1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(每小题 3 分,满分 21 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$_____.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t dt =$_____.

(3) 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是_____.

(4) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)$,则 $f'(0)=$_____.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$,则 $f(x)=$_____.

(6) 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是_____.

(7) 设 $\tan y = x+y$,则 $dy=$_____.

二、计算题(每小题 4 分,满分 20 分.)

(1) 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求 y'.

(2) 求 $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=1$,求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

三、选择题(每小题 3 分,满分 18 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (　　)

(A) 有且仅有水平渐近线

(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线

(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 若 $3a^2-5b<0$,则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ (　　)

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

(3) 曲线 $y=\cos x(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$ 与 x 轴所围成的图形,绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为　　(　　)

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) $\frac{\pi^2}{2}$　　(D) π^2

(4) 设两函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值,则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处　　(　　)

(A) 必取极大值　　(B) 必取极小值

(C) 不可能取极值　　(D) 是否取极值不能确定

(5) 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)　　(　　)

(A) ae^x+b　　(B) axe^x+b　　(C) ae^x+bx　　(D) axe^x+bx

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}$ $(0<x<+\infty)$ 满足 $y(1)=0$ 的解.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$,其中 f 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本大题满分 11 分)

对函数 $y=\frac{x+1}{x^2}$,填写下表:

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹($\bigcup$)区间	
凸($\bigcap$)区间	
拐点	
渐近线	

八、(本题满分 10 分)

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点, 当 $0\le x\le 1$ 时, $y\ge 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 上对应于点 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是_____.

(2) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, 则 $y'=$_____.

(3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=$_____.

(4) 下列两个积分的大小关系是: $\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx$_____ $\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$, 则函数 $f[f(x)]=$_____.

二、选择题(每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$, 其中 a,b 是常数, 则 ( )

(A) $a=1,b=1$ (B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$ (D) $a=-1,b=-1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于 ( )

(A) $f(x)$ (B) $f(x)dx$

(C) $f(x)+C$ (D) $f'(x)dx$

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 ( )

(A) $n![f(x)]^{n+1}$ (B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$ (D) $n![f(x)]^{2n}$

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)dt$, 则 $F'(x)$ 等于 ( )

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0, f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的　　(　　)

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点或间断点不能由此确定

三、(每小题 5 分，满分 25 分.)

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=9$，求常数 a.

(2) 求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 dy.

(3) 求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

(4) 计算 $\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

(5) 求微分方程 $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 P，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小(其中 $a>0,b>0$).

五、(本题满分 9 分)

证明：当 $x>0$，有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

六、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln t}{1+t}dt$，其中 $x>0$，求 $f(x)+f(\dfrac{1}{x})$.

七、(本题满分 9 分)

过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此平面图形绕 x 轴旋转一周所围成旋转体的体积.

八、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 之通解, 其中 a 为实数.

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则 $dy=$_____.

(2) 曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸区间是_____.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$_____.

(4) 质点以速度 $t\sin(t^2)$ 米每秒作直线运动,则从时刻 $t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2=\sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于_____米.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$_____.

二、选择题(每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切,其中 a,b 是常数,则 (　　)

(A) $a=0,b=-2$　　(B) $a=1,b=-3$

(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-1,b=-1$

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le 2$,则 (　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{3}, & 1<x\le 2\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ \frac{x^2}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\le x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\le 2\end{cases}$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$x_0\ne 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大点,则 (　　)

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点　　(D) 对一切 x 都有 $f(x) \le f(x_0)$

(4) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$　　(　　)

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(5) 如图, x 轴上有一线密度为常数 μ, 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a, 已知引力系数为 k, 则质点和细杆之间引力的大小为　　(　　)

(A) $\int_{-l}^{0}\dfrac{km\mu}{(a-x)^2}dx$　　(B) $\int_{0}^{l}\dfrac{km\mu}{(a-x)^2}dx$

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\dfrac{km\mu}{(a+x)^2}dx$　　(D) $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\dfrac{km\mu}{(a+x)^2}dx$

三、(每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 设 $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_1^4 \dfrac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

(4) 求 $\int x\sin^2 x dx$.

(5) 求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

利用导数证明：当 $x>1$ 时, 有不等式 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$ 成立.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

曲线 $y=(x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、(本题满分 9 分)

如图, A 和 D 分别是曲线 $y=e^{x}$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB|:|DC|=2:1$, $|AB|<1$, 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.

八、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0) \neq 0$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$_____.

(2) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在 $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为_____.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$_____.

(4) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x^2 + 1)} =$_____.

(5) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$,则 ( )

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

(3) 当 $x \to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ( )

(A) 等于 2 (B) 等于 0

(C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

(4) 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2)dt$,则 $F'(x)$ 等于 ( )

(A) $f(x^4)$ (B) $x^2 f(x^4)$

(C) $2xf(x^4)$ (D) $2xf(x^2)$

(5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为 （ ）

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$

(C) $1+\cos x$　　(D) $1-\cos x$

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y}=1$ 所确定, 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$ 的值.

(3) 求 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(4) 求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$.

(5) 求微分方程 $(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x}, \ x\ge 0\end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

五、(本题满分 9 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$ 的通解.

六、(本题满分 9 分)

计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

七、(本题满分 9 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l, 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

八、(本题满分 9 分)

已知 $f''(x)<0, f(0)=0$, 试证：对任意的二正数 x_1 和 x_2, 恒有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

成立.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$ _____.

(2) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$ _____.

(3) 设 $F(x)=\int_1^x (2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt\,(x>0)$,则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是_____.

(4) $\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx=$ _____.

(5) 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,-\dfrac{1}{2})$,且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$,则 $f(x)=$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x\to 0$ 时,变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是 ( )

(A) 无穷小 (B) 无穷大

(C) 有界的,但不是无穷小 (D) 有界的,但不是无穷大

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$ ( )

(A) 不连续 (B) 连续,但不可导

(C) 可导,但导数不连续 (D) 可导,且导数连续

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x<1,\\ 1, \ 1\le x\le 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ (0\le x\le 2)$,则 $F(x)$ 为 ( )

(A) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, 0\le x<1\\ x, 1\le x\le 2\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x<1\\ x, 1\le x\le 2\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, 0\le x<1\\ x-1, 1\le x\le 2\end{cases}$ (D) $\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x<1\\ x-1, 1\le x\le 2\end{cases}$

(4) 设常数 $k>0$,函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为 ( )

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内　（　）

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 设 $y=\sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

(3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}dx$.

(4) 求 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

(5) 求微分方程 $(x^2-1)dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$ 的特解.

四、(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

五、(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

六、(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小, 并求出该最小值.

七、(本题满分 6 分)

设 $x>0$，常数 $a>e$，证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且 $f(0)=0$, 证明: $\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{Ma^2}{2}$, 其中 $M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 则 $a=$_____.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

(3) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^{\cos 3x} f(t)dt\right]=$_____.

(4) $\int x^3e^{x^2}dx=$_____.

(5) 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为 _____.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$, 则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的 ( )

(A) 左、右导数都存在 (B) 左导数存在, 但右导数不存在

(C) 左导数不存在, 但右导数存在 (D) 左、右导数都不存在

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解, 且 $f'(x_0)=0$, 则 $f(x)$ 在 ( )

(A) x_0 的某个领域内单调增加 (B) x_0 的某个领域内单调减少

(C) x_0 处取得极小值 (D) x_0 处取得极大值

(4) 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有 ( )

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，

则有 ( )

(A) $N<P<M$ (B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$ (D) $P<M<N$

三、(本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(1) 设 $y=f(x+y)$, 其中 f 具有二阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

(3) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.

(4) 计算 $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

(5) 如图, 设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 D, 曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1, 点 A 的坐标为 $(a,0)$, $a>0$, 证明: $\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.

四、(本题满分 9 分)

设当 $x>0$ 时, 方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

五、(本题满分 9 分)

设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$,

(1) 求函数的增减区间及极值;

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点;

(3) 求其渐近线;

(4) 作出其图形.

六、（本题满分 9 分）

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解, 其中常数 $a>0$.

七、（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且递减, 证明：当 $0<\lambda<1$ 时, $\int_0^{\lambda} f(x)dx \geq \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

八、（本题满分 9 分）

求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$,则 $y'=$_____.

(2) 微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为_____.

(3) 曲线 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为_____.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$_____.

(5) 曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近线方程为_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则 ( )

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

(2) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为 ( )

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且对任意 x_1,x_2,当 $x_1>x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则 ( )

(A) 对任意 x, $f'(x)>0$　　(B) 对任意 x, $f'(-x)\leq 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 ( )

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(5) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 ( )

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$　　(D) $f(0)-f'(0)=0$

三、(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(5) 求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 一拱（$0\le t\le 2\pi$）的弧长.

(6) 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\big|_{t=0}=v_0$，已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

四、(本题满分 8 分)

求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值.

五、(本题满分 8 分)

设 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'+p(x)y=x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2}=0$ 的特解.

六、（本题满分 8 分）

如图, 设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$, 且 $y''>0$, 又 MT, MP 分别为该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线和法线, 已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$（其中 $y_0'=y'(x_0)$, $y_0''=y''(x_0)$）, 试推导出点 $P(\xi,\eta)$ 的坐标表达式.

七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

八、（本题满分 8 分）

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, 且 $f''(x)>0$, 证明 $f(x)\ge x$.

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y'\big|_{x=0}=$_____.

(2) $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$_____.

(3) 微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为_____.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\right]=$_____.

(5) 由曲线 $y=x+\frac{1}{x}, x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积 $S=$_____.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设当 $x\to 0$ 时, $e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则 ( )

(A) $a=\frac{1}{2}, b=1$　　(B) $a=1, b=1$

(C) $a=-\frac{1}{2}, b=-1$　　(D) $a=-1, b=1$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 ( )

(A) 间断点　　(B) 连续而不可导的点

(C) 可导的点, 且 $f'(0)=0$　　(D) 可导的点, 且 $f'(0)\ne 0$

(3) 设 $f(x)$ 处处可导, 则 ( )

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$, 必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

(4) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$ ( )

(A) 无实根　　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　　(D) 有无穷多个实根

(5) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数), 由曲线 $y = g(x)$, $y = f(x), x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为 (　　)

(A) $\int_a^b \pi\left[2m - f(x) + g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(B) $\int_a^b \pi\left[2m - f(x) - g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(C) $\int_a^b \pi\left[m - f(x) + g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

(D) $\int_a^b \pi\left[m - f(x) - g(x)\right]\left[f(x) - g(x)\right]dx$

三、(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

(1) 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}}\,dx$.

(2) 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

(3) 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2)du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(4) 求函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $x = 0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

(5) 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解.

(6) 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a$、$2b$, 用过此柱体底面的短轴与底面成 α 角 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平面截此柱体, 得一锲形体 (如图), 求此锲形体的体积 V.

四、(本题满分 8 分)

计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\le x\le 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点, 若有, 指出这些点.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定, 试求 $y=y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$, 试证明:

存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 为连续函数,

(1) 求初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x),\\ y\big|_{x=0}=0\end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 为正的常数;

(2) 若 $|f(x)|\le k$ (k 为常数), 证明: 当 $x\ge 0$ 时, 有 $|y(x)|\le \dfrac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 分, 每小题 3 分, 满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$_____.

(2) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y''\big|_{x=0}=$_____.

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=$_____.

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}=$_____.

(5) 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2, 则 $t=$_____.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $x\to 0$ 时, $e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$, 记 $S_1=\int_a^b f(x)dx, S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则 ( )

(A) $S_1<S_2<S_3$ (B) $S_2<S_3<S_1$

(C) $S_3<S_1<S_2$ (D) $S_2<S_1<S_3$

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$, 若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$, 则 ( )

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$, 则 $F(x)$ ( )

(A) 为正常数　　(B) 为负常数

(C) 恒为零　　(D) 不为常数

(5) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$, 则 $g[f(x)]$ 为　　(　　)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

三、(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分.)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

(2) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$.

(4) 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$ 的通解.

(5) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

(6) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, 且 $A^2-AB=E$, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求矩阵 B.

四、(本题满分 8 分.)

λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$ 无解, 有惟一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

五、(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2,0)$ 为 L 上一定点, 若极径 OM_0、OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0, M 两点间弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

六、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数), 又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y=f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

七、（本题满分 8 分.）

已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, 设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

八、（本题满分 8 分）

就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$_____.

(2) 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$_____.

(3) $\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$_____.

(4) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$_____.

(5) 曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})(x>0)$ 的渐近线方程为_____.

二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 共15分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则下列断言正确的是 ( )

(A) 若 x_n 发散, 则 y_n 发散　　(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 的不可导点的个数是 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 其中 α 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小, 且 $y(0)=\pi$, , 则 $y(1)=$ ( )

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　　(B) 2π　　(C) π　　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, 则存在 $\delta>0$, 当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时, 必有 ( )

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0(x\ne a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0(x\ne a)$

(5) 设 A 是任一 $n(n\geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k\neq 0,\pm 1$, 则必有

$(kA)^*=$ ( )

(A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) k^nA^* (D) $k^{-1}A^*$

三、(本题满分5分)

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

四、(本题满分5分)

确定常数 a,b,c 的值, 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$.

五、(本题满分5分)

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$ 化简, 并求出原方程的通解.

六、(本题满分6分)

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

七、(本题满分6分)

从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水比重为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y=f(v)$.

八、(本题满分8分)

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\dfrac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

九、(本题满分8分)

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

十、(本题满分8分)

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线, 其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$, 求该曲线的方程, 并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

十一、(本题满分8分)

设 $x\in(0,1)$, 证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

十二、(本题满分5分)

设 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$, 其中 E 是4阶单位矩阵, A^T 是4阶矩阵 A 的转置矩阵,

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

求 A.

