记 $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$，同样，

$$AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2n}B_n \\ \cdots \\ a_{m1}B_1+a_{m2}B_2+\cdots+a_{mn}B_n \end{pmatrix}=0$$

由于 $A\neq 0$,则至少存在一个 $a_{ij}\neq 0$ ($1\le i\le m, 1\le j\le n$)，使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{in}B_n=0,$$

由向量组线性相关的定义知，$B_1, B_2, \cdots, B_m$ 线性相关，即 B 的行向量组线性相关，

故应选(A).

方法 4：用排除法.取满足题设条件的 A, B.

取 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq 0, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0,$

A 的行向量组，列向量组均线性相关，但 B 的列向量组线性无关，故(B)，(D)不成立.

又取 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq 0, B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$，有 $AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$，

A 的行向量组线性无关，B 的列向量组线性相关，故(C)不成立.

由排除法知应选(A).

(13)【答案】C

【详解】利用正态分布概率密度函数图形的对称性，对任何 $x>0$ 有

$P\{X>x\}=P\{X<-x\}=\dfrac{1}{2}P\{|X|>x\}$.或直接利用图形求解.

方法 1：由标准正态分布概率密度函数的对称性知，$P\{X<-u_\alpha\}=\alpha$，于是

$$1-\alpha=1-P\{|X|<x\}=P\{|X|\geq x\}=P\{X\geq x\}+P\{X\leq -x\}=2P\{X\geq x\}$$

即有　$P\{X\geq x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，可见根据分位点的定义有 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，故应选(C).

方法 2：

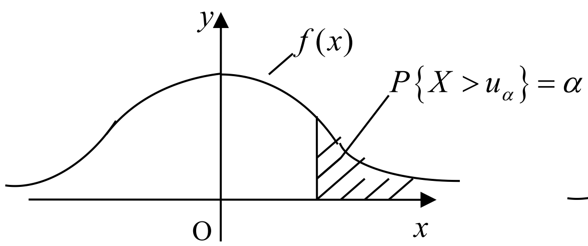


图 1

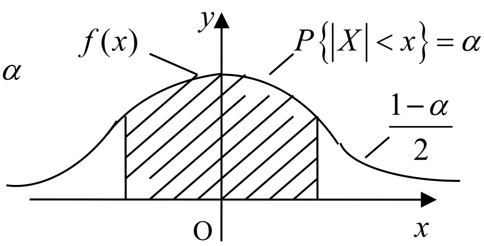


图 2

如图 1 所示题设条件. 图 2 显示中间阴影部分面积 α，$P\{|X|<x\}=\alpha$.两端各余面积 $\dfrac{1-\alpha}{2}$，所以 $P\{X<u_{\frac{1-\alpha}{2}}\}=\alpha$，答案应选(C).

(14)【答案】A.

【详解】由于随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，所以必有：

$$Cov(X_i,X_j)=\begin{cases}\sigma^2, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

又　$D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\,2}D(X_i)=\sigma^2\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\,2}$

下面求$Cov(X_1,Y)$和$D(X_1+Y)$.

而$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 故本题的关键是将$Y$中的$X_1$分离出来，再用独立性来计算.

对于选项(A)：

$$Cov(X_1,Y)=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Cov(X_1,X_i)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2$$

所以(A)对，(B)不对.为了熟悉这类问题的快速、正确计算. 可以看本题(C),(D)选项.

因为X与Y独立时，有$D(X\pm Y)=D\left(X\right)+D\left(Y\right)$. 所以，这两个选项的方差也可直接计算得到：

$$D(X_1+Y)=D(\frac{1+n}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n)=\frac{(1+n)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2+3n}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2,$$

$$D(X_1-Y)=D(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2-2n}{n^2}\sigma^2=\frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

所以本题选 (A)

三、解答题

(15)【详解】根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

方法 1：因为函数$f\left(x\right)=\ln^2 x$在$[a,b]\subset\left(e,e^2\right)$上连续，且在$\left(a,b\right)$内可导，所以满足拉格朗日中值定理的条件，

对函数$f\left(x\right)=\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\left(\ln^2\xi\right)'\left(b-a\right)=\frac{2\ln\xi}{\xi}\left(b-a\right),\ e<a<\xi<b<e^2$$

下证：$\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$.

设$\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当$t>e$时，$1-\ln t<1-\ln e=0$ ，即$\varphi'(t)<0$,

所以$\varphi(t)$单调减少，又因为$\xi<e^2$，所以$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}，得 \frac{2\ln\xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}$$

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 2：利用单调性， 设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$，证 $\varphi(x)$ 在区间 $\left(e, e^2\right)$ 内严格单调增即可.

$$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}，(\varphi'(e^2) = 2\frac{\ln e^2}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0，)\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}，$$

当 $x > e$ 时，$1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$，$\varphi''(x) < 0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少，从而当 $e < x < e^2$ 时，

$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = 0$，即当 $e < x < e^2$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加.

因此当 $e < x < e^2$ 时，$\varphi(b) > \varphi(a)$，即 $\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$，

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 3：设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a)$，则 $\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$，$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$，

$\Rightarrow x > e$ 时，$1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$，得 $\varphi''(x) < 0$，

$\Rightarrow \varphi'(x)$ 在 (e, e^2) 上单调减少，从而当 $e < x < e^2$ 时，$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0$，

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 (e, e^2) 上单调增加. 从而当 $e < a < x \le b < e^2$ 时，$\varphi(x) > \varphi(a) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(b) > 0$，即 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16)【详解】 本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可.

方法 1：由题设，飞机质量 $m = 9000kg$，着陆时的水平速度 $v_0 = 700km/h$. 从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$，则 $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$. 又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$.

由以上两式得 $dx = -\frac{m}{k}dv$，积分得 $x(t) = -\frac{m}{k}v + C.$

由于 $v(0) = v_0, x(0) = 0$，所以 $x(0) = -\frac{m}{k}v_0 + C = 0.$ 故得 $C = \frac{m}{k}v_0$，

从而 $x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t)).$

当 $v(t) \to 0$ 时， $x(t) \to \frac{mv_0}{k} = \frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6} = 1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

方法 2： 根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$，

分离变量：$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt$，两端积分得：$\ln v=-\dfrac{k}{m}t+C_1$，

通解：$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$，解得 $C=v_0$，故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机在跑道上滑行得距离相当于滑行到 $v\to 0$，对应地 $t\to+\infty$．于是由 $dx=vdt$，有

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

或由 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\dfrac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为

当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{kv_0}{m}=1.05(km).$

方法 3： 由 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$ ，$v=\dfrac{dx}{dt}$，化为 x 对 t 的求导，得 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}$，变形为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0，\quad v(0)=x'(0)=v_0,x(0)=0$$

其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-\dfrac{k}{m}$，故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x\big|_{t=0}=0,v\big|_{t=0}=\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$，得 $C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$,

于是 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$. 当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km .

(17)【详解】这是常规题，加、减曲面片高斯公式法，转换投影法，逐个投影法都可用.

方法 1： 加、减曲面片高斯公式. 取 $\sum_1$ 为 xoy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 $\sum$ 与 $\sum_1$ 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=I_1-I_2$$

由高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分段光滑的闭曲面 $\sum$ 所围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

这里 $P=2x^3,Q=2y^3,R=3(z^2-1)$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}=6x^2,\dfrac{\partial Q}{\partial y}=6y^2,\dfrac{\partial R}{\partial z}=6z^2$，

所以 $\quad I_1=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dv$

利用柱面坐标：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,dv=rdrd\theta dz$，有：

$$I_1=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dxdydz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz$$

$$=12\pi\int_0^1 r\left(\frac{z^2}{2}+r^2z\right)_0^{1-r^2}dr=12\pi\int_0^1 r\,\frac{\left(1-r^2\right)^2}{2}+r^3\left(1-r^2\right)dr$$

$$=12\pi\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(1-r^2\right)^3}{3}+\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)_0^1=12\pi\cdot\frac{1}{6}=2\pi$$

记 D 为 $\sum_1$ 在 xoy 平面上的投影域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，则 $z=0$，$dz=0$，

又 $\sum_1$ 为 $z=0(x^2+y^2\le 1)$ 的下侧，从而：

$$I_2=\iint_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint_D 3(0-1)dxdy=3\iint_D dxdy=3\pi$$

(其中 $\iint_D dxdy$ 为半径为 1 圆的面积，所以 $\iint_D dxdy=\pi\cdot 1^1=\pi$)

故 $\quad I=I_1-I_2=2\pi-3\pi=-\pi.$

方法 2：用转换投影法：若 $z=z(x,y)$，z 对 x,y 具有一阶连续偏导数，则

$$dzdx=-\frac{\partial z}{\partial x}dxdy,\ dydz=-\frac{\partial z}{\partial y}dxdy\ .$$

曲面 $\sum_1: z=1-x^2-y^2,(x^2+y^2\le 1),\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$，由转换投影公式

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[2x^3(-\frac{\partial z}{\partial x})+2y^3(-\frac{\partial z}{\partial y})+3(z^2-1)]dxdy$$

$$=\iint_{D}[4x^4+4y^4+3(1-x^2-y^2)^2-3]dxdy$$

利用极坐标变换：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi, dxdy=rdrd\theta$，所以

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[4r^4\cos^4\theta+4r^4\sin^4\theta+3(1-r^2)^2-3]rdr$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[4r^5\cos^4\theta+4r^5\sin^4\theta+3(r^5-2r^3)]dr$$
$$=\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{4}{6}\left[\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta\right]d\theta-\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{4}{6}\left[1-2\cos^2\theta\sin^2\theta\right]d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4}{6}\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2 2\theta d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\theta\right)d\theta-2\pi$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-2\pi-\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta=-\pi-\frac{1}{24}\sin 4\theta\Big|_0^{2\pi}$$
$$=-\pi-0=-\pi$$

或$\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta)d\theta$ 直接利用公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$及

$$\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta$$

则 $\int_0^{2\pi}(\frac{4}{6}\cos^4\theta+\frac{4}{6}\sin^4\theta)d\theta=2\cdot 4\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$

所以，原式$=\pi-2\pi=-\pi$

(18)【分析】利用零点定理证明存在性，利用单调性证明惟一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

零点定理：设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，那么在开区间$\left(a,b\right)$内至少存在一点$\xi$，使$f\left(\xi\right)=0$；单调性：设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导，如果在$\left(a,b\right)$内$f'\left(x\right)>0$，那么函数$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上单调增加；比较审敛

法：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数，且$u_n \le v_n$，若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

【证明】记 $f_n(x)=x^n+nx-1$，则 $f_n(x)$ 是连续函数，由 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n>0$，对照连续函数的零点定理知，方程$x^n+nx-1=0$存在正实数根$x_n\in(0,1)$.

当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，可见 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故方程 $x^n+nx-1=0$存在惟一正实数根x_n.

由$x^n+nx-1=0$与$x_n>0$知$0<x_n=\dfrac{1-x_n^n}{n}<\dfrac{1}{n}$，故当$\alpha>1$时，函数$y=x^\alpha$单调增，所以$0<x_n^\alpha<(\dfrac{1}{n})^\alpha$. 而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$收敛，所以当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$收敛.

(19) 【分析】根据极值点存在的充分条件：

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某领域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则$z=f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$时具有极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$时，可能有极值，也可能没有极值，需另外讨论.

所以对照极值点存在的充分性定理，先求出一阶偏导，再令其为零确定极值点，接下来求函数二阶偏导，确定是极大值还是极小值，并求出相应的极值.

求二元隐函数的极值与求二元显函数的极值的有关定理是一样，差异仅在于求驻点及极值的充分条件时，用到隐函数求偏导数.

【详解】因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以

两边对x求导：$2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$， ①

两边对y求导：$-6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$. ②

根据极值点存在的充分条件，令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x-3y=0\\ -3x+10y-z=0\end{cases}$，故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

对照极值点存在的充分条件，为判别两点是否为极值点，再①分别对 x,y 求偏导数，②分别对 x,y 求偏导数

①式对 x 求导： $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

②式对 x 求导：$-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

①式对 y 求导： $-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

②式对 y 求导： $20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，

将 $\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 代入，于是 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$， $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点(9,3)是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，将 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 代入，于是 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{1}{6}$，

$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\dfrac{1}{2}$， $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\dfrac{5}{3}$，可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，

又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，从而点(-9, -3)是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

(20)【详解】

方法 1： 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B$$

对 $|B|$ 是否为零进行讨论：

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$. 故此方程组有非零解，把 $a=0$ 代入原方程组，得其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \qquad (*)$$

此时，$r(A)=1$，故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量. 选 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，将他们的 $n-1$ 组值 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 分别代入 $(*)$ 式，得基础解系

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\ \ \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}，\text{其中 } k_1,\cdots,k_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B\rightarrow\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1\text{行}}\begin{bmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

可知 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理, 知方程组也有非零解，把 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 代入原方程组，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有 $n-r=n-(n-1)=1$ 个自由未知量.选 x_2 为自由未量，取 $x_2=1$，由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x=k\eta$，

其中 k 为任意常数.

方法 2：计算方程组的系数行列式：

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\underline{\underline{\text{矩阵加法}}}\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}$$

$$=aE+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\triangleq aE+Q,$$

下面求矩阵 Q 的特征值：

$$|\lambda E-Q|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -2 & \lambda-2 & -2 & \cdots & -2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & -n & -n & \cdots & \lambda-n\end{vmatrix}\underline{\underline{\substack{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}\\(i=2,3,\cdots,n)}}}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\substack{i\text{列}\times(i)+1\text{列}\\(i=2,3,\cdots,n)}}}\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{n(n+1)}{2} & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

则 Q 的特征值 $0,\cdots,0,\dfrac{n(n+1)}{2}$，由性质：若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$，因此对任意多项式 $f(x)$， $f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故，A 的特征值为 $a,a,\cdots,a+\dfrac{n(n+1)}{2}$，由特征值的乘积等于矩阵行列式的值，得 A 行列式 $|A|=(a+\dfrac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 n 阶矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$. 可知，当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ .$$

故方程组的同解方程组为

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$

此时，$r(A)=1$，故方程组有$n-r=n-1$个自由未知量.选$x_2,x_3,\cdots,x_n$为自由未知量，将他们的$n-1$组值$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$分别代入$(*)$式， 由此得基础解系为

$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$， $\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T$, $\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$,

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中$k_1,\cdots,k_{n-1}$为任意常数.

当$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时，

$$B\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1\text{行}}\begin{bmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

即 $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，其同解方程组为$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$

此时，$r(A)=n-1$，故方程组有$n-r=n-(n-1)=1$个自由未知量. 选x_2为自由未量，取$x_2=1$，由此得基础解系为$\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为$x=k\eta$，其中k为任意常数.

(21)【详解】 A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}\underline{\underline{2\text{行}\times(-1)+1\text{行}}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & -(\lambda-2) & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{提出1行公因数}}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1\text{行}+2\text{行}}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 3\\ 0 & -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 3\\ -a-1 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)]=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

已知 A 有一个二重特征值，有两种情况，(1) $\lambda=2$ 就是二重特征值，(2)若 $\lambda=2$ 不是二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 是一个完全平方

(1) 若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$, 解得 $a=-2$. 由

$$\left|\lambda E-A\right|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-2))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$$

求得 A 的特征值为 2,2,6, 由

$$2E-A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{1行的1倍加到3行}]{\text{1行(-1)倍加到2行,}}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

知秩 $\left(2E-A\right)=1$，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量的个数为 $n-r=3-1=2$，等于 $\lambda=2$ 的重数. 由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 从而 A 可相似对角化.

(2) 若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$. 当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，由

$$\left|\lambda E-A\right|==(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-\frac{2}{3}))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+16)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$$

知 A 的特征值为 2，4，4，由

$$4E-A=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{1行}\times\frac{1}{3}+\text{3行}}\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知秩 $\left(4E-A\right)=2$，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量有 $n-r=3-2=1$, 不等于 $\lambda=4$ 的重数，则由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 知 A 不可相似对角化.

(22)【分析】本题尽管难度不大，但考察的知识点很多，综合性较强. 通过随机事件定义随机变量或通过随机变量定义随机事件，可以比较好地将概率论的知识前后连贯起来，这种命题方式值得注意.

先确定 (X,Y) 的可能取值，再求在每一个可能取值点上的概率，而这可利用随机事件的运算性质得到，即得二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；利用联合概率分布可求出边缘概率分布，进而可计算出相关系数.

【详解】(I) 由于 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12}$，所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$,

利用条件概率公式和事件间简单的运算关系，有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

(或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$)，故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) X,Y 的概率分布分别为

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

所以 X,Y 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

由 $0-1$ 分布的数学期望和方差公式，则

$$EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6}，\ DX=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}，\ DY=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=0\cdot P\left\{XY=0\right\}+1\cdot P\left\{XY=1\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{1}{12},$$

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(23)【分析】本题是基础题型，难度不大，但计算量比较大，实际做题时应特别注意计算的

准确性.先由分布函数求出概率密度，再根据求矩估计量和最大似然估计量的标准方法进行讨论即可. 似然函数的定义：$L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$

【详解】X 的概率密度为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$$

(I) 矩估计. 由数学期望的定义：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}. \qquad \text{其中} \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

(II) 最大似然估计. 设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，$L(\beta)$ 与 $\ln L(\beta)$ 在相同的 β 点取得最大值；

所以等式两边取自然对数，得 $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

两边对 β 求导，得 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

令 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$，可得 $\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

解得 β 的最大似然估计值为：$\widehat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

从而得，β 的最大似然估计量为：$\hat{\beta} = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 _____

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为.______

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=$_______________.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$__________________.

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$____.

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则

$P\{Y=2\}=$ __________ .

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(   )

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有(   )

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数.　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有( )

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(10) 设有三元方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程( )

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数和$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.

(11) 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是( )

(A) $\lambda_1\neq 0$.　(B) $\lambda_2\neq 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.

(12) 设A为n ($n\geq 2$)阶可逆矩阵，交换A的第1行与第2行得矩阵B，A^*,B^*分别为A，B的伴随矩阵，则( )

(A) 交换A^*的第1列与第2列得B^*.　(B) 交换A^*的第1行与第2行得B^*.

(C) 交换A^*的第1列与第2列得$-B^*$.　(D) 交换A^*的第1行与第2行得$-B^*$.

(13) 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为( )

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) $a=0.2,b=0.3$　(B) $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$　(D) $a=0.1,b=0.4$

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则( )

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

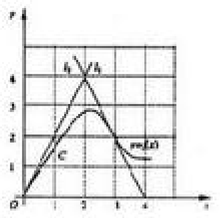
设 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$，$[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1 + x^2 + y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1 + \dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x)dx.$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明：

(I)存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$；

(II)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta) f'(\zeta) = 1.$

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(I)证明：对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$；

(II)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值；

(II) 求正交变换 $x = Qy$，把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形；

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3)$=0 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c), a,b,c$ 不全为零,矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$($k$ 为常数)，且 $AB = 0$，求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, \qquad \text{其他}. \end{cases}$

求：(I) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1,2,\cdots,n.$

求：(I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1,2,\cdots,n$； (II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

2005年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$

【详解】由求斜渐近线公式 $y=ax+b$ (其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$)，得：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4},$$

所以所求斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$

(2)【答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解，有公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$ (其中 C 是常数).

将原方程等价化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln xdx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2},$$ (其中 C 是常数)

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

(3)【答案】 $\sqrt{3}/3$

【详解】设 $f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,$\vec{l^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为给定的向量 $\vec{l}$ 的单位向量,则 $f(x,y,z)$ 沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数计算公式为 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$.

因为$u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$，且向量$\vec{n}$的

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是所求方向导数为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(4)【答案】$(2-\sqrt{2})\pi R^3$

【详解】如果设函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数,则有：

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy，$$

其中$\sum$是Ω的整个边界曲面的外侧.

以Ω表示由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的有界闭区域，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$$

利用球面坐标得

$$\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=3\int_0^R\rho^2d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})R^3=(2-\sqrt{2})\pi R^3$$

(5)【答案】2

【详解】

方法 1：因为$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$， $(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，

$$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},$$

故 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$,

记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2.$$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{=\!=\!=\!=}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{[3]-2[2]}{=\!=\!=\!=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|\overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{=\!=\!=\!=}}2|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|\overset{[1]-[2]}{=\!=\!=\!=}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

又因为$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故$|B|=2|A|=2$.

(6)【答案】$\dfrac{13}{48}$

【详解】 由全概率公式：

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$
$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$

X 表示从数 1,2,3,4 中任取一个数，故 X 是等可能取到 1,2,3,4，所以$P(X=i)=\dfrac{1}{4}$，$i=1,2,3,4$

而Y表示从$1,2,\cdots,X$中任取一个数，也就是说Y是等可能取到$1,2,\cdots,X$

也就是说Y在X的条件下等可能取值，即

$P\{Y=2|X=1\}=0$ (X 取 1 的条件下，Y 取 2 是不可能事件)

$P\{Y=2|X=2\}=\dfrac{1}{2}$ (X 取 2 的条件下，Y 在 1，2 等可能取值)

$P\{Y=2|X=3\}=\dfrac{1}{3}$ (X 取 3 的条件下，Y 在 1，2，3 等可能取值)

$P\{Y=2|X=4\}=\dfrac{1}{4}$ (X 取 4 的条件下，Y 在 1，2，3，4 等可能取值)

故 $$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$
$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}=\frac{1}{4}\times(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{13}{48}.$$

二、选择题

(7)【答案】C

【详解】分段讨论，并应用夹逼准则，

当$|x|<1$时，有$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \le \sqrt[n]{2}$，命$n \to \infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$；

当$|x|>1$时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}|x|^3$，命$n\to\infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3(\dfrac{1}{|x|^{3n}}+1)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ \left|x^3\right|, & |x|\ge 1\end{cases}$

再讨论$f(x)$的不可导点. 按导数定义，易知$x=\pm 1$处$f(x)$不可导，故应选(C).

(8)【答案】A

【详解】

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数$f(x)$的任一原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且$F'(x)=f(x)$.

当$F(x)$为偶函数时，有$F(-x)=F(x)$，于是$F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即$-f(-x)=f(x)$，亦即$f(-x)=-f(x)$，可见$f(x)$为奇函数;

反过来，若$f(x)$为奇函数，则$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$，令$t=-k$，则有$dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_0^x f(-k)dk+C=\int_0^x f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令$f(x)=1$，则取$F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令$f(x)=x$， 则取$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9)【答案】B

【详解】因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(10)【答案】D

【详解】隐函数存在定理：设 $F(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某领域内具有连续的一阶偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.则存在点 M_0 的某邻域,在此邻域内由方程 $F(x,y,z)=0$ 可以确定唯一的连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $z(x_0,y_0)=z_0$,且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\left.\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}\right|_{M_0}$$

同理，如果 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_y'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,可确定 $y=y(x,z)$ 满足 $y_0=y(x_0,z_0)$；

$F(x_0,y_0,z_0)=0,F_x'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,可确定 $x=x(y,z)$ 满足 $x_0=x(y_0,z_0)$.

本题中可令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，则

$$F_x'=y+e^{xz}z,\quad F_y'=x-\frac{z}{y},\quad F_z'=-\ln y+e^{xz}x,$$

所以 $F_x'(0,1,1)=2\neq 0$，$F_y'(0,1,1)=-1\neq 0$，$F_z'(0,1,1)=0$.

由于 $F_z'(0,1,1)=0$，所以由隐函数存在定理知，不一定能确定具有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，所以排除(A)、(B)、(C)，而 $F_x'(0,1,1)=2\neq 0$ 和 $F_y'(0,1,1)=-1\neq 0$，所以可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故应选(D).

(11)【答案】B

【详解】

方法 1：利用线性无关的定义

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

设有数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0 \Rightarrow (k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0.$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0, \\ k_2\lambda_2=0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$ 时，方程只有零解，则 $k_1=0,k_2=0$，此时 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2\neq 0$ (否则， α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法 2：将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由于 $\left(\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，知 α_1,α_2 线性无关. 若 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则 $r\left(\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=2$，则

$$2=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\leq \min\left\{r\left(\alpha_1,\alpha_2\right), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\}\leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\leq 2,$$

故 $2\leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\leq 2$ 从而 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$，则 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，又 α_1,α_2 线性无关，则

$$r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=2,$$

则

$$r\left(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)=2$$

从而α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$. 故应选(B).

方法 3：利用矩阵的秩

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

因$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，又

$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，故$\alpha_1$，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=2$

又因为 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)\overset{\text{将}\alpha_1\text{的}-\lambda_1\text{倍加到第2列}}{=}\left(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2\right)$

则$r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$ (若$\lambda_2=0$，与$r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2$矛盾)

方法 4：利用线性齐次方程组

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，

$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关

$\Leftrightarrow\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$线性无关

$\Leftrightarrow\left|\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right|\neq 0$，

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)X=0$只有零解，又$\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$只有零解

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2$线性无关时$\left(\alpha_1,\alpha_2\right)Y=0$只有零解，故$Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$，只有零解，

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=0$ 的系数矩阵是个可逆矩阵，

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2 \neq 0$，故应选(B)

方法 5：由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，α_1, α_2 线性无关

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

向量组$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2$ 和向量组$(\mathrm{II}): \alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$. 显然向量组$(\mathrm{II})$可以由向量组$(\mathrm{I})$线性表出；当 $\lambda_2 \neq 0$ 时，不论 λ_1 的取值如何，向量组(I)可以由向量组(II)线性表出

$$\alpha_1=\alpha_1，\quad \alpha_2=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1)+\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1+\frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1+\alpha_2)\ ,$$

从而(I)，(II)是等价向量组$\Rightarrow$当 $\lambda_2 \neq 0$ 时，$r(\alpha_1, \alpha_2)=r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$

(12)【答案】(C)

【详解】

方法 1：由题设，存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得)，使得 $E_{12}A=B$，(A 进行行变换，故 A 左乘初等矩阵)，于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E^*_{12}$，

又初等矩阵都是可逆的，故 $E_{12}^{-1}=\dfrac{E_{12}^{\ *}}{|E_{12}|}$，

又 $|E_{12}|=-|E|=-1$ (行列式的两行互换，行列式反号)，$E_{12}^{-1}=E_{12}$，故

$$B^*=A^*E^*_{12}=A^*|E_{12}|\cdot E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}\ ,$$

即 $A^*E_{12}=-B^*$,可见应选(C).