十三、(本题满分8分)

已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T,\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3=(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,b,4)^T$, 问:

(1) a,b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

(2) a,b 取何值时, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示? 并写出此表达式.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题

一、填空题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。把答案填在题中横线上。)

(1) 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，在点$(0,1)$处的法线方程为_____

(2) 设函数$y = y(x)$由方程$\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$确定，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$_____

(3) $\int \dfrac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx =$_____

(4) 函数$y = \dfrac{x^2}{\sqrt{-x^2}}$在区间$\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为_____

(5) 微分方程$y'' - 4y = e^{2x}$的通解为_____

二、选择题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。每小题给出得四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在提后的括号内。)

(1) 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \le 0 \end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x = 0$处（　　）

(A) 极限不存在.
(B) 极限存在，但不连续.
(C) 连续，但不可导.
(D) 可导.

(2) 设$\alpha(x) = \int_0^{5x} \dfrac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$，则当$x \to 0$时$\alpha(x)$是$\beta(x)$的（　　）

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小
(C)同阶但不等价的无穷小　　(D)等价无穷小

(3) 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　　）

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数.

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数.

(D) 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数.

(4) “对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数N，当$n \ge N$时，恒有$|x_n - a| \le 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$

收敛于 a 的 (　　)

(A)充分条件但非必要条件.　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

(5)记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

三、(本题满分5分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

四、(本题满分6分)

计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

五、(本题满分7分)

求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0(x>0) \\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

六、(本题满分7分)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口见图，已知井深 $30m$ 30m,抓斗自重 $400N$，缆绳每米重 $50N$ ，抓斗抓起的污泥重 $2000N$，提升速度为 $3m/s$,在提升过程中，污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？(说明：①$1N\times 1m=1J$;其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

七、(本题满分 8 分)

已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1)函数的增减区间及极值；

(2)函数图形的凹凸区间及拐点

(3)函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$，

$f'(0)=0$，证明：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ，使$f'''(\xi)=3$.

九、(本题满分 9 分)

设函数$y(x)(x\geq 0)$二阶可导，且$y'(x)>0$，$y(0)=1$.过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作该曲线的切线及x轴的垂线，上述两直线与x轴所围成的三角形的面积记为S_1，区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2，并设$2S_1-S_2$恒为 1，求此曲线$y=y(x)$的方程.

十、(本题满分 6 分)

设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{i=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

十一、(本题满分 8 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$.

十二、(本题满分 5 分)

设向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$

(1) p为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量$\alpha=(4,1,6,10)^T$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出；

(2) p为何值时，该向量组线性相关？并此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ _____.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0} =$ _____.

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ _____.

(4) 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

(5) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$ 则

$(E+B)^{-1} =$ _____ .

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, 则常数 a,b 满足（　　）

(A) $a<0, b<0.$　　(B) $a>0, b>0.$

(C) $a\le 0, b>0.$　　(D) $a\ge 0, b<0.$

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$，且 $f'(0) = 0$，则（　　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a<x<b$ 时，有（　　）

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为　(　　)

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D) ∞.

(5) 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是 (　　)

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0.$　　(B) $y''' + y'' - y' - y = 0.$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$　　(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

三、(本题满分 5 分)

设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$.

四、(本题满分 5 分)

设 xoy 平面上有正方形 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \ge 0)$.若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $\int_0^x S(t)dt, (x \ge 0)$.

五、(本题满分 5 分)

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)(n \ge 3)$.

六、(本题满分 6 分)

设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$，

(1)当 n 为正整数，且 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \le S(x) < 2(n+1)$；

(2)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分)

某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\dfrac{V}{3}$，已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标.为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$.问至多需要经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内(注：设湖水中 A 的浓度是均匀的)

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0, \int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$，试证明：在 $(0,\pi)$

内至少存在两个不同的点ξ_1,ξ_2，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

九、(本题满分 7 分)

已知$f(x)$是周期为 5 的连续函数，它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中$\alpha(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

十、(本题满分 8 分)

设曲线$y=ax^2(a>0,x\geq 0)$与$y=1-x^2$交于点A，过坐标原点O和点A的直线与曲线$y=ax^2$围成一平面图形.问a为何值时，该图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

十一、(本题满分 8 分)

函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

(1)求导数$f'(x)$；

(2)证明：当$x\geq 0$时，成立不等式$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立

十二、(本题满分 6 分)

设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha$.其中$\beta^T$是$\beta$的转置，

求解方程$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$

十三、(本题满 7 分)

已知向量组$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$与向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$

具有相同的秩，且β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求$a,b$的值.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 x dx=$_____

(4) 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为_____.

(5) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a=$_____.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$ 等于 ( )

(A)0 (B)1 (C)$\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$, 则 ( )

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C)在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)<x$.在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)>x$.

(D)在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$.在 $(1,1+\delta)$ 内，$f(x)<x$.

(5)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示，

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 ( )

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.(在直角坐标系下曲率公式为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$.若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0, g(0)=2$，

求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$

八、(本题满分 9 分)

设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E$, 其中 E 是 3 阶单位阵，求 X .

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4, \beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$, 试问实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也为 $AX=0$ 的一个基础解系.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

(2) 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是_____.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是_____.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$_____ .

(5) 矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)$ =(　　)

(A)－1　　(B)0.1　　(C)1　　(D)0.5

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

(3) 设 $y=(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　)

(A)不存在　　(B)等于1　　(C)等于2　　(D)等于3

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(5) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k ，必有(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$ ，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<0 \\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\le x\le 1 \end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ，且满足

$\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$.

六、(本题满分 8 分)

求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$,使得由曲线 $y=y(x)$，与直线 $x=1,x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的性状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)?

八、(本题满分 8 分)

设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0<a<b$，证明不等式 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0,\ f''(0)\neq 0.$

证明:存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$$

是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 A,B 为3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E 是3阶单位矩阵.

(1) 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求矩阵 A.

十二、(本题满 6 分)

已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 若 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_____ .

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是_____ .

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 _____ .

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$ ，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____ .

(5) 设 α 为 3 维列向量，α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则

$\alpha^T\alpha=$_____ .

(6) 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 为三阶单位矩阵，若

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $|B|=$_____ .

二、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

(2) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的表达式为(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，

则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点.
(B)两个极小值点和一个极大值点.
(C)两个极小值点和两个极大值点.
(D)三个极小值点和一个极大值点.

(5) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$, 则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$.　　(B) $1>I_1>I_2$.

(C) $I_2>I_1>1$.　　(D) $1>I_2>I_1$.

(6)设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　　)

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

三 、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

四 、(本题满分 9 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五 、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$)在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

七 、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

八 、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九 、(本题满分 10 分)

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图)，容器的底面圆的半径为 $2m$. 根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入

液体时，液面的面积将以$\pi m^2/\min$的速率均

匀扩大(假设注入液体前，容器内无液体).

(1) 根据t时刻液面的面积，写出t与$\varphi(y)$之间的关系式；

(2) 求曲线$x=\varphi(y)$的方程.

(注：m表示长度单位米，$\min$表示时间单位分.)

十 、(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f'(x)>0$. 若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

(1) 在(a,b)内$f(x)>0$；

(2) 在(a,b)内存在点ξ，使$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在(a,b)内存在与(2)中ξ相异的点η，使$f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$

十 一、(本题满分 10 分)

若矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角阵$\Lambda$，试确定常数$a$的值；并求可逆矩阵$P$使$P^{-1}AP=\Lambda.$

十二 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,\quad l_2: bx+2cy+3a=0,\quad l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证: 这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0.$

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ _____ .

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 _____ .

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ _____ .

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____ .

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为 _____ .

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$ _____ .

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是 (　　)

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.

(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则 (　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（　）

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.　　(B) $2\int_1^2 \ln x dx$.

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)dx$.　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　）

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为（　）

(A) $y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y*=ax^2+bx+c+A\cos x$

(12) 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于（　）

(A) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$.　　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$.

(C) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$.　　(D) $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\,dr$

(13) 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（　）

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(14) 设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　）

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(I)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式;　(II)问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17)(本题满分 11 分)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$,

(I)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;　(II)求 $f(x)$ 的值域.

(18)(本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0$, $x=t\,(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x

轴旋转一周得一旋转体，其体积为$V(t)$，侧面积为$S(t)$，在$x=t$处的底面积为$F(t)$.

(I)求$\dfrac{S(t)}{V(t)}$的值; (Ⅱ)计算极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(19)(本题满分 12 分)

设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为$9000kg$的飞机,着陆时的水平速度为$700km/h$.经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为$k=6.0\times10^6$).问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少? (注：kg表示千克,km/h表示千米/小时)

(21)(本题满分 10 分)

设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中f具有连续二阶偏导数,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(22)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解

(23)(本题满分 9 分)

设矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\Big|_{x=\pi}$ = _____ .

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ _____

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为 _____.

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_____ .

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$____.

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　）

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有（　）

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数.　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是（　）

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

(10) 设区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$为$D$上的正值连续函数，$a,b$为常数，则$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（　）

(A) $ab\pi$.　　(B) $\frac{ab}{2}\pi$.　　(C) $(a+b)\pi$.　　(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

(11) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$ 具有一阶导数，则必有（　）

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　）

(A) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点.

(D) $x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点.

(13) 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是（　）

(A) $\lambda_1\ne 0$.　　(B) $\lambda_2\ne 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.

(14) 设A为n($n\ge 2$)阶可逆矩阵，交换A的第 1 行与第 2 行得矩阵B，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，则（　）

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.　　(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

(16)(本题满分 11 分)

如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$)与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$.

(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

(I)存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(II)存在两个不同的点 $\eta,\zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\left|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\right.\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\left|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right.\}$

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$, $\alpha_2=(1,a,1)^T$, $\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$, $\beta_2=(-2,a,4)^T$, $\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$ (k 为常数)，且 $AB=0$，求线性方程组 $AX=0$ 的通解.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 _____

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____

(3) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=$ _____

(4) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____

(5) 设函数 $y=y(x)$由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ _____

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$,则 $|B|=$_____.

二、选择题：9-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\quad f''(x)>0,$ Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　)

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 是(　　)

(A)连续的奇函数　　(B)连续的偶函数

(C)在 $x=0$ 间断的奇函数　　(D)在 $x=0$ 间断的偶函数

(9) 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2,$ 则 $g(1)$ 等于(　)

(A) $\ln 3-1$　　(B) $-\ln 3-1$　　(C) $-\ln 2-1$　　(D) $\ln 2-1$

(10) 函数 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是(　)

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于(　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$,已知 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　)

(A)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$　　(B)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$　　(D)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　)

(A)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　)

(A) $C=P^{-1}AP.$　　(B) $C=PAP^{-1}.$　　(C) $C=P^TAP.$　　(D) $C=PAP^T.$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16)(本题满分 10 分)

求$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

(17)(本题满分 10 分)

设区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，计算二重积分$I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$

(18)(本题满分 12 分)

设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$

(I) 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求该极限;　　(II) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明：当$0<a<b<\pi$时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且$Z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(I)验证　$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$;　　(II)若 $f(1)=0, f'(1)=1$, 求函数 $f(u)$的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线L的方程$\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$，$(t\ge 0)$,

(I) 讨论L的凹凸性;

(II) 过点$(-1,0)$引L的切线，求切点(x_0,y_0)，并写出切线的方程;

(III) 求此切线与L(对应$x\le x_0$的部分)及x轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$　有 3 个线性无关的解.

(I) 证明此方程组系数矩阵A的秩$r(A)=2$;　(Ⅱ) 求a,b的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵A的各行元素之和均为 3,向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$,$\alpha_2=(0,-1,1)^T$是线性方程组$Ax=0$的两个解.

(I) 求A的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^T AQ = \Lambda$.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

$A.\ 1-e^{\sqrt{x}}$　　$B.\ \ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　$C.\ \sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　$D.\ 1-\cos\sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　)

$A.\ 0$　　$B.\ 1$　　$C.\ -\dfrac{\pi}{2}$　　$D.\ \dfrac{\pi}{2}$

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是(　　)

$A.\ F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　$B.\ F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

$C.\ F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　$D.\ F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是(　)

$A.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　$B.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

$C.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　$D.$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　)

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是(　)

$A.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$B.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

$C.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$D.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　)

$A.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$

$B.$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[f(x,0)-f(0,0)\right]}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{\left[f(0,y)-f(0,0)\right]}{y}=0$

$C.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$D.$ $\lim\limits_{x\to0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$

(8) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于(　)

$A.$ $\int_0^1dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　$B.$ $\int_0^1dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

$C.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　$D.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是 (　)

$A.$ $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　$B.$ $\alpha_2+\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

$C.$ $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　$D.$ $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(10) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B (　)

$A.$ 合同，且相似　　$B.$ 合同，但不相似

C. 不合同，但相似　　D. 既不合同，也不相似

二、填空题：11-16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ _____

(12) 曲线$\begin{cases} x=\cos t+\cos^2 t \\ y=1+\sin t \end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为 _____

(13) 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$ _____

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为$y=$ _____

(15) 设$f(u,v)$是二元可微函数，$z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$, 则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____

(16) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A^3$的秩为_____.

三、解答题：17－24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设$f(x)$是区间$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上的单调、可导函数，且满足$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

其中f^{-1}是f的反函数，求$f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$下方、$x$轴上方的无界区域.

(I) 求区域D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积$V(a)$;

(II) 当a为何值时，$V(a)$最小？并求出最小值.

(19)(本题满分 11 分)

求微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.

设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$， $f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 2\}$

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ (1)

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求 a 得值及所有公共解.

(24)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I)验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 B .

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，求 $f'(x)$ 的零点个数(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 如图，曲线段方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于(　　)

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.

(D) 三角形 ACD 面积.

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}\sin x(x>0)$ 间断点的情况(　)

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

(D) 有两个跳跃间断点

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$(　　)

(A) $vf\left(u^2\right)$

(B) $\frac{v}{u}f\left(u^2\right)$

(C) $vf(u)$

(D) $\frac{v}{u}f(u)$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ _____

(10) 微分方程$(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$的通解是$y=$ _____

(11) 曲线$\sin\left(xy\right)+\ln\left(y-x\right)=x$在点$\left(0,1\right)$处的切线方程为_____.

(12) 求函数$f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$的拐点_____.

(13) 已知$z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ _____ .