方法 2：交换 A 的第一行与第二行得 B，即 $B=E_{12}A$.

又因为 A 是可逆阵，$|E_{12}|=-|E|=-1$，故 $|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|\neq 0$，

所以 B 可逆，且 $B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}$.

又 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}, B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}$，故 $\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{A^*}{|A|}E_{12}$，又因 $|B|=-|A|$，故 $A^*E_{12}=-B^*$.

(13)【答案】B

【详解】

方法 1: 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$，有 $0.4+a+b+0.1=1$，

可知 $a+b=0.5$，又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，于是由独立的定义有：

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

而 $$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5$$

由边缘分布的定义：

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a$$

代入独立等式，得 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4,b=0.1$，

方法 2：如果把独立性理解为：$P\{X+Y=1|X=0\}=P\{X+Y=1\}$ (因为独立，所以 $\{X+Y=1\}$ 发生与 $\{X=0\}$ 发不发生没有关系)，即

$$P\{Y=1\mid X=0\}=P\{X+Y=1\}=a+b=0.5;$$

所以 $$P\{Y=0|X=0\}=1-P\{Y=1|X=0\}=1-0.5=0.5;$$

因此 $$P\{Y=1\mid X=0\}=P\{Y=0|X=0\}=0.5$$

上式两边同乘以 $P\left\{X=0\right\}$，有 $P\{Y=1\mid X=0\}P\left\{X=0\right\}=P\{Y=0|X=0\}P\left\{X=0\right\}$

由乘法公式：$P(AB)=P(A\mid B)P(B)$，上式即为 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}$

即 $0.4=a$. 又因为 $a+b=0.5$，得 $b=0.1$.

(14)【答案】D

【概念】F 分布的定义：若 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

χ^2 分布的定义：若 $Z_1,\cdots,Z_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则

$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

正态分布标准化的定义：若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

【详解】因 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，独立正态分布的线性组合也服从正态分布，故 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, \frac{1}{n})$.

将其标准化有：$\frac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,1)$，故(A)错

又 $\frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$，故(C)错;

而 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{1^2} = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$，不能断定(B)是正确选项.

又 $X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$，且 $X_1^2 \sim \chi^2(1)$ 与 $\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 相互独立，

于是 $\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2 \Big/ (n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1).$ 故应选(D).

三、解答题

(15)【详解】

方法 1：令 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$，

$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$.

于是有 $[1 + x^2 + y^2] = \begin{cases} 1, & 当（x,y) \in D_1 \\ 2, & 当（x,y) \in D_2 \end{cases}$

从而

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy = \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} 2xydxdy \text{ (二重积分对区域的可加性)}$$

$$= \iint_{D_1} xydxdy + 2\iint_{D_2} xydxdy \text{ (用极坐标把不同区域上的二重积分化为累次积分)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_1^{\sqrt[4]{2}} r^3 dr \text{ (根据牛—莱公式)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\frac{r^4}{4}\Big|_0^1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\frac{r^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta+2\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta \quad \text{(凑微分)}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

方法 2：用极坐标

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\bullet[1+r^2]dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr \text{ (根据牛—莱公式)}$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr.$$

而 $$[1+r^2]=\begin{cases}1 & 0\le r<1\\ 2 & 1\le r<\sqrt[4]{2}\end{cases}$$

从而 $$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3dr+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3dr\right) \text{ (定积分对区域的可加性)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1+2\times\frac{r^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}\right) \text{ (根据牛—莱公式)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(2-1)\right)=\frac{3}{8}$$

(16)【详解】因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right)x^{2n+2}}{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\bullet\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}x^2=x^2,$$

所以，由比值判别法知，当 $x^2<1$ 时，原级数绝对收敛，当 $x^2>1$ 时，原级数发散，因此原级数的收敛半径为 1，收敛区间为(－1,1). 另外，当 $x=\pm1$ 时由于通项极限不为零，故原幂级数在 $x=\pm1$ 处为发散的.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=S_1(x)+S_2(x)\text{ ，}\quad x\in(-1,1)$$

对 $S_1(x)$，由等比级数求和公式 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$ 得

$$S_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=-\frac{-1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\text{ ，}\quad x\in(-1,1)$$

对 $S_2(x)$，则由幂级数在收敛区间上可导并有逐项求导公式得

$$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1},x\in(-1,1)\text{，}$$

同理可得

$$S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=2\cdot\frac{1}{1+x^2}\text{ ，}\quad x\in(-1,1)$$

可得 $S_2(0)=0,S_2'(0)=0,$

所以，由牛—莱公式得

$$S_2'(x)=S_2'(0)+\int_0^x S_2''(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x,\qquad x\in(-1,1)$$

同理得

$$\begin{aligned}S_2(x)&=S_2(0)+\int_0^x S_2'(t)dt=2\int_0^x\arctan t\,dt\\&=2t\arctan t\,|_0^x-2\int_0^x td\arctan t\qquad\text{(分部积分)}\\&=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\qquad\text{(计算出微分)}\\&=2x\arctan x-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}d(1+t^2)\qquad\text{(凑微分)}\\&=2x\arctan x-\ln(1+t^2)\,|_0^x\qquad\text{(基本积分表中的公式)}\\&=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\qquad x\in(-1,1)\end{aligned}$$

从而 $$f(x)=S_1(x)+S_2(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2)\text{ ，}\quad x\in(-1,1).$$

(17)【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知 $f'(0)=2$．同理可得 $f'(3)=-2$．另外由点(3,2)是曲线 C 的

一个拐点知 $f''(3)=0$.

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x) =(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3(2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times3+1)f'(3)+(2\times0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

(18)【详解】

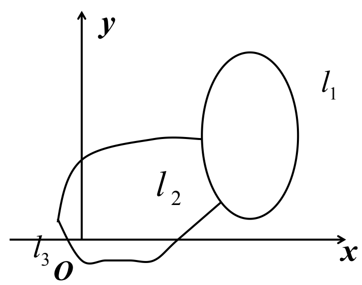
(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在[0，1]上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是 $$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

(19)【详解】

(I) 如图，将 C 分解为：$C=l_1+l_2$，另作一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接，则



$$\oint_C\frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=\oint_{l_1+l_3}\frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0.$$

(II) 设 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4},Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P,Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数，由(I)知，曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 经计算，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\bullet 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2} \qquad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5 & ④\end{cases}$$

由③得 $\varphi(y)=-y^2+c$，将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5-4cy^3=2y^5$,

所以 $c=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$.

(20)【详解】 (I) 二次型对应矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2，知 $r\left(A\right)=2<3$，所以 $|A|=0$，

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第3行展开}}}\ 2\cdot(-1)^{3\times 3}\cdot\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=2\times[(1-a)^2-(1+a)^2]=-8a=0,$$

得 $a=0$.

(II) 当 $a=0$ 时，$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$， 所以

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

两边取行列式，

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot(-1)^{3\times 3}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-1)^2-1]\quad=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-2)^2$$

令$\left|\lambda E-A\right|=0$，解得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$，故$A$有特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，根据特征值的定义，有$(2E-A)X=0$，即$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，

$r\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$，因为未知数个数为3，故$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$的基础解系中含有2个(未知数的个数-系数矩阵的秩)线性无关的解，同解方程组为$x_1-x_2=0$，选x_2,x_3为自由未知量，分别取$x_2=1,x_3=0$和$x_2=0,x_3=1$，得特征向量为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

(根据特征向量的定义，α_1,α_2即为特征值λ_1,λ_2所对应的特征向量)因为$\alpha_1\cdot\alpha_2=0$，故α_1,α_2正交.

当$\lambda_3=0$时，由$(0E-A)X=0\Rightarrow -AX=0\Rightarrow AX=0$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

对系数矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{2行-1行}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

故

$$r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2,$$

基础解系中含有 1 个(未知量的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量，同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

选 x_1 为自由未知量，取 $x_1 = 1$ (选取任意非零常数都可，因为特征向量必须为非零向量，不能选 0)，得特征向量为：$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

由于实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，故 α_1, α_2，α_3 两两正交，将 α_1, α_2，α_3 单位化，

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\|\alpha_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$，$\|\alpha_2\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$，$\|\alpha_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

取 $Q = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}$，即为所求的正交变换矩阵，故 $Q^T Q = E$，则 $Q^{-1} = Q$，令 $x = Qy$，则

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = diag\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

可化原二次型为标准形：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = (Qy)^T AQy = y^T Q^T AQy = y^T \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} y = 2y_1^2 + 2y_2^2.$$

(III) **方法 1**：由 $f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$，得 $y_1 = 0, y_2 = 0$ (因为方程中不含有 y_3)则 $y_3 = k$ (k 为任意常数). 从而所求解为：

$$x = Qy = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = 0 \cdot \eta_1 + 0 \cdot \eta_2 + k\eta_3 = k\eta_3 = \frac{k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $k' = \frac{k}{\sqrt{2}}$ 为任意常数.

方法 2：用配方法，方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_3{}^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2{}^2 = 0$，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩为 2，因为未知数的个数为 3，故它的基础解系中含有 1 个(未知数的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量，选x_1, x_3为自由未知量，取$x_1 = 1$，解得$[1, -1, 0]^T$，

所以，$f = 0$的解为$k[1, -1, 0]^T$，k为任意常数.

(21)【详解】 由$AB = 0$知，B的每一列均为$Ax = 0$的解，且$r(A) + r(B) \le 3$.(3 是A的列数或B的行数)

(1) 若$k \ne 9$，β_1, β_3不成比例，β_1, β_2成比例，则$r(B) = 2$，方程组$Ax = 0$的解向量中至少有两个线性无关的解向量，故它的基础解系中解向量的个数≥ 2，又基础解系中解向量的个数=未知数的个数$-r(A) = 3 - r(A)$，于是$r(A) \le 1$.

又矩阵A的第一行元素(a, b, c)不全为零，显然$r(A) \ge 1$，故$r(A) = 1$. 可见此时$Ax = 0$的基础解系由$3 - r(A) = 2$ 个线性无关解向量组成，β_1, β_3是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故$Ax = 0$ 的通解为：

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

(2) 若$k = 9$，则$\beta_1, \beta_2, \beta_3$均成比例，故$r(B)$ =1，从而$1 \le r(A) \le 2$. 故$r(A) = 1$或$r(A) = 2$.

①若$r(A) = 2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1是方程组$Ax = 0$的基础解系，则$Ax = 0$的通解为：$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_1$为任意常数.

②若$r(A) = 1$，则A的三个行向量成比例，因第 1 行元素(a, b, c)不全为零，不妨设$a \ne 0$，则$Ax = 0$的同解方程组为：$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$，系数矩阵的秩为 1，故基础解系由$3 - 1 = 2$个线性无关解向量组成，选x_2, x_3为自由未知量，分别取$x_2 = 1, x_3 = 0$或$x_2 = 0, x_3 = 1$，方

程组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，则其通解为$x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$为任意常数.

(22)【详解】(I)由边缘密度函数的定义：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

则关于X的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy,0<x<1,\\0,\quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}2x,0<x<1,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

关于Y的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx,0<y<2,\\0,\quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2},0<y<2,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

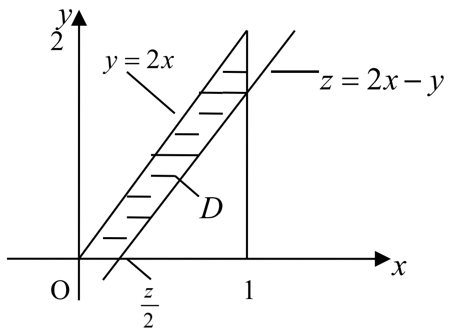
(因为$0<x<1,0<y<2x$，故x的取值范围为$\frac{y}{2}<x<1$)

(II)由分布函数的定义：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$

(1) 当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$(由定义域为$0<x<1$，$0<y<2x$，故$2X-Y>0$，则$\{2X-Y\le 0\}$是不可能事件)

(2) 当$0\le z<2$时，如图转换成阴影部分的二重积分

$$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}$$
$$=\iint\limits_{2x-y\le z}f(x,y)dxdy$$
$$=1-\iint\limits_{2x-y>z}f(x,y)dxdy$$
$$=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_0^{2x-z}dy=z-\frac{1}{4}z^2;$$



(3) 当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1$. (因X最大取1，Y最小取0，故$2X-Y$最大就只能取到2，所以$2X-Y\le 2$是必然事件)

所以分布函数为：$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$

由密度函数与分布函数的关系：$f(x)=F'(x)$

故所求的概率密度为：$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}z, & 0<z<2, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(23)【详解】由题设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且 $EX_i=0, DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$，

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i}{n}=\frac{n\times 0}{n}=0$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{DX}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

(方差的性质：$D(cX)=c^2DX$, $D(X+Y)=DX+DY$ (X,Y 独立))

$$EY_i=E(X_i-\overline{X})=EX_i-E\overline{X}=0, i=1,2,\cdots,n.$$

(根据期望的性质：$EcX=cEX, E(X+Y)=EX+EY$)

(I) $DY_i=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\dfrac{1}{n})X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j]$ (由于 X_i 与 $\overline{X}$ 不独立，所以把 $\overline{X}$ 中含有 X_i 的剔出来，则 X_i 与剩下的就相互独立)

$$=(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}DX_j=\frac{(n-1)^2\sigma^2}{n^2}+\frac{\sigma^2}{n^2}\cdot(n-1)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(方差的性质：$D(cX)=c^2DX$, $D(X+Y)=DX+DY$ (X,Y 独立))

(II)由协方差的定义：

$$Cov(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]=E(Y_1Y_n)\quad (EY_i=0\ ,\ i=1,2,\cdots,n)$$

$$=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E\overline{X}^2$$

又 $E(X_1X_n)=EX_1EX_n=0\times 0=0$ (因 X_1,X_n 独立)

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+0=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(X_1\bar{X}) = E[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_1 X_j] = E[\frac{1}{n}X_1{}^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} X_1 X_j] = \frac{1}{n}EX_1{}^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} EX_1 EX_j$$

$$= \frac{1}{n}(DX_1 + (EX_1)^2) + 0 = \frac{1}{n}(\sigma^2 + 0) = \frac{\sigma^2}{n}$$

同理　$E(X_n\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$(因 X_1与X_j 独立　$j = 2,\cdots n$)

所以　$Cov(Y_1, Y_n) = E(X_1 X_n) - E(X_1\bar{X}) - E(X_n\bar{X}) + E\bar{X}^2 = 0 - \dfrac{\sigma^2}{n} - \dfrac{\sigma^2}{n} + \dfrac{\sigma^2}{n} = -\dfrac{\sigma^2}{n}$

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(3) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ($0\le z\le 1$)的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$

________.

(4) 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$________.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则

$P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$________.

二、选择题：9-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　　)

(A) $0<dx<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y<dy<0$.　　(D) $dy<\Delta y<0$.

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于(　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$.

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.　　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

(10) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　　)

(A)若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

(B)若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$.

(C)若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

(D)若 $f_x'(x_0, y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$.

(11) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m \times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　　)

(A)若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

(B)若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性相关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

(C)若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，则 $Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性相关.

(D)若 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 线性无关，$Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$ 线性无关.

(12) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则(　　)

(A) $C = P^{-1}AP$.　　　　(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^T AP$.　　　　(D) $C = PAP^T$.

(13) 设 A, B 为随机事件，且 $P(B) > 0, P(A \mid B) = 1$，则必有(　　)

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.　　　　(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.　　　　(D) $P(A \cup B) = P(B)$.

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且

$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有(　　)

(A) $\sigma_1 < \sigma_{2.}$　　　　(B) $\sigma_1 > \sigma_{2.}$

(C) $\mu_1 < \mu_{2.}$　　　　(D) $\mu_1 > \mu_{2.}$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$,计算二重积分$I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

(16)(本题满分 12 分)

设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{\pi+1}=\sin x_n\,(n=1,2,...)$.

(I)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限 ;

(II)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^{\ 2}}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$展开成x的幂级数 .

(18)(本题满分 12 分)

设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(I) 验证$f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

(II) 若$f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数$f(u)$的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面$D=\left\{(x,y)\middle|y>0\right\}$内,函数$f(x,y)$是有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.

证明: 对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有$\oint\limits_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有3个线性无关的解

(I) 证明方程组系数矩阵A的秩$r\left(A\right)=2$;

(II) 求a,b的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设3阶实对称矩阵A的各行元素之和均为3,向量$\alpha_1=\left(-1,2,-1\right)^T,\alpha_2=\left(0,-1,1\right)^T$是线性方程组$Ax=0$的两个解.

(I) 求A的特征值与特征向量

(II) 求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^TAQ=\Lambda$.

(22)(本题满分 9 分)

随机变量x的概率密度为 $f_X\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<0 \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

令$y=X^2,F\left(x,y\right)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数.求

(I) Y的概率密度$f_Y\left(y\right)$; (II) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体X的概率密度为$f\left(x,0\right)=\begin{cases} \theta, & 0<x<1 \\ 1-\theta, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 其中θ是未知参数$\left(0<\theta<1\right)$.

$X_1,X_2...,X_{\mathrm{n}}$为来自总体$X$的简单随机样本,记$N$为样本值$x_1,x_2...,x_n$中小于1的个数,求$\theta$的最大似然估计.

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】2.

【详解】由等价无穷小替换，$x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

(2)【答案】Cxe^{-x}.

【详解】分离变量，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(1-x)}{x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = (\frac{1}{x}-1)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{1}{x}dx - \int dx$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x - x + c \quad \Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x - x + c} \quad \Rightarrow y = Cxe^{-x}$$

(3)【答案】2π

【详解】补一个曲面$\Sigma_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ z=1 \end{cases}$,取上侧，则$\Sigma_1+\Sigma$组成的封闭立体$\Omega$满足高斯公式，

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv = \oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = I$$

设 $P = x, Q = 2y, R = 3(z-1)$，则$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 1+2+3 = 6$

$\therefore I = \iiint\limits_{\Omega} 6dxdydz$ (Ω为锥面Σ和平面Σ_1所围区域)$= 6V$ (V 为上述圆锥体体积)

注：以下几种解法针对于不同的方法求圆锥体体积V

方法1： $I = 6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$ (高中方法，圆锥的体积公式，这种方法最简便)

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dxdy = 0$ ($\because$ 在Σ_1上：$z=1, dz=0$)

方法2：先二重积分，后定积分.

因为$V = \int_0^1 Sdz$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$r^2 = x^2+y^2$，$r^2 = z^2$，$S = \pi r^2 = \pi z^2$，

所以$V = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{1}{3}\pi z^2\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\pi$.从而$I = 6V = 6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$

方法 3：利用球面坐标．$z=1$ 在球坐标下为：$\rho=\dfrac{1}{\cos\theta}$，

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}6\rho^2\sin\varphi d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi$$

$$=(-2)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos\varphi}{\cos^3\varphi}=(-2)\int_0^{2\pi}d\theta(-\frac{1}{2})\cos^{-2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

方法 4：利用柱面坐标 ．

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 6rdz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r)rdr$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

(4)【答案】$\sqrt{2}$

【详解】代入点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|6+4+0|}{\sqrt{9+16+25}}=\sqrt{2}$$

(5)【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得，$BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式，得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中，$|A-E|=\left|\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，　$|2E|=2^2|\mathrm{E}|=4$

因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$．

(6)【答案】$1/9$

【详解】根据独立性原理：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立，则

$$P\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\}=P\{A_1\}P\{A_2\}\cdots P\{A_n\}$$

事件$\{\max\{X,Y\}\le 1\}=\{X\le 1,Y\le 1\}=\{X\le 1\}\bigcap\{Y\le 1\}$，而随机变量$X$与$Y$均服从区间$[0,3]$上的均匀分布，有$P\{X\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$和$P\{Y\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}$. 又随机变量$X$与$Y$相互独立，所以，

$$P\{\max(x,y)\le 1\}=P\{x\le 1,Y\le 1\}=P\{x\le 1\}\cdot P\{Y\le 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

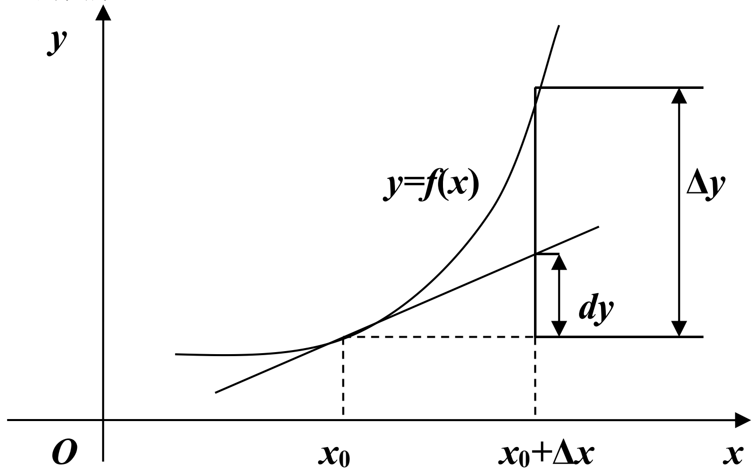
二、选择题.

(7)【答案】A

【详解】

方法 1： 图示法.

因为$f'(x)>0,$ 则$f(x)$严格单调增加；因为$f''(x)>0,$ 则$f(x)$是凹函数，又$\triangle x>0$，画$f(x)=x^2$的图形



结合图形分析，就可以明显得出结论：$0<dy<\triangle y$.

方法 2：用两次拉格朗日中值定理

$$\triangle y-dy=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)-f'(x_0)\triangle x \text{ (前两项用拉氏定理)}$$

$$=f'(\xi)\triangle x-f'(x_0)\triangle x \qquad \text{(再用一次拉氏定理)}$$

$$=f''(\eta)(\xi-x_0)\triangle x, \qquad \text{其中 } x_0<\xi<x_0+\triangle x, x_0<\eta<\xi$$

由于$f''(x)>0$，从而$\triangle y-dy>0$. 又由于$dy=f'(x_0)\triangle x>0$，故选$[A]$

方法 3： 用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n,$$

其中$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$. 此时$n$取1代入，可得

$$\Delta y-dy=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>0$$

又由$dy=f'(x_0)\Delta x>0$，选(A) .

(8)【答案】(C)

【详解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ ，则区域 D 的极坐标表示是：$0 \le r \le 1$ ，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题，画出积分区间，结合图形可以看出，直角坐标的积分范围(注意 $y = x$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限的交点是 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$)，于是 $D: 0 \le y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y \le x \le \sqrt{1-y^2}$

所以，原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$. 因此选 (C)

(9) 【答案】D

【详解】

方法 1：数列收敛的性质：收敛数列的四则运算后形成的新数列依然收敛

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 也收敛.选 D.

方法 2：记 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ，(p 级数， $p = \dfrac{1}{2}$ 级数发散)；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ (p 级数， $p = 1$ 级数发散)均发散。由排除法可知，应选 D.

(10) 【答案】D

【详解】

方法 1： 化条件极值问题为一元函数极值问题。

已知 $\varphi(x_0, y_0) = 0$ ，由 $\varphi(x,y) = 0$ ，在 (x_0, y_0) 邻域，可确定隐函数 $y = y(x)$ ，满足 $y(x_0) = y_0$ ，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ 。

(x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y) = 0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x = x_0$ 是 $z = f(x, y(x))$ 的极值点。它的必要条件是

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f_x'(x_0,y_0) - f_y'(x_0,y_0)\left.\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}\right|_{x=x_0} = 0$$

若 $f_x'(x_0, y_0) = 0$ ，则 $f_y'(x_0, y_0) = 0$ ，或 $\varphi_x'(x_0, y_0) = 0$ ，因此不选 (A)，(B).

若 $f_x'(x_0, y_0) \ne 0$ ，则 $f_y'(x_0, y_0) \ne 0$ (否则 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} \ne 0$). 因此选 (D)

方法 2：用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ ，有

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 & (2) \\ F'_\lambda = \varphi'(x,y) = 0 \end{cases}$$

因为$\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以$\lambda = -\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$，代入(1)得

$$f'_x(x_0,y_0) = -\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$

若$f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f'_y(x_0,y_0)\neq 0$，选(D)

(11)【答案】A

【详解】

方法 1：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关, 则由线性相关定义存在不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到$A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s$的形式，用$A$左乘等式两边, 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0 \qquad ①$$

于是存在不全为 0 的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得①成立，所以$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关.

方法 2：如果用秩来解,则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质, 它们是:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$；2. $r(AB) < r(B)$.

矩阵$(A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s) = A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，设$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$， 则由

$r(AB) < r(B)$得$r(A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s) \le r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$. 所以答案应该为($A$).

(12) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

将A的第 2 行加到第 1 行得B，即 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \underline{\underline{\text{记}}} PA$

将B的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得C，即$C = B\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\underline{\text{记}}} BQ$

因为$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故$Q=P^{-1}E=P^{-1}$.

从而$C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$,故选(B).

(13)【答案】C

【详解】本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式

根据条件概率的定义，当$P(B)>0$时，$P\{A|B\}=\dfrac{P\{AB\}}{P\{B\}}=1$得$P\{AB\}=P\{B\}$

根据加法公式有$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}=P\{A\}$,故选(C)

(14) 【答案】A.

【详解】由于X与Y的分布不同，不能直接判断$P\{|X-\mu_1|<1\}$和$P\{|Y-\mu_2|<1\}$的大小与参数关系. 如果将其标准化后就可以方便地进行比较了。

随机变量标准化，有$\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，且其概率密度函数是偶函数. 所以

$$P(|X-\mu_1|<1)=P(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1})=2P\left\{0<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=2[\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-\Phi(0)]=2\Phi(\frac{1}{\sigma_1})-1.$$

同理有，$P(|Y-\mu_2|<1)=2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_2})-1$

因为$\Phi(x)$是单调递增函数，当$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$时，$2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_1})-1>2\Phi(\dfrac{1}{\sigma_2})-1$，即$\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，所以$\sigma_1<\sigma_2$，故选(A).

三、解答题

(15)【详解】积分区域对称于x轴，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}y$为y的奇函数，

从而知 $\iint\limits_D\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$

所以 $I=\iint\limits_D\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\dfrac{r}{1+r^2}dr=\dfrac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}\ln 2$

(16)【详解】(I) 由于 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，于是 $0<x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$,说明数列 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$. 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.记为 A.