(14) 矩阵A的特征值是$\lambda,2,3$，其中λ未知，且$\left|2A\right|=-48$，则$\lambda=$_____.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中$x(t)$是初值问题

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x|_{t=0}=0\end{cases}$的解. 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(18)(本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D\max\left\{xy,1\right\}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)\left|0\le x\le 2,0\le y\le 2\right.\}$

(19)(本题满分 11 分)

设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上具有连续导数的单调增加函数，且$f(0)=1$. 对于任意的$t\in[0,+\infty)$，直线$x=0,x=t$，曲线$y=f(x)$以及x轴所围成曲边梯形绕x轴旋转一周生

成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足，$\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1

(III) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解

(23)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(I) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$ ( )

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$. (B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$. (D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内 ( )

(A) 有极值点，无零点. (B) 无极值点，有零点.
(C) 有极值点，有零点. (D) 无极值点，无零点.

(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为 （ ）

(A)

(B)

(C)

(D)

(7) 设 $A,\ B$ 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 $A,\ B$ 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 （ ）

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(8) 设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为 （ ）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$, 则 $k=$_____.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$_____.

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$_____.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____.

(14) 设 α,β 为 3 维列向量, β^{T} 为 β 的转置, 若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$

_____.

三、解答题：15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx \quad (x>0)$.

(17)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)(本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)\ (x\ge 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体

积.

(19)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\ \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

2010年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、**选择题**(1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)$ 的两个特解,若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解,则( )

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切,则 $a=$ ( )

(A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e.

(4) 设 m,n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关. (D) 与 m,n 取值都无关.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$,由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{\left(n+i\right)\left(n^2+j^2\right)}=$ ( )

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y^2\right)}dy$. (B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}dy$.

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}dy$. (D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y^2\right)}dy$.

(7) 设向量组 $\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\mathrm{II}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,下列命题正确的是( )

(A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \le s$.　　(B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.

(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \le s$.　　(D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

(8) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于　(　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

二、**填空题**(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

(10) 曲线 $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为_____.

(11) 函数 $y = \ln(1-2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ _____.

(12) 当 $0 \le \theta \le \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 的弧长为_____.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3 cm/s 的速率增加. 则当 $l = 12\text{cm}$, $w = 5\text{cm}$ 时, 它的对角线增加的速率为_____.

(14) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

三、**解答题**(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} d$ 的单调区间与极值.

(16) (本题满分 10 分)

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的大小, 说明理由;

(Ⅱ) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}(t>-1)$ 所确定，其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$. 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，求函数 $\psi(t)$.

(18)（本题满分 10 分）

一个高为 *1* 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时（如图），计算油的质量.（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 ρ kg/m^3）

(19)（本题满分 11 分）

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a，b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(20)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr\,d\theta$，其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

(21)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$，$\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ，a；

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(23)（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第 1 列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，$f\left(x\right)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A) $k=1,c=4$．　(B) $k=1,c=-4$．　(C) $k=3,c=4$．　(D) $k=3,c=-4$．

(2) 已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f\left(0\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$=(　　)

(A) $-2f'\left(0\right)$．　(B) $-f'\left(0\right)$．　(C) $f'\left(0\right)$．　(D) 0．

(3) 函数 $f(x)=\ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|$ 的驻点个数为(　　)

(A) 0．　(B) 1．　(C) 2．　(D) 3．

(4) 微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为(　　)

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$．　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$．

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$．　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$．

(5) 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0,$ 且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0.$　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0.$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0.$　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0.$

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$．　(B) $I<K<J$．　(C) $J<I<K$．　(D) $K<J<I$．

(7) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2．　(B) $P_1^{-1}P_2$．　(C) P_2P_1．　(D) $P_2P_1^{-1}$．

(8) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=$ _____.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为_____.

(11) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt \quad (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$ _____.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}$ $\lambda>0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=$ _____.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴围成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$ _____.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为_____.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^a}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$, 试求 a 的取值范围.

(16)（本题满分 11 分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3},\end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$

处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）

(I) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20)（本题满分 11 分）

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\ge\dfrac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\le\dfrac{1}{2})$ 连接而成的.

(I) 求容器的容积；

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？（长度单位：m，重力加速度为 gm/s^2，水的密度为 $10^3 kg/m^3$）.

图 1

(21)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy f''_{xy}(x,y)dxdy$.

(22)（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(23)（本题满分 11 分）

A为三阶实对称矩阵，A的秩为2，即$r\left(A\right)=2$，且$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求A的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵A.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ ( )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,3\cdots)$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件 (D) 非充分也非必要

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,(k=1,2,3)$, 则有

( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

(5) 设函数 $f(x,y)$ 为可微函数，且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial(x,y)}{\partial y}<0$, 则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

( )

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$ (B) $x_1>x_2,y_1>y_2$ (C) $x_1<x_2,y_1<y_2$ (D) $x_1<x_2,y_1>y_2$

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

( )

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) $-\pi$

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量

组线性相关的为 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(8) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$_____.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ _____.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$_____.

(13) 曲线 $y=x^2+x\left(x<0\right)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_____.

(14) 设 A 为3阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 伴随矩阵，若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B，则 $|BA^*|=$_____.

三、解答题：15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$，

(I)求 a 的值; (II)若 $x\to0$ 时，$f\left(x\right)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x,y\right)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 12 分)

过 $(0,1)$ 点作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线, 切点为 A, 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成, 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$,

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}$, $(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(I)证明方程 $x^{\mathrm{n}}+x^{\mathrm{n}-1}+\cdots+x=1\ \left(n>1\text{的整数}\right)$，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根;

(II)记(I)中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(I) 计算行列式 $\left|A\right|$;

(II) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^T\left(A^TA\right)x$ 的秩为 2,

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

（5）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

（6）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　　）

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（8）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$_____.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}dt$ ，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$_____.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\ (-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为_____.

(12) 曲线$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为_____.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0$ $y'\big|_{x=0}=1$的解为 $y=$_____.

（14）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i,j}=1,2,3)$,则$|A|=$____

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

（16）（本题满分 10 分）

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x,V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值。

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域D由直线$x=3y, y=3x$及$x+y=8$围成.计算$\iint\limits_D x^2dxdy$。

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$.证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；（II）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

（19）（本题满分 11 分）

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

（20）（本题满分 11 分）

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求$f(x)$的最小值

（II）设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

（21）（本题满分 11 分）

设曲线L的方程为$y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\leq x\leq e)$，

（1）求L的弧长；

（2）设D是由曲线L，直线$x=1, x=e$及x轴所围平面图形，求D的形心的横坐标。

（22）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$。

（23）（本题满分 11 分）

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β正交且均为单位向量，证明二次型f在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

2、下列曲线中有渐近线的是　　（　）

（A）$y = x + \sin x$　　（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\frac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

3、设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 内　　（　）

（A）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$

（B）当 $f'(x) \ge 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

（C）当 $f''(x) \ge 0$ 时，$f(x) \ge g(x)$

（D）当 $f''(x) \ge 0$ 时，$f(x) \le g(x)$

4、曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是　　（　）

（A）$\frac{\sqrt{10}}{50}$　　（B）$\frac{\sqrt{10}}{100}$　　（C）$10\sqrt{10}$　　（D）$5\sqrt{10}$

5、设函数 $f(x) = \arctan x$，若 $f(x) = xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2} =$　　（　）

（A）1　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{3}$

6、设函数$u(x,y)$在有界闭区域D上连续，在D的内部具有2阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$及$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 （ ）

（A）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的边界上取得

（B）$u(x,y)$的最大值和最小值都在D的内部取得

（C）$u(x,y)$的最大值在D的内部取得，$u(x,y)$的最小值在D的边界上取得

（D）$u(x,y)$的最小值在D的内部取得，$u(x,y)$的最大值在D的边界上取得

7、行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ （ ）

（A）$(ad-bc)^2$ （B）$-(ad-bc)^2$ （C）$a^2d^2-b^2c^2$ （D）$b^2c^2-a^2d^2$

8、设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维向量，则对任意常数$k,l$，向量组$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的 （ ）

（A）必要非充分条件 （B）充分非必要条件

（C）充分必要条件 （D）既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、$\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$_____.

10、设$f(x)$是周期为4的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则$f(7)=$_____

11、设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x^2+y^2+z=\dfrac{7}{4}$确定的函数，则$dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$_____.

12、曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是_____.

13、一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$_____.

14、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

16、（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

17、（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

18、（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$.

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

19、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$.

证明：（Ⅰ）（I）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，$x\in[a,b]$；

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx$

20、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$， $x\in[0,1]$. 定义数列

$f_1(x)=f(x)$， $f_2(x)=f(f_1(x))$， $\cdots$， $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$， $\cdots$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

21、（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$. 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

22、（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

23、（本题满分 11 分）

证明： n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

2015年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ( )

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ (C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ (D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

(2) 函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内( )

(A) 连续 (B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点 (D) 有无穷间断点

(3) 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}},x>0\\0,x\le 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f^{'}\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续则: ( )

(A) $\alpha-\beta>0$ (B) $0<\alpha-\beta\le 1$

(C) $\alpha-\beta>2$ (D) $0<\alpha-\beta\le 2$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(5) 设函数 $f\left(u,v\right)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ ，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 ( )

(A) $\frac{1}{2},0$ (B) $0,\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2},0$ (D) $0,-\frac{1}{2}$

(6)设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f\left(x,y\right)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=$ ( )

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ d\\ d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ (B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$ (D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

(8) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 ( )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=3t+t^3\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$_____

(10)函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)=$_____

(11) 设 $f\left(x\right)$ 连续，$\varphi\left(x\right)=\int_0^{x^2} xf\left(t\right)dt$，若 $\varphi\left(1\right)=1,\varphi'\left(1\right)=5$，则 $f\left(1\right)=$ _____

(12)设函数 $y=y\left(x\right)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y\left(x\right)$ 取得极值 3，则 $y\left(x\right)=$_____.

(13)若函数 $Z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\left.\mathrm{dz}\right|_{(0,0)}=$_____.

(14) 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2-A+E$，其中 E 为 3 阶单位阵，则行列式 $\left|B\right|=$____.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16) (本题满分 10 分)

设 A>0，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$， $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$， $f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\right\}$

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f\left(x\right)$ 零点的个数？

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 $120°C$ 的物体在 $20°C$ 的恒温介质中冷却，30min 后该物体降至 $30°C$，若要将该物体的温度继续降至 $21°C$，还需冷却多长时间？

(21) (本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,+\infty\right]$ 上具有 2 阶导数， $f\left(a\right)=0$， $f'\left(x\right)>0$， $f''\left(x\right)>0$，设 $b>a$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(b,f\left(b\right)\right)$ 处的切线与 x 轴的交点是 $\left(x_0,0\right)$，证明 $a<x_0<b$.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且 $A^3=O$.

(1) 求 a 的值；

(2) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$， E 为 3 阶单位阵，求 X.

(23) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

2016年硕士研究生入学考试真题（数学二）

一、选择：1~8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的.

(1)设$a_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当$x\to 0^+$时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶拓排序是

（A）a_1,a_2,a_3.　　（B）a_2,a_3,a_1.

（C）a_2,a_1,a_3.　　（D）a_3,a_2,a_1.

（2）已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1,\end{cases}$则$f(x)$的一个原函数是

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1), & x\ge 1.\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$

（3）反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$的敛散性为

（A）①收敛，②收敛.　　（B）①收敛，②发散.

（C）①收敛，②收敛.　　（D）①收敛，②发散.

（4）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，求导函数的图形如图所示，则

（A）函数$f(x)$有2个极值点，曲线$y=f(x)$有2个拐点.

（B）函数$f(x)$有2个极值点，曲线$y=f(x)$有3个拐点.

（C）函数$f(x)$有3个极值点，曲线$y=f(x)$有1个拐点.

（D）函数$f(x)$有3个极值点，曲线$y=f(x)$有2个拐点.

（5）设函数$f_i(x)(i=1,2)$具有二阶连续导数，且$f_i(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线$y=f_i(x)(i=1,2)$在点(x_0,y_0)处具有公切线$y=g(x)$，且在该点处曲线$y=f_1(x)$的曲率大于曲线$y=f_2(x)$的曲率，则在x_0的某个领域内，有

（A）$f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　（B）$f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C） $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$　　（D） $f_2(x) \le g(x) \le f_1(x)$

（6）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f_x^{'}-f_y^{'}=0$　　（B） $f_x^{'}+f_y^{'}=0$

（C） $f_x^{'}-f_y^{'}=f$　　（D） $f_x^{'}+f_y^{'}=f$

（7）设 A， B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

（A） A^T 与 B^T 相似　　（B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　（D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2，则

（A） $a>1$　　（B） $a<-2$

（C） $-2<a<1$　　（D） $a=1$ 与 $a=-2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$_____.

（11）以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则当 $n\ge 2$ 时， $f^{(n)}(0)=$_____.

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时， l 对时间的变化率是_____.

（14）设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$_____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt(x>0)$，求 $f^{'}(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1$，$y=x$，$y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$

（19）（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y^n-(2x+1)y'+2y=0$ 的解，若 $u(-1)=e$，$u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解。

（20）（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

（21）（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数 $f(0)=0$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（Ⅱ）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点。

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解。

（Ⅰ）求 a 的值；　　（Ⅱ）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解。

（23）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 A^{99}

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$。记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题

一、填空题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。把答案填在题中横线上。)

(1) 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$，在点$(0,1)$处的法线方程为_____

(2) 设函数$y = y(x)$由方程$\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$确定，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$_____

(3) $\int \dfrac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx =$_____

(4) 函数$y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$在区间$\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为_____

(5) 微分方程$y'' - 4y = e^{2x}$的通解为_____

二、选择题(本题共5小题，每小题3分，满分15分。每小题给出得四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在提后的括号内。)

(1) 设$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \le 0 \end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x = 0$处（　　）

(A) 极限不存在.
(B) 极限存在，但不连续.
(C) 连续，但不可导.
(D) 可导.