递推公式两边取极限得 $A=\sin A,\ \therefore A=0$

(II) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，为“$1^\infty$”型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑 $\lim\limits_{t\to0}(\dfrac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

(17)【详解】用分解法转化为求 $\dfrac{1}{1+ax}$ 的展开式，而这是已知的.

由于 $$\frac{1}{2+x-x^2}=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\qquad(|x|<1)$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\qquad(|x|<1).$$

(18)【详解】(I)由于题目是验证，只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\dfrac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$ 于是上述方程成为 $\dfrac{dp}{du}=-\dfrac{p}{u}$，则 $\int\dfrac{dp}{p}=-\int\dfrac{du}{u}+c$，

即 $\ln|p|=-\ln u+c$，所以 $f'(u)=p=\dfrac{c}{u}$

因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$，得 $f(u)=\ln u+c_2$

又因为 $f(1)=0$，所以 $c_2=0$，得 $f(u)=\ln u$

(19)【详解】

方法 1：把 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导，得：$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$

令 $t=1$，则 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y)$；

再令 $P=yf(x,y),\ Q=-xf(x,y)$，

所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y)$

得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以由格林公式知结论成立.

方法 2： D 是单连通区域，对于 D 内的任意分段光滑简单闭曲线 L，Γ 为 D 内的一曲线

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

$$\Leftrightarrow \int_\Gamma yf(x,y)dx-xf(x,y)dy \text{ 在 } D \text{ 内与路径无关}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-xf(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(yf(x,y)) \quad ((x,y)\in D)$$

$$\Leftrightarrow xf_x'(x,y)+yf'(x,y)+2f(x,y)=0 \quad ((x,y)\in D)$$

同方法 1，由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 可证得上式.

因此结论成立.

(20)【详解】(I)系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 5 & -1\\ a & 1 & 3 & b\end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n=4$，且又 $AX=b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. 因为 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2, 得 $4-r(A)\geq 2$，从而 $r(A)\leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的，所以 $r(A)\geq 2$. 所以 $r(A)=2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ a & 1 & 3 & b & 1\end{array}\right]\xrightarrow[{[3]+[1]\times(-a)}]{[2]+[1]\times(-4)}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1+a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a\end{array}\right],$$

由 $r(A)=2$，得 $\begin{cases}4-2a=0\\ 4a+b-5=0\end{cases}$，即 $a=2,\ \ b=-3$.

所以 $[A|b]$ 作初等行变换后化为；$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -4 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$,

它的同解方程组 $\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4\\ x_2=-3+x_3-5x_4\end{cases}$ ①

①中令 $x_3=0,x_4=0$ 求出 $AX=b$ 的一个特解 $(2,-3,0,0)^T$；

$AX=0$ 的同解方程组是 $\begin{cases}x_1=-2x_3+4x_4\\ x_2=x_3-5x_4\end{cases}$ ②

取 $x_3=1,x_4=0,$ 代入②得 $(-2,1,1,0)^T$；取 $x_3=0,x_4=1,$ 代入②得 $(4,-5,0,1)^T$. 所以 $AX=0$ 的基础解系为 $(-2,1,1,0)^T$，$(4,-5,0,1)^T$

所以方程组 $AX=b$ 的通解为:

$$(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T，\ c_1,c_2 \text{ 为任意常数}$$

(21)【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$，$A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$，故 α_1, α_2 是 A 的对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量，又因为 α_1, α_2 线性无关，故 $\lambda = 0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3，所以有 $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$，由特征值、特征向量的定义，$\alpha_0 = (1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量, 特征值为 $\lambda_3 = 3$，λ_3 只能是单根，$k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$ 是全体特征向量，从而知 $\lambda = 0$ 是二重特征值.

于是 A 的特征值为 $3,0,0$；属于 3 的特征向量: $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$；属于 0 的特征向量: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，$k_1, k_2$ 不都为 0 .

(Ⅱ) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化 .

先将 α_0 单位化, 得 $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 α_1, α_2 作施密特正交化, 得 $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$，$\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则 Q 是正交矩阵,并且 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(22)【详解】 $f_Y(y) = F_Y'(y)$，由于 $f_X(x)$ 是分段函数，所以在计算 $P\left\{X^2 \leq y\right\}$ 时，要相应分段讨论. 求 $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4)$, 只是与 X 有关，不必先求出 $F(x,y)$ 的函数.

(I) 因为 $F_Y(y) = P\left\{Y \leq y\right\} = P\left\{X^2 \leq y\right\}$，当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$;

当 $0 \leq y < 1$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}\sqrt{y}$；

当 $1 \leq y < 4$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}$；

当 $y \geq 4$ 时，$F_Y(y) = 1$;

综上所述，有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 1, & 4\le y\end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的的微分，所以，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手，对 y 进行适当的讨论即可，属于基本题型.

(Ⅱ) 由协方差的计算公式 $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)\cdot E(X^2)$

需要计算 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(X^3)$.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_0^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4};$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_0^2\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6};$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}dx+\int_0^2\frac{x^3}{4}dx=\frac{7}{8}.$$

故 $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)(X^2)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$

(III) 根据二维随机变量的定义 $F(a,b)=P\{X\le a,Y\le b\}$，有

$$F(-\frac{1}{2},4)=P(X\le-\frac{1}{2},Y\le4)=P\left\{X\le-\frac{1}{2},X^2\le4\right\}=P\left\{-2\le X\le-\frac{1}{2}\right\}$$

由一维概率计算公式 $P\{a\le X\le b\}=\int_a^b f_X(x)dx$ 有，$F(-\frac{1}{2},4)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$.

(23)【答案】θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$；$\theta$ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)，所以矩估计的关键在于

找出总体的矩 $E(X)$.

最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数. 样本值中 x_i 小于 1 的概率是 θ， x_i 大于 1 的概率是 $(1-\theta)$. 因此，似然函数应为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)=\theta^{N}(1-\theta)^{n-N}.$$

(I) 由数学期望的定义：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_0^1 \theta xdx+\int_1^2 (1-\theta)xdx =\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)=\frac{3}{2}-\theta$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$ 即 $\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$，解得 $\theta=\frac{3}{2}-\overline{X}$.

所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$. 其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(Ⅱ) 对样本 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 按照 <1 或者 ≥ 1 进行分类，不妨设：$x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1$，$x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1$. 似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^{N}(1-\theta)^{n-N}, & x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1, x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

在 $x_{p1},x_{p2},\cdots x_{pN}<1$， $x_{pN+1},x_{pN+2},\cdots x_{pn}\geq 1$ 时，等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$

由于 $\ln L(\theta)$ 和 $L(\theta)$ 在 θ 的同一点取得最大值，所以令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,$$

解得 $\theta=\frac{N}{n}$，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

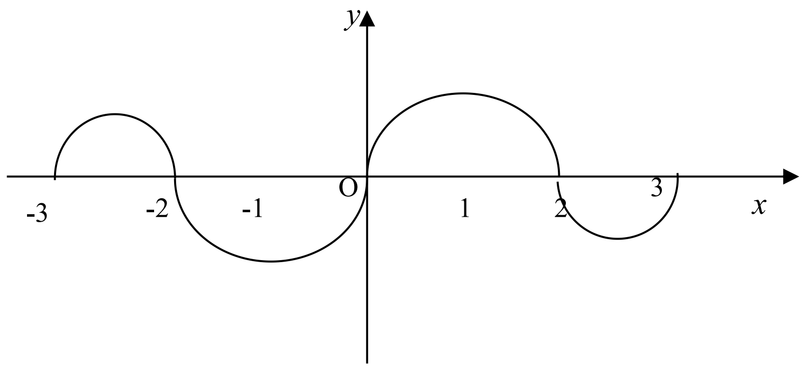
(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

$A.1-e^{\sqrt{x}}$　　$B.\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　$C.\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　$D.1-\cos\sqrt{x}$

(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是(　　)



$A.\ F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　$B.\ F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

$C.\ F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　$D.\ F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是(　　)

$A.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　$B.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

$C.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　$D.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是(　　)

$A.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$B.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

$C.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$D.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(6) 设曲线 $L: f(x,y)=1$ ($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是(　　)

$A.\ \int_\Gamma f(x,y)dx$　　　　$B.\ \int_\Gamma f(x,y)dy$

$C.\ \int_\Gamma f(x,y)ds$　　　　$D.\ \int_\Gamma f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是(　　)

$A.\ \alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　　　$B.\ \alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

$C.\ \alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　　　$D.\ \alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(8) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B (　　)

A. 合同，且相似　　　　B. 合同，但不相似

C. 不合同，但相似　　　　D. 既不合同，也不相似

(9) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 (　　)

$A.\ 3p(1-p)^2$　　　　$B.\ 6p(1-p)^2$

$C.\ 3p^2(1-p)^2$　　　　$D.\ 6p^2(1-p)^2$

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x),f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为(　)

$A.\ f_X(x)$　　　　$B.\ f_Y(y)$

$C.\ f_X(x)f_Y(y)$　　　　$D.\ \dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题：11-16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$ __________

(12) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ _______

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ______

(14) 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS=$ ______

(15) 设距阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 A^3 的秩为__________

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为____________

三、解答题：17－24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$, 在区域 $D=\left\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,y\ge 0\right\}$ 上的最大值和最小值.

(18)(本题满分 11 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$

(I) 证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$

(II) 求 $y(x)$ 的表达式

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ (1)

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求 a 得值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 B.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1.\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(I) 求 $P\left\{X>2Y\right\}$；

(II) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1, .\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(II) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】

方法 1：排除法：由几个常见的等价无穷小，当 $x\to0$ 时，

$e^x-1\sim x;\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x;\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2},$当 $x\to 0^+$ 时，此时 $\sqrt{x}\to 0$，所以

$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x});\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x};\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2,$ 可以排除 A、C、D，所以选(B).

方法 2： $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}=\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]$

当 $x\to 0^+$ 时，$1-\sqrt{x}\to 1$，$\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\to 0$，又因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，

所以 $\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\sim\sqrt{x}$，选(B).

方法 3： $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}\overset{洛}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left[\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})\right]'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

设 $\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-\sqrt{x}}$，则 $A\left(1-\sqrt{x}\right)+B(1+x)=4x+2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}$

对应系数相等得：$A=2\sqrt{x},B=1$，所以

原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=0+1=1$，选(B).

(2)【答案】D

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\infty$，

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0+0=0$，

所以 $y=0$ 是沿 $x\to-\infty$ 方向的一条水平渐近线；

令 $$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\ \underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

令 $$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-a\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-x\right)\ \underline{\underline{x=\ln e^x}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln 1=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线，所以共有 3 条，选择(D)

(3)【答案】C

【详解】由题给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，由 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，知

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\ \underline{\underline{\text{令}t=-u}}\int_0^x f(-u)d(-u)\ \underline{\underline{\text{因为}f(-u)=-f(u)}}\int_0^x f(u)du=F(x),$$

故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$.

而 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt$ 表示半径 $R=1$ 的半圆的面积，所以 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\dfrac{\pi R^2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$，

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$，其中 $\int_2^3 f(t)dt$ 表示半径 $r=\dfrac{1}{2}$ 的半圆的面积的负值，所以

$$\int_2^3 f(t)dt=-\frac{\pi r^2}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{\pi}{8}$$

所以 $$F(3)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}F(2)$$

所以 $F(-3)=F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$，选择 C

(4)【答案】(D)

【详解】

方法 1：论证法，证明 $A.B.C$ 都正确，从而只有 $D.$ 不正确.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{f(x)}{x}x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以(A)正确；

由选项(A)知，$f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，根据导数定义，

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在，所以(C)也正确；

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}f(-x)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

所以 $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=0$

即有 $f(0)=0$.所以(B)正确，故此题选择(D).

方法 2：举例法，举例说明(D)不正确. 例如取 $f(x)=|x|$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0 \text{ 存在}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$，

左右极限存在但不相等，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在. (D)不正确，选(D).

(5)【答案】(D)

【详解】$u_n=f(n)$，由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),(n=1,2,\cdots)\text{，}$$

其中 $n<\xi_n<n+1$，$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\cdots$. 由 $f''(x)>0,$ 知 $f'(x)$ 严格单调增，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$$

若 $u_1<u_2$，则 $f'(\xi_1)=u_2-u_1>0,$ 所以 $0<f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1).$$

而 $f'(\xi_1)$ 是一个确定的正数. 于是推知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty,$ 故 $\{u_n\}$ 发散. 选(D)

(6)【答案】B

【详解】用排除法.

将 $f(x,y)=1$ 代入知 $\int_{\Gamma} f(x,y)ds=\int_{\Gamma} ds=s>0$ ，排除 C.

取 $f(x,y)=x^2+y^2$ ，M 、N 依次为 $(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ 、$(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$ ，则

$\Gamma: x=\cos\theta, y=\sin\theta \qquad \frac{3}{4}\pi\le\theta\le\frac{7}{4}\pi$

$\int_{\Gamma} f(x,y)dx=\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} d\cos\theta>0$ ，排除 A

$\int_{\Gamma} f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy=\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} 2\cos\theta(-\sin\theta)+2\sin\theta\cos\theta d\theta=0$ ，排除 D

$\int_{\Gamma} f(x,y)dy=\int_{3\pi/4}^{7\pi/4} d\sin\theta<0$ ，选 B

(7) 【答案】A

【详解】

方法 1：根据线性相关的定义，若存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3 ，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

因 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$ ，故 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，所以选择(A).

方法 2：排除法

因为 $\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_2,\ \text{其中}\ C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

且 $$\left|C_2\right|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\overset{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}}{=\!=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times1-1\times(-1)=2\neq0.$$

故 C_2 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_2 右乘 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，排除(B).

因为 $\left(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_3,\text{ 其中 }C_3=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$$\left|C_3\right|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times2+2\text{行}}}\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&-2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\-2&1\end{vmatrix}$$

$=1\times1-(-2)\times(-4)=-7\neq0.$

故 C_3 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_3 右乘 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以 $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$ 线性无关，排除(C).

因为 $\left(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1\right)$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)C_4,\text{ 其中 }C_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

$$\left|C_4\right|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times(-2)+2\text{行}}}\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$=1\times1-2\times(-4)=9\neq0.$

故 C_4 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_4 右乘 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以 $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关，排除(D).

综上知应选(A).

(8) 【答案】B

【详解】

方法 1： $\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\underline{\underline{2、3\text{列分别加到}1\text{列}}}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&\lambda-2&1\\\lambda&1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{\text{提出}\lambda}}\ \lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\underline{\underline{1\text{行}\times(-1)\ +2\text{行}}}\lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{1\text{行}\times(-1)\ +3\text{行}}}\lambda\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0\\ 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2\lambda=0$$

则 A 的特征值为 3，3，0; B 是对角阵，对应元素即是的特征值，则 B 的特征值为 1，1，0. A,B 的特征值不相同，由相似矩阵的特征值相同知，A与B 不相似.

由 A,B 的特征值可知，A,B 的正惯性指数都是 2，又秩都等于 2 可知负惯性指数也相同，则由实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数，知 A 与 B 合同，应选(B).

方法 2: 因为迹(A)=2+2+2=6，迹(B)=1+1=2 $\neq 6$，所以 A 与 B 不相似(不满足相似的必要条件).又 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$A$ 与 B 是同阶实对称矩阵，其秩相等，且有相同的正惯性指数，故 A 与 B 合同.

(9)【答案】C

【详解】把独立重复射击看成独立重复试验.射中目标看成试验成功. 第4次射击恰好是第 2 次命中目标可以理解为：第4次试验成功而前三次试验中必有1次成功，2次失败.

根据独立重复的伯努利试验，前3次试验中有1次成功2次失败.其概率必为$C_3^1p(1-p)^2$. 再加上第4次是成功的，其概率为 p .

根据独立性原理：若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立，则 $P\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\}=P\{A_1\}P\{A_2\}\cdots P\{A_n\}$

所以，第4次射击为第二次命中目标的概率为$C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$. 所以选(C)

(10)【答案】A

【详解】二维正态随机变量(X,Y)中，X 与 Y 的独立等价于 X 与 Y 不相关. 而对任意两个随机变量 X 与 Y，如果它们相互独立，则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

由于二维正态随机变量(X,Y)中 X 与 Y 不相关，故 X 与 Y 独立，且 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 根据条件概率密度的定义，当在 $Y=y$ 条件下，如果 $f_Y(y)\neq 0$, 则

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)\,.$$

现 $f_Y(y)$ 显然不为 0，因此 $f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$.　　　所以应选(A).

二、填空题

(11)【答案】$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

【详解】命 $\dfrac{1}{x}=t$，有 $x=\dfrac{1}{t},dx=-\dfrac{1}{t^2}dt,$

$$\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx\ \underline{\underline{\frac{1}{x}=t}}\int_1^{\frac{1}{2}}t^3e^td\frac{1}{t}=\int_1^{\frac{1}{2}}t^3e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int_1^{\frac{1}{2}}te^tdt=\int_{\frac{1}{2}}^1te^tdt$$

$$\underline{\underline{\text{分部积分}}}\int_{\frac{1}{2}}^1tde^t=\left(te^t\right)_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1e^tdt=e-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=e-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

(12)【答案】$f_1'(x^y,y^x)yx^{y-1}+f_2'(x^y,y^x)y^x\ln y$

【详解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x^y,y^x)}{\partial x}=f_1'(x^y,y^x)\dfrac{\partial x^y}{\partial x}+f_2'(x^y,y^x)\dfrac{\partial y^x}{\partial x}=f_1'(x^y,y^x)yx^{y-1}+f_2'(x^y,y^x)y^x\ln y$

(13)【答案】$C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$

【详解】这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f\left(x\right)$ 是 $P_m\left(x\right)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m\left(x\right)=2,\lambda=2$).

所给方程对应的齐次方程为 $y''-4y'+3y=0$，它的特征方程为 $r^2-4r+3=0,$ 得特征根 $r_1=1,r_2=3,$ 对应齐次方程的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x},$ 所以 $\left(y^*\right)'=2Ae^{2x}$，$\left(y^*\right)''=4Ae^{2x}$，代入原方程：$4Ae^{2x}-4\cdot2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，

则 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$. 故得原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(14)【答案】$\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

【详解】$\displaystyle\oiint_\Sigma(x+|y|)dS=\oiint_\Sigma xdS+\oiint_\Sigma|y|dS$，

对于第一部分，由于积分区域关于 x 轴、y 轴是对称的面，被积函数 x 为 x 的奇函数，所以 $\displaystyle\oiint_\Sigma xdS=0.$

对于第二部分，因 Σ 关于 x,y,z 轮换对称，所以 $\oiint\limits_{\Sigma}|x|dS=\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\oiint\limits_{\Sigma}|z|dS$，那么

$\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\left(|x|+|y|+|z|\right)dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}dS$，由曲面积分的几何意义，$\oiint\limits_{\Sigma}dS$ 为曲面的表面积，所以

$\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}dS=\dfrac{1}{3}\times\left(\Sigma\text{的面积}\right)$. 而 Σ 为 8 块同样的等边三角形，每块等边三角形的边长为 $\sqrt{2}$，所以 Σ 的面积 $=8\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$.

所以 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS=\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\dfrac{1}{3}\cdot4\sqrt{3}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

(15)【答案】1

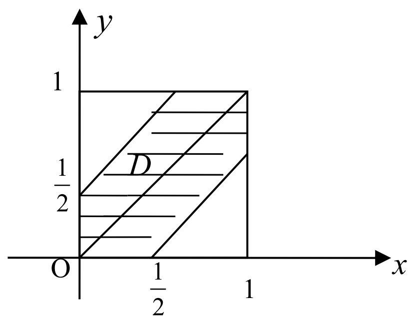
【详解】

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由阶梯矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数，知 $r\left(A^3\right)=1$.

(16) 【答案】$3/4$

【详解】不妨假定随机地抽出两个数分别为 X 和 Y，它们应是相互独立的. 如果把 (X,Y) 看成平面上一个点的坐标，则由于 $0<X<1,0<Y<1$, 所以 (X,Y) 为平面上正方形：$0<X<1,0<Y<1$ 中的一个点.



X 和 Y 两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 对应于正方形中 $|X-Y|<\dfrac{1}{2}$ 的区域.

所有可能在区间 $(0,1)$ 中随机取的两个数 X,Y，可以被看成上图中单位正方形里的点. $|X-Y|<\dfrac{1}{2}$ 的区域就是正方形中阴影的面积 D. 根据几何概率的定义：

$$P\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)=\frac{D\text{的面积}}{\text{单位正方形面积}}=\frac{1-\left(1/2\right)^2}{1}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题

(17)【详解】

方法 1：先求函数 $f(x,y)$ 在 D 的内部驻点，

由 $\begin{cases} f_x' = 2x - 2xy^2 = 0 \\ f_y' = 4y - 2x^2 y = 0 \end{cases}$，解得 D 内的驻点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，相应的函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1) = 2$

再考虑在 D 的边界 L_1： $y = 0(-2 \le x \le 2)$ 上的 $f(x,y)$．即 $f(x,0) = x^2(-2 \le x \le 2)$，易知函数 $f(x,y)$ 在此边界上的最大值为 $f(\pm 2,0) = 4$，最小值为 $f(0,0) = 0$．

考虑在 D 的边界 L_2： $x^2 + y^2 = 4(y \ge 0)$ 上的 $f(x,y)$，所以 $y = \sqrt{4 - x^2}$，

令 $$h(x) = f(x,\sqrt{4-x^2}) = x^2 + 2(4-x^2) - x^2(4-x^2) = x^4 - 5x^2 + 8, -2 \le x \le 2$$

由 $h'(x) = 4x^3 - 10x = 0$ 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}, x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$，

所以函数 $h(x)$ 在相应点处的函数值为

$$h(0) = f(0,2) = 8，\ h(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}，\ h(\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}$$

综上可知函数在 D 上的最大值为 $f(0,2) = 8$，最小值为 $f(0,0) = 0$．

方法 2：在 D 内与边界 L_1 上，同方法 1．

在边界 L_2： $x^2 + y^2 = 4(y \ge 0)$ 上，构造函数 $F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

令 $\begin{cases} F_x' = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y' = 4y - 2x^2 y + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$，　解得 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{5/2} \\ y = \sqrt{3/2} \end{cases}$，$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

$f(\pm\sqrt{5/2},\sqrt{3/2}) = 7/4$， $f(0,2) = 8$

综上， $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值为 0

(18)【详解】

方法 1：增加一个曲面使之成为闭合曲面，从而利用高斯公式，

补充曲面片 $S: z = 0, x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1$，下侧为正，有

$$I=\iint\limits_{\Sigma+S} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy-\iint\limits_{S} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=I_1+I_2$$

根据高斯公式，$I_1=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)dv=\int_0^1 3zdz\iint\limits_{x^2+\frac{1}{4}y^2<1-z}dxdy=\int_0^1 6\pi z(1-z)dz=\pi$

其中，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1-z, 0\le z\le 1\right\}$. 又 $I_2=-\iint\limits_{x^2+\frac{1}{4}y^2\le 1}3xydxdy$

由函数奇偶性可知 $\iint\limits_{x^2+\frac{1}{4}y^2\le 1}3xydxdy=0$，从而 $I=\pi+0=\pi$.

方法 2：曲面$\sum$在 xOy 上的投影记为 D_{xy}，由于曲面$\sum$的正向法向量为 $\vec{n}=(-z'_x,-z'_y,1)=(2x,\dfrac{1}{2}y,1)$，所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(X,Y,Z)\bullet\vec{n}dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+\frac{1}{4}y^2\le 1}[2x^2(1-x^2-\frac{1}{4}y^2)+y^2(1-x^2-\frac{1}{4}y^2)+3xy]dxdy$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1$，则

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[2r^2(1-r^2)\cos^2\theta+2r^2(1-r^2)\sin^2\theta+6r^2\cos\theta\sin\theta]2rdr=12\pi\bullet\int_0^1 r^3(1-r^2)dr=\pi$$

方法 3：记曲面$\sum$在三个坐标平面上的投影分别为 D_{xy},D_{yz},D_{zx}，则利用函数奇偶性有，

$$\iint\limits_{\Sigma}3xydxdy=\iint\limits_{D_{xy}}3xydxdy=0$$

$$\iint\limits_{\Sigma}xzdydz=2\iint\limits_{D_{yz}}z\sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}}dydz=2\int_0^1 zdz\int_{-2\sqrt{1-z}}^{-2\sqrt{1-z}}\sqrt{1-z-\frac{y^2}{4}}dy=\int_0^1 z[2(1-z)\pi]dz=\frac{\pi}{3}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}2zydzdx=8\iint\limits_{D_{zx}}z\sqrt{1-z-x^2}dzdx=8\int_0^1 zdz\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\sqrt{1-z-x^2}dx=4\pi\int_0^1 z(1-z)dz=\frac{2\pi}{3}$$

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}+0=\pi$

(19)【详解】欲证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$，可构造函数 $\varphi(f(x),g(x))=0$，从而使用介值定理、微分中值定理等证明之.

令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=\max\limits_{[a.b]}f(x)=g(x_2)=\max\limits_{[a.b]}g(x)$. 于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\ge 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\le 0$

若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_1)>0,\varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$.

不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$, 使 $\varphi(\eta)=0$.

再 $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\varphi(b)=f(b)-g(b)=0$，将 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\eta],[\eta,b]$ 分别应用罗尔定理，得存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$, 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$, $\varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使 $\varphi''(\xi)=0$.

即有 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)【详解】(I) **证法一**：对 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 求一阶和二阶导数，得 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},y''=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$,

代入 $y''-2xy'-4y=0$，得 $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

即 $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

于是 $\begin{cases}2a_2-4a_0=0\\(n+1)a_{n+2}-2a_n=0,\end{cases}$ $n=1,2,\cdots,$ 从而 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots,$

证法二：由于 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，根据泰勒级数的唯一性便知 $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$.

在方程 $y''-2xy'-4y=0$ 两端求 n 阶导数，得 $y^{(n+2)}-2xy^{(n+1)}-2(n+2)y^{(n)}=0$

令 $x=0$，得 $y^{(n+2)}(0)-2(n+2)y^{(n)}(0)=0$，

即 $(n+2)!a_{n+2}-2(n+2)\cdot n!a_n=0$，故 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$

(II) **证法一**：由于 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots,a_2=2a_0$, 且根据题设中条件 $a_0=y(0)=0,a_1=y'(0)=1,$

所以 $a_{2n}=0,n=1,2,\cdots$；

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n(2n-2)\cdots4\bullet2}a_1=\frac{1}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

从而 $$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}.$$

证法二：因为 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所以 $\frac{y}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$，两边求导，得 $(\frac{y}{x})'=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+2}x^n$

由于 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$,

所以 $(\frac{y}{x})'=\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=2y$，即函数 $y(x)$ 满足方程 $(\frac{y}{x})'-2y=0$

令 $u\left(x\right)=\frac{y}{x}$，则上述方程变为 $u'-2xu=0$，即 $\frac{du}{u}=2xdx$，解之得 $u=Ce^{x^2}$，从而 $y=Cxe^{x^2}$.

由 $y'(0)=1$ 得 $C=1$，所以 $y=xe^{x^2}$.

(21) 【详解】

方法 1：因为方程组(1)、(2)有公共解，将方程组联立得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}\qquad(3)$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)+2行}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\1&2&1&a\end{pmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)+4行}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4行\times(-1)+2行}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&a-1&1-a\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{4行\times(-3)+3行}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&a-1&1-a\\0&0&a^2-1&3-3a\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{换行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&a^2-1&3-3a\end{pmatrix}\xrightarrow{3\text{行}\times(-a-1)+4\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}$$

由此知，要使此线性方程组有解，a 必须满足 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量. 选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得两方程组的公共解为 $k\left(1,0,-1\right)^T$，其中 k 是任意常数.

当 $a=2$ 时, 联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\\x_3=-1\end{cases}$，解得两方程的公共解为 $\left(0,1,-1\right)^T$.

方法 2：将方程组(1)的系数矩阵 A 作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\1&4&a^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1\text{行}\times(-1)+3\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&3&a^2-1\end{bmatrix}\xrightarrow{2\text{行}\times(-3)+3\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)\end{bmatrix}$$

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量.选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得(1)的通解为 $k\left(1,0,-1\right)^T$，其中 k 是任意常数. 将通解 $k\left(1,0,-1\right)^T$ 代入方程(2)得 $k+0+(-k)=0$，对任意的 k 成立，故当 $a=1$ 时，$k\left(1,0,-1\right)^T$ 是(1)、(2)的公共解.

当 $a=2$ 时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量.选 x_2 为自由未知量，取 $x_2=1$，解得(1)的通解为 $\mu\left(0,1,-1\right)^T$,其中 μ 是任意常数. 将通解 $\mu\left(0,1,-1\right)^T$ 代入方程(2)得 $2\mu-\mu=1$，即 $\mu=1$，故当 $a=2$ 时，(1)和(2)的公共解为 $\left(0,1,-1\right)^T$.

(22) 【详解】(I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$ 是正整数,故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是 α_1 是矩阵 B 的特征向量(对应的特征值为 $\lambda_1'=-2$).

若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$ 因此对任意多项式 $f(x)$，$f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故 B 的特征值可以由 A 的特征值以及 B 与 A 的关系得到，A 的特征值 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2,$ 则 B 有特征值 $\lambda_1'=f(\lambda_1)=-2,\lambda_2'=f(\lambda_2)=1,\lambda_3'=f(\lambda_3)=1,$ 所以 B 的全部特征值为－2，1，1.

由 A 是实对称矩阵及 B 与 A 的关系可以知道，B 也是实对称矩阵，属于不同的特征值的特征向量正交．由前面证明知 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 $\lambda_1'=-2$ 的特征向量，设 B 的属于 1 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，α_1 与 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 正交，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

选 x_2,x_3 为自由未知量，取 $x_2=0,x_3=1 和 x_2=1,x_3=0$，于是求得 B 的属于 1 的特征向量为 $\alpha_2=k_2(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$

故 B 的所有的特征向量为：对应于 $\lambda_1'=-2$ 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 是非零任意常数，对应于 $\lambda_2'=\lambda_3'=1$ 的全体特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_2,k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) **方法 1**：令矩阵 $P=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求逆矩阵 P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1行+2行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{行\times2+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&3&1&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\div 3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}\xrightarrow{3行\times(-2)+2行}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1/3 & -1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行\times(-1)+1行}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \vdots & 2/3 & -2/3 & -1/3\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1/3 & -1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)+1行}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1/3 & -1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1/3 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

则 $$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & -1/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

由 $P^{-1}BP=diag(-2,1,1)$，所以

$$B=P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 3 & -3\\ 3 & 0 & 3\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

方法 2：由 (I) 知 α_1 与 α_2,α_3 分别正交，但是 α_2 和 α_3 不正交，现将 α_2,α_3 正交化：

取 $$\beta_2=\alpha_2,\beta_3=\alpha_3+k_{12}\beta_2=(1,1,0)+(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})\ .$$

其中，$$k_{12}=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=-\frac{1\times(-1)}{(-1)\times(-1)+1\times 1}(-1,0,1)^T=(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$$

再对 α_1,β_2,β_3 单位化：

$$\xi_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1),\xi_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)=,\xi_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$$

其中，$\|\alpha_1\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3},\|\beta_2\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2},\|\beta_3\|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 合并成正交矩

阵，

记 $$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

由 $Q^{-1}BQ=diag(-2,1,1)$，有 $B=Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{-1}$. 又由正交矩阵的性质：$Q^{-1}=Q^{T}$，得

$$B=Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

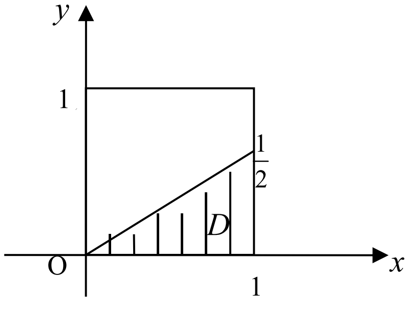
(23)【详解】 计算 $P\{X>2Y\}$ 可用公式 $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)dxdy$ 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$：可用两个随机变量和的概率密度的一般公式求解.(卷积公式)

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx.$$

此公式简单，但讨论具体的积分上下限会较复杂.

另一种方法可用定义先求出 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$,然后再 $f_Z(z)=F_Z^{'}(z)$.

(I) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{D}(2-x-y)dxdy$，其中 D 为 $0<x<1,0<y<1$ 中 $x>2y$ 的那部分区域(右图阴影部分)；求此二重积分可得



$$P\{X>2Y\}=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{2}x}(2-x-y)dy$$

$$=\int_0^1 (x-\frac{5}{8}x^2)dx=\frac{7}{24}$$

(Ⅱ)**方法 1**：根据两个随机变量和的概率密度的卷积公式有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx.$

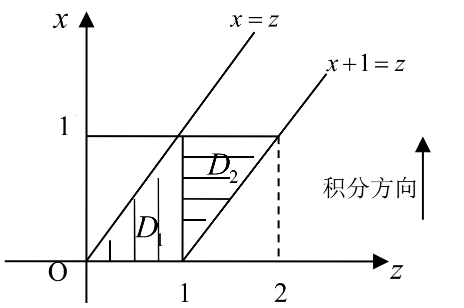
先考虑被积函数 $f(x,z-x)$ 中第一个自变量 x 的变化范围，根据题设条件只有当 $0<x<1$ 时 $f(x,z-x)$ 才不等于 0. 因此，不妨将积分范围改成 $f_Z(z)=\int_0^1 f(x,z-x)dx.$

现再考虑被积函数 $f(x,z-x)$ 的第二个变量 $z-x$.显然，只有当 $0<z-x<1$ 时，$f(x,z-x)$ 才不等于 0.且为 $2-x-(z-x)=2-z.$ 为此，我们将 z 分段讨论.

因为有 $0<z-x<1$，即是 $x<z<1+x,$ 而 x 的取值范围是 $(0,1)$，所以使得 $f(x,z-x)$ 不等于 0 的 z 取值范围是 $(0,2]$ 如下图，在 $0<x<1$ 情况下，在阴影区域 D_1 和 D_2，密度函数值不为 0，积分方向如图所示，积分上下限就很好确定了，所以很容易由卷积公式得出答案。

$z\le 0$ 时，由于 $0<x<1$，故 $z-x<0$，

故 $f_Z(z)=0;$



$0<z\le 1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z (2-z)dz=2z-z^2;$

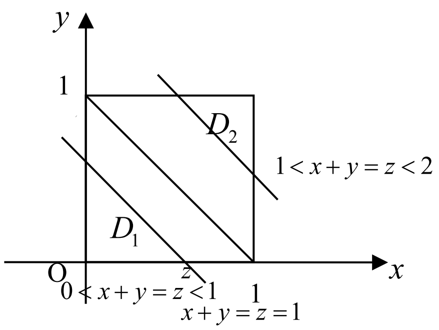
$1<z\le 2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1 (2-z)dz$

$=4-4z+z^2;$

$2<z$ 时，由于 $0<x<1$，故 $z-x>1$，

故 $f_Z(z)=0.$

总之，$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\le 1\\ z^2-4z+4, & 1<z\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$



方法 2：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>2$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0<z\le 1$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}(2-x-y)dy$$

$$=-\frac{1}{3}z^3+z^2$$

当$1<z\le 2$时，

$$F_Z(z)=1-\int_{z-1}^{1}dx\int_{z-x}^{1}(2-x-y)dy=\frac{1}{3}z^3-2z^2+4z-\frac{5}{3}$$

所以 $$f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\le 1\\ z^2-4z+4, & 1<z\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(24)【答案】θ的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$；$4\overline{X}^2$不是为$\theta^2$的无偏估计量.

【详解】本题中只有唯一参数θ，则在求矩估计的时候，只要令样本均值$\overline{X}$等于总体的期望$E(X)$就可以求得了；而判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量，只要判断$E(4\overline{X}^2)=\theta^2$是否成立即可.

(I) 记$E(X)=\mu$，则由数学期望的定义，有

$$\mu=E(X)=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$

即是令 $\mu=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$，解出 $\theta=2\mu-\frac{1}{2}$，

因此参数θ的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$；

(II) 只须验证$E(4\overline{X}^2)$是否为θ^2即可，而由数学期望和方差的性质，有

$$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4(D\overline{X}+(E\overline{X})^2)=4(\frac{1}{n}DX+(EX)^2)$$，而

$$E(X)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta,\quad E(X^2)=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2),$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{5}{48}-\frac{\theta}{12}+\frac{1}{12}\theta^2,$$

于是 $$E(4\overline{X}^2)=\frac{5+3n}{12n}+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+1}{3n}\theta^2\ne\theta^2$$

因此$4\overline{X}^2$不是为θ^2的无偏估计量.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数(　　)

$(A)\,0$　　　$(B)\,1$　　　$(C)\,2$　　　$(D)\,3$

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

$(A)\ \boldsymbol{i}$　　　$(B)\ \boldsymbol{-i}$　　　$(C)\ \boldsymbol{j}$　　　$(D)\ -\boldsymbol{j}$

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

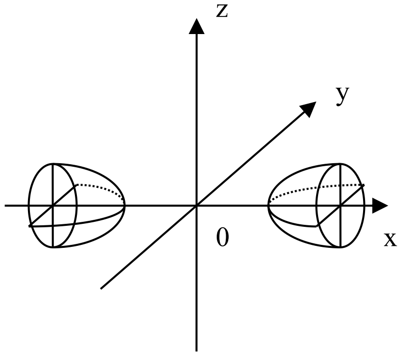
(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，满足 $A^3=0$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(6) 设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图，则 A 的正特征值个数为(　　)

$(A)\,0.$ $(B)\,1.$ $(C)\,2.$ $(D)\,3.$



(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为 (　)

(A) $F^2(x)$.　　　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则(　)

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ________.

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0,A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的非零特征值为________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $\left(0,0\right)$ 到点 $\left(\pi,0\right)$ 的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 XOY 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f\left(x\right)$ 是连续函数，

(I) 利用定义证明函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 可导，且 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

(II) 当 $f\left(x\right)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G\left(x\right)=2\int_0^x f\left(t\right)dt-x\int_0^2 f\left(t\right)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数

(19)(本题满分 11 分)

$f\left(x\right)=1-x^2\left(0\le x\le\pi\right)$ 展开成(以 2π 为周期的)余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

(20)(本题满分 10 分)

$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha,\beta$ 是三维列向量，α^T 为 α 的转置，β^T 为 β 的转置

(I) 证 $r(A)\le 2$；

(II) 若 α,β 线性相关，则 $r(A)<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，现矩阵 A 满足方程 $AX=B$，其中 $X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，

$B=\left(1,0,\cdots,0\right)^T$，

(I) 求证 $\left|A\right|=\left(n+1\right)a^n$

(II) a 为何值，方程组有唯一解，求 x_1

(III) a 为何值，方程组有无穷多解，求通解

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\frac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，记 $Z=X+Y$

(I) 求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$

(II) 求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(I) 证 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(II) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】$f'(x)=[\ln(2+x^2)]\cdot 2x$，$f'(0)=0$，即 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的一个零点

又 $f''(x)=2\ln(2+x^2)+\dfrac{4x^2}{2+x^2}>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加（$x\in(-\infty,+\infty)$）

所以 $f'(x)$ 只有一个零点.

(2)【答案】A

【详解】因为 $f'_x=\dfrac{1/y}{1+x^2/y^2}$，$f'_y=\dfrac{-x/y^2}{1+x^2/y^2}$，所以 $f'_x(0,1)=1$，$f'_y(0,1)=0$

所以 $\quad \mathbf{grad} f(0,1)=1\cdot \boldsymbol{i}+0\cdot \boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$

(3)【答案】D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x、$\cos 2x$、$\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1, r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4)【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限

(5)【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A, E+A$ 均可逆.

(6)【答案】B

【详解】图示的二次曲面为双叶双曲面，其方程为 $\dfrac{x'^2}{a^2}-\dfrac{y'^2}{b^2}-\dfrac{z'^2}{c^2}=1$，即二次型的标准型

为 $f=\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}$，而标准型的系数即为 A 的特征值.

(7)【答案】A

【详解】$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P(X\le z)P(Y\le z)=F(z)F(z)=F^2(z)$

(8)【答案】D

【详解】用排除法. 设 $Y=aX+b$，由 $\rho_{XY}=1$，知道 X,Y 正相关，得 $a>0$，排除 (A)、(C)

由 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，得 $EX=0,EY=1,$

所以 $E(Y)=E(aX+b)=aEX+b=a\times 0+b=1,$ 所以 $b=1$. 排除 (B). 故选择 (D)

二、填空题

(9) 【答案】$1/x$

【详解】由 $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$，两端积分得 $-\ln|y|=\ln|x|+C_1$，所以 $\frac{1}{|y|}=C|x|$，又 $y(1)=1$，所以 $y=\frac{1}{x}$.

(10) 【答案】$y=x+1$

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{y\cos(xy)-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}}$，

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $y=x+1$

(11)【答案】$(1,5]$

【详解】幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 的收敛区间以 $x=-2$ 为中心，因为该级数在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，所以其收敛半径为 2，收敛域为 $(-4,0]$，即 $-2<x+2\le 2$ 时级数收敛，

亦即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 2，收敛域为 $(-2,2]$. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛半径为 2，由

$-2 < x-3 \le 2$ 得 $1 < x \le 5$，即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$

(12)【答案】4π

【详解】加 $\Sigma_1 : z = 0(x^2+y^2 \le 4)$ 的下侧，记 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω，则

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\
&= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy - \iint_{\Sigma_1} xydydz + xdzdx + x^2dxdy \\
&= \iiint_{\Omega} ydxdydz - (-\iint_{x^2+y^2\le 4} x^2dxdy) = 0 + \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 4\pi
\end{aligned}
$$

(13)【答案】1

【详解】$A(\alpha_1,\alpha_2) = (A\alpha_1, A\alpha_2) = (0, 2\alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

记 $P = (\alpha_1,\alpha_2)$， $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AP = PB$

因为 α_1,α_2 线性无关，所以 P 可逆. 从而 $B = P^{-1}AP$，即 A 与 B 相似.

由 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) = 0$，得 $\lambda = 0$ 及 $\lambda = 1$ 为 B 的特征值.

又相似矩阵有相同的特征值，故 A 的非零特征值为 1.

(14)【答案】$\frac{1}{2e}$

【详解】由 $DX = EX^2 - (EX)^2$，得 $EX^2 = DX + (EX)^2$，又因为 X 服从参数为 1 的泊松

分布，所以 $DX = EX = 1$，所以 $EX^2 = 1+1 = 2$，所以 $P\{X=2\} = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \frac{1}{2}e^{-1}$

三、解答题

(15) 【详解】

方法一： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

方法二： $\because\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\qquad \sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$$

(16) 【详解】

方法一：（直接取 x 为参数将对坐标的曲线积分化成定积分计算）

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=\int_0^{\pi}[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]dx=\int_0^{\pi}x^2\sin 2xdx$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}$$

方法二：（添加 x 轴上的直线段用格林公式化成二重积分计算）

取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=\int_{L+L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy-\int_{L_1}\sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$$

$$=-\iint_D 4xydxdy-\int_{\pi}^{0}\sin 2xdx=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}4xydy-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=-\int_0^{\pi}2x\sin^2 xdx$$

$$=-\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2xdx=-\frac{\pi^2}{2}$$

方法三：（将其拆成 $\int_L \sin 2xdx-2ydy+\int_L 2x^2ydy$，前者与路径无关，选择沿 x 轴上的直线段积分，后者化成定积分计算）

$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy=\int_L \sin 2xdx-2ydy+\int_L 2x^2ydy=I_1+I_2$$

对于 I_1，因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$，故曲线积分与路径无关，取 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的直线段

积分 $I_1=\int_0^{\pi}\sin 2xdx=0$

$$I_2=\int_L 2x^2ydy=\int_0^{\pi}2x^2\sin x\cos xdx=\int_0^{\pi}x^2\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2d\cos 2x$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2x\cos 2xdx=-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}xd\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\left[x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\pi^2$$

所以，原式$=-\frac{1}{2}\pi^2$

(17) 【详解】点(x,y,z)到xOy面的距离为$|z|$，故求C上距离xOy面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数$H=z^2$在条件$x^2+y^2-2z^2=0$与$x+y+3z=5$下的最大值点和最小值点.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

所以
$$\begin{cases} L_x'=2\lambda x+\mu=0 & (1)\\ L_y'=2\lambda y+\mu=0 & (2)\\ L_z'=2z-4\lambda z+3\mu=0 & (3)\\ x^2+y^2-2z^2=0 & (4)\\ x+y+3z=5 & (5)\end{cases}$$

由(1)(2)得$x=y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases} x^2-z^2=0\\ 2x+3z=5\end{cases}$,

解得$\begin{cases} x=-5\\ y=-5\\ z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$

(18)【详解】(I) 对任意的x，由于f是连续函数，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_0^{x}f(t)dt}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$ ，其中ξ介于x与$x+\Delta x$之间

由于$\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$，可知函数$F(x)$在$x$处可导，且$F'(x)=f(x)$.

(II)

方法一： 要证明$G(x)$以 2 为周期，即要证明对任意的x，都有$G(x+2)=G(x)$，

$H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$H'(x)=\left(2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt\right)'-\left(2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt\right)'$$
$$=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)dt-2f(x)+\int_0^2 f(t)dt=0$$

又因为 $H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\right)-0=0$

所以 $H(x)=0$，即 $G(x+2)=G(x)$

方法二：由于 f 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意的 x，有

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^x f(t)dt+x\int_0^2 f(t)dt$$
$$=2\left[\int_0^2 f(t)dt+\int_2^{x+2}f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]$$
$$=2\left[-\int_0^x f(t)dt+\int_0^x f(u+2)du\right]=2\int_0^x[f(t+2)-f(t)]dt=0$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

(19)【详解】

由于 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)dx=2-\dfrac{2\pi^2}{3}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\cos nxdx=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\qquad n=1,2,\cdots$$

所以 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\qquad 0\le x\le\pi$

令 $x=0$，有 $f(0)=1-\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

又 $f(0)=1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$

(20)【详解】(I) $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\le r(\alpha)+r(\beta)\le 2$

(II) 由于 α,β 线性相关，不妨设 $\alpha=k\beta$. 于是

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r\left((1+k^2)\beta\beta^T\right)\le r(\beta)\le 1<2$$

(21)【详解】(I)**证法一**：

$$|A|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix} \xlongequal{r_2-\frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix} = 2a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{4a}{3}\cdots\cdot\frac{(n+1)a}{n}=(n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n=|A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n=(n+1)a^n$.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故 $\quad |A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $\quad D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以 $\quad D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $$D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$．

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以 $$x_1=\frac{D_{n-1}}{D_n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(III)方程组有无穷多解，由 $|A|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T,k$ 为任意常数.

(22)【详解】

(I) $$P(Z\leq\frac{1}{2}\Big|X=0)=P(X+Y\leq\frac{1}{2}\Big|X=0)=\frac{P(X=0,Y\leq\frac{1}{2})}{P(X=0)}=P(Y\leq\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}1dy=\frac{1}{2}$$

(II) $$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}$$

$$=P\{X+Y\leq z,X=-1\}+P\{X+Y\leq z,X=0\}+P\{X+Y\leq z,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1,X=-1\}+P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]$$

所以 $$f_Z(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\le z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(23)【详解】

(I) 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，从而 $E\overline{X}=\mu,\ D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$.

因为 $$E(T)=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}E(S^2)$$

$$=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$$

所以，T 是 μ^2 的无偏估计

(II)

方法一：$D(T)=ET^2-(ET)^2$，$E(T)=0$，$E(S^2)=\sigma^2=1$

所以 $$D(T)=ET^2=E(\overline{X}^4-\frac{2}{n}\overline{X}^2\cdot S^2+\frac{S^4}{n^2})$$

$$=E(\overline{X}^4)-\frac{2}{n}E(\overline{X}^2)E(S^2)+\frac{1}{n^2}E(S^4)$$

因为 $X\sim N(0,1)$，所以 $\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$，

有 $E\overline{X}=0,D\overline{X}=\frac{1}{n}$，$E\overline{X}^2=D\overline{X}+\left(E\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n}$

所以 $$E(\overline{X}^4)=D(\overline{X}^2)+E^2(\overline{X}^2)=D\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\left[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})\right]^2$$

$$=\frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\left[D(\overline{X})\right]^2=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{3}{n^2}$$

$$ES^4=E\left[\left(S^2\right)^2\right]=DS^2+(ES^2)^2=DS^2+1$$

因为$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，所以$DW=2(n-1)$，

又因为$DW=(n-1)^2DS^2$，所以$DS^2=\dfrac{2}{(n-1)}$,所以$ES^4=\dfrac{2}{(n-1)}+1=\dfrac{n+1}{n-1}$

所以 $ET^2=\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot 1+\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{2}{n(n-1)}$.

方法二：当$\mu=0,\sigma=1$时

$$D(T)=D(\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2) \qquad \text{(注意 } \bar{X} \text{ 和 } S^2 \text{ 独立)}$$

$$=D\bar{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2=\frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n(n-1)}$$

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

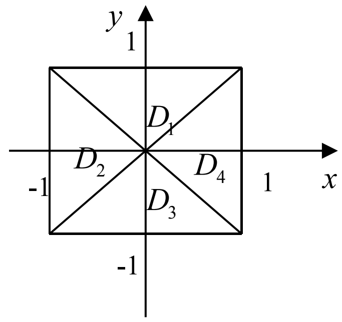
一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(1) 当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则 (　)

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$.　　(B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$.　　(D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

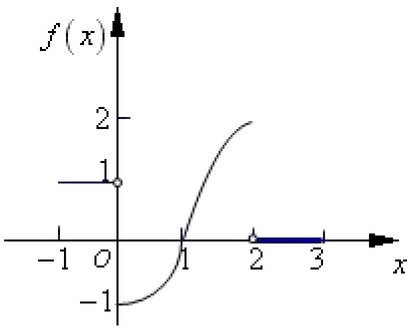
(2) 如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\ (k=1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x\,dxdy$,则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} =$ (　)



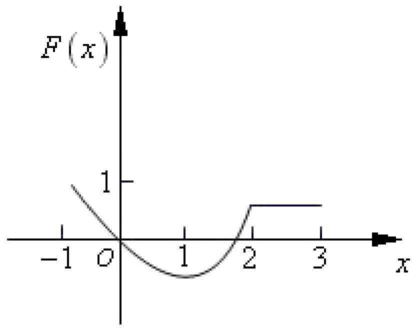
(A) I_1.　　(B) I_2.

(C) I_3.　　(D) I_4.

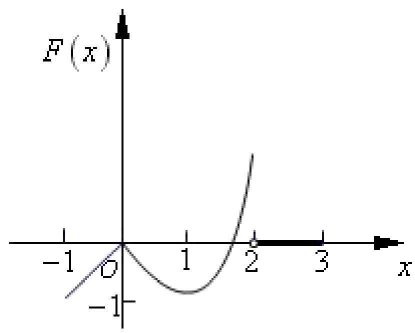
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



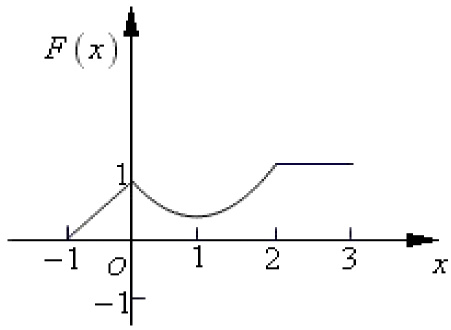
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的图形为 (　)



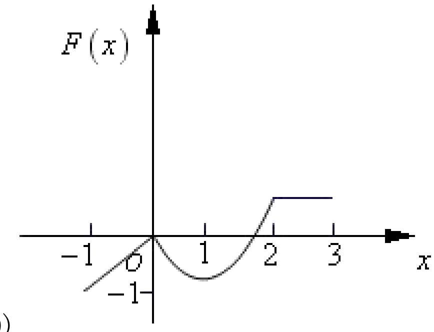
(A)



(B)



(C)



(D)

(4) 设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则 ( )

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛. (B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛. (D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散.

(5) 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，则由基$\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$到基

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(6) 设A, B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别为A, B的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$的伴随矩阵为 ( )

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $EX=$ ( )

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________.

(11) 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\le x\le\sqrt{2}\right)$, 则 $\int_L xds=$__________.

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$, 则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz=$__________.

(13) 若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为__________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k=$__________.