(2) 设$\alpha(x) = \int_0^{5x} \dfrac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$，则当$x \to 0$时$\alpha(x)$是$\beta(x)$的（　　）

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小
(C)同阶但不等价的无穷小　　(D)等价无穷小

(3) 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　　）

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数.

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数.

(D) 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数.

(4) “对任意给定的$\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数N，当$n \ge N$时，恒有$|x_n - a| \le 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$

收敛于 a 的 (　　)

(A)充分条件但非必要条件.　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

(5)记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

三、(本题满分5分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

四、(本题满分6分)

计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx$.

五、(本题满分7分)

求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0(x>0) \\ y\big|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解.

六、(本题满分7分)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口见图，已知井深 $30m$ 30m,抓斗自重 $400N$，缆绳每米重 $50N$ ，抓斗抓起的污泥重 $2000N$，提升速度为 $3m/s$,在提升过程中，污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？(说明：①$1N\times 1m=1J$;其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

七、(本题满分 8 分)

已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1)函数的增减区间及极值；

(2)函数图形的凹凸区间及拐点

(3)函数图形的渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $y(x)(x\geq 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$， $y(0)=1$.过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

十、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{i=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

十一、(本题满分 8 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X .

十二、(本题满分 5 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出；

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

1999 年全国硕士研究生入学统一考试数二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$y+2x-1=0$

【详解】点$(0,1)$对应$t=0$，则曲线在点$(0,1)$的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t},$$

把$t=0$代入得$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$，所以改点处法线斜率为$-2$，故所求法线方程为$y+2x-1=0$.

(2)【答案】1

【详解】$y(x)$是有方程$\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$所确定，所以当$x=0$时，$y=1$.

对方程$\ln\left(x^2+y\right)=x^3y+\sin x$两边非别对$x$求导，得

$$\frac{2x+y'}{x^2+y}=3x^2y+x^3y'+\cos x,$$

把$x=0$和$y=1$代入得$y'(0)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$

(3)【答案】$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$

【详解】通过变换，将积分转化为常见积分，即

$$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx&=\int\frac{x-3}{x^2-6x+13}dx+\int\frac{8}{x^2-6x+13}dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+\int\frac{8}{(x-3)^2+4}dx\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\int\frac{d(\frac{x-3}{2})}{(\frac{x-3}{2})^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C\end{aligned}$$

(4)【答案】$\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$

【详解】按照平均值的定义有

$$\bar{y}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

作变换令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos tdt$，所以

$$\bar{y}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 tdt$$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\sqrt{3}+1)\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$$

(5)【答案】 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

【分析】先求出对应齐次方程的通解，再求出原方程的一个特解.

【详解】原方程对应齐次方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-4=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，

故 $y''-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$,

由于非齐次项为 $f(x)=e^{2x}$, 因此原方程的特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$, 代入原方程可求得

$A=\frac{1}{4}$，故所求通解为 $y=y_1+y^*=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$

二、选择题

(1)【答案】(D)

【详解】由于可导必连续，连续则极限必存在，可以从函数可导性入手.

因为 $$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0,$$

从而，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，故正确选项为(D).

(2)【答案】(C)

【详解】当 $x\to 0$ 有，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\sin x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=5\times 1\times\frac{1}{e\times 1}=\frac{5}{e}$$

所以当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 同阶但不等价的无穷小.

(3)【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$, 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C\overset{u=-t}{=}\int_0^x f(-u)d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时， $f(-u)=-f(u)$ ，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)du+C=\int_0^x f(t)dt+C=F(x)$$

即 $F(x)$为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$ 是偶函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数，可排除(B);

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数，可排除(C);

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数，但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数，可排除(D).

(4)【答案】(C)

【详解】

【方法 1】“必要性”：数列极限的定义 “对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，存在 $N_1>0$，使得当 $n>N_1$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$”. 由该定义可以直接推出题中所述，即必要性；“充分性”：对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right\}$，这时 $\varepsilon\in(0,1)$，由已知，对于此 ε 存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$，现取 $N_1=N-1$，于是有当 $n\ge N>N_1$ 时，恒

有$|x_n-a|\le\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$. 这证明了数列$\{x_n\}$收敛于$a$. 故(C)是正确的.

【方法 2】数列极限的精确定义是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$N>0$，使得当$n>N$时$|x_n-a|<\varepsilon$，则称数列$\{x_n\}$收敛于a. 这里要抓住的关键是ε要能够任意小，才能使$|x_n-a|$任意小.

将本题的说法改成：对任意$\varepsilon_1=2\varepsilon\in(0,2)>0$，总存在$N_1>0$，使得当$n\ge N>N_1$时，有$|x_n-a|<2\varepsilon=\varepsilon_1$，则称数列$\{x_n\}$收敛于$a$.

由于$\varepsilon_1\in(0,2)$可以任意小，所以$|x_n-a|$能够任意小. 故两个说法是等价的.

(5)【答案】(B)

【详解】利用行列式性质，计算出行列式是几次多项式，即可作出判别.

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[4列-1列]{\substack{2列-1列\\3列-1列}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{4列+2列}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}\text{(若 }A,B,C\text{ 均为 }n\text{ 阶方阵，则}\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix}=|A|\cdot|C|\text{)}$$

$$=[(x-2)\cdot1-(2x-2)\cdot1]\times[-6(x-2)-(-1)(x-7)]$$

$$=(-x)\times(-5x+5)=5x\cdot(x-1)$$

故 $f(x)=x\cdot(5x-5)=0$ 有两个根 $x_1=0,x_2=1$，故应选(B).

三【详解】进行等价变化，然后应用洛必达法则，

【方法1】 $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{(x\ln(1+x)-x^2)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)\bullet2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\bullet\frac{\sin x}{x}\bullet\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\overset{洛}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x}{-x}=-\frac{1}{2}$$

【方法2】 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\ln(1+x)-x)\bullet 2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x(\ln(1+x)-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{2x(\ln(1+x)-x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{\ln(1+x)-x}\overset{洛}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{-x/(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

四【详解】采用分部积分法

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\bullet\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{4}+\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

五【详解】将原方程化简 $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入上式，得 $u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2}$，

化简并移项，得 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$，

由积分公式得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln(Cx)$，其中 C 是常数，

因为 $x>0$, 所以 $C>0$，去掉根号，得 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$，即 $\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}=Cx$，

把 $y\big|_{x=1}=0$ 代入并化简，得 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},x>0$

六【详解】建立坐标轴如图所示，

解法1：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$，其中 W_1 是克

作的功；W_2 是克服缆绳重力作的功；W_3 为提出污泥所作的功. 由题意知

$$W_1 = 400N \times 30m = 12000J.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x+dx$ 处，克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = \text{缆绳每米重×缆绳长×提升高度}$$

$$= 50(30-x)dx,$$

从而 $$W_2 = \int_0^{30} 50(30-x)dx = 22500J.$$

在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内提升污泥需做功为

$$dW_3 = (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt)$$

$$= (2000-20t)3dt$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\dfrac{30m}{3m/s} = 10s,$

所以 $$W_3 = \int_0^{10} 3(2000-20t)dt = 57000J.$$

因此，共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

解法2：将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为 W，当抓斗运动到 x 处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 $400N$，缆绳的重力 $50(30-x)N$， 污泥的重力 $(2000 - \dfrac{x}{3} \cdot 20)N,$

即 $$f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W = \int_0^{30} \left(3900 - \frac{170}{3}x\right)dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$$

七【详解】函数的定义域为 $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$，对函数求导，得

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0, x=3$；令 $y''=0$ 得 $x=0$. 因此，需以 $0,1,3$ 为分界点来讨论，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
y'	$+$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	凸，增	拐点	凹，增	凹，减	极小值	凹，增

由此可知，

(1)函数的单调增区间为$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$，单调减区间为$(1,3)$，极小值为$y\big|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$.

(2)函数图形在区间$(-\infty,0)$内是向上凸的，在区间$(0,1),(1,+\infty)$内是向上凹的，拐点为$(0,0)$点.

(3)由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$，可知$x=1$是函数图形的铅直渐近线.

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x-1)^2}=1$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}\right]=2$$

故$y=x+2$是函数的斜渐近线.

八、(本题满分 8 分)

设函数$f\left(x\right)$在闭区间$\left[-1,1\right]$上具有三阶连续导数，且$f\left(-1\right)=0$，$f\left(1\right)=1$，$f'\left(0\right)=0$，证明：在开区间$\left(-1,1\right)$内至少存在一点ξ，使$f'''\left(\xi\right)=3$.

【详解】**解法 1**：由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$$，其中η介于0与x之间，$x\in[-1,1]$

分别令$x=-1,x=1$并结合已知条件得

$$f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1)=0,-1<\eta_1<0$$

$$f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2)=1,0<\eta_2<1$$

两式相减，得

$$f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)=6$$

由 $f'''(x)$ 的连续性，知 $f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设它们分别为 M 和 m，则有

$$m \le \frac{1}{2}\left[f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)\right] \le M$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi \in [\eta_1,\eta_2] \subset (-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f'''(\eta_2)+f'''(\eta_1)\right]=3$$

解法 2：构造函数 $\varphi(x)$，使得 $x\in[-1,1]$ 时 $\varphi'(x)$ 有三个 0 点，$\varphi''(x)$ 有两个 0 点，从而使用罗尔定理证明 ξ 必然存在.

设具有三阶连续导数 $\varphi(x)=f(x)+ax^3+bx^2+cx+d$

令 $\begin{cases}\varphi(-1)=f(-1)-a+b-c+d=0\\ \varphi(0)=f(0)+d=0\\ \varphi(1)=f(1)+a+b+c+d=0\\ \varphi'(0)=f'(0)+c=0\end{cases}$，将 $\begin{cases}f(-1)=0\\ f(1)=1\\ f'(0)=0\end{cases}$ 代入得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=f(0)-\dfrac{1}{2}\\ c=0\\ d=-f(0)\end{cases}$

代入 $\varphi(x)$ 得 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^3+(f(0)-\dfrac{1}{2})x^2-f(0)$

由罗尔定理可知，存在 $\eta_1\in(-1,0),\eta_2\in(0,1)$，使 $\varphi'(\eta_1)=0,\varphi'(\eta_2)=0$

又因为 $\varphi'(0)=0$，再由罗尔定理可知，存在 $\xi_1\in(\eta_1,0),\xi_2\in(0,\eta_2)$，使得 $\varphi''(\xi_1)=0,\varphi''(\xi_2)=0$

再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(\eta_1,\eta_2)\subset(-1,1)$，使 $\varphi'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0$

即 $f'''(\xi)=3$.

九【详解】如图，曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$

所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$

由于 $y'(x)>0, y(0)=1,$ 因此 $y(x)>1>0\ (x>0)$

于是 $S_1=\dfrac{1}{2}y\left|x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=\dfrac{y^2}{2y'}.$

又 $S_2=\int_0^x y(t)dt$

根据题设 $2S_1-S_2=1$，得 $2\cdot\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)dt=1$,

两边对 x 求导并化简得 $yy''=\left(y'\right)^2$

这是可降阶的二阶常微分方程，令 $p=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，

上述方程化为 $yp\frac{dp}{dy}=p^2$，分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$，解得 $p=C_1y$，即 $\frac{dy}{dx}=C_1y$,

从而有 $y=C_1e^x+C_2$，根据 $y(0)=1, y'(0)=1$, 可得 $C_1=1, C_2=0$,

故所求曲线得方程为 $y=e^x$.

十【详解】利用单调有界必有极限的准则来证明.先将 a_n 形式化简，

因为 $\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$

所以 $a_n=\sum_{i=1}^{n-1} f\left(k\right)+f(n)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f\left(k\right)-f(x)]dx+f(n)$

又因为 $f(x)$ 单调减少且非负，$k\le x\le k+1$，所以有

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f\left(k\right)-f(x)]dx\ge 0\\ f(n)\ge 0\end{cases}$$，故 $a_n\ge 0$；

又因为 $a_{n+1}-a_n=[\sum_{i=1}^{n+1} f\left(k\right)-\int_1^{n+1} f\left(x\right)dx]-[\sum_{i=1}^{n} f\left(k\right)-\int_1^{n} f\left(x\right)dx]$

$$=[\sum_{i=1}^{n+1} f\left(k\right)-\sum_{i=1}^{n} f\left(k\right)]-[\int_1^{n+1} f\left(x\right)dx-\int_1^{n} f\left(x\right)dx]$$

$$=f(n+1)-\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}[f(n+1)-f(x)]dx\le 0$$

所以 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少，因为单调有界必有极限，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

十一【详解】题设条件 $A^*X=A^{-1}+2X$

上式两端左乘 A，得 $\quad AA^*X = AA^{-1} + 2AX$

因为 $AA^* = |A|E, AA^{-1} = E$，所以 $\quad |A|X = E + 2AX \Rightarrow (|A|E - 2A)X = E$

根据可逆矩阵的定义：对于矩阵 A_n，如果存在矩阵 B_n，使得 $AB = BA = E$，则称 A 为可逆矩阵，并称 B 是 A 的逆矩阵，故 $(|A|E - 2A), X$ 均是可逆矩阵，且

$$X = (|A|E - 2A)^{-1}$$

又 $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[3行+1行]{2行+1行} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{1行-3行\times\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{1行-2行\times\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

因为常数 k 与矩阵 A 相乘，A 的每个元素都要乘以 k，故

$$|A|E = 4E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}，\ 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$|A|E - 2A = 2(2E - A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} (\text{对应元素相减})$$

$$X = (|A|E - 2A)^{-1} = \left(2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad ((kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1})$$

用初等行变换求逆，当用初等行变换将矩阵 A 化为单位矩阵时，经过相同的初等行变换，单位矩阵 E 化成了 A^{-1}，即 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3行+1行]{2行-1行} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行+3行} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3行\times\frac{1}{2}]{2行\times\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行-3行}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \vdots & 1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行+2行}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

故 $$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

十二【概念】向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i,i=1,2,3,4$ 为列向量组成的线性齐次方程组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]X=0$ 只有零解

向量 α 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i,i=1,2,3,4$ 为列向量组成的线性非齐次方程组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\alpha$ 是否有解

【详解】作方程组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=\alpha$，并对增广矩阵作初等行变换，

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha]\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 1 & -3 & 2 & -6 & \vdots & 1\\ 1 & 5 & -1 & 10 & \vdots & 6\\ 3 & 1 & p+2 & p & \vdots & 10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[4行-1行\times3]{\substack{2行-1行\\3行-1行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 6 & -4 & 12 & \vdots & 2\\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & \vdots & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[4行+2行\times2]{3行+2行\times3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & -7 & 0 & \vdots & -7\\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots & -8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行\times(-\frac{1}{7})}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & \vdots & -8\end{bmatrix}\xrightarrow{4行-3行\times(p-9)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & \vdots & 1-p\end{bmatrix}$$

(1) 当 $p\neq2$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=4$，方程组有唯一解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，且等于未知量的个数，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)X=\alpha$ 有唯一解，其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ (p-2)x_4 = 1-p \end{cases}$$，解得 $x_1 = 2, x_2 = \dfrac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \dfrac{1-p}{p-2}$

代入 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha$ 中，即 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，且表出式为

$$\alpha = 2\alpha_1 + \frac{3p-4}{p-2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1-p}{p-2}\alpha_4$$

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_i, i = 1,2,3,4$ 为列向量组成的线性齐次方程组 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] X = 0$ 有非零解

当 $p = 2$ 时，

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & \vdots & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & \vdots & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

初等变换不改变向量组的秩，$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$，系数矩阵的秩小于未知量的个数，

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] X = 0$$

有非零解，故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，列向量组经过初等行变换，其对应的部分列向量组具有相同的线性相关性．在 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$ 中，由 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 或 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ 知，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$(或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$)线性无关，是其极大线性无关组.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} =$ _____.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0} =$ _____.

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ _____.

(4) 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

(5) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$ 则

$(E+B)^{-1} =$ _____ .

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, 则常数 a,b 满足（　　）

(A) $a<0, b<0.$　　(B) $a>0, b>0.$

(C) $a\le 0, b>0.$　　(D) $a\ge 0, b<0.$

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$，且 $f'(0) = 0$，则（　　）

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a<x<b$ 时，有（　　）

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

(4) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为 (　　)

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.

(5) 具有特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$的3阶常系数齐次线性微分方程是 (　　)

(A) $y'''-y''-y'+y=0.$　　(B) $y'''+y''-y'-y=0.$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0.$　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0.$

三、(本题满分 5 分)

设$f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算$\int f(x)dx$.

四、(本题满分 5 分)

设xoy平面上有正方形$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$及直线$l:x+y=t(t\ge 0)$.若$S(t)$表示正方形$D$位于直线$l$左下方部分的面积，试求$\int_0^x S(t)dt,(x\ge 0)$.

五、(本题满分 5 分)

求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^n(0)(n\ge 3)$.

六、(本题满分 6 分)

设函数$S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$，

(1)当n为正整数，且$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时，证明$2n\le S(x)<2(n+1)$；

(2)求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

七、(本题满分 7 分)

某湖泊的水量为V，每年排入湖泊内含污染物A的污水量为$\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含A的水量为$\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为$\dfrac{V}{3}$，已知 1999 年底湖中A的含量为$5m_0$，超过国家规定指标.为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含A污水的浓度不超过$\dfrac{m_0}{V}$.问至多需要经过多少年，湖泊中污染物A的含量降至m_0以内(注：设湖水中A的浓度是均匀的)

八、(本题满分 6 分)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，试证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

九、(本题满分 7 分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形.问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=1$ 且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

(1)求导数 $f'(x)$；

(2)证明：当 $x\geq 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix},A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha$.其中 β^T 是 β 的转置，

求解方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$

十三、(本题满 7 分)

已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，求 a,b 的值.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$-1/6$

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}\overset{\ln\left(1+2x^3\right)\sim 2x^3}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{6x^2\left(1+x^2\right)}=-\dfrac{1}{6}$

(2)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x=0}=$ _____.

【答案】$(\ln 2-1)dx$

【详解】

方法 1：对方程 $2^{xy}=x+y$ 两边求微分，有

$$2^{xy}\ln 2\cdot(xdy+ydx)=dx+dy.$$

由所给方程知，当 $x=0$ 时 $y=1$. 将 $x=0$， $y=1$ 代入上式，有 $\ln 2\cdot dx=dx+dy$.

所以，$dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

方法 2：两边对 x 求导数，视 y 为该方程确定的函数，有

$$2^{xy}\ln 2\cdot(xy'+y)=1+y'.$$

当 $x=0$ 时 $y=1$，以此代入，得 $y'=\ln 2-1$，所以 $dy\big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

(3)【答案】$\dfrac{\pi}{3}$

【详解】由于被积函数在 $x=2$ 处没有定义，则该积分为广义积分.对于广义积分，可以先按照不定积分计算，再对其求极限即可.

作积分变量替换，令 $\sqrt{x-2}=t, x-2=t^2 dx=2tdt,$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{(t^2+9)t}dt=2\cdot\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

(4)【答案】$y=2x+1$

【公式】$y=kx+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐近线的计算公式：$k=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty\\x\to-\infty)}}\dfrac{y}{x}, b=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty\\x\to-\infty)}}[f(x)-kx]$

【详解】$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}=2,$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]\ \underline{\underline{令\frac{1}{x}=u}}\ \lim_{u\to0^+}(\frac{2e^u-2}{u}-e^u)$$

$$=\lim_{u\to0^+}(\frac{2(e^u-1)}{u}-e^u)\ \underline{\underline{e^u-1\sim u}}\ \lim_{u\to0^+}(\frac{2u}{u}-e^u)=2-1=1$$

所以，$x\to+\infty$ 方向有斜渐近线 $y=2x+1$. 当 $x\to-\infty$ 时，类似地有斜渐近线 $y=2x+1$.

总之，曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $y=2x+1$.

(5)【答案】$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$

【详解】先求出 $(E+B)^{-1}$ 然后带入数值，由于 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，所以

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=\left[E+(E+A)^{-1}(E-A)\right]^{-1}\\&=\left[(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)\right]^{-1}\\&=\left[2(E+A)^{-1}\right]^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-2&4&0&0\\0&-4&6&0\\0&0&-6&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

二、选择题

(1)【答案】D

【详解】排除法：

如果 $a<0$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 的分母 $a+e^{bx}$ 必有零点 x_0，从而 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，与题设不符.不选 (A)，若 $b>0$，则无论 $a=0$ 还是 $a\neq0$ 均有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, 与题设 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ 矛盾，不选 (B) 和 (C).故选 (D).

(2)【答案】C

【定理应用】判断极值的第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 出具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，那么：(1) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2)当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

【详解】令等式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 中 $x=0$，得 $f''(0)=0-\left[f'(0)\right]^2=0$，无法利用判断极值的第二充分条件，故无法判断是否为极值或拐点.

再求导数(因为下式右边存在，所以左边也存在)：

$$f'''(x)=(x-\left[f'(x)\right]^2)'=1-2f'(x)f''(x)$$

以 $x=0$ 代入，有 $f'''(0)=1$，所以

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1.$$

从而知，存在 $x=0$ 去心邻域，在此去心邻域内，$f''(x)$ 与 x 同号，于是推知在此去心邻域内当 $x<0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凸的，在此去心临域内 $x>0$ 时曲线 $y=f(x)$ 是凹的，点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，选(C).

(3)【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明，关键在于寻找待证的函数. 题设中已知 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 想到设函数为相除的形式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

【详解】

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\left(F(x)\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$

则 $F(x)$ 在 $a<x<b$ 时单调递减，所以对 $\forall a<x<b$，$F(a)>F(x)>F(b)$，即

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b)>f(b)g(x),\ a<x<b$，$(A)$ 为正确选项.

(4)【答案】(C)

【分析】本题有多种解法：(1)将含有 $f(x)$ 的要求极限的表达式凑成已知极限的表达式，或反之；(2)利用极限与无穷小的关系，从已知极限中解出 $f(x)$ 代入要求极限式中；(3)将具体函数用佩亚诺余项泰勒公式展开化简原极限.

【详解】

方法 1： 凑成已知极限

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6x-\sin 6x+\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos 6x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36$$

(由于$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\Rightarrow 1-\cos(6x)\sim\frac{1}{2}(6x)^2$)

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=36+0=36$$

方法 2：由极限与无穷小关系，由已知极限式解出

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=a，\lim_{x\to 0}a=0$$

从而 $$\sin 6x+xf(x)=ax^3\Rightarrow f(x)=\frac{ax^3-\sin 6x}{x}$$

$$\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6+\frac{ax^3-\sin 6x}{x}}{x^2}=\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3}$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+6x-\sin 6x}{x^3}\overset{极限的四则运算}{=}\lim_{x\to 0}a+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=0+\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36$$

方法 3： 将$\sin 6x$在$x=0$处按佩亚诺余项泰勒公式展开至x^3项：

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3),$$

于是 $$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{6x+xf(x)-36x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{6+f(x)}{x^2}-36+\frac{o(x^3)}{x^3},$$

从而 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+36-\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0+36-0=36.$$

(5)【答案】B

【详解】由特解$y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x}$，对照常系数线性齐次微分方程的特征方程、特征根与解的对应关系知道，$r_2=-1$为特征方程的二重根；由$y_3=3e^x$可知$r_1=1$为特征方程的单根，因此特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2=r^3+r^2-r-1=0,$$

由常系数齐次线性微分方程与特征方程的关系，得该微分方程为

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

三【详解】

方法 1：为了求不定积分，首先需要写出 $f(x)$ 的表达式.为此，令 $\ln x = t$，有 $x = e^t$

$$f(t) = f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{-x}\ln(1+e^x)dx = -\int \ln(1+e^x)de^{-x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx \qquad \text{分部积分}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx \qquad \text{拆项}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int (1-\frac{e^x}{1+e^x})dx$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{1}{1+e^x}de^x$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int 1dx - \int \frac{1}{1+e^x}d(e^x+1)$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

方法 2：作积分变量替换，命 $x = \ln t$，

$$\int f(x)dx = \int f(\ln t)\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt = -\int \ln(1+t)d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= -[\frac{\ln(1+t)}{t} - \int \frac{1}{t(1+t)}dt] \qquad \text{分部积分}$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t})dt \qquad \text{部分分式求和}$$

$$= -\frac{\ln(1+t)}{t} + \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{1+t}d(1+t) = -\frac{\ln(1+t)}{t} + \ln t - \ln(1-t) + C$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.$$

四【详解】先写出面积 $S(t)$ 的(分段)表达式，

当$0<t<1$时，图形为三角形，利用三角形的面积公式：

$$S(t)=\frac{1}{2}t^2;$$

当$1<t<2$时，图形面积可由正方形面积减去小三角形面积，其中由于$x+y=t$与$y=1$交点的纵坐标为$t-1$，于是，小三角形的边长为：$1-(t-1)=2-t$，所以

$$S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2=1-\frac{1}{2}(t^2-4t+4)=-\frac{1}{2}t^2+2t-1;$$

当$t>2$时，图形面积就是正方形的面积：$S(t)=1$，

则

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\le t\le 1,\\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1<t\le 2,\\ 1, & 2<t.\end{cases}$$

当$0\le x\le 1$时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\frac{1}{2}t^2dt=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x=\frac{x^3}{6}$;

当$1<x\le 2$时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^1 S(t)dt+\int_1^x S(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}t^2dt+\int_1^x[1-\frac{1}{2}(t-2)^2]dt$

$$=\frac{1}{6}+(x-1)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{1}{6}=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3}$$

当$x>2$时，$\int_0^x S(t)dt=\int_0^2 S(t)dt+\int_2^x S(t)dt=1+\int_2^x 1dt=x-1.$

因此 $$\int_0^x S(t)dt=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3 & 0\le x\le 1\\ -\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3} & 1<x\le 2\\ x-1 & x>2\end{cases}$$

五【详解】

方法 1：按莱布尼茨高阶导数公式：

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

为了求$\ln(1+x)$的n阶导数，设$y=\ln(1+x)$，

$$y'=\frac{1}{1+x};$$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$y'''=-(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$y^{(4)}=-3\frac{1\cdot 2}{(1+x)^4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

即 $$\left[\ln(1+x)\right]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

设 $u=\ln(1+x)$， $v=x^2$，利用上述公式对函数展开，由于对 x^2 求导，从三阶导数开始就为零，故展开式中只含有前三项.

$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-1)!}{(1+x)^{n-2}}.$$

代入 $x=0$，得：

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2},n=3,4\cdots.$$

方法 2： $y=f(x)$ 带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

求 $f^n(0)(n\geq 3)$ 可以通过先求 $y=f(x)$ 的的麦克劳林展开式，则展开式中 x^n 项的系数与 $n!$ 的乘积就是 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$.

由麦克劳林公式，

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2}),$$

所以 $$x^2\ln(1+x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^n).$$

对照麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

从而推知

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}$$

得 $$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2},n=3,4\cdots.$$

六【详解】因为$|\cos x|\ge 0$，且$n\pi\le x<(n+1)\pi$，

所以 $$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx\le\int_0^{x}|\cos x|dx<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx.$$ 定积分的性质

又因为$|\cos x|$具有周期π，所以在长度为π的积分区间上的积分值均相等：

$$\int_a^{a+\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx,$$

从而

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\cos x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\cos x|dx+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\cos x|dx$$

$$=n\int_0^{\pi}|\cos x|dx=n(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx)$$

$$=n(\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi})=n(1-(0-1))=2n$$

所以 $$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|dx=2(n+1).$$

所以 $2n\le\int_0^{x}|\cos x|dx<2(n+1)$，即 $2n\le S(x)<2(n+1).$

(2) 由(1)有，当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时，$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$

命$n\to\infty$取极限，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})\pi}=\frac{2}{\pi},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+\frac{1}{n})}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

由夹逼定理，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

七【详解】设从 2000 年初(相应$t=0$)开始，第t年湖泊中污染物A的总量为m，浓度为$\dfrac{m}{V}$，

则在时间间隔$[t,t+dt]$内，排入湖泊中A的量为：$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}(t+dt-dt)=\frac{m_0}{6}dt$，流出湖泊的水中$A$的量为$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$.