三、解答题：15－23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $\left(4,0\right)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(Ⅰ)求 S_1 及 S_2 的方程;

(Ⅱ)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在 (a,b) 可导, 则存在 $\xi\in\left(a,b\right)$, 使得 $f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(\xi\right)\left(b-a\right)$.

(Ⅱ)证明:若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $\left(0,\delta\right)\left(\delta>0\right)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'\left(x\right)=A$, 则 $f'_+\left(0\right)$ 存在, 且 $f'_+\left(0\right)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\ \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明: ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(Ⅰ) 求 $P\left\{X=1 \middle| Z=0\right\}$;

(Ⅱ) 求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求参数 λ 的矩估计量;

(Ⅱ) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(1) 【答案】(A)

【解析】 $f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}\overset{等}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}\\&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{a^3}{6b}\right)\frac{\sin ax}{ax}=-\frac{a^3}{6b}=1,\end{aligned}$$

即 $a^3=-6b$, 故排除 B,C.

另外, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在,蕴含了 $1-a\cos ax\to 0\ \left(x\to 0\right)$, 故 $a=1$, 排除 D.

所以本题选 A.

(2) 【答案】(A)

【解析】本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性.

令 $f(x,y)=y\cos x$,

D_2,D_4 两区域关于 x 轴对称, $f(x,-y)=-y\cos x=-f(x,y)$, 即被积函数是关于 y 的奇函数, 所以 $I_2=I_4=0$;

D_1,D_3 两区域关于 y 轴对称, $f(-x,y)=y\cos(-x)=y\cos x=f(x,y)$, 即被积函数是关于 x 的偶函数, 所以

$$I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\ge x,0\le x\le 1\}}y\cos xdxdy>0,$$
$$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)|y\le -x,0\le x\le 1\}}y\cos xdxdy<0.$$

所以正确答案为(A).

(3) 【答案】(D)

【解析】此题为定积分的应用知识考核,由 $y=f(x)$ 的图形可以看出,其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$, 从而可得出下面几个方面的特征：

① $x\in\left[-1,0\right]$ 时, $F(x)\le 0$ 为线性函数, 单调递增；

② $x\in\left[0,1\right]$ 时, $F(x)\le 0$, 且单调递减；

③ $x\in[1,2]$时，$F(x)$单调递增；

④ $x\in[2,3]$时，$F(x)$为常函数；

⑤ $F(x)$为连续函数.

结合这些特点,可见正确选项为(D).

(4) 【答案】C

【解析】**解法 1** 举反例：

取 $a_n=b_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，排除(A)；

取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是发散的，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，排除(B)；

取 $a_n=b_n=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 是发散的，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，排除(D)，

故答案为(C).

解法 2 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则由定义可知 $\exists N_1$，使得 $n>N_1$ 时，有 $|a_n|<1$；

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，则由定义可知 $\exists N_2$，使得 $n>N_2$ 时，有 $|b_n|<1$，

从而，当 $n>N_1+N_2$ 时，有 $a_n^2b_n^2<|b_n|$，则由正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.

(5) 【答案】(A)

【解析】根据过渡矩阵的定义，知由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵 M 满足：

$$\begin{aligned}\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)&=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)M\\&=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以此题选(A).

(6) 【答案】(B)

【解析】分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6,$$

即分块矩阵可逆,且

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$= 6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & O \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}.$$

故答案为(B).

(7) 【答案】(C)

【解析】因为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 所以

$$F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

因此,
$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xF'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\Phi'(x)+0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]dx$$

$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx .$$

由于 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx \ \underline{\underline{\frac{x-1}{2}=u}}\ 2\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\Phi'(u)du$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}2u\Phi'(u)du+2\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi'(u)du=2,$$

$$EX=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'(x)dx+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx=0+0.35\times 2=0.7 .$$

(8) 【答案】(B)

【解析】

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{XY\le z\} \\ &= P\{XY\le z|Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\le z|Y=1\}P\{Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{XY\le z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{XY\le z|Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X\cdot 0\le z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\le z|Y=1\}, \end{aligned}$$

由于 X,Y 相互独立, 所以

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{X\cdot 0\le z\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\}\ .$$

(1) 当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$;

(2) 当 $z\ge 0$ 时, $F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z)$,

因此, $z=0$ 为间断点, 故选(B).

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 【答案】$xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+yx\cdot f''_{22}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}\ .$$

(10) 【答案】$x(1-e^x)+2$

【解析】由常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x$ 可知

$y_1=e^x$, $y_2=xe^x$ 为其两个线性无关的解, 代入齐次方程, 有

$$y_1''+ay_1'+by_1=(1+a+b)e^x=0\Rightarrow 1+a+b=0,$$
$$y_2''+ay_2'+by_2=[2+a+(1+a+b)x]e^x=0\Rightarrow 2+a=0,$$

从而可见 $a=-2,b=1$, 非齐次微分方程为 $y''-2y'+y=x$.

设特解 $y^*=Ax+B$, 代入非齐次微分方程, 得 $-2A+Ax+B=x$, 即

$$Ax+(-2A+B)=x\Rightarrow\begin{cases}A=1\\-2A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$$

所以特解 $y^*=x+2$, 通解 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x+x+2$.

把 $y\left(0\right)=2,y'\left(0\right)=0$ 代入通解, 得 $C_1=0,C_2=-1$. 所以所求解为

$$y=-xe^x+x+2=x(1-e^x)+2\ .$$

(11)【答案】$\frac{13}{6}$

【解析】由题意可知, $y=x^2,0\le x\le\sqrt{2}$, 则

$$ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+4x^2}dx\ ,$$

所以 $$\int_L xds=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}d\left(1+4x^2\right)$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4x^2\right)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

(12) 【答案】$\frac{4}{15}\pi$

【解析】**解法 1：**

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\rho^2\cos^2\varphi d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\left(-\cos\varphi\right)\int_0^1\rho^4d\rho$$

$$=2\pi\cdot\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}\pi.$$

解法 2：由轮换对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz$$

所以, $$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r^4\sin\varphi dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1r^4dr=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{4}{15}\pi\ .$$

(13) 【答案】2

【解析】$\alpha^T\beta=2$, $\therefore\beta\alpha^T\beta=\beta\left(\alpha^T\beta\right)=2\cdot\beta$, 又由于 $\beta\neq0$, $\therefore\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

(14) 【答案】-1

【解析】由于 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 所以 $E(\overline{X}+kS^2)=np^2$, 即

$$E(\overline{X}+kS^2)=np^2\Rightarrow E(\overline{X})+E(kS^2)=np^2$$

$$\Rightarrow np+knp(1-p)=np^2$$
$$\Rightarrow 1+k(1-p)=p$$
$$\Rightarrow k(1-p)=p-1\Rightarrow k=-1.$$

三、解答题：15－23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

【解析】 $$f_x'(x,y)=2x(2+y^2)\ ,$$

$$f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1\ .$$

令$\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0, \end{cases}$解得唯一驻点$(0,\frac{1}{e})$.

由于

$$A=f''_{xx}(0,\frac{1}{e})=2(2+y^2)\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2}),$$

$$B=f''_{xy}(0,\frac{1}{e})=4xy\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=0,$$

$$C=f''_{yy}(0,\frac{1}{e})=(2x^2+\frac{1}{y})\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=e,$$

所以 $B^2-AC=-2e(2+\frac{1}{e^2})<0$, 且 $A>0$.

从而$f(0,\frac{1}{e})$是$f(x,y)$的极小值, 极小值为$f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

(16)(本题满分 9 分)

【解析】曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}$的交点为$(0,0)$和$(1,1)$, 所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2})\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n$$
$$=\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2})=\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2})=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

考查幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$, 知其收敛域为$(-1,1]$, 和函数为$-\ln(1+x)$.

因为$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$, 令$x=1$, 得

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S(1)=1-\ln 2.$$

(17)(本题满分 11 分)

【解析】(I)椭球面 S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$.

设切点为 (x_0,y_0), 则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$.

将 $x=4, y=0$ 代入切线方程得 $x_0=1$, 从而 $y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-x_0^2}=\pm\frac{3}{2}$.

所以切线方程为 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1$, 从而圆锥面 S_2 的方程为 $(\frac{x}{4}-1)^2=\frac{y^2+z^2}{4}$, 即

$$(x-4)^2-4y^2-4z^2=0.$$

(II) S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$ 、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差, 其中 $V=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(4-x^2)dx=\frac{5}{4}\pi$.

故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi$.

(18)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ)取 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,

由题意知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

(Ⅱ)对于任意的 $t\in(0,\delta)$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续, 在 $(0,t)$ 内可导, 由右导数定义及拉格朗日中值定理

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi), \text{其中} \xi\in(0,t).$$

由于 $\lim_{t\to0^+}f'(t)=A$, 且当 $t\to0^+$ 时, $\xi\to0^+$, 所以 $\lim_{t\to0^+}f'(\xi)=A$, 故 $f'_+(0)$ 存在, 且

$f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

【解析】取 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, Ω 为 Σ 与 Σ_1 之间的部分.

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

根据高斯公式

$$\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega}0dxdydz=0 .$$

$$\oiint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}3dxdydz=4\pi.$$

所以 $I=4\pi$.

(20)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ)对矩阵 $(A\vdots\xi_1)$ 施以初等行变换

$$\left(A\vdots\xi_1\right)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&\vdots&-1\\-1&1&1&\vdots&1\\0&-4&-2&\vdots&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\vdots&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\vdots&\frac{1}{2}\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$

可求得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\\\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\\k\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

又 $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$, 对矩阵 $(A^2\vdots\xi_1)$ 施以初等行变换

$$\left(A^2 \vdots \xi_1\right)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & -1 \\ -2 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 4 & 4 & 0 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

可求得 $\xi_3=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-a \\ a \\ b \end{pmatrix}$，其中$a,b$为任意常数.

（Ⅱ）**解法 1** 由（Ⅰ）知

$$\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|=\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2}+\frac{k}{2} & -\frac{1}{2}-a \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{k}{2} & a \\ -2 & k & b \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

解法 2 由题设可得$A\xi_1=0$. 设存在数k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0, \qquad ①$$

等式两端左乘A，得$k_2A\xi_2+k_3A\xi_3=0$，即

$$k_2\xi_1+k_3A\xi_3=0, \qquad ②$$

等式两端再左乘A，得$k_3A^2\xi_3=0$，即$k_3\xi_1=0$.

由于$\xi_1\neq 0$，于是$k_3=0$，代入②式，得$k_2\xi_1=0$，故$k_2=0$. 将$k_2=k_3=0$代入①式，可得$k_1=0$，从而$\xi_1,\ \xi_2,\xi_3$线性无关.

(21)（本题满分 11 分）

【解析】（Ⅰ）二次型f的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -1\\ 0 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

(Ⅱ)**解法 1** 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 所以 A 合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 其秩为 2, 故

$\left|A\right|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$, 于是 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=2$.

当 $a=0$ 时, $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2-y_2^2$, 不合题意.

当 $a=-1$ 时, $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=-3$, 此时 f 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2$, 不合题意.

当 $a=2$ 时, $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=0$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

综上可知, $a=2$.

解法 2 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 所以 A 的特征值有 2 个为正数, 1 个为零.

又 $a-2<a<a+1$, 所以 $a=2$.

(22)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ) $P(X=1\left|Z=0\right.)=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{C_2^1\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{9}$.

(Ⅱ)由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 0, 1, 2.

$$P\left(X=0,Y=0\right)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{4},P\left(X=1,Y=0\right)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{6},$$

$$P\left(X=2,Y=0\right)=\frac{1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{36},P\left(X=0,Y=1\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{3},$$

$$P\left(X=1,Y=1\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},P\left(X=2,Y=1\right)=0,$$

$$P\left(X=0,Y=2\right)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P\left(X=1,Y=2\right)=0,P\left(X=2,Y=2\right)=0,$$

故 (X,Y) 的概率分布为

X	0	1	2

Y			
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

(23)(本题满分 11 分)

【解析】(Ⅰ) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\dfrac{2}{\lambda}.$

令 $\overline{X}=EX$，即 $\overline{X}=\dfrac{2}{\lambda}$，得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

(Ⅱ)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda\right)=\lambda^{2n}\cdot e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

由 $\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、**选择题**(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ ( )

(A) 1. (B) e. (C) e^{a-b}. (D) e^{b-a}.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关. (B)仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关. (D) 与 m,n 取值都无关.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ( )

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$. (B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$. (D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(5) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,E 为 m 阶单位矩阵,若 $AB=E$,则 ( )

(A) 秩 $r(A)=m$,秩 $r(B)=m$. (B) 秩 $r(A)=m$,秩 $r(B)=n$.

(C) 秩 $r(A)=n$,秩 $r(B)=m$. (D) 秩 $r(A)=n$,秩 $r(B)=n$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵,且 $A^2+A=O$,若 A 的秩为 3,则 A 相似于 ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1-e^{-x}, & x\ge 1 \end{cases}$，则 $P\{X=1\}$ =（　）

(A) 0.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D) $1-e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), x\le 0 \\ bf_2(x), x>0 \end{cases}$，$(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足（　）

(A) $2a+3b=4$.　　(B) $3a+2b=4$.　　(C) $a+b=1$.　　(D) $a+b=2$.

二、**填空题**(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.）

(9) 设 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)du, \end{cases}$ 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ ________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ______.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\ \{x\in[-1,1]\}$，起点是 (-1.0)，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le z\le 1\right\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$ ______.

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,a)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 2，则 $a=$ ______.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $E\left(X^2\right)$ = ________.

三、**解答题**(15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^{x}$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x\right)=\int_{1}^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(I)比较 $\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n\left|\ln t\right|dt\ \left(n=1,2,\cdots\right)$ 的大小,说明理由;

(II)记 $u_n=\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n dt\ \left(n=1,2,\cdots\right)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$,其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 Q 的第三列为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(Ⅰ)求矩阵 A;

(Ⅱ)证明 $A+E$ 为正定矩阵,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数（$i=1,2,3$）．试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差.

数学一试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解析】本题属于未定式求极限,极限为1^∞型,故可以用“e的抬起法”求解.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[x^2-(x-a)(x+b)\right]}{(x-a)(x+b)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\\&=a-b\end{aligned}$$

故原式极限为e^{a-b},所以应该选择(C).

(2)【答案】 (B).

【解析】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\frac{y}{x}+F_2'\cdot\frac{z}{x}}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z\ .$$

(3) 【答案】 (D).

【解析】 $x=0$与$x=1$都是瑕点.应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx\ ,$$

用比较判别法的极限形式,对于$\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$,由于$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac1m}}{x^{\frac1n}}}{\frac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}}=1$.

显然，当$0<\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$，则该反常积分收敛.

当$\frac{1}{n}-\frac{2}{m}\le 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$存在，此时$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$实际上不是反常积分，故收敛.

故不论m,n是什么正整数，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$总收敛. 对于$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$，取$0<\delta<1$，不论$m,n$是什么正整数，

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to 1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0\ ,$$

所以$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$收敛，故选(D).

(4)【答案】 (D).

【解析】$\sum\limits_{i=1}^{n}\ \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})=(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy\ .$$

(5)【答案】 (A).

【解析】由于$AB=E$，故$r(AB)=r(E)=m$. 又由于$r(AB)\le r(A),r(AB)\le r(B)$，故

$$m \le r(A), m \le r(B) \qquad ①$$

由于 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 矩阵, 故

$$r(A) \le m, r(B) \le m \qquad ②$$

由①、②可得 $r(A)=m, r(B)=m$, 故选 A.

(6)【答案】 (D).

【解析】设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2+A=O$, 所以 $\lambda^2+\lambda=0$, 即 $(\lambda+1)\lambda=0$, 这样 A 的特征值只能为-1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即 $A\sim\Lambda$, $r(A)=r(\Lambda)=3$, 因此, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$, 即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$.

(7) 【答案】 (C).

【解析】离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式, 得到随机变量 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$, 故本题选 (C).

(8)【答案】 (A).

【解析】根据题意知, $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ $(-\infty<x<+\infty)$, $f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

利用概率密度的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$$

所以整理得到 $2a+3b=4$, 故本题应选 (A).

二、填空题

(9) 【答案】0.

【解析】因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{-e^{-t}}=-\ln\left(1+t^2\right)e^t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(-\ln\left(1+t^2\right)e^t\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[-\frac{2t}{1+t^2}\cdot e^t-\ln\left(1+t^2\right)e^t\right]\cdot\left(-e^t\right)\text{, 所以}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0.$$

(10)【答案】 -4π .

【解析】令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，$dx=2tdt$，利用分部积分法，

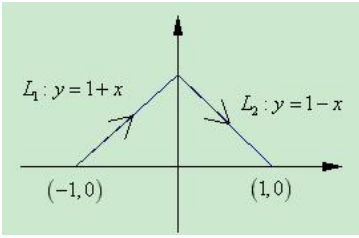
$$原式=\int_0^{\pi} t\cos t\cdot 2tdt=\int_0^{\pi}2t^2\cos tdt=2\int_0^{\pi}t^2d\sin t$$

$$=2\left[t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin tdt\right]=4\int_0^{\pi}td\cos t$$

$$=4\left[t\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right]=4\pi\cos\pi-4\sin t\Big|_0^{\pi}=-4\pi .$$

(11) 【答案】0．

【解析】$\int_L xydx+x^2dy=\int_{L_1}xydx+x^2dy+\int_{L_2}xydx+x^2dy$



$$=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+x^2dx+\int_0^1 x(1-x)dx+x^2(-dx)$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(2x^2+x\right)dx+\int_0^1\left(x-2x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=0$$

(12) 【答案】$\frac{2}{3}$．

【解析】
$$\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1dz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\cdot\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1\right)}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^6}{12}\right)\Big|_0^1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}d\theta}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(13)【答案】$a=6$．

【解析】因为由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间维数为 2，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$．对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$a=6$.

(14) 【答案】2.

【解析】利用离散型随机变量概率分布的性质,知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{X=k\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce\text{ ,整理得到 }C=e^{-1}\text{ ,即}$$

$$P\left\{X=k\right\}=\frac{e^{-1}}{k!}=\frac{1^k}{k!}e^{-1}.$$

故X服从参数为1的泊松分布,则$E\left(X\right)=1,D\left(X\right)=1$,根据方差的计算公式有

$$E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=1+1^2=2.$$

三、**解答题**

(15)【解析】对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=2$,所以对应齐次方程的通解为$y_c=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程的一个特解为$y^*=x(ax+b)e^x$,则

$$\left(y^*\right)'=\left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x,$$

$$\left(y^*\right)''=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)e^x,$$

代入原方程,解得$a=-1,b=-2$,故特解为$y^*=x(-x-2)e^x$.

故方程的通解为$y=y_c+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$.

(16)【解析】因为$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,令 $f'(x)=0$,则 $x=0,x=\pm1$.

又$f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$,则$f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$,所以

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm1)=4e^{-1}>0$, 所以 $f(\pm1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge1$ 时, $f'(x)>0$; $0\le x<1$ 时, $f'(x)<0$; $-1\le x<0$ 时, $f'(x)>0$; $x<-1$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(17)【解析】(I)当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$, 故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$, 所以

$$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n<\left|\ln t\right|t^n,$$

则
$$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt\ \left(n=1,2,\cdots\right).$$

(II) $\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)=\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}$, 故由

$$0<u_n<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=\frac{1}{\left(n+1\right)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18)【解析】

(I) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot x^{2(n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}}{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|\cdot x^2=x^2,$$

所以, 当 $x^2<1$, 即 $-1<x<1$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x^2>1$ 时, 原级数发散, 因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼兹判别法知, 此级数收敛, 故原级数的收敛域为 $\left[-1,1\right]$.

(II) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\right)$, 其中令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\quad x\in\left(-1,1\right),$$

所以有 $$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}\quad x\in(-1,1),$$

从而有 $$S_1'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\quad x\in(-1,1),$$

故 $$S_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx+S_1(0)=\arctan x\text{ , }x\in(-1,1).$$

$S_1(x)$ 在 $x=-1,1$ 上是连续的, 所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的. 所以

$$S(x)=x\cdot\arctan x\text{ , }x\in[-1,1].$$

(19)【解析】（Ⅰ）令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，故动点 $P(x,y,z)$ 的切平面的法向量为 $(2x,2y-z,2z-y)$，由切平面垂直 xOy，故所求曲线 C 的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ \quad 2z-y=0,\end{cases}$ 消去 z，可得曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线所围成的 xOy 上的区域 D ：$\{(x,y)\mid x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$，由 $(x^2+y^2+z^2-yz)'_x=(1)'_x$，由

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy,$$

故

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint_D(x+\sqrt{3})dxdy=\iint_D xdxdy+\iint_D\sqrt{3}dxdy$$

$$=\iint_D\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20)【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\overline{A})<3$，对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当$\lambda=1$时, $\bar{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, 此时, $r(A)\neq r(\bar{A})$, 故$Ax=b$无解(舍去).

当$\lambda=-1$时, $\bar{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$, 由于$r(A)=r(\bar{A})<3$, 所以$a=-2$, 故$\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2：已知$Ax=b$有 2 个不同的解, 故$r(A)=r(\bar{A})<3$, 因此$|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时, $r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$, 此时, $Ax=b$无解, 因此$\lambda=-1$. 由$r(A)=r(\bar{A})$, 得$a=-2$.

（ II ）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\ x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

因此$Ax=b$的通解为$x=k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$, 其中k为任意常数.

(21)【解析】（ I ）由于二次型在正交变换$x=Qy$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$, 所以A的特征值

为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$.

由于Q的第3列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$,所以$A$对应于$\lambda_3=0$的特征向量为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$,记为$\alpha_3$. 由于$A$是实对称矩阵,所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的,设属于$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量为$\alpha=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$,则$\alpha^T\alpha_3=0$,即$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$. 求得该方程组的基础解系为$\alpha_1=\left(0,1,0\right)^T,\alpha_2=\left(-1,0,1\right)^T$,因此$\alpha_1,\alpha_2$为属于特征值$\lambda=1$的两个线性无关的特征向量.

由于α_1,α_2是相互正交的,所以只需单位化:

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\left\|\alpha_1\right\|}=\left(0,1,0\right)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\left\|\alpha_2\right\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,0,1\right)^T.$$

取$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,则$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,且$Q^{-1}=Q^T$,

故 $A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（II）$A+E$也是实对称矩阵,A的特征值为1,1,0,所以$A+E$的特征值为2,2,1,由于$A+E$的特征值全大于零,故$A+E$是正定矩阵.

(22)【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度$f\left(x,y\right)$后,要求条件概率密度$f_{Y|X}(y\,|\,x)$,可以根据条件概率公式$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$来进行计算.本题中还有待定参数,$A$要根据概率密度的性质求解,具体方法如下.

$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = A\pi \text{，即} A=\pi^{-1},$$

故 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，$-\infty < x < +\infty$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

(23)【解析】$N_1 \sim B(n,1-\theta), N_2 \sim B(n,\theta-\theta^2), N_3 \sim B(n,\theta^2)$

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)$$

$$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.$$

因为 T 是 θ 的无偏估计量, 所以 $E(T)=\theta$，即得 $\begin{cases} na_1=0 \\ n(a_2-a_1)=1 \\ n(a_3-a_2)=0 \end{cases}$，整理得到

$a_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{n}$, $a_3=\dfrac{1}{n}$. 所以统计量

$$T=0\times N_1+\frac{1}{n}\times N_2+\frac{1}{n}\times N_3=\frac{1}{n}\times(N_2+N_3)=\frac{1}{n}\times(n-N_1).$$

注意到 $N_1 \sim B(n,1-\theta)$，故

$$D(T)=D\left[\frac{1}{n}\times(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}\times D(N_1)=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是（　　）

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是（　　）

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　　）

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为（　　）

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)=$(　　)

(A) $E(U)\cdot E(V)$.　　(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.　　(D) $E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)$=______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数$z=f(xy,yg(x))$，其中函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)(本题满分 10 分)

求方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数，其中k为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：对任意的正整数 n，都有$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\left\{a_n\right\}$收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中$D=\left\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

计算二重积分$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组$\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$线性表示.

(I) 求a的值;

(II) 将β_1,β_2,β_3由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

A为三阶实对称矩阵，A的秩为 2，即$r\left(A\right)=2$，且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求A的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵A.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X与Y的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma^2}$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma^2})$ 和 $D(\hat{\sigma^2})$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)【答案】(C).

【解析】记 $y_1 = x-1, y_1' = 1, y_1'' = 0$， $y_2 = (x-2)^2, y_2' = 2(x-2), y_2'' = 2,$

$y_3 = (x-3)^3, y_3' = 3(x-3)^2, y_3'' = 6(x-3),$

$y_4 = (x-4)^4, y_4' = 4(x-4)^3, y_4'' = 12(x-4)^2,$

$y'' = (x-3)P(x)$，其中 $P(3) \neq 0$， $y''\big|_{x=3} = 0$，在 $x=3$ 两侧，二阶导数符号变化，

故选(C).

(2)【答案】(C).

【解析】观察选项：(A)，(B)，(C)，(D)四个选项的收敛半径均为 1，幂级数收敛区间的中心在 $x=1$ 处，故(A)，(B)错误；因为$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $a_n \geq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，将 $x=2$ 代入幂级数得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，而已知 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 无界，故原幂级数在 $x=2$ 处发散，(D)不正确．当 $x=0$ 时，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足莱布尼茨判别法收敛，故 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛．故正确答案为(C).

(3)【答案】(A).

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\big|_{(0,0)} = f'(x)\cdot \ln f(y)\big|_{(0,0)} = f'(0)\ln f(0) = 0$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}\big|_{(0,0)} = f(x)\cdot \dfrac{f'(y)}{f(y)}\big|_{(0,0)} = f'(0) = 0,$ 故 $f'(0) = 0$,

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = f''(x)\cdot \ln f(y)\Big|_{(0,0)} = f''(0)\cdot \ln f(0) > 0,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} = f'(x)\cdot \frac{f'(y)}{f(y)}\Big|_{(0,0)} = \frac{[f'(0)]^2}{f(0)} = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)} = f(x)\cdot \frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{f^2(y)}\Big|_{(0,0)} = f''(0) - \frac{[f'(0)]^2}{f(0)} = f''(0).$$

又 $AC - B^2 = [f''(0)]^2 \cdot \ln f(0) > 0,$ 故 $f(0) > 1, f''(0) > 0$.

(4)【答案】(B).