因而时间从t到$t+dt$相应地湖泊中污染物A的改变量为：$dm=(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})dt$.

由分离变量法求解：

$$\frac{dm}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=dt$$

两边求积分：

$$\int\frac{dm}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=\int dt\Leftrightarrow -3\int\frac{d(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}{(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})}=t+C_1\Leftrightarrow -3\ln(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})=t+C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3})=\frac{t+C_1}{-3}\Leftrightarrow \frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}=e^{\frac{t+C_1}{-3}}\Leftrightarrow -\frac{m}{3}=-\frac{m_0}{6}+e^{-\frac{t}{3}}\cdot e^{-\frac{C_1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{m_0}{2}-3e^{-\frac{C_1}{3}}\cdot e^{-\frac{t}{3}}\Leftrightarrow m=\frac{m_0}{2}-C\cdot e^{-\frac{t}{3}},\quad (C=3e^{-\frac{C_1}{3}})$$

初始条件为$m(0)=5m_0$，代入初始条件得$C=-\frac{9}{2}m_0$. 于是$m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$，要满足污染物$A$的含量可降至$m_0$内，命$m=m_0$，得$t=6\ln 3$. 即至多需经过$6\ln 3$年，湖泊中A的含量降至$m_0$以内.

八【证明】

方法1：令$F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le\pi$，有$F(0)=0$, 由题设有$F(\pi)=0$.

又由题设$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，用分部积分，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)$$

$$=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

由积分中值定理知，存在$\xi\in(0,\pi)$使

$$0=\int_0^\pi F(x)\sin xdx=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0)$$

因为$\xi\in(0,\pi)$，$\sin\xi\ne 0$，所以推知存在$\xi\in(0,\pi)$, 使得$F(\xi)=0$. 再在区间$[0,\xi]$与$[\xi,\pi]$上对$F(x)$用罗尔定理，推知存在$\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$使

$F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$，即　　$f(\xi_1)=0, f(\xi_2)=0$

方法2：由$\int_0^{\pi} f(x)dx=0$及积分中值定理知，存在$\xi_1\in(0,\pi)$，使$f(\xi_1)=0$. 若在区间$(0,\pi)$内$f(x)$仅有一个零点ξ_1，则在区间$(0,\xi_1)$与(ξ_1,π)内$f(x)$异号. 不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$，在(ξ_1,π)内$f(x)<0$. 于是由$\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$，有

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx-\int_0^{\pi} f(x)\cos\xi_1 dx=\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$
$$=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$

当$0<x<\xi_1$时，$\cos x>\cos\xi_1$，$f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$；当$\xi_1<x<\pi$时，$\cos x<\cos\xi_1$，仍有$f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$，得到：$0>0$. 矛盾，此矛盾证明了$f(x)$在$(0,\pi)$仅有1个零点的假设不正确，故在$(0,\pi)$内$f(x)$至少有2个不同的零点.

九【详解】为了求曲线$y=f(x)$在点$(6, f(6))$处的切线方程，首先需要求出$y=f(x)$在$x=6$处的导数，即切线斜率. 而函数又是以周期为5的函数，且在$x=1$处可导，则在$x=6$处可导，且其导数值等于函数在$x=1$处的导数值.

将$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$两边令$x\to 0$取极限，由$f$的连续性得

$$f(1)-3f(1)=\lim_{x\to 0}(8x+\alpha(x))=0 \quad\Rightarrow\quad -2f(1)=0$$

故$f(1)=0$，又由原设$f(x)$在$x=1$处可导，两边同除$\sin x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin x}$$

根据导数的定义，得

$$f'(1)+3f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}=8 \quad\Rightarrow\quad 4f'(1)=8$$

所以$f'(1)=2$，又因$f'(6)=f'(5+1)=f'(1)$，所以$f'(6)=2$，由点斜式，切线方程为

$$(y-f(6))=f'(6)(x-6).$$

以$f(6)=f(1)=0, f'(6)=2$代入得$y=2(x-6)$. 即　　$2x-y-12=0.$

十【详解】首先联立两式，求直线与曲线的交点：$1-x^2=ax^2$，得：$x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+a}}$，而$x\geq 0$，

则交点坐标为：$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a})$．由点斜式，故直线 OA 的方程为 $y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}$.

由旋转体体积公式 $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$，要求的体积就是用大体积减去小体积：

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(\frac{ax}{\sqrt{1+a}}\right)^2dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi\left(ax^2\right)^2dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}\pi(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4)dx$$

$$=\pi\left(\frac{a^2x^3}{3(1+a)}-\frac{a^2x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}}$$

为了求 V 的最大值，对函数关于 a 求导，

$$\frac{dV}{da}=\left(\frac{2\pi a^2}{15(1+a)^{\frac{5}{2}}}\right)'=\frac{2\pi}{15}\left(\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}\right)'=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a\cdot(1+a)^{\frac{5}{2}}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{(1+a)^{\frac{3}{2}}[2a(1+a)-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^5}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a(1+a)-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$$

$$=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a+2a^2-\frac{5}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{[2a-\frac{1}{2}a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{\pi}{15}\cdot\frac{[4a-a^2]}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}\qquad a>0$$

命 $\frac{dV}{da}=0$，得唯一驻点 $a=4$，所以 $a=4$ 也是 V 的最大值点，最大体积为 $V\big|_{a=4}=\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

十一【详解】(1) 为了求 $f'(x)$，将 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$ 两边同乘 $(x+1)$，得

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0,$$

两边对 x 求导，得

$$f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=0$$

即 $$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0.$$

上述方程为二阶可降阶微分方程，令 $u=f'(x)$，化为 $(x+1)u'+(x+2)u=0$，即

$$\frac{du}{u}=-\frac{(x+2)}{(x+1)}dx$$

两边求积分：

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{(x+2)}{(x+1)}dx = -\int (1+\frac{1}{x+1})dx$$

即 $\ln|u| = -(x+\ln(x+1)) + C_1$

所以 $u = \pm e^{(-x-\ln(x+1)+C_1)} = \pm(e^{-x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot e^{C_1})$

令 $C = \pm e^{C_1}$，则 $u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$，于是 $f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$.

再以 $x=0$ 代入原方程 $f'(0)+f(0)-\frac{1}{1}\int_0^0 f(t)dt = f'(0)+f(0)=0$，由 $f(0)=1$，有 $f'(0)=-1$，于是 $C=-1, f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)**方法 1**：用积分证.

$$f(x) = f(0)+\int_0^x f'(t)dt = 1-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt.$$

而 $0 \le \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \overset{t>0}{\le} \int_0^x e^{-t}dt \overset{\text{牛-莱公式}}{=} -e^{-t}\Big|_0^x = 1-e^{-x}$

两边同乘以 (-1)，得：

$$e^{-x}-1 \le -\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \le 0,$$

即 $e^{-x} \le f(x) = 1-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \le 1$

方法 2 ：用微分学方法证.

因 $f(0)=1, f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减，所以当 $x\ge 0$ 时 $f(x)\le 1$.

要证 $f(x)\ge e^{-x}$，可转化为证明 $f(x)-e^{-x}\ge 0$，令 $\varphi(x) = f(x)-e^{-x}$，则 $\varphi(0)=1-1=0$，且 $\varphi'(x) = f'(x)+e^{-x} \ge f'(x)+\frac{e^{-x}}{x+1} = 0$ （$x\ge 0$）

所以，当 $x\ge 0$ 时 $\varphi(x)\ge 0$，即 $f(x)\ge e^{-x}$.

结合两个不等式，推知当 $x\ge 0$ 时，$e^{-x}\le f(x)\le 1$. 证毕.

十二【详解】由题设得

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\2 & 1 & 0\\1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}，\ B=\beta^T\alpha=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

所以 $A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\left(\alpha\beta^T\right)\beta=2A$，$A^4=8A$；$B^2=4$，$B^2=16$

代入原方程 $2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma$ 中，得

$$16Ax=8Ax+16x+\gamma，即 8\left(A-2E\right)x=\gamma$$

其中 E 是三阶单位矩阵，令 $x=\left[x_1,x_2,x_3\right]^T$，代入上式，得线性非齐次方程组

$$\begin{cases}-x_1+\frac{1}{2}x_2=0\\2x_1-x_2=0\\x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=1\end{cases}\qquad(1)$$

显然方程组得同解方程为

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0\\x_1+\frac{1}{2}x_2-2x_3=1\end{cases}\qquad(2)$$

令自由未知量 $x_1=k$,解得 $x_2=2k,x_3=k-\frac{1}{2}$

故方程组通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\2k\\k-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}，(k\text{ 为任意常数})$$

十三【详解】

方法 1：先求 $\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$,将矩阵作初等行变换，得

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\2 & 0 & 6\\-3 & 1 & -7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\0 & -6 & -12\\0 & 10 & 20\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

知 $\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2.$ 故 $\gamma\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2$，$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]$ 作初等行变换

$$\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & a-3b & 0\end{bmatrix}$$

因为$\gamma\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=2$，所以$a=3b$

又β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故$\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3\right)=\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2$

将$\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3\right]$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1\\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 1-2b\\ -1 & 10 & 20 & \vdots & 3b\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 9 & \vdots & b\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \dfrac{1-2b}{-6}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3b+\dfrac{5}{3}\left(1-2b\right)\end{bmatrix}$$

由$\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_3\right)=2$，得$3b+\dfrac{5}{3}\left(1-2b\right)=0$，解得$b=5$，及$a=3b=15.$

方法 2：由方法 1 中的初等变换结果可以看出α_1,α_2线性无关，且$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，故$\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组．又$\gamma\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\gamma\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=2$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关. 从而得

$$\left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

计算三阶行列式得$-a+3b=0$，得$a=3b$

又β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ β_3线性相关，有

$$\left|\alpha_1,\alpha_2,\beta_3\right|=\begin{vmatrix}1 & 3 & b\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & b\\ 0 & -6 & 1-2b\\ 0 & 10 & 3b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & b\\ 0 & -6 & 1-2b\\ 0 & 0 & 3b+\dfrac{10}{6}\left(1-2b\right)\end{vmatrix}=0$$

行列式展开得$-6\left(3b+\dfrac{10}{6}\left(1-2b\right)\right)=0$，

所以$3b+\frac{5}{3}(1-2b)=0$，得$b=5$及$a=3b=15.$

方法 3：先利用β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X=\beta$有解，即

$$\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$$

有解. 对其增广矩阵施行初等行变化

$$\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\2&0&6&\vdots&1\\-3&1&-7&\vdots&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&-6&-12&\vdots&1-2b\\-1&10&20&\vdots&3b\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&9&\vdots&b\\0&1&2&\vdots&\frac{2b-1}{-6}\\0&0&0&\vdots&3b+\frac{5}{3}(1-2b)\end{bmatrix}$$

由其次线性方程组有解的条件(系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩)，知

$$3b+\frac{5}{3}(1-2b)=\frac{5}{3}-\frac{1}{3}b=0$$

解得$b=5.$

又因为α_1和α_2线性无关，且$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2 ，

由题设条件知$\gamma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，从而$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&3&1\\-1&0&0\end{vmatrix}=0,$

解得$a=15$

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_____.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 x dx=$_____

(4) 过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为_____.

(5) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a=$_____.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}$ 等于 ( )

(A)0 (B)1 (C) $\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$

(2) 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，$x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为 ( )

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$, 则 ( )

(A)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$.

(B)在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$.

(C)在 $(1-\delta,1)$ 内， $f(x)<x$.在 $(1,1+\delta)$ 内， $f(x)>x$.

(D)在 $(1-\delta,1)$ 内， $f(x)>x$.在 $(1,1+\delta)$ 内， $f(x)<x$.

(5)设函数 $f(x)$ 在定义域内可导， $y=f(x)$ 的图形如右图所示，

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 ( )

三、(本题满分 6 分)

求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$ ，记此极限为 $f(x)$ ，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

五、(本题满分 7 分)

设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.(在直角坐标系下曲率公式为 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=0$ ，且其反函数为 $g(x)$.若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$ ，求 $f(x)$.

七、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$ ，且 $f(0)=0,g(0)=2$ ，

求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$

八、(本题满分 9 分)

设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的的截距，且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形面积最小.

九、(本题满分 7 分)

一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例常数 $K>0$.假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

十、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$

十一、(本题满分 6 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 且矩阵 X 满足

$AXA+BXB=AXB+BXA+E,$ 其中 E 是 3 阶单位阵，求 X .

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_4$ 为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系， $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,$ $\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1,$ 试问实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也为 $AX=0$ 的一个基础解系.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【详解】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x+2)(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{3-x-(1+x)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\lim_{x\to1}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to1}2}{\lim\limits_{x\to1}(x+2)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{2}{(1+2)\left(\sqrt{3-1}+\sqrt{1+1}\right)}=-\frac{1}{3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(2)【答案】 $x-2y+2=0$.

【详解】在等式$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$两边对x求导，其中y视为x的函数，得

$$e^{2x+y}(2x+y)'+\sin(xy)(xy)'=0\text{，即 }e^{2x+y}\cdot(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0$$

将$x=0, y=1$代入上式，得$e\cdot(2+y')=0$，即$y'(0)=-2$. 故所求法线方程斜率$k=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$，

根据点斜式法线方程为：$y-1=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$.

(3)【答案】$\dfrac{\pi}{8}$

【分析】根据区域对称性与被积函数的奇偶性：设$f(x)$在有界闭区域$[-a,a]$上连续，则

有 $\begin{cases}\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数}\\ \int_{-a}^{a}f(x)dx=0, & f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$，

【详解】由题设知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2x\right)\cos^2xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2xdx$$

在区间$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上，$x^3\cos^2x$是奇函数，$\sin^2x\cos^2x$是偶函数，故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 xdx=0\text{，}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx\text{，}$$

所以，原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 xdx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4xd4x=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{16}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}-0=\frac{\pi}{8}.$$

(4)【答案】$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$

【详解】

方法1：因为$\left(y\arcsin x\right)'=y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$，所以原方程$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$可

改写为 $\left(y\arcsin x\right)'=1,$

两边直接积分，得 $y\arcsin x=x+c.$

又由$y(\frac{1}{2})=0$代入上式，有 $0\cdot\arcsin x=\frac{1}{2}+c$，解得$c=-\frac{1}{2}.$

故所求曲线方程为 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}.$

方法2：将原方程写成一阶线性方程的标准形式

$$y'+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

由一阶线性微分方程$\frac{dy}{dx}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$通解公式：

$$f(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

这里$P\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$，$Q\left(x\right)=\frac{1}{\arcsin x}$，代入上式得：

$$y=e^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}\left[C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}dx\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{\arcsin x}d\arcsin x}\left[C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\arcsin x}d\arcsin x}dx\right]$$

$$=e^{-\ln\arcsin x}\left[C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\ln\arcsin x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\arcsin x}\left[C+\int\frac{\arcsin x}{\arcsin x}dx\right]=\frac{C}{\arcsin x}+\frac{x}{\arcsin x}$$

又由 $y(\frac{1}{2})=0$, 解得 $C=-\frac{1}{2}$. 故曲线方程为： $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

(5)【答案】 -2

【详解】**方法1：**利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形,有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & -2\end{array}\right]\xrightarrow[\text{互换}]{1,3\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{分别加到2,3行}]{1\text{行的}(-1),(-a)\text{倍}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & 3\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\text{行加到3行}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & 3\\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 2(2+a)\end{array}\right]$$

由非齐次线性方程组有无穷多解的充要条件：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=<n$. 可见，只有当$a=-2$ 时才有秩 $r(\overline{A})=r(A)=2<3$，对应方程组有无穷多个解.

方法2: 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$，则方程组

$\begin{bmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<3$. 从而有 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到1行}]{2,3\text{行分别}}\begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}\xlongequal[(a+2)]{1\text{行提出}}(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到2,3行}]{1\text{行}\times(-1)\text{分别}}(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 0\\ 0 & a-1\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)(a-1)^2=0,$$

则， $a=1$或$a=-2$.

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&\vdots&1\\1&1&1&\vdots&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)分别加到2,3行}\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&-3\end{bmatrix}$$

可见 $r(A)=1\neq r(\overline{A})=2,$ 原方程组无解.

当 $a=-2$ 时，有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1&\vdots&1\\1&-2&1&\vdots&1\\1&1&-2&\vdots&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{1,3行互换}\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-2\\1&-2&1&\vdots&1\\-2&1&1&\vdots&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2行-1行}\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-2\\0&-3&3&\vdots&3\\-2&1&1&\vdots&1\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times2加到3行}\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-2\\0&-3&3&\vdots&3\\0&3&-3&\vdots&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-2\\0&-3&3&\vdots&3\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2行\div(-3)}\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&-2\\0&1&-1&\vdots&-1\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

可知，$r(\overline{A})=r(A)=2<3,$

故当 $a=-2$ 时，原方程组有无穷多解.

二、选择题

(1)【答案】(B)

【详解】因为 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\0, & |x|>1\end{cases}$，所以在整个定义域内 $f(x)=0或f(x)=1$，所以

$|f(x)|\le 1$，于是 $f\left[f(x)\right]=1$，从而 $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\}=f(1)=1$

(2)【答案】(B)

【详解】根据高阶无穷小的定义：如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，由题设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，所以

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}\overset{等价}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x\cdot x^n}\overset{等价}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x^{3-n}$$

从而 n 应满足 $n\le 2$；

又由 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，所以根据高阶无穷小的定义有：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}\overset{\text{等价}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}$$，从而 n 应满足 $n\geq 2$

综上，故正整数 $n=2$，故选(B)

(3)【答案】(C)

【详解】$y=(x-1)^2(x-3)^2$，

所以 $y'=2(x-1)(x-3)^2+2(x-1)^2(x-3)=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$$y''=4\left[(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)\right]$$

$$=4\left[x^2-5x+6+x^2-4x+3+x^2-3x+2\right]=4\left[3x^2-12x+11\right]$$

$$y'''=4\left[6x-12\right]=24\left(x-2\right)$$

令 $y''=0$，即 $3x^2-12x+11=0$，因为判别式：$\Delta=b^2-4ac=12^2-4\cdot 3\cdot 11=12>0$，所以 $y''=0$ 有两个不相等的实根，且 $y''\left(2\right)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1\neq 0$，所以两个实根不为2，因此在使 $y''=0$ 这两点处，三阶导数 $y'''\neq 0$，(一般地，若 $f''\left(x_0\right)=0$，且 $f'''\left(x_0\right)\neq 0$，则点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 一定是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点)，因此曲线有两个拐点，故选(C)

或根据 $y''=4\left[3x^2-12x+11\right]$ 是一条抛物线，且与 x 轴有两个不相同的交点，所以在两个交点的左右 y'' 符号不相同，满足拐点的定义，因此选(C)

(4)【答案】(A)

【详解】**方法 1**：令 $F\left(x\right)=f(x)-x$，则 $F'\left(x\right)=f'(x)-1=f'(x)-f'\left(1\right)$

由于 $f'(x)$ 严格单调减少，因此当 $x\in(1-\delta,1)$ 时，$f'(x)>f'\left(1\right)$，则 $F'\left(x\right)=f'(x)-f'\left(1\right)>0$；当 $x\in(1,1+\delta)$ 时，$f'(x)<f'\left(1\right)$，则 $F'\left(x\right)=f'(x)-f'\left(1\right)<0$，且在 $x=1$ 处 $F'\left(1\right)=f'(1)-f'\left(1\right)=0$，

根据判定极值的第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心 δ 领域内可导，若 $x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值，知 $F\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取极大值，即在在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有

$F\left(x\right)<F\left(1\right)=0$，也即 $f(x)<x$. 故选(A)

方法 2：排除法，取 $f(x)=-\dfrac{\left(x-1\right)^2}{2}+x$，则 $f'(x)=-2\left(x-1\right)+1=-2x+3$，

$f''(x)=-2<0$，所以满足题设在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数，$f'(x)$ 严格单调减少，且 $f(1)=f'(1)=1$, 当 $x<1$ 时或 $x>1$ 时，均有 $f(x)=-\dfrac{\left(x-1\right)^2}{2}+x<x$，因此可以排除(B)、(C)、(D)，选(A)

(5) 【答案】(D)

【详解】从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除(A)，(C)；

又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增，所以在这一段内一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，进一步可排除(B)，故正确答案为(D).

三【详解】作积分变量变换，令 $x=\tan u$, 则 $dx=\sec^2 u du$,

$$原式=\int\frac{\sec^2 udu}{(2\tan^2 u+1)\sqrt{\tan^2 u+1}}=\int\frac{\sec^2 udu}{(2\tan^2 u+1)\sec u}$$

$$=\int\frac{du}{(2\tan^2 u+1)\cos u}=\int\frac{du}{(\frac{2\sin^2 u}{\cos^2 u}+1)\cos u}=\int\frac{\cos^2 udu}{\left(2\sin^2 u+\cos^2 u\right)\cos u}$$

$$=\int\frac{\cos udu}{2\sin^2 u+\cos^2 u}=\int\frac{\cos udu}{\sin^2 u+1}=\int\frac{d\sin u}{\sin^2 u+1}$$

$$=\arctan(\sin u)+C \xlongequal[\tan u=x]{\sin u=\frac{\tan u}{\sqrt{1+\tan^2 u}}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$$

四【分析】应先求出 $f(x)$ 的表达式，再讨论它的间断点，首先明确间断点的类型分为两大类：第一类间断点和第二类间断点，第一类间断点又可分为：可去间断点(左右极限存在且相等的间断点)和跳跃间断点(左右极限存在但不相等的间断点)；第二类间断点又可分为：无穷间断点(有一个极限为无穷的间断点)和振荡间断点(极限值在某个区间变动无限多次).

【详解】由 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}$

又 $$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}$$

所以 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

由 $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$ 的表达式，可以看出自变量 x 应满足 $\sin x\neq 0$，从而 $x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

当 $x\to 0$ 时，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(左右极限相等，又进一步可知是可去间断点)；

对于非零整数 k，

$$\lim_{x\to k\pi^-}f(x)=\lim_{x\to k\pi^-}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to k\pi^-}\frac{x}{\sin x}}\xlongequal{\sin x\to 0}\infty,$$

故 $x=k\pi, k=\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点)

五【解答】由 $y=\sqrt{x}$，有 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left[1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right|}=\frac{\left[1+\frac{1}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}.$$

若已知平面曲线 AM 的显式表示为 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$，则弧长为 $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数.

根据上述结论，所以抛物线上 AM 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$$

故
$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\left[\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]'}{\left(\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx\right)'}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{3(4x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{x}}{(4x+1)^{\frac{1}{2}}}=6\sqrt{x}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}(\frac{d\rho}{ds})\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{d}{dx}(6\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\left(\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx\right)'}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+4x}}=\frac{6}{\sqrt{1+4x}}.$$

因此
$$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-(\frac{d\rho}{ds})^2=3\cdot\frac{1}{2}(1+4x)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{6}{\sqrt{1+4x}}-\left(6\sqrt{x}\right)^2=9(1+4x)-36x=9$$

六【详解】$f(x)$ 的反函数是 $g(x)$，根据反函数的性质有 $g(f(x))=x$，$\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$ 两边对 x 求导，有

$$\left(\int_0^{f(x)}g(t)dt\right)'=\left(x^2e^x\right)'\Rightarrow g\left[f(x)\right]f'(x)=x^2e^x+2xe^x$$

又 $g(f(x))=x$，所以

$$xf'(x)=x^2e^x+2xe^x\Rightarrow f'(x)=xe^x+2e^x,\quad x\in(0,+\infty)$$

两边积分
$$\int f'(x)dx=\int\left(xe^x+2e^x\right)dx\Rightarrow f(x)=\int xe^xdx+\int 2e^xdx$$

$$\Rightarrow f(x)=\int xde^x+2e^x \Rightarrow f(x)\underline{\underline{\text{分部}}}xe^x-\int e^x dx+2e^x$$

$$\Rightarrow f(x)=xe^x-e^x+2e^x+C \Rightarrow f(x)=xe^x+e^x+C.$$

由于题设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，所以在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(xe^x+e^x+C\right)=1+C=0,$$

所以 $C=-1$，于是

$$f(x)=xe^x+e^x-1, \qquad x\in[0,+\infty)$$

七【详解】由 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，得 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$，即

$$f''(x)+f(x)=2e^x$$

此为二阶常系数线性非齐次方程，且右端呈 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m(x)=2,\ \lambda=1$)，

对应的齐次方程为 $f''(x)+f(x)=0$，特征方程为 $r^2+1=0$，对应的特征值为 $r=\pm i$，

于是齐次方程的通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x$，

因为 $\lambda=1\neq r$，所以设特解为 $y^*=ae^x$ (a 为实数)，$\left(y^*\right)''=ae^x$，

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，$ae^x+ae^x=2e^x$，所以 $a+a=2$，即 $a=1$，从而特解 $y^*=e^x$，

非齐次方程的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$，

又 $f(0)=0$，所以，$f(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0+e^0=0\Rightarrow C_1+1=0\Rightarrow C_1=-1$

又，$f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x+e^x$，$f'(0)=g(0)=2$，

所以，$f'(0)=-C_1\sin 0+C_2\cos 0+e^0=C_2+1=2\Rightarrow C_2=1$，

所以原方程的解为：$f(x)=\sin x-\cos x+e^x$

以下计算积分，有两个方法：

方法 1：$\int_0^\pi\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^\pi\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$

$$\underline{\underline{f'(x)=g(x)}}\int_0^\pi\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^\pi\left[\frac{f(x)}{1+x}\right]'dx=\int_0^\pi d\frac{f(x)}{1+x}$$

$$=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}=\frac{\sin\pi-\cos\pi+e^{\pi}}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$$

方法 2： $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}dx$

$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{1+x}\right)'dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)d\frac{1}{1+x}$$

$$\underline{\underline{\text{分部}}}\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx$$

$$\underline{\underline{g(x)=f'(x)}}\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx$$

$$=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-\frac{f(0)}{1+0}=\frac{\sin\pi-\cos\pi+e^{\pi}}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$$

八【详解】(1)设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，则 $Y=-xy'+y$，即它在 y 轴上的截距为 $-xy'+y$，

根据两点 $(x,y),(x_0,y_0)$ 距离公式 $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，所以原点到点 $P(x,y)$ 的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，由题设 $P(x,y)$ $(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，所以：$-xy'+y=\sqrt{x^2+y^2}$，　　$(x>0)$，

即　　$y'=\frac{y}{x}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$，　$(x>0)$

此为一阶齐次方程，按规范方法解之，命 $y=ux$，则 $\frac{dy}{dx}=u+xdu$，代入，方程变为：

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{x\sqrt{u^2+1}}{x}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=-\sqrt{u^2+1}\Rightarrow\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{dx}{x}$$

积分得　$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=-\ln cx\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}$

把 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{C}{x}\Rightarrow y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由题设曲线经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，代入得$0+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0}=C$，则$C=\frac{1}{2}$，故所求方程为：

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}，即\ y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(2) 由(1)知$y=\frac{1}{4}-x^2$，则$y'=-2x$，点$P(x,y)=P\left(x,\frac{1}{4}-x^2\right)$，所以在点$P$处的切线方程为：$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x\left(X-x\right)$，分别令$X=0$，$Y=0$，解得在$y$轴，$x$轴上的截距分别为$x^2+\frac{1}{4}$和$\frac{x}{2}+\frac{1}{8x}$.