【解析】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时， $0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(5)【答案】 (D).

【解析】由于将A的第2列加到第1列得矩阵B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$， $A=BP_1^{-1}$.

由于交换B的第2行和第3行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即$P_2B=E,$故$B=P_2^{-1}=P_2$．因此， $A=P_2P_1^{-1}$，故选(D).

(6)【答案】(D).

【解析】由于$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以$A(1,0,1,0)^T=0$，且$r(A)=4-1=3$， 即 $\alpha_1+\alpha_3=0$， 且 $|A|=0$． 由此可得 $A^*A=|A|E=O$， 即$A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A^*x=0$的解.

由于$r(A)=3$， $\alpha_1+\alpha_3=0$，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关．又由于$r(A)=3$，所以$r(A^*)=1$，因此$A^*x=0$的基础解系中含有$4-1=3$个线性无关的解向量．而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且为$A^*x=0$的解，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可作为$A^*x=0$的基础解系，故选(D).

(7)【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

所以$f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$为概率密度.

(8)【答案】(B).

【解析】因为 $U=\max\{X,Y\}=\begin{cases}X,\ X\ge Y,\\Y,\ X<Y,\end{cases}$ $V=\min\{X,Y\}=\begin{cases}Y,\ X\ge Y,\\X,\ X<Y.\end{cases}$

所以，$UV = XY$，于是 $E(UV) = E(XY) \ = E(X)E(Y)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)【答案】$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

【解析】选取 x 为参数，则弧微元 $ds = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx = \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \sec x dx$

所以 $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2})$.

(10)【答案】$y = e^{-x}\sin x$.

【解析】由通解公式得

$$y = e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cos x \cdot e^{\int dx}dx + C)$$

$$= e^{-x}(\int \cos x dx + C)$$

$$= e^{-x}(\sin x + C) .$$

由于 $y(0)=0$, 故 C =0．所以 $y = e^{-x}\sin x$.

(11)【答案】4.

【解析】$\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y\cdot\frac{y\cos xy - \sin xy\cdot 2xy^2}{[1+(xy)^2]^2} ,$$

故 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{(0,2)} = 4$.

(12)【答案】π .

【解析】取 $S: x+y-z=0, x^2+y^2\le 1$，取上侧，则由斯托克斯公式得，

$$原式=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \iint_S ydydz + xdzdx + dxdy .$$

因 $z = x+y, z_x^{'} = 1, z_y^{'} = 1$. 由转换投影法得

$$\iint_S ydydz + xdzdx + dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} [y\cdot(-1) + x(-1) + 1]dxdy .$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-x-y+1)dxdy = \pi$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = \pi .$$

(13)【答案】$a=1$.

【解析】由于二次型通过正交变换所得到的标准形前面的系数为二次型对应矩阵 A 的特征值，故 A 的特征值为 0，1，4．二次型所对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=0$，故 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=1$.

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$.

【解析】根据题意，二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 服从 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$．因为 $\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量 X,Y 独立，所以 X,Y^2．从而有

$$E\left(XY^2\right)=E\left(X\right)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D\left(Y\right)+E^2\left(Y\right)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\cdot\frac{1}{e^x-1}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(16)(本题满分 9 分)

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]+y\left[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)\right]$$

$$+g'(x)\cdot f_2'\left[xy,yg(x)\right]+yg'(x)\left\{f_{12}''[xy,yg(x)]\cdot x+f_{22}''[xy,yg(x)]g(x)\right\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2 z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

(17)（本题满分 10 分）

【解析】显然 $x=0$ 为方程一个实根.

当 $x\neq 0$ 时，令 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\arctan x}-k,$

$$f'\left(x\right)=\frac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{\left(\arctan x\right)^2}.$$

令 $g\left(x\right)=\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}\qquad x\in R$，

$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0$，

即 $x\in R,\ g'\left(x\right)>0$.

又因为 $g\left(0\right)=0$，

即当 $x<0$ 时，$g\left(x\right)<0$； 当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)>0$.

当 $x<0$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)>0$.

所以当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递增

又由 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arctan x}-k=1-k$，

$\lim\limits_{x\to \infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\arctan x}-k=+\infty$，

所以当 $1-k<0$ 时，由零点定理可知 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各有一个零点；

当 $1-k\geq 0$ 时，则 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内均无零点.

综上所述，当 $k>1$ 时，原方程有三个根．当 $k\leq 1$ 时，原方程有一个根.

(18)(本题满分 10 分)

【解析】(I)设 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right), x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(0\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 时,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}\text{,即:}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

$$\text{亦即:}\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

结论得证.

(II)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

先证数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln\left(n+1\right)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用(I)的结论可以得到 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$,所以 $\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ 得到 $a_{n+1}<a_n$,即

数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

再证数列 $\left\{a_n\right\}$ 有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(n+1\right),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln\left(n+1\right)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛．

(19)(本题满分 11 分)

【解析】$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf'_x(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]$$

$$=\int_0^1 xdx\left(f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right).$$

因为$f(x,1)=0$，所以$f'_x(x,1)=0$.

$$I=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=\iint_D fdxdy=a.$$

(20)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，对$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当$a=5$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示.

(II)对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\\alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（22）（本题满分 11 分）

【解析】(I)因为$P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以$P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=1-P\left\{X^2=Y^2\right\}=0$.

即 $P\left\{X=0,Y=-1\right\}=P\left\{X=0,Y=1\right\}=P\left\{X=1,Y=0\right\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$P\left\{X=0,Y=0\right\}=P\left\{X=0\right\}-P\left\{X=0,Y=-1\right\}-P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$；

$P\left\{X=1,Y=-1\right\}=P\left\{Y=-1\right\}-P\left\{X=0,Y=-1\right\}=\frac{1}{3}$；

$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left\{Y=1\right\}-P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$.

即$\left(X,Y\right)$的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z的所有可能取值为$-1,0,1$.

$P\left\{Z=-1\right\}=P\left\{X=1,Y=-1\right\}=\frac{1}{3}$.

$P\left\{Z=1\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$.

$P\left\{Z=0\right\}=1-P\left\{Z=1\right\}-P\left\{Z=-1\right\}=\frac{1}{3}$.

$Z=XY$的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III)因为$\rho_{XY}=\frac{Cov\left(XY\right)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，

其中

$E\left(XY\right)=E\left(Z\right)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$，$E\left(Y\right)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

所以$E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)=0$，即$X$，$Y$的相关系数$\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

【解析】因为总体X服从正态分布，故设X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

(I) 似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\bullet e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\text{；}$$

取对数：$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$；

求导：$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_0)^2-\sigma^2]$.

令$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=0$，解得$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

σ^2的最大似然估计量为$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(II) 方法 1：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，令$Y_i=X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，则$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$.

$$E(\hat{\sigma^2})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=E(Y_i^2)=D(Y_i)+[E(Y_i)]^2=\sigma^2.$$

$$D(\hat{\sigma^2})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=\frac{1}{n^2}D(Y_1^2+Y_2{}^2+\cdots+Y_n{}^2)=\frac{1}{n}D(Y_i^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{E(Y_i^4)-[E(Y_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(3\sigma^4-\sigma^4)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

方法 2：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，则$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，得到$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2\left(n\right)$，即$\sigma^2Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_0\right)^2$.

$$E\left(\hat{\sigma^2}\right)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n}E\left(\sigma^2 Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2 E\left(Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2\cdot n=\sigma^2 .$$

$$D\left(\hat{\sigma^2}\right)=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n^2}D\left(\sigma^2 Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4 D\left(Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4 .$$

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题

!，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx$ $(k=1,2,3)$,则有 D

A）$I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

(5) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $p\{x<y\}=$（）

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（）

$(A)\ 1$　$(B)\ \frac{1}{2}$　$(C)\ -\frac{1}{2}$　$(D)\ -1$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$_______。

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx$ _______。

(11) $\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ _______。

(12) 设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$_______。

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\bar{C})=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\y=\cos t\end{cases}\left(0\le t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$。

若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy$。

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（II）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型

$f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：（1）$P(X=2Y)$；

（2）$\operatorname{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$，

设 $Z=X-Y$，

(1) 求 z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2) 设 $z_1,z_2,\text{L}\ z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）

【答案】：C

【解析】：$f^{'}(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f^{'}(0)=(-1)^{n-1}n!$

（3）

【答案】：

【解析】：由于 $f(x,y)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处连续，可知如果 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

这样，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，也即极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 存在，可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$，也即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。由可微的定义可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

（4）

【答案】：(D)

【解析】：$I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x dx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k{}'=e^{k^2}\sin k\ge 0,k\in\left(0,\pi\right)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin x dx$ 关于 k 在 $\left(0,\pi\right)$ 上为单调增

函数，又由于$1,2,3\in(0,\pi)$，则$I_1<I_2<I_3$，故选 D

（5）

【答案】：（C）

【解析】：由于$\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。故选（C）

（6）

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

（7）

【答案】：（A）

【解析】：(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-4y},x>0,y>0\\0，其它\end{cases}$

则$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{y}e^{-x-4y}dx=\int_0^{+\infty}e^{-5y}dy=\dfrac{1}{5}$

（8）**【答案】**：(D)

【解析】：设两段长度分别为x,y，显然$x+y=1,$即$y=-x+1$，故两者是线性关系，且是负相关，所以相关系数为-1

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）

【答案】：e^x

【解析】：特征方程为$r^2+r-2=0$，特征根为$r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的通解为$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由$f^{'}(x)+f(x)=2e^x$得$2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知$C_1=1,C_2=0$。

故$f(x)=e^x$

（10）

【答案】：$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】：令 $t=x-1$ 得 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_{-1}^{1}(t+1)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\dfrac{\pi}{2}$

（11）

【答案】：$\{1,1,1\}$

【解析】：$\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\left\{y,x-\dfrac{z}{y^2},\dfrac{1}{y}\right\}\Big|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$

（12）**【答案】**：$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】：由曲面积分的计算公式可知 $\iint\limits_{\Sigma}y^2ds=\iint\limits_{D}y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D}y^2dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 1\}$。故原式 $=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}y^2dx=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)dy=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

（13）

【答案】：2

【解析】：矩阵 xx^T 的特征值为 $0,0,1$，故 $E-xx^T$ 的特征值为 $1,1,0$。又由于为实对称矩阵，是可相似对角化的，故它的秩等于它非零特征值的个数，也即 $r\left(E-xx^T\right)=2$。

（14）

【答案】：$\dfrac{3}{4}$

【解析】：由条件概率的定义，$P\left(AB\,\middle|\,\overline{C}\right)=\dfrac{P\left(AB\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}$，

其中 $P\left(\overline{C}\right)=1-P\left(C\right)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，

$P\left(AB\overline{C}\right)=P\left(AB\right)-P\left(ABC\right)=\dfrac{1}{2}-P\left(ABC\right)$，由于 A,C 互不相容，即 $AC=\phi$，$P\left(AC\right)=0$，又 $ABC\subset AC$，得 $P\left(ABC\right)=0$，代入得 $P\left(AB\overline{C}\right)=\dfrac{1}{2}$，故 $P\left(AB\,\middle|\,\overline{C}\right)=\dfrac{3}{4}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\dfrac{x^2}{2}$，可得

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x$$

当$0<x<1$时，有$\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以$\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\geq 0$，

故$f'(x)\geq 0$，而$f(0)=0$，即得$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当$-1<x<0$，有$\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以$\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\leq 0$，

故$f'(x)\geq 0$，即得$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）

【解析】：$f(x,y)=xe-\frac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点．$f_x'(x,y)=e-x=0,f_y'(x,y)=-y=0$，解得函数为驻点为$(e,0)$.

又$A=f_{xx}'(e,0)=-1,B=f_{xy}'(e,0)=0,C=f_{yy}'(e,0)=-1$，

所以$B^2-AC<0,A<0$，故$f(x,y)$在点$(e,0)$处取得极大值$f(e,0)=\frac{1}{2}e^2$.

（17）

【解析】：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot\frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+4(n+1)+3}\right|=1$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$$

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}dx$$

$x=1$时$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$发散

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}}=\infty$$

$x=-1$时$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}(-1)^{2n}$收敛

$\therefore x\in(-1,1)$为函数的收敛域。

和函数为$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}\cdot\frac{1}{x}$

（18）

【解析】：（1）曲线 L 在任一处 (x,y) 的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{f'(t)}$，过该点 (x,y) 处的切线为 $Y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}\left(X-f(t)\right)$，令 $Y=0$ 得 $X=f'(t)\cos t+f(t)$.由于曲线 L 与 x 轴和 y 轴的交点到切点的距离恒为1.

故有 $\left[f'(t)\cot t+f(t)-f(t)\right]^2+\cos^2 t=1$，又因为 $f'(t)>0(0<t<\frac{\pi}{2})$

所以 $f'(t)=\frac{\sin t}{\cot t}$，两边同时取不定积分可得 $f(t)=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\sin t+C$，又由于 $f(0)=0$，所以 $C=0$.故函数 $f(t)=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\sin t$.

（2）此曲线 L 与 x 轴和 y 轴的所围成的无边界的区域的面积为：

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt=\frac{\pi}{4}.$$

（19）

【解析】：设圆 $x^2+y^2=2x$ 为圆 C_1,圆 $x^2+y^2=4$ 为圆 C_2，下补线利用格林公式即可，设所补直线 L_1 为 $x=0(0\le y\le 2)$，下用格林格林公式得：原式

$$=\int_{L+L_1} 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy-\int_{L_1} 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$$

$$=\iint_D (3x^2+1-3x^2)dxdy-\int_2^0 -2ydy$$

$$=\frac{1}{4}S_{C_2}-\frac{1}{2}S_{C_1}+4=\frac{\pi}{2}-4$$

（20）

【解析】:（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\0 & 1 & a & 0\\0 & 0 & 1 & a\\a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & a & 0\\0 & 1 & a\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\1 & a & 0\\0 & 1 & a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & a & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & a & 0\\a & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & a & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & a & 0\\0 & -a^2 & 0 & 1 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & a & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & a & 0\\0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & a & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & a & 0\\0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有$1-a^4=0$及$-a-a^2=0$，可知$a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

线性方程组$Ax=b$存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即：　$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$或−1.

当$\lambda=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故$\lambda=-1$.

（21）

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-6\right)=0$$

解得B矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于$\lambda_1=0,$解$\left(\lambda_1E-B\right)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于$\lambda_2=2,$解$\left(\lambda_2E-B\right)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于$\lambda_3=6,$解$\left(\lambda_3E-B\right)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将η_1,η_2,η_3单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$

（22）

【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

（1）$P\left(X=2Y\right)=P\left(X=0,Y=0\right)+P\left(X=2,Y=1\right)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（2）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=\operatorname{cov}\left(X,Y\right)-\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)$

$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EXEY$，其中 $EX=\frac{2}{3},EX^2=1,EY=1,EY^2=\frac{5}{3},DX=EX^2-\left(EX\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$DY=EY^2-\left(EY\right)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},EXY=\frac{2}{3}$

所以，$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=0$，$\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)=DY=\frac{2}{3}$，$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=-\frac{2}{3},\rho_{XY}=0$.

（23）

【解析】:（1）因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，故 $Z=X-Y\sim N(0,5\sigma^2)$，

所以，Z 的概率密度为 $f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{10\sigma^2}},(-\infty<z<+\infty)$

（2）似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i,\sigma^2)=\frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}=\left(10\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln\left(10\pi\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{10\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{10\left(\sigma^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$$

解得最大似然估计值为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，

最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$

（3）$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right)=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(EZ_i\right)^2+DZ_i\right]=\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}5\sigma^2=\sigma^2$

故$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量。

2013年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=2$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

（3）设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,...)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S(-\dfrac{9}{4})=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{4}$

（B）$\dfrac{1}{4}$

（C）$-\dfrac{1}{4}$

（D）$-\dfrac{3}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记

$I_i=\oint\limits_{l_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$（　　）

（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_3

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（6）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A） $\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B） $a=0,b$为任意常数

（C） $a=2,b=0$

（D） $a=2,b$为任意常数

（7）设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且 X_1~N(0,1)，X_2~N(0, 2^2)，$\mathrm{X}_3 \sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$, 则（　　）

（A） $P_1>P_2>P_3$

（B） $P_2>P_1>P_3$

（C） $P_3>P_1>P_2$

（D） $P_1>P_3>P_2$

（8）设随机变量 $X\sim t(n),Y\sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$,则 $P\{Y>c^2\}=$（　　）

（A） α
（B） $1-\alpha$
（C） 2α
（D） $1-2\alpha$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$ ________________.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$， $y_2=e^{x}-xe^{2x}$， $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$ ________________.

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________________.

(12) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________________.

（13）设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$, 则 $|A|=$ ____

（14）设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1 \mid Y>a\}=$ ________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$

（16）（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\ge 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数，

（I） 证明： $S''(x)-S(x)=0$,

（II） 求 $S(x)$ 的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$, 证明：

（I） 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$

（II） 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为Ω，

（I） 求曲面Σ的方程

（II） 求Ω的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$,

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

2013年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题答案

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=c,\therefore k=3,\ c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=2$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

【答案】A

【解析】设 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，

则 $F_x(x,y,z)=2x-y\sin(xy)+1\Rightarrow F_x(0,1,-1)=1$；

$F_y(x,y,z)=-x\sin(xy)+z\Rightarrow F_y(0,1,-1)=-1$；

$F_z(x,y,z)=y\Rightarrow F_z(0,1,-1)=1$，

所以该曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $x-(y-1)+(z+1)=0$，

化简得 $x-y+z=-2$，选A

（3）设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,\left(x\in[0,1]\right)$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S(-\frac{9}{4})=$（　）

（A）$\frac{3}{4}$

（B）$\frac{1}{4}$

（C）$-\frac{1}{4}$

（D）$-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】根据题意，将函数在$[-1,1]$上奇延拓 $f(x)=\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|, & 0<x<1\\ -\left|-x-\frac{1}{2}\right|, & -1<x<0\end{cases}$，它的傅里叶级数为$S(x)$它是以 2 为周期的，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时，$S(x)=f(x)$，因此 $S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{9}{4}+2)=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记 $I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $MAX(I_i)=($　　$)$

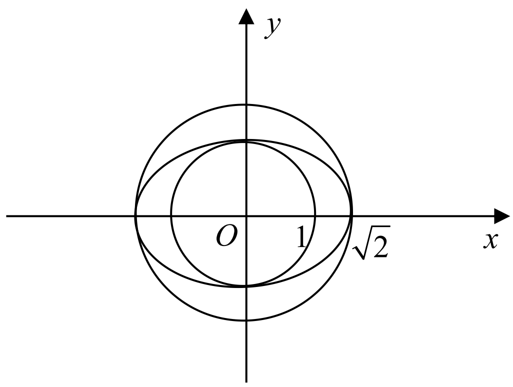
（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_4

【答案】D



【解析】 $I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$

$$=\iint_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy$$

利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及函数的正负，在区域D_1,D_4上函数为正值，则区域大，积分大，所以$I_4>I_1$，在D_4之外函数值为负，因此$I_4>I_2,I_4>I_3$，故选 D。

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若$AB=C$，且C可逆，则（　　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】(B)

【解析】由$C=AB$可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有$A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（6）矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$的特征值为$2,b,0$。

又$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

（7）设X_1，X_2，X_3是随机变量，且$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$，则（　　）

（A）$P_1>P_2>P_3$

（B）$P_2 > P_1 > P_3$

（C）$P_3 > P_1 > P_2$

（D）$P_1 > P_3 > P_2$

【答案】（A）

【解析】由 $X_1 \sim N\left(0,1\right), X_2 \sim N\left(0,2^2\right), X_3 \sim N\left(5,3^2\right)$ 知，

$p_1 = P\left\{-2 \le X_1 \le 2\right\} = P\left\{\left|X_1\right| \le 2\right\} = 2\Phi\left(2\right) - 1$，

$p_2 = P\left\{-2 \le X_2 \le 2\right\} = P\left\{\left|X_2\right| \le 2\right\} = 2\Phi\left(1\right) - 1$，故 $p_1 > p_2$.

由根据 $X_3 \sim N\left(5,3^2\right)$ 及概率密度的对称性知，$p_1 > p_2 > p_3$，故选（A）

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$,则 $P\{Y > c^2\} =$（　）

（A）α

（B）$1-\alpha$

（C）2α

（D）$1-2\alpha$

【答案】（C）

【解析】由 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$ 得，$Y = X^2$，故 $P\left\{Y > c^2\right\} = P\left\{X^2 > c^2\right\} = P\left\{X < -c 或 X > c\right\} = 2a$

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上)．

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n}) - 1) =$ ________________.

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n}) - 1) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$

由 $y - x = e^{x(1-y)}$，当 $x = 0$ 时，$y = 1$

方程两边取对数 $\ln(y - x) = x(1 - y)$

两边同时对 x 求导，得 $\frac{1}{y-x}\left(y' - 1\right) = (1 - y) - xy'$

将 $x = 0$，$y = 1$ 代入上式，得 $f'(0) = 1$

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$，$y_2 = e^x - xe^{2x}$，$y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y =$ ________________.

【答案】$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}$

【解析】因 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$ 是非齐次线性线性微分方程的解，则 $y_1-y_2=e^{3x}-e^{x}$ 是它所对应的齐次线性微分方程的解，可知对应的齐次线性微分方程的通解为 $y_p=C_1e^{3x}+C_2e^{x}$，因此该方程的通解可写为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t,\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$，

$\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=1$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}$，所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

(12) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________________.

【答案】$\ln 2$

【解析】$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d(\frac{1}{1+x})=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=[\ln x-\ln(1+x)]\Big|_1^{+\infty}=\ln\left.\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\ln 2$$

(13) 设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$，则 $|A|=$ ____

【答案】-1

【解析】

由 $a_{ij}+A_{ij}=0$ 可知，$A^T=-A^*$

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$

$=-\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$

从而有 $|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2$，故 $|A|$=-1.

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布 $X\sim\mathrm{N}(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})=$ ________。

【答案】$2e^2$

【解析】由 $X \sim N\left(0,1\right)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E\left(Xe^{2X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-4\right]}dx=2e^2 .$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

【解析】$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\int_0^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt}{\sqrt{x}}dx=-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\int_x^1\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

$$=-\int_0^1 dt\int_0^t\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=-2\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\sqrt{t}dt=-2\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}}dt$$

$$=-4\int_0^1\ln(t+1)d\sqrt{t}=-4\left[\sqrt{t}\ln(t+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt\right]$$

$$=-4\ln2+4\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt=-4\ln2+4\int_0^1\frac{u}{u^2+1}\cdot2udu$$

$$=-4\ln2+8\int_0^1\frac{u^2+1-1}{u^2+1}du=-4\ln2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$=-4\ln2+8\left(u-\arctan u\right)\Big|_0^1=-4\ln2+8(1-\frac{\pi}{4})=-4\ln2+8-2\pi$$

（16）（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

（III） 证明：$S''(x)-S(x)=0$，

（IV） 求 $S(x)$ 的表达式.

【解析】（I）设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$， $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$， $S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$，

因为 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，因此 $S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$ ；

（II）方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，所以 $S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$，

又 $a_0=S(0)=3\Rightarrow c_1+c_2=3$，$a_1=S'(0)=1\Rightarrow c_1-c_2=1$，

解得 $c_1=2,c_2=-1$，所以 $S(x)=2e^{-x}-e^{x}$。

17（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

【解析】$\begin{cases} f_x{}'=x^2e^{x+y}+(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(x^2+\text{y}+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y{}'=e^{x+y}+(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(1+\text{y}+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

解得 $(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$，

$$A=f_{xx}{}''=(2x+x^2)e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$$

$$B=f_{xy}{}''=e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$$

$$C=f_{yy}{}''=e^{x+y}+(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$$

对于 $(1,-\frac{4}{3})$ 点，$A=3e^{-\frac{1}{3}},B=e^{-\frac{1}{3}},C=e^{-\frac{1}{3}},\Delta=AC-B^2>0,A>0,$

$\therefore(1,-\frac{4}{3})$ 为极小值点，极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$

对于 $(-1,-\frac{2}{3})$，$A=-e^{-\frac{5}{3}},B=e^{-\frac{5}{3}},C=e^{-\frac{5}{3}},\Delta=AC-B^2<0$,不是极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1,$ 证明：

（III）　存在 $\xi\in(0,1),$ 使得$f'(\xi)=1$

（IV）　存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【解析】（1）令 $F(x)=f(x)-x,F(0)=f(0)=0,F(1)=f(1)-1=0,$

则$\exists\xi\in\left(0,1\right)$使得$F'(\xi)=0,$即$f'(\xi)=1$

（2）令$G(x)=e^{x}(f'(x)-1),$则$G(\xi)=0,$

又由于$f(x)$为奇函数，故$f'(x)$为偶函数，可知$G(-\xi)=0$，

则$\exists\eta\in\left(-\xi,\xi\right)\subset\left(-1,1\right)$使$G'(\xi)=0,$

即$e^{\eta}[f'(\eta)-1]+e^{\eta}f''(\eta)=0$，即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过$A(1,0,0),B(0,1,1)$两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面$z=0,z=2$所围成的立体为Ω，

（III）　　求曲面Σ的方程

（IV）　　求Ω的形心坐标.

【解析】（1）l过A,B两点，所以其直线方程为：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1-z\\y=z\end{cases}$

所以其绕着z轴旋转一周的曲面方程为：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

（2）由形心坐标计算公式可得$\overline{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}=\dfrac{\pi\int_0^2\left[z(1-z)^2+z^2\right]dz}{\pi\int_0^2\left[(1-z)^2+z^2\right]dz}=\dfrac{7}{5}$，所以形心坐标为$(0,0,\dfrac{7}{5})$

（20）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设$C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由$AC-CA=B$可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有$1+a=0, b-1-a=0$，即 $a=-1, b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，故有\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases},其中k_1、k_2任意.$$

从而有 $C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$，记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$；

（II）若 α, β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$。

【解析】(1)

$$\begin{aligned} f &= (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 \\ &+ (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3 \end{aligned}$$

$$则f的矩阵为\begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$$

（2）令A=$2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$,则$A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \le r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$，

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

【解析】(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

由 Y 的概率分布知，当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $1\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\le y\}$

$$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx$$

$$=\frac{1}{27}(y^3+18)$$

(2) $P\{X\le Y\}=P\{X\le Y,X\le 1\}+P\{X\le Y,1<X<2\}+P\{X\le Y,X>2\}=\dfrac{8}{27}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\dfrac{\theta}{x})=\theta$，令 $EX=\bar{X}$，故 θ 矩估计量为 $\bar{X}$.

(2) $$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^n\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\theta^{2n}\prod_{i=1}^n\dfrac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

当 $x_i>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$，

得 $\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，所以得 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.

2014年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f'(x)\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(D) 当 $f'(x)\le 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$,则

$a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

（A）$2\sin x$　　（B）$2\cos x$　　（C）$2\pi\sin x$　　（D）$2\pi\cos x$

5．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0\\ a & 0 & 0 & b\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix}$ 等于

（A）$(ad-bc)^2$　　（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（　）

（A）必要非充分条件　　（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分也非必要条件

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（　）

（A）0.1　(B)0.2　(C)0.3　(D)0.4

（8）设连续型随机变量 X_1,X_2 相互独立，且方差均存在，X_1,X_2 的概率密度分别为 $f_1(x),f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

（A）$EY_1>EY_2,DY_1>DY_2$　　（B）$EY_1=EY_2,DY_1=DY_2$

（C）$EY_1=EY_2,DY_1<DY_2$　　（B）$EY_1=EY_2,DY_1>DY_2$

二、填空题：9| 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲面积分 $\oint_L zdx+ydz=$________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta\\0,\text{其他}\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，X_1，$X_2,\cdots$，X_n 为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计，则 $c=$________.

三、解答题：15~23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分10分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分10分)

设函数 $f(u)$ 具有2阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若

$f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分10分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\ (z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

(19)(本题满分10分)设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（II）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛。

（20）（本题满分11分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, E 为3阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

（21）（本题满分 11 分）

证明：n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$，

（I）求Y的分布函数$F_Y(y)$；

（II）求EY

（23）（本题满分 11 分）

设总体X的分布函数

$F(x;\theta)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0 \\ \theta, & x<0 \end{cases}$，其中$\theta$是未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本.

（1）求$E(X),E(X^2)$；（2）求θ的极大似然估计量．

（3）是否存在常数a，使得对任意的$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$．

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）C （2）D （3）D （4）B （5）B （6）A （7）（B） （8）（D）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$2x-y-z-1=0$

（10）$f(-1)=1$

（11）$ln\dfrac{y}{x}=2x+1$

（12）π

（13）[-2,2]

（14）$\dfrac{2}{5n}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2 ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$$

令$u=\frac{1}{x}$,

则$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

$3y^2y'+y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'=0$

$y^2+2xy=0$

$y(y+2x)=0$

$y=0$(舍)或$y=-2x$。

$y=-2x$ 时，

$y^3+xy^2+x^2y+6=0$

$-8x^3+x\cdot(4x^2)+x^2\cdot(-2x)+6=0$

$-8x^3+4x^3-2x^3+6=0$

$-6x^3+6=0$

$x^3=1\Rightarrow x=1, y=-2$

$6(y')^2y+3y^2y''+2yy'+2y'y+x\cdot 2(y')^2+x\cdot 2yy''+2y+2xy'+2xy'+x^2y''=0$

$12y''(1)-4y''(1)-4+y''(1)=0$

$9y''(1)=4$

$y''(1)=\frac{9}{4}>0$

所以 $y(1)=-2$ 为极小值。

（17）【答案】

$$\frac{\partial E}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

$$\frac{\partial E}{\partial y}=f'(e^x\cos y)e^x(-\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y+f'(e^x\cos y)e^x(-\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4E+e^x\cos y)e^{2x}$$

$$f''(e^x\cos y)=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

令 $e^x\cos y=u$，

则 $f''(u)=4f(u)+u$，

故 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4},(C_1,C_2\text{为任意常数})$

由 $f(0)=0,f'(0)=0,$ 得

$$f(u)=\frac{e^{2u}}{16}-\frac{e^{-2u}}{16}-\frac{u}{4}$$

（18）【答案】

补 $\sum_1:\{(x,y,z)|z=1\}$ 的下侧，使之与 Σ 围成闭合的区域 Ω，

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dxdydz$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3(\rho\cos\theta-1)^2+3(\rho\sin\theta-1)^2+1]\rho dz$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_{\rho^2}^1[3\rho^2-6\rho^2\cos\theta-6\rho^2\sin\theta+7\rho]dz$$

$$=-2\pi\int_0^1(3\rho^3+7\rho)(1-\rho^2)d\rho=-4\pi$$

（19）【答案】

（1）证$\{a_n\}$单调

由$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，根据单调有界必有极限定理，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，

故由$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，两边取极限（令$n\to\infty$），得$\cos a-a=\cos 0=1$。

解得$a=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（20）【答案】①$(-1,2,3,1)^T$　②$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2,k_3\in R)$

（21）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

（22）【答案】（1）$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0,\\ \dfrac{3}{4}y, 0\le y<1,\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}y\right), 1\le y<2,\\ 1, y\ge 2.\end{cases}$

（2）$\dfrac{3}{4}$

（23）【答案】（1）$EX=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta},EX^2=\theta$

（2）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（3）存在

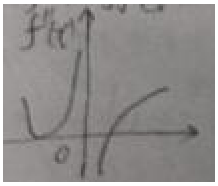
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线

$y=f(x)$ 的拐点的个数为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

(A)　0　　　　(B)　1　　　　(C)　2　　　　(D)　3



【答案】（C）
【解析】拐点出现在二阶导数等于 0，或二阶导数不存在的点，并且在这点的左右两侧二阶导函数异号。因此，由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点.故选（C）.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　）

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

【答案】（A）
【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数，此类题有两种解法，一种是将特解代入原方程，然后比较等式两边的系数可得待估系数值，另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解，也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知，$\frac{1}{2}e^{2x}$、$-\frac{1}{3}e^{x}$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以 2,1 为特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的根，从而 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times 2=2$，从而原方程变为

$y''-3y'+2y=ce^{x}$，再将特解 $y=xe^{x}$ 代入得 $c=-1$.故选（A）

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 (　　)

(A) 收敛点，收敛点
(B) 收敛点，发散点
(C) 发散点，收敛点
(D) 发散点，发散点

【答案】(B)

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间，幂级数的性质.

【解析】因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，即 $x=2$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的条件收敛点，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间为 $(0,2)$.而幂级数逐项求导不改变收敛区间，故 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间还是 $(0,2)$.因而 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛点，发散点.故选（B）.

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy=$ (　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

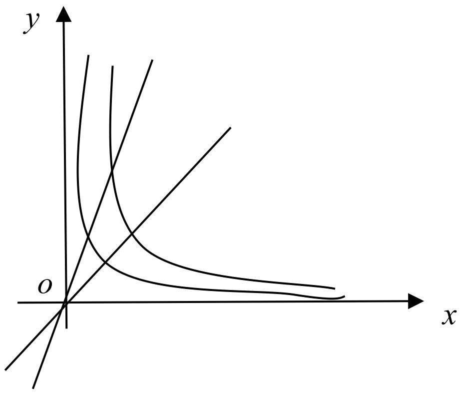
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

【答案】(B)

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出 D 的图形，



所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，故选（B）

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为 （　）

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$

(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$

(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$，

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$。故选（D）

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 （　）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$$

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则 ( )

(A) $P\left(AB\right)\le P\left(A\right)P\left(B\right)$

(B) $P\left(AB\right)\ge P\left(A\right)P\left(B\right)$

(C) $P\left(AB\right)\le \dfrac{P\left(A\right)P\left(B\right)}{2}$

(D) $P\left(AB\right)\ge \dfrac{P\left(A\right)P\left(B\right)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB\subset A, AB\subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$，从而 $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，选(C) .

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2, EY=1, DX=3$，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$ ( )

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

【答案】(D)

【解析】 $E[X(X+Y-2)]=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)$

$$=D(X)+E^2(X)+E(X)\cdot E(Y)-2E(X)$$

$$=3+2^2+2\times1-2\times2=5$$ ，选(D) .

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________ .

【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【分析】此题考查 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，可直接用洛必达法则，也可以用等价无穷小替换.

【解析】方法一： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\tan x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

方法二： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)\mathrm{d}x=$ ________ .

【答案】 $\dfrac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\dfrac{\pi^2}{4}.$

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________ .

【答案】 $-dx$

【分析】此题考查隐函数求导.

【解析】令 $F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$ ，则

$$F'_x(x,y,z)=yz+1-\sin x, F'_y=xz, F'_z(x,y,z)=e^z+xy$$

又当 $x=0, y=1$ 时 $e^z=1$，即 $z=0$.

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-\dfrac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)}=-1, \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-\dfrac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)}=0$，因而 $\left.dz\right|_{(0,1)}=-dx.$

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算，可直接计算，也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】由轮换对称性，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\dfrac{1}{2}(1-z)^2$.所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2dz=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{4}.$$

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$__________.

【答案】$2^{n+1}-2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$= 2(2D_{n-2}+2)+2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2$

$= 2^{n+1} - 2$

(14)设二维随机变量(x, y)服从正态分布$N(1, 0; 1, 1, 0)$，则$P\{XY - Y < 0\} =$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X \sim N(1,1), Y \sim N(0,1)$，而且$X$、$Y$相互独立，从而

$$P\{XY - Y < 0\} = P\{(X-1)Y < 0\} = P\{X-1>0, Y<0\} + P\{X-1<0, Y>0\}$$

$$= P\{X>1\}P\{Y<0\} + P\{X<1\}P\{Y>0\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数$f(x) = x + a\ln(1+x) + bx\sin x$，$g(x) = kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x \to 0$是等价无穷小，求$a, b, k$的值.

【答案】$a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}.$

【解析】法一：原式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{kx^3}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o\left(x^3\right)}{kx^3}=1$$

即$1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$

法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$

因为分子的极限为 0，则 $a=-1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1$，分子的极限为 0，$b=-\dfrac{1}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1$，$k=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】$f(x)=\dfrac{8}{4-x}$.

【解析】设 $f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

令 $y=0$，得到 $x=-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0$，

故由题意，$\dfrac{1}{2}f(x_0)\cdot(x_0-x)=4$，即 $\dfrac{1}{2}f(x_0)\cdot\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4$，可以转化为一阶微分方程，

即 $y'=\dfrac{y^2}{8}$，可分离变量得到通解为：$\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+C$，

已知 $y(0)=2$，得到 $C=\dfrac{1}{2}$，因此 $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}$；

即 $f\left(x\right)=\dfrac{8}{-x+4}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x,y\right)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f\left(x,y\right)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为 $f\left(x,y\right)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'\left(x,y\right)=1+y, f_y'\left(x,y\right)=1+x$，

故 $gradf\left(x,y\right)=\left\{1+y,1+x\right\}$，模为 $\sqrt{\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2}$，

此题目转化为对函数 $g\left(x,y\right)=\sqrt{\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2}$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对 $d(x,y)=\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2$ 在约束条件 $C:x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数：$F\left(x,y,\lambda\right)=\left(1+y\right)^2+\left(1+x\right)^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right)$

$\begin{cases}F_x'=2\left(1+x\right)+\lambda\left(2x+y\right)=0\\F_y'=2\left(1+y\right)+\lambda\left(2y+x\right)=0\\F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$，得到 $M_1\left(1,1\right),M_2\left(-1,-1\right),M_3\left(2,-1\right),M_4\left(-1,2\right)$.

$d\left(M_1\right)=8,d\left(M_2\right)=0,d\left(M_3\right)=9,d\left(M_4\right)=9$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3$.

(18)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x), v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（II）设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】（I）$[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

（II）由题意得

$$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$$

$$=u_1{}'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2{}'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n{}'(x)$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\ z=x,\end{cases}$起点为$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为$B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分$I=\int_L\left(y+z\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\\ z=\cos\theta\end{cases}$，$\theta:\dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20)（本题满 11 分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$内$\mathrm{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$下的坐标相同，并求所有的

ξ .

【答案】

【解析】(I)证明：

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+\left(k+1\right)\alpha_3\right)$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq 0$$

故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基.

（II）由题意知，

$$\xi=k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\xi\neq 0$$

即

$$k_1\left(\beta_1-\alpha_1\right)+k_2\left(\beta_2-\alpha_2\right)+k_3\left(\beta_3-\alpha_3\right)=0,\quad k_i\neq 0,i=1,2,3$$

$$k_1\left(2\alpha_1+2k\alpha_3-\alpha_1\right)+k_2\left(2\alpha_2-\alpha_2\right)+k_3\left(\alpha_1+\left(k+1\right)\alpha_3-\alpha_3\right)=0$$

$k_1\left(\alpha_1+2k\alpha_3\right)+k_2\left(\alpha_2\right)+k_3\left(\alpha_1+k\alpha_3\right)=0$有非零解

即$\left|\alpha_1+2k\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1+k\alpha_3\right|=0$

即$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$，得 k=0

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_1=0$$

$$\therefore k_2=0,k_1+k_3=0$$

$$\xi=k_1\alpha_1-k_1\alpha_3,k_1\neq 0$$

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$相似于矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(I) 求a,b的值；

（II）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. .

【解析】(I) $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$

(II)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda = 0$ 时 $(0E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (2,1,0)^T; \xi_2 = (-3,0,1)^T$

$\lambda = 5$ 时 $(4E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A = 1 + \lambda_C : 1,1,5$

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, x > 0, \\ 0, \qquad x \le 0. \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布;

(II) $E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^n]$

记 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot x^{n-1})'=(\sum_{n=2}^{\infty}x^n)''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23) (本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为:

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta},\theta\le x\le 1,\\ 0, \qquad 其他.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1} x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1,\quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量；

(II) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，

当 $\theta\le x_i\le 1$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n$，则 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$.

从而 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}$，关于 θ 单调增加，

所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.

一、选择

（1）考察反常积分的定义（即反常积分的简单计算）

选 C。只有当a,b均已知时，才有计算的可能，直接计算行不通。因此应先赋值，再计算。

综上本题采用“特例排除法”：取$a=0$，须$b>1$，此时反常积分存在，即收敛，排除B,D；

取$a=-3$，原式变成$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x)^b}dx$，易知，$b=2$ 时，分子幂次高于分母，$\frac{x^3}{(1+x)^2}$可分解出一个x，则积分结果为∞，反常积分不存在，排除A。相比往年类似考点，较难。

（2）考察原函数的定义。

选D。直接计算即可。$x<1,\int 2(x-1)dx=(x-1)^2+C_1$；$x\geq 1,\int \ln xdx=x\ln x-x+C_2$；

观察选项，排除B,C。一元函数可导必连续，排除A。较易。

（3）考察非齐次方程解的性质

选A。非齐次方程的两个解作减法是对应齐次方程的解，即$2\sqrt{1+x^2}$是齐次解，去系数 2 依旧是齐次解，代入齐次方程，记作方程①；非齐次方程的两个解取平均值，仍是非齐次方程的解，即$(1+x^2)^2$是非齐次解，代入非齐次方程，记作方程②；方程①②联立可得$q(x)$。

（4）考察极限的定义，函数的连续与间断**（和网上答案不一样，网上答案选 D）**

选B。考察一个函数在某点的极限或连续性或可导性，首先至少须保证函数在该点的去心领域有定义。观察题干条件，$x=0$的“右领域”有“问题”，函数在$\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$上无定义，右极限不存在，因此可直接排除$A,C,D$。较难。

（5）考察相似的充要条件：$A\sim B\Leftrightarrow P^{-1}AP=B,P^{-1}\exists$

选C。可先将题目等效为：已知$P^{-1}AP=B$，记作式①，验证选项“$ABCD$”的正确性。

基本思路：由已知通向未知是联系过去与未来的重要途径。

考察A：式①两边同时转置得

$P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}=\left((P^T)^{-1}\right)^{-1}A^T(P^T)^{-1}=B^T$，符合；

同理，式①两边同时取逆得$P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，记作式②，符合；

式①+②，即得$P^{-1}(A+A^{-1})P=B+B^{-1}$，$D$亦符合。难度持平。

（6）考察二次型之惯性定理与二次曲面的方程

选B。

思路：根据二次曲面的方程可知：单页双曲面：$p=2,q=1$；双页双曲面：$p=1,q=2$；椭球面：$p=3,q=0$；柱面：$p+q<3$，p,q视具体情况而定。采用配方法或特征值法均可很快确定本题二次型$p=1,q=2$，所以选B。较新颖。

（7）考察一般正态分布的概率计算

选B。$p=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数，分布函数单调不减。较易

（8）考察相关系数ρ的计算

选A。$\rho_{XY}=\dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DXDY}}$。易知$X\sim B(2,\dfrac{1}{3}),Y\sim B(2,\dfrac{1}{3})$，所以

$EX=EY=\dfrac{2}{3},DX=DY=\dfrac{4}{9}$；求$XY$的分布列：

XY	0	1	2	4
P		$\frac{2}{9}$	0	0

，$\therefore EXY=\dfrac{2}{9}$；代入得$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$。持平。

二、填空

（9）考察$\dfrac{0}{0}$型未定式极限。

$\dfrac{1}{2}$。原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$　。较易

（10）考察旋度公式

$\vec{j}+(y-1)\vec{k}$。较易

（11）考察多元函数之隐函数求导

$-dx+2dy$。$(0,1)$代入原方程，得$z=1$。方程两边同时对x或y求导，可得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}$。

（12）考察泰勒公式与幂级数展开。

$\dfrac{1}{2}$。$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\cdots$，$\dfrac{1}{1+ax^2}=1-ax^2+\cdots$，所以

$$\begin{aligned}\arctan x+\frac{x}{1+ax^2}&=\left(x-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)-x\left(1-ax^2+\cdots\right)\\&=(-\frac{1}{3}+a)x^3+\cdots\end{aligned}$$

，$\therefore\dfrac{f'''(0)}{3\downarrow}=(-\dfrac{1}{3}+a)\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$。

持平

（13）考察行列式的计算

$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$。

$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$，只需要从第四列开始，后一列的 λ 倍加到前一列，最后得

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & 0 & -1 \\ 4+\lambda\left(3+\lambda\left(2+\lambda\left(\lambda+1\right)\right)\right) & \cdots & \cdots & \lambda+1 \end{vmatrix}$，沿第一列展开即得。较难

（14）考察一个正态总体的置信区间

（8.2,10.8）。代入公式 $\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ 即可，其中

$\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=10.8\Rightarrow u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.3$。较易。

三、计算题

（15）考察极坐标系下的二重积分计算

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2\left(1+\cos\theta\right)} \rho\cos\theta\cdot\rho d\rho \\ &= 5\pi+\frac{32}{3}\end{aligned}$$

较易。

（16）考察反常积分的计算以及二阶常系数线性齐次微分方程的求解。

（Ⅰ）证明：（依据反常积分定义）

$$\begin{aligned}&y''+2y'+ky=0\Rightarrow y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \\ &\text{其中}\lambda_1=-1-\sqrt{1-k},\lambda_2=-1+\sqrt{1-k}\end{aligned}$$

，代入反常积分得

$$\int_0^{+\infty} y\left(x\right)dx=-\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right)=-\frac{C_1\lambda_2+C_2\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}$$

反常积分存在，所以反常积分收敛。

（II）解：（常微分方程中的初值问题，两个初值条件求两个任意常数 C_1,C_2）

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ \lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{\lambda_2-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ C_2=\dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{cases}$$，又$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=-2 \\ \lambda_1\lambda_2=k \end{cases}$，代入得

$\int_0^{+\infty} y(x)dx=\dfrac{3}{k}$。较易。

（17）考察偏导积分求二元函数，积分与路径无关。

解：由偏导积分法：

$f(x,y)=\int \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx=xe^{2x-y}+\varphi(y)$，又$f(0,y)=\varphi(y)=y+1$

$\therefore f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$。

易判断此曲线积分的积分结果与路径无关。

$\therefore I(t)=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=t+e^{2-t}$

进而易知$I(t)_{\min}=I(2)=3$。

较难。

（18）考察高斯公式与三重积分。

解：由高斯公式得

$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dv$ （先二后一法）

$=\dfrac{1}{2}$。 （较易）

（19）考察无穷级数收敛性证明，以及拉格朗日中值定理的运用。

（Ⅰ）即证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|x_{n+1}-x_n\right|$的收敛性。（一般比较法）

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=\left|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})\right|=f'(\xi)\left|(x_n-x_{n-1})\right|$$

$<\dfrac{1}{2}\left|(x_n-x_{n-1})\right|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left|(x_2-x_1)\right|$，显然右端构成的级数收敛，所以原命题成立。

（II）考察绝对收敛的性质，及微分中值定理的运用。

观察发现$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$展开后即可“加一项消一项”。

易知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} - x_1 = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A + x_1$，其中 $A = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 C。

由 $x_{n+1} = f(x_n) = f(0) + f'(\eta)x_n$，$\eta$ 在 0 与 x_n 之间。

两边取极限得

$C = \dfrac{1}{1-f'(\eta)}$，易判断原命题成立。　　较难。

（20）考察矩阵方程的求解

$$(A,B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

（i）$a=1$ 时

$$(A,B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进而可得 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_1-1 & -k_2-1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2$ 为任意常数。无穷解。

（ii）$a=-2$ 时

$$(A,B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

易知无解。

（iii）$a \neq -2 且 a \neq 1$ 时

$$(A,B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

唯一解。

$B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3a}{a+2} \\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。　　难度持平。

(21)

(Ⅰ)分析：考察方阵的n次幂，在本题条件下，易联想到$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$

易得A的特征值及对应的特征向量为

$$\begin{cases}\lambda_1=0\leftrightarrow \gamma_1=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\end{pmatrix}^T \\ \lambda_2=-1\leftrightarrow \gamma_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T \\ \lambda_3=-2\leftrightarrow \gamma_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}^T\end{cases}$$，记$P=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)$，则$P^{-1}AP=\Lambda,\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，其中$P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(II)考察矩阵乘法。

由$B^2=BA\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$

即 $$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$$

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=\left(-2+2^{99}\right)\alpha_1+\left(-2+2^{100}\right)\alpha_2 \\ \beta_2=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2 \\ \beta_3=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2\end{cases}$$

难度持平

(22)考察多维随机变量的分布函数、概率密度以及相互独立的概念

(Ⅰ)二维均匀分布概率密度：即求区域D面积(二重积分)，再代公式。

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}3, & 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x} \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II)思路：先考察相互独立的必要条件是否成立。

如验证$P\left\{U=1,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=1\right\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$是否成立

$$P\left\{U=1,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X\le Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{8}$$

$P\{U=1\}=\frac{1}{2},P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{8}$，代入，等式不成立，必要条件不满足，所以不相互独立。

（III）考察“离散+连续型随机变量”的分布函数

易知$0<Z<2$

当$z\le 0,F(z)=0$，

$z\ge 2,F(z)=1$，

当$0<z<2$时

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}=P\{U=1,1+X\le z\}+P\{U=0,X\le z\}$$

$$P\{X\le Y,X\le z-1\}+P\{X>Y,X\le z\}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}z^2-z^3,0<z<1\\2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2},1\le z<2\end{cases}$$

综上：$F(z)=\begin{cases}0,z\le 0\\\frac{3}{2}z^2-z^3,0<z<1\\2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2+\frac{1}{2},1\le z<2\\1,z\ge 2\end{cases}$。较难。

（23）考察一维随机变量函数的分布；无偏估计。

（I）

$$F(t)=P\{T\le t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}$$
$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}=P\{X_1\le t\}P\{X_2\le t\}P\{X_3\le t\}$$
$$=(P\{X\le t\})^3=(F_X(t))^3$$

$$\therefore f(t)=3(F_X(t))^2\cdot f_X(t)$$

$$=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9},0<t<\theta\\0,其他\end{cases}$$

（II）即求使得$E(aT)=\theta$成立的a。

$$E\left(aT\right)=aE\left(T\right)=a\int_0^{\theta}t\cdot\frac{9t^8}{\theta^9}dt=\frac{9a\theta}{10}=\theta\Rightarrow a=\frac{10}{9}$$
。较易

整体来看，数学一相比去年较难，主要体现在综合性题目较多，计算量明显增大。但如果一个学生的基础计算能力较扎实，这个“难”能不能再算数就需要再讨论了，因为除了极个别的大题（如 19 题、22 题），其他大题的逻辑思路比较明朗，题目不算难，只是计算量着实大，对学生的计算能力要求高，由此可看出研究生选拔考试对学生计算能力很是重视。

综上，2016 年考研数学一题目偏向综合性强的基础题型，但计算量大，对基础计算能力要求高。

2017 年考研数学一真题及答案解析

一、选择题： **1～8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上 **.**

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

$(A)ab=\frac{1}{2}$　　　　$(B)ab=-\frac{1}{2}$

$(C)ab=0$　　　　$(D)ab=2$

【答案】 A

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore \dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

$(A)\ f(1)>f(-1)$　　$(B)\ f(1)<f(-1)$

$(C)\ |f(1)|>|f(-1)|$　　$(D)\ |f(1)|<|f(-1)|$

【答案】 C

【解析】 $\because\ f(x)f'(x)>0,\therefore\begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)>0\end{cases}(1)$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)<0\end{cases}(2)$，只有 C 选项满足 (1) 且满足 (2)，所以选 C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

$(A)12$　　$(B)6$　　$(C)4$　　$(D)2$

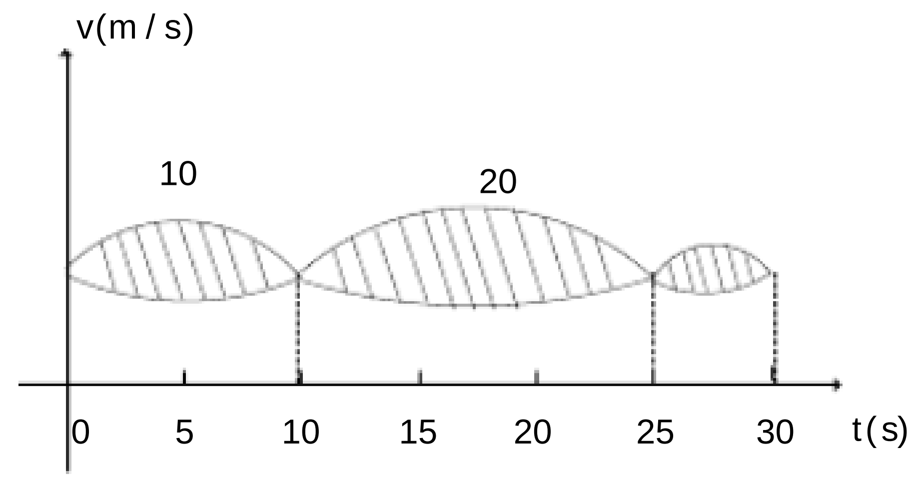
【答案】 D

【解析】 $gradf=\{2xy,x^2,2z\},\Rightarrow gradf\big|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial u}=gradf\cdot\dfrac{u}{|u|}=\{4,1,0\}\cdot\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\}=2.$

选 D.

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单

位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s)，则（ ）



(A)$t_0=10$ (B)$15<t_0<20$ (C)$t_0=25$ (D)$t_0>25$

【答案】 B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)dt,\int_0^{t_0} v_2(t)dt,$ 则乙要追上甲，则

$\int_0^{t_0} v_2(t)-v_1(t)dt=10$，当 $t_0=25$ 时满足，故选 C.

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（ ）

(A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆 (B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆 (D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【答案】 A

【解析】选项 A,由 $(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha=0$ 得 $(E-\alpha\alpha^T)x=0$ 有非零解，故 $\left|E-\alpha\alpha^T\right|=0$。即 $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆。选项 B,由 $r(\alpha\alpha^T)\alpha=1$ 得 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 0，1.故 $E+\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 1，2.故可逆。其它选项类似理解。

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则（ ）

(A) A与C相似，B与C相似 (B) A与C相似，B与C不相似

(C) A与C不相似，B与C相似 (D) A与C不相似，B与C不相似

【答案】 B

【解析】由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1

因为 $3-r(2E-A)=1$，$\therefore A$ 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-B|=0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3-r(2E-B)=2$，$\therefore B$ 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，

$\therefore A\sim C$，且 B 不相似于 C

（7）设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是（　　）

(A) $P(B|A)>P(B|\overline{A})$　　(B) $P(B|A)<P(B|\overline{A})$

(C) $P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$　　(D) $P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$

【答案】A
【解析】按照条件概率定义展开，则A选项符合题意。

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　　）

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

【答案】B
【解析】

$$X\sim N(\mu,1), X_i-\mu\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\ \text{A正确}$$

$$\Rightarrow (n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1),\ \text{C正确},$$

$$\Rightarrow \overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}),\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1),n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1),\text{D正确},$$

$$\Rightarrow \sim N(0,2),\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1),\text{故B错误}.$$

由于找不正确的结论，故 B 符合题意。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上 .

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________

【答案】 $f(0)=-6$

【解析】

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\Rightarrow f'''(0)=0$$

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

【答案】 $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）

【解析】齐次特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1+\sqrt{2}i$

故通解为 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

(11) 若曲线积分 $\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则

$a=$________

【答案】 $a=1$

【解析】 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，由积分与路径无关知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-1$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________

【答案】 $s(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为

____

【答案】 2

【解析】由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可知矩阵 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可逆，故

$r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=r(A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=r(A)$ 再由 $r(A)=2$ 得 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=2$

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则

$EX=$________

【答案】 2

【解析】 $F'(x)=0.5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})$，故 $EX=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=EX=0$。令 $\frac{x-4}{2}=t$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}(4+2t)\varphi(t)dt=8\cdot 1+4\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt=8$

因此 $E(X)=2$.

三、解答题： **15—23** 小题，共 **94** 分**.**请将解答写在答题纸指定位置上**.**解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.**

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1),$

【解析】

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1'e^x+f_2'(-\sin x)\right)\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\cdot 1+f_2'(1,1)\cdot 0=f_1'(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}''e^{2x}+f_{12}''e^x(-\sin x)+f_{21}''e^x(-\sin x)+f_{22}''\sin^2x+f_1'e^x-f_2'\cos x$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

结论：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

（16）（本题满分　10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\frac{1}{4}$$

（17）（本题满分　10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$　　　（1）

令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$

对（1）式两边关于 x 求导得　$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$　（2）

将 $x=\pm1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ or $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$,

将 $x=1,y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1,y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点，　$y(1)=1$；$x=-1$ 为极小值点，　$y(-1)=0$

（18）（本题满分　10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

(Ⅰ) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Ⅱ) 方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I）$f(x)$ 二阶导数，　$f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)$ 有 $f(\delta)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0,f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理 $\exists\eta\in(0,\xi)$，使 $f'(\eta)=0$，则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对 $F(x)$ 在 $(0,\eta),(\eta,\xi)$ 分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$ 且 $\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在 $(0,1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为

$\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥面与柱面的交线为 C

(Ⅰ) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(Ⅱ) 求 S 的 M 质量。

【答案】 64

【解析】

（1）由题设条件知，C 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=2x$

则 C 在 xoy 平面的方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ z=0\end{cases}$

（2）

$$m=\iint_{S}\mu(x,y,z)dS=\iint_{S}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\iint_{D:x^2+y^2\le 2x}9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=64$$

（20）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明 $r(A)=2$；

(II) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

【答案】（I）略；（II）通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（I）证明：由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可得 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix},\lambda_1\ne\lambda_2\ne 0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知 $3-r(A)=1$，即 $Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$ 可得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则 $Ax=0$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则 $Ax=\beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q

【答案】 $a=2;Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, f\ \underline{\underline{x=Qy}}\ -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\ \beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,,$$

则 $Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}$

$$f\overset{x=Qy}{=}-3y_1^2+6y_2^2$$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\0, & 其他\end{cases}$

(I) 求 $P(Y\le EY)$

(II) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

【答案】 (I) $P\{Y\le EY\}=\frac{4}{9}$;(II) $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\z-2, & 2<z<3\end{cases}$

【解析】

(I) $E(Y)=\int_0^1 y2ydy=\frac{2}{3}$

$P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$

(II) $F_z(Z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$=P(X+Y\le z,X=0)+P(X+Y\le z,X=2)$

$=P(Y\le z,X=0)+P(Y\le z-2,X=2)$

$=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)$

（1） 当 $z<0,z-2<0$，而 $z<0$，则 $F_z(Z)=0$

（2） 当 $z-2\geq 1, z>1$,即 $z\geq 3$时， $F_z(Z)=1$

（3）当 $0\leq z<1$时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}z^2$

（4）当 $1\leq z<2$ 时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}$

（5）当 $2\leq z<3$时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$

所以综上 $F_z(Z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}z^2, & 0\leq z<1\\ \frac{1}{2}, & 1\leq z<2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2, & 2\leq z<3\\ 1, & z\geq 3\end{cases}$

所以 $f_z(Z)=[F_z(Z)]'=\begin{cases}z & 0<z<1\\ z-2 & 2<z<3\end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2\cdots Z_n$ 估计 σ 。

(I) 求 Z_i 的概率密度；

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量

【答案】

(I) $f_{Z_i}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$;

(II)矩估计 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$;

(III)最大似然估计： $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

【解析】 (I) $F_{Z_i}(z)=P(Z_i\leq z)=P(|X_i-\mu|\leq z)$

当 $z<0, F_{z_i}(z)=0$

当 $z\ge 0, F_{z_i}(z)=P(-z\le X_i-\mu\le z)=P(\mu-z\le X_i\le \mu+z)=F_X(\mu+z)-F(\mu-z)$

当 $z\ge 0$ 时,

$$\therefore f_{z_i}(z)=(F_{z_i}(z))'=f_x(\mu+z)+f_x(\mu-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$综上\ f_{z_i}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$$

$$(\Pi)E(Z_i)=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz^2$$

$$=\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

令 $E(Z_i)=\overline{Z}$ $\qquad \overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

由此可得 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

对总体 X 的 n 个样本 $X_1, X_2, \cdots X_n$, 则相交的绝对误差的样本 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i=|x_i-u|, i=1,2...n$, 令其样本值为 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i=|x_i-u|$

$$则对应的似然函数\quad L(\sigma)=\begin{cases}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}{2\sigma^2}}, Z_1, Z_2, \cdots Z_n>0\\ 0, 其他\end{cases}$$

两边取对数，当 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n>0$ 时

$$\ln L(\sigma)=n\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

$$令\ \frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{u}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=0$$

所以，$\dot{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}$ 为所求的最大似然估计。

2018 考研数学一答案解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分。

（1）【答案】D

【解答】由定义得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$；

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2}.$$

（2）【答案】B

【解答】已知平面过（1,0,0）（0,1,0）两点，可得切平面内一向量（1，-1，0），曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面法向量为（$2x,2y,-1$）

$\therefore 2x-2y=0$ 即 $x=y$.

（3）【答案】B

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=2\sin1+\cos1.$$

（4）【答案】C

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi\text{；}$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+x)e^{-x}\mathrm{d}x\text{；}$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\pi,\therefore K>M.$$

（5）【答案】A

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，而 $r(\lambda E-A)=r(E-A)=2$.

（6）【答案】C

由秩的定义，可知 C 正确

（7）【答案】A

已知 $f(1+x)=f(1-x)$ 可得 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 从而

$P(x \le 0) = 0.2$

(8)【答案】选 D.

【解答】若显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0，可知检验统计量 $|Z| \le U_{0.025}$，此时 $|Z| \le U_{0.005}$，选 D.

(9)【答案】$k = -2$

【解答】$\because \lim\limits_{x \to 0}(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x})^{\frac{1}{\sin kx}} = e, \therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin kx}(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} - 1) = 1,$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{kx} \cdot \dfrac{-2\tan x}{1+\tan x} = -\dfrac{2}{k} = 1, \therefore k = -2.$

(10)【答案】$2\ln 2 - 2$

【解答】$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}f'(x) = xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \;\; f'(1) - f(x)\Big|_0^1$

$= 2\ln 2 - f(1) + f(0) = 2\ln 2 - 2$.

(11)【答案】$(1, 0, -1)$

【解答】$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & xz \end{vmatrix} = (y, -z, -x)\Big|_{(1,1,0)} = (1, 0, -1)$.

【解答】$\because \lim\limits_{x \to 0}(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x})^{\frac{1}{\sin kx}} = e, \therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin kx}(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} - 1) = 1,$

(12)【答案】$-\dfrac{\pi}{3}$

【解答】$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \oint_L xy\mathrm{d}s = \oint_L [\dfrac{1}{2} - (x^2 + y^2)]\mathrm{d}s$，

$\oint_L [\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}]\mathrm{d}s = -\dfrac{1}{6} \cdot 2\pi = -\dfrac{\pi}{3}$.

(13)【答案】

【解答】$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$

$A(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \therefore \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1, \therefore \lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1, \therefore |A| = -1$

(14)【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解答】$p(AC|AB\cup C)=\dfrac{p[(AC)(AB\cup C)]}{p(AB\cup C)}=\dfrac{p(ABC\cup AC)}{p(AB)+p(C)-p(ABC)}$

$$=\frac{p(AC)}{\frac{1}{4}+p(C)}=\frac{\frac{1}{2}p(C)}{\frac{1}{4}+p(C)}=\frac{1}{4},\therefore p(C)=\frac{1}{4}.$$

三、解答证明题

（15）$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.$$

（16）解：设圆的周长为x，正三角周长为y，正方形的周长z，由题设$x+y+z=2$.

则目标函数：$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z}{16}^2$，

故拉格朗日函数为

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z}{16}^2+\lambda(x+y+z-2).$$

则 $$L_x'=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0,$$

$$L'_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0,$$

$$L'_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0,$$

$$L'_\lambda=x+y+z-2=0.$$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $\lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

（17）解:构造平面 $\Sigma':\begin{cases}3y^2+3z^2\leqslant 1,\\ x=0,\end{cases}$ 取后侧;设 Σ' 与 Σ 所围区域为 Ω;

记 $P=x, Q=y^3+z, R=z^3$;借助高斯公式, 有:

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma'}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma'}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(P'_x+Q'_y+R'_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{3y^2+3z^2\leqslant 1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi(-\frac{1}{6})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1-3r^2-2)\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}[(1-3r^2)^{\frac{3}{2}}-2(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{14\pi}{45}.$$

(18)(I)解：通解 $y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}(\int x\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)$

$$=\mathrm{e}^{-x}(\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+C]$$

$$=(x-1)+C\mathrm{e}^{-x}.$$

(II)证明：设 $f(x+T)=f(x)$，即 T 是 $f(x)$ 的周期.

通解 $y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\mathrm{d}x}[\int f(x)\mathrm{e}^{\int 1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]$

$$=\mathrm{e}^{-x}[\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C]$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-x}.$$

不妨设 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_{T}^{x} f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-x}$，则有

$$y(x+T)=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{T}^{x+T} f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t+C\mathrm{e}^{-(x+T)}$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{0}^{x} f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\mathrm{d}(u+T)+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\int_{0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{u}\cdot\mathrm{e}^{T}\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x}$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\int_{0}^{x} f(u)\mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u+(C\mathrm{e}^{-T})\cdot\mathrm{e}^{-x},$$

即 $y(x+T)$ 依旧是方程的通解，结论得证.

(19)证明：设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-1-x,\ x>0$，则有

$f'(x)=\mathrm{e}^{x}-1>0$，因此 $f(x)>0,\ \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}>1$，

从而 $\mathrm{e}^{x_2}=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}>1,\ \ x_2>0$；

猜想 $x_n>0$，现用数学归纳法证明:

$n=1$时, $x_1>0$,成立;

假设$n=k(k=1,2,\cdots)$时, 有$x_k>0$, 则$n=k+1$时有

$\mathrm{e}^{x_{k+1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_k}-1}{x_k}>1$,所以$x_{k+1}>0$;

因此$x_n>0$,有下界.

又$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}-\ln\mathrm{e}^{x_n}=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}$;

设$g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$,

$x>0$时, $g'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=-x\mathrm{e}^x<0$,

所以$g(x)$单调递减, $g(x)<g(0)=0$,即有$\mathrm{e}^x-1<x\mathrm{e}^x$,

因此$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n\mathrm{e}^{x_n}}<\ln 1=0$, x_n单调递减.

由单调有界准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有$A\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^A-1$;

因为$g(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x$只有唯一的零点$x=0$,所以$A=0$.

(20)解:(I)由$f(x_1,x_2,x_3)=0$得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ \quad\ \ x_2+x_3=0,\\ x_1\qquad +ax_3=0,\end{cases}$$

系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$,

$a\neq 2$时，$r(A)=3$，方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$；

$a=2$ 时，$r(A)=2$，方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},k\in R$.

(II) $a\neq 2$ 时,令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3, \\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换,

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$a=2$ 时, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$$

$$=2(x_1-\frac{x_2-3x_3}{2})^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2},$$

此时规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

(21)解:(I) A 与 B 等价,则 $r(A)=r(B)$.

又 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$,

所以 $|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0$,

$a=2$.

(II) $AP=B$,即解矩阵方程 $AX=B$:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

得 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$;

又 P 可逆,所以 $|P|\neq 0$,即 $k_2\neq k_3$.

最终 $P=\begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数,且 $k_2\neq k_3$.

22. 解:(1)由已知 $P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$, $P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$, Y 服从 λ 的泊松分布,

所以 $\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda$.

(2)由条件可知 Z 的取值为 $0,\pm1,\pm2\cdots$,

$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$,

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$, $P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\dfrac{1}{2}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}$,

同理, $P\{Z=k\}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{|k|!},k=\pm1,\pm2\cdots$,

$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$.

23. 解:(1)由条件可知,似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}},x_i\in R,i=1,2,\cdots n,$$

取对数: $\ln L(\sigma)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\dfrac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\dfrac{|x_i|}{\sigma}\right]$,

求导: $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[-\dfrac{1}{\sigma}+\dfrac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_1|}{\sigma^2}=0$,

解得 σ 得极大似然估计 $\sigma=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$.

(2)由第一问可知 $\sigma=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_1|}{n}$, 所以 $E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma$.

$$D(\hat{\sigma}) = D(\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_1|}{n}) = \frac{1}{n}D(|X|) = \frac{1}{n}\{E(X^2) - E^2(|X|)\}$$

$$= \frac{1}{n}\{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} \mathrm{d}x - \sigma^2\} = \frac{1}{n}\{\int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} \mathrm{d}x - \sigma^2\} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2018 考研数学一真题

（1） 下列函数不可导的是：

$(A)\ y = |x|\sin|x|$

$(B)\ y = |x|\sin\sqrt{|x|}$

$(C)\ y = \cos|x|$

$(D)\ y = \cos\sqrt{|x|}$

（2）过点（1,0,0）与（0,1,0）且与$z=x^2+y^2$相切的平面方程为

$(A)\ z = 0$与$x + y - z = 1$

$(B)\ z = 0$与$2x + 2y - z = 2$

$(C)\ y = x$与$x+y-z=1$

$(D)\ y = x$与$2c + 2y - z = 2$

（3）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} =$

$(A)\sin 1 + \cos 1$

$(B)\ 2\sin 1 + \cos 1$

$(C)\sin 1 + \cos 1$

$(D)\ 3\sin 1 + 2\cos 1$

（4）$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$ $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x}dx$ $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x})dx$ ），则 M,N,K 的大小关系为

$(A)\ M > N > K$

$(B)\ M > K > N$

$(C)\ K > M > N$

$(D)\ N > M > K$

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$相似的为______.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（6）.设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，（$X\quad Y$）表示分块矩阵，则

A. $r(A\quad AB)=r(A)$　　B. $r(A\quad BA)=r(A)$

C. $r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　D. $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

（7）设$f(x)$为某分部的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则

$p\{X\leqslant 0\}=$__________.

A. 0.2　B. 0.3　C. 0.4　D. 0.6

（8）给定总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，给定样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值μ进行检验，令$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A. 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时也拒绝H_0.

B. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时拒绝H_0.

C. 若显著性水平$\alpha=0.05$时拒绝H_0，则$\alpha=0.01$时接受H_0.

D. 若显著性水平$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时也接受H_0.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e,$ 则 $k=$_____

（10）$y=f(x)$ 的图像过（0,0），且与 $y=a^x$ 相切与（1,2），求 $\int_0^1 xf'(x)dx=$ ______

（11）$F(x,y,z)=xy\vec{\varepsilon}-yz\vec{\eta}+xz\vec{k},$ 求 $rot\vec{F}(1,1,0)=$ ________

（12）曲线 S 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xydS=$ _________

（13）二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2),$ 则 $|A|=$ ______

（14）A,B 独立，A,C 独立，$BC\neq\phi,P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AC|AB\bigcup C)=\frac{1}{4},$ 则 $P(C)=$

（15）. 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

（16）. 一根绳长 2m，截成三段，分别折成圆、三角形、正方形，这三段分别为多长是所得的面积总和最小，并求该最小值。

（17）. $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

（18）微分方程 $y'+y=f(x)$

（I）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解.

（II）当 $f(x)$ 为周期函数时，证微分方程有通解与其对应，且该通解也为周期函数.

（19）数列 $\{x_n\}$，$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$.证：$\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（20）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2,$ 其中 a 是参数，

（I）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

（II）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

（21）已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

（I）求 a

（II）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

（22）X,Y 随机变量相互独立，$P\{X=1\}=y_1$，$P\{X=-1\}=y_2$，Y 服从 λ 的泊松分布.

$Z=XY$

（1）求 $\operatorname{cov}(X,Z)$.

（2）求 Z 得概率分布.

（23）$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 X 的分布，$f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$ 未知，$-\infty<x<+\infty$）.

（1）求 σ 得极大似然估计.

（2）求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.

1.$\because x-\tan x\sim-\frac{x^3}{3}$ 若要 $x-\tan x$ 与 x^k 同阶无穷小，$\therefore k=3$

$\therefore$ 选 C

2.① $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x|x|-0}{x}=0$　$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$ 不存在

$\therefore x=0$ 处 $f(x)$ 不可导

②当 $x<0$ 时　$f(x)=-x^2$　$\because f'(x)=-2x>0$　　$\therefore f(x)$ 单增

当 $x>0$ 时　$f(x)=x\ln x$　$\because f'(x)=\ln x+1$　　$x\in(0,e^{-1})$ 时 $f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 单减　　$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点

$\therefore$ 选 B.

3.（D）

$\because$ $\{a_n\}$单调增加有界

$\therefore$ 由单调有界收敛定理可得

$\{u_n\}$极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$.

则　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$的前 n 项和为

$S_n=u_2^2-u_1^2+\cdots+u_{u+1}^2-u_n^2$

$=u_{n+1}^2-u_1^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}^2-u_1^2=A-u_1^2$.选（D）

4.由题意知，积分与路径无关

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

存在 $u(x,y)$使得 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$

$\because$　$Q=\frac{x}{y^2}$

$\therefore$　$u(x,y)=-\frac{x}{y}+c(x)$

则　$P=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{y}+c'(x)$

又$\because$ x 可为 0

$\therefore$ 排除 e，选（D）

5.选（C）

解：由 $A^2+A=2E$ 得 $\lambda^2+\lambda=2$，λ 为 A 的特征值，

$\boldsymbol{\lambda}$=-2 或 1，

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1$，

规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$，选（C）

6.选（A）

解：由条件知 3 张平面无公共交点，方程组无解，

故 $r(A)\neq r(\overline{A})$.

又两平面交于一条直线，故 $r(A)=2$，

因此 $r(A)=2,r(\overline{A})=3$, 选（A）.

7.选（C）

解：$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

$\because P(A)=P(B)$　$\therefore P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 选（C）

8.解：因为 $X\sim N(u,\boldsymbol{\sigma}^2)$ $Y\sim N(u,\boldsymbol{\sigma}^2)$　X 与 Y 相互独立

$\therefore X-Y\sim N(0,2\boldsymbol{\sigma}^2)$

$\therefore P\{|X-Y|<1\}=P\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}=2\Phi\left|\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right|-1$

$\therefore$ 与 u 无关，即与 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 有关　选择（A）

9.解析：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(\cos y)+x$$

所以

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}+y\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\cos yf'(\sin y-\sin x)+\frac{x}{\cos y}$$
$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$

10.解析：$2yy'-y^2-2=0$

$y'=\frac{y^2+2}{2y}$

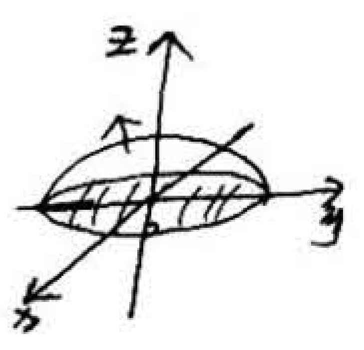
$\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$

两边积分得 $\ln(y^2+2)=x+\ln C$

$y^2+2=Ce^x$

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$

所以 $y=\sqrt{3e^x-2}$



11.解析：$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x}^{2n})=\cos\sqrt{x}$

12.解析：
$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}\sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}\sqrt{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le4}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2r^2\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{32}{3}$$

13.解：$\because$　α_1,α_2 线性无关.　　$\therefore$　$r(A)\ge2$

$\because$　$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_3$　　$\therefore$　$r(A)<3$　　$\therefore$　$r(A)=2$

$\therefore$ $Ax=0$ 为基础解系有 $n-r(A)=3-2=1$

$\because$　$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

$\therefore$　$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$

$\therefore$ 通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$　$k\in R.$

14. X 的 $p.d.f$ 为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & else\end{cases}$

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 当$x \to 0$，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$

A.1.
B.2.
C.3.
D.4.

2. 设函数$f(x)=\begin{cases} x|x|, & x<0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$则 x=0 是f（x）的

A.可导点，极值点.
B.不可导点，极值点.
C.可导点，非极值点.
D.不可导点，非极值点.

3.设｛u_n｝是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是

A.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$.

B.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$.

C.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$.

D.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

4. 设函数$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}$. 如果对上半平面（y>0）内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$，那么函数 $P(x,y)$可取为

A.$y-\frac{x^2}{y^3}$.

B.$\frac{1}{y}-\frac{x^2}{y^3}$.

C.$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$.

D.$x-\frac{1}{y}$.

5.设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若$A^2+A=2E$，且$|A|$=4，则二次型$x^{\mathrm{T}}Ax$的规范形为

A.$y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

B.$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C.$y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

D.$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6.如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为$A,\overline{A}$，则

A.$r(A)=2,r(\overline{A})=3$.

B.$r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

C.$r(A)=1,r(\overline{A})=2$.

D.$r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

7.设 A，B 为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是
A.$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
B.$P(AB)=P(A)P(B)$.

C.$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.

D.$P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$.

8.设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都要从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则P $|X-Y|<1$

A.与μ无关，而与σ^2有关
B.与μ有关，而与σ^2无关
C.与μ，σ^2都有关
D.与μ，σ^2都无关

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9.设函数与$f(u)$可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

10.微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=$__________.

11.幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 0,+∞ 内的和函数$S(x)=$__________.

12.设$\sum$为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

13.设$A=$ a_1,a_2,a_3 为 3 阶矩阵，若a_1,a_2线性无关，且$a_3=-a_1+2a_2$，则线性方程组$Ax=0$的通解为__________.

14.设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ $F(X)$为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则

P $F(X)>EX-1$ $=$__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。
解答题（高等部分）

15.设函数$y(x)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件$y(0)=0$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）求曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

16.设 a，b 为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点（3，4）处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为 10.
（1）求 a，b
（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$的面积.

17.求曲线$y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$与 x 轴之间图形的面积.

18.设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$

（1）证明：数列｛a_n｝单调减少，且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

19.设Ω是由锥面在$x^2+(y-z)^2-(1-z)^2(0\leq z\leq 1)$与平面 z=0 围成的锥体，求Ω的形心坐标。

20.设向量组$x_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ $x_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$ $x_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$为R^3的一个基，β=（1,1,1）$^{\mathrm{T}}$在基下的坐标（b,c,1）$^{\mathrm{T}}$.

（1）求 a,b,c

（2）证明α_2,α_3,β为R^3的一个基.并求α_2,α_3,β到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵.

21.已知矩阵$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$相似.

（1）求 x、y
（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

22. 设随机变量 X 与 Y 独立.X 服从参数为 1 的指数分布.Y 的概率分布为$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$，令 Z=XY

（1）求 Z 的概率密度.
（2）p 为何值时，X 与 Y 不相关?
（3）X 与 Z 是否相互独立?

23.（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f(x;\sigma^2)=\begin{cases} \frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu. \\ 0, & x<\mu. \end{cases}$

其中μ是已知参数，$\sigma>0$是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求σ^2的最大似然估计量.