此切线与两坐标轴围成的三角形面积为：

$$A\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{8x}\right)\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2,\ x>0$$

由于该曲线在第一象限中与两坐标轴所围成的面积为定值，记S_0，于是题中所要求的面积为：$S\left(x\right)=A\left(x\right)-S_0=\frac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2-S_0$,

求最值点时与S_0无关，以下按微分学的办法求最值点.

$$S'\left(x\right)=\left(\frac{1}{64x}\left(4x^2+1\right)^2-S_0\right)'=\frac{2\cdot 8x\left(4x^2+1\right)-\left(4x^2+1\right)^2}{64x^2}$$

$$=\frac{2\cdot 8x\left(4x^2+1\right)x-\left(4x^2+1\right)^2}{64x^2}=\frac{\left(4x^2+1\right)\left(12x^2-1\right)}{64x^2}$$

令$S'\left(x\right)=0$得$x=\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，当$0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'\left(x\right)<0$；当$x>\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'\left(x\right)>0$，

根据极值存在的第一充分条件：设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心δ领域内可导，若$x\in\left(x_0-\delta,x_0\right)$时，$f'(x)>0$，而$x\in\left(x_0,x_0+\delta\right)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$x_0$处取得极大值，知：$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$是$S\left(x\right)$在$x>0$处的唯一极小值点，即最小值点，

于是所求切线方程为：

$$Y-\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{6}\left(X-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)，即 Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}$$

九【详解】

方法 1：半球形雪堆在时刻t时设其半径为r，则半球体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积$S=2\pi r^2$. 由题设体积融化的速率与半球面面积S成正比，知：$\frac{dV}{dt}=-kS$，

由于r是t的函数，$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)=2\pi r^2\frac{dr}{dt}$，代入上式，得：$2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-kS$，

即$2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-k\cdot 2\pi r^2$，从而$dr=-kdt$，$r\big|_{t=0}=r_0$.

积分得$r=-kt+c$，把$r\big|_{t=0}=r_0$代入，得$c=r_0$，所以$r=-kt+r_0$.

又半径为r_0的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，即$V\big|_{t=3}=V_0-\frac{7}{8}V_0=\frac{1}{8}V_0$，其中$V_0$表示$t=0$时的$V$. 以$V$的公式代入上式，为

$$V\big|_{t=3}=\frac{2}{3}\pi r^3\Big|_{t=3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3\Big|_{t=0}$$

将$r=-kt+r_0$代入上式，两边约去$\frac{2}{3}\pi$，得：

$$\left(-kt+r_0\right)^3=\frac{1}{8}r_0^3，即 -kt+r_0=\frac{1}{2}r_0$$

从而求得：$k=\frac{1}{6}r_0$，于是$r=-kt+r_0=-\frac{1}{6}r_0t+r_0=r_0\left(1-\frac{t}{6}\right)$，当$t=6$时$r=0$，雪融化完.

方法 2：半球形雪堆在时刻t时设其半径为r，则半球体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积$S=2\pi r^2$，联立$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，$S=2\pi r^2$消去r，得：$S=\sqrt[3]{18\pi V^2}$

由题设体积融化的速率与半球面面积S成正比，知：$\frac{dV}{dt}=-kS$，从而推知

$$\frac{dV}{dt}=-k\sqrt[3]{18\pi V^2},V\big|_{t=0}=V_0$$

分离变量$\frac{dV}{V^{\frac{2}{3}}}=-k\sqrt[3]{18\pi}dt$，积分：$3V^{\frac{1}{3}}=-k\sqrt[3]{18\pi}t+c$，把$V\big|_{t=0}=V_0$代入，

$c=3V_0^{\frac{1}{3}}$，所以，$3V^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-k\sqrt[3]{18\pi}t$.

又由$V\big|_{t=3}=V_0-\frac{7}{8}V_0=\frac{1}{8}V_0$，代入上式$\frac{3}{2}V_0^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-3k\sqrt[3]{18\pi}$，得$k=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}$，

故 $$3V^{\frac{1}{3}}=3V_0^{\frac{1}{3}}-k\sqrt[3]{18\pi}t=3V_0^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V_0}{18\pi}}\sqrt[3]{18\pi}t=3V_0^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}V_0^{\frac{1}{3}}t.$$

命$V=0$，解得：$t=6$，即雪堆全部融化需 6 小时.

十【应用定理】闭区间上连续函数的介值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\neq f(b)$，则对$f(a)$与$f(b)$之间的任何数η，必存在c（$a<c<b$），使得$f(c)=\eta$.

【详解】(1)麦克劳林公式其实就是泰勒公式中，把函数在零点展开.

$f(x)$的拉格朗日余项一阶麦克劳林公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2,$$

其中ξ位于0和x为端点的开区间内，$x\in[-a,a]$.

(2)**方法 1**：将$f(x)$从$-a$到a积分 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$$

而 $$\int_{-a}^{a}f'(0)xdx=f'(0)\int_{-a}^{a}xdx=f'(0)\times\frac{x^2}{2}\bigg|_{-a}^{a}=0$$

从而有 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$$

因$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，故有$f''(x)$在$[-a,a]$上存在最大值M，最小值m(由闭区间上的连续函数必有最大值和最小值)，即

$$m=\min_{[-a,a]}f''(x),M=\max_{[-a,a]}f''(x),$$

易得 $$m\le f''(x)\le M,x\in[-a,a].$$

因此 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le\frac{1}{2}M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{1}{2}M\frac{x^3}{3}\bigg|_{-a}^{a}=\frac{Ma^3}{3},$$

同理 $$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\ge\frac{1}{2}m\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{1}{3}ma^3.$$

因此 $$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M.$$

由连续函数介值定理知，存在$\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx，即a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx.$$

方法 2 ：观察要证的式子，做变限函数：$F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$ ，易得 $F(0)=0$ ，

$$F'(x)=f(x)+f(-x)\text{(变限积分求导)}$$

$$F''(x)=\left(f(x)+f(-x)\right)'=f'(x)-f'(-x)$$

$$F'''(x)=\left(f'(x)-f'(-x)\right)'=f''(x)+f''(-x)$$

则有 $F'(0)=f(0)+f(-0)=0+0=0$

$$F''(0)=f'(0)-f'(-0)=f'(0)-f'(0)=0$$

将它展开成 2 阶带拉格朗日余项麦克劳林公式：

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(0)x^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3$$
$$=0+0+\frac{1}{6}F'''(\xi)x^3=\frac{1}{6}(f''(\xi)+f''(-\xi))x^3$$

其中 $\xi\in(0,x)$， $x\in\left[-a,a\right]$

由于 $f''(x)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上连续，则由连续函数介值定理，存在 $\eta\in\left[-\xi,\xi\right]$，使

$$f''(\eta)=\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))\ \ (\text{因为}\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))\in f''(x),x\in\left[-a,a\right])$$

于是有，存在 $\eta\in\left(-a,a\right)$，使

$$F(x)=0+0+\frac{1}{6}F'''(\xi)x^3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(f''(\xi)+f''(-\xi))x^3=\frac{1}{3}f''(\eta)x^3$$

把 $x=a$ 代入 $F(x)$ 有：

$$F(a)=\frac{1}{3}f''(\eta)a^3\text{，即}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{a^3}{3}f''(\eta)\qquad \eta\in\left(-a,a\right)$$

即 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx\qquad \eta\in\left(-a,a\right)$

十一【详解】题设的关系式

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E\Rightarrow AXA+BXB-AXB-BXA=E$$
$$\Rightarrow\left(AXA-AXB\right)+\left(BXB-BXA\right)=E\Rightarrow AX\left(A-B\right)+BX\left(B-A\right)=E$$
$$\Rightarrow AX\left(A-B\right)-BX\left(A-B\right)=E\Rightarrow\left(AX-BX\right)\left(A-B\right)=E$$

即 $\left(A-B\right)X\left(A-B\right)=E.$

其中， $A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

因为 $|A-B|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$，

故由 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件 $|A|\neq 0$，知矩阵 $A-B$ 可逆，用初等行变换求 $(A-B)^{-1}$：

$$(A-E,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{加到1, 2行}]{\text{3行分别}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{2行加到1行}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

故而 $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

于是，等式 $(A-B)X(A-B)=E$ 两边左、右乘 $(A-B)^{-1}$ 可得

$$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

十二【详解】由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，齐次方程组当有非零解时，解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解.

下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0 \qquad (*)$$

把 $\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$, 代入整理得，

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，由线性无关的定义，知 $(*)$ 中其系数全为零，即

$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0 \\ t_2k_1+t_1k_2=0 \\ \quad\vdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=\!=} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\dfrac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \dfrac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+(-1)^{s+1}\dfrac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1}\left(t_1+(-1)^{s+1}\frac{t_2^s}{t_1^{s-1}}\right)=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

(（$*$）变换：把原行列式第 i 行乘以 $-\dfrac{t_2}{t_1}$ 加到第 $i+1$ 行，其中 $i=1,\cdots,s-1.$)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件，可见，当 $t_1^s+(-1)t_2^s\neq 0,$，即 $t_1^s\neq(-t_2)^s,$ 即当 s 为偶数，$t_1\neq\pm t_2;$ 当 s 为奇数，$t_1\neq t_2$ 时，上述方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0,$ 因此向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，

故当 $\begin{cases} s=2n, & t_1\neq\pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1\neq t_2 \end{cases}$ 时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

(2) 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是_____.

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解是_____.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$_____ .

(5) 矩阵 $\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)$ =(　　)

(A)－1　　(B)0.1　　(C)1　　(D)0.5

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

(3) 设 $y=(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　)

(A)不存在　　(B)等于1　　(C)等于2　　(D)等于3

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(5) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k ，必有(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关；　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$ ，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<0 \\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\le x\le 1 \end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ 的表达式.

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导 $f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ，且满足

$\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$.

六、(本题满分 8 分)

求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$,使得由曲线 $y=y(x)$， 与直线 $x=1,x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

七、(本题满分 7 分)

某闸门的性状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成，当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为5：4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)？

八、(本题满分 8 分)

设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

九、(本题满分 8 分)

设 $0<a<b$，证明不等式 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0.$

证明:存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$$

是比 h^2 高阶的无穷小.

十一、(本题满分 6 分)

已知 A,B 为3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$,其中 E 是3阶单位矩阵.

(1) 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求矩阵 A.

十二、(本题满 6 分)

已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】 -2

【详解】如果分段函数 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 在 0 点处的左右极限相等，从而确定 a 的值.

当 $x\to 0+$ 时，$1-e^{\tan x}\sim -\tan x\sim -x$； $\arcsin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}$，所以有

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\frac{x}{2}}=-2;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} ae^{2x}=a=f(0)$$

如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必有 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$, 即 $a=-2$.

(2)【答案】 1

【详解】面积 $S=\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty} xde^{-x}=-\left[xe^{-x}-\int e^{-x}dx\right]_0^{+\infty}$

$$=-\left[xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=-\lim_{b\to+\infty}\left[xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{b}=-\lim_{b\to+\infty}\left[be^{-b}-e^{-b}-1\right]=1$$

其中 $\lim\limits_{b\to+\infty} be^{-b}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}\overset{洛}{=\!=}\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}=0$.

(3)【答案】 $y=\sqrt{x+1}$

【详解】**方法 1**：这是属于缺 x 的 $y''=f(y,y')$ 类型． 命 $y'=p, y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$.

原方程 $yy''+y'^2=0$ 化为 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$，得

$$p=0 \text{或} y\frac{dp}{dy}+p=0$$

$p=0$，即 $\frac{dy}{dx}=0$，不满足初始条件 $y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，弃之；所以 $p\neq 0$

所以，$y\frac{dp}{dy}+p=0$，分离变量得$\frac{dy}{y}=-\frac{dp}{p}$，解之得$p=\frac{C_1}{y}$. 即$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{y}$.

由初始条件$y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$，可将$C_1$先定出来：$\frac{1}{2}=\frac{C_1}{1}, C_1=\frac{1}{2}$. 于是得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$$

解之得，$y^2=x+C_2, y=\pm\sqrt{x+C_2}$. 以$y\big|_{x=0}=1$代入，得$1=\pm\sqrt{C_2}$，所以应取“+”号

且$C_2=1$. 于是特解是$y=\sqrt{x+1}$.

方法2: 将$yy''+y'^2=0$改写为$(yy')'=0$，从而得$yy'=C_1$. 以初始条件$y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$

代入，有$1\times\frac{1}{2}=C_1$，所以得$yy'=\frac{1}{2}$. 即$2yy'=1$，改写为$(y^2)'=1$. 解得

$y=x+C_2,\ y=\pm\sqrt{x+C_2}$. 再以初值代入，$1=\pm\sqrt{C_2}$所以应取"+"且$C_2=1$. 于是

特解$y=\sqrt{x+1}$.

(4)【答案】$\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}$

【详解】利用定积分的概念将被积函数化为定积分求极限.

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}i}\bullet\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i\pi}{n})\Delta x_i$$

其中$f(x)=\sqrt{1+\cos x}, \Delta x_i=\frac{\pi}{n}, (i=1,2,\cdots,n)$，所以根据定积分的定义，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

(5)【答案】4

【详解】记 $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$，则

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{pmatrix}\text{(对应元素相减)}$$

两边取行列式，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{2\text{行}+3\text{行}}\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{把第2行的公因子}\lambda\text{提出来}}\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{1\text{行}-2\text{行}\times 2}\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1行展开}}\lambda\cdot\lambda\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

(其中 $(-1)^{1+1}$ 指数中的 1 和 1 分别是 λ 所在的行数和列数)

$$=\lambda^2(\lambda-2-2)=\lambda^2(\lambda-4)$$

令 $|\lambda E-A|=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$，故 $\lambda=4$ 是矩阵的非零特征值．(另一个特征值是 $\lambda=0$ (二重))

二、选择题

(1)【答案】(D)

【详解】在可导条件下，$\Delta y=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\Delta x+o(\Delta x)$，当 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\cdot\Delta x$ 称为 Δy 的线性主部．

而 $\frac{dy}{dx}\cdot\Delta x=f'(x^2)2x\Delta x$，以 $x=-1,\Delta x=-0.1$ 代入得 $\frac{dy}{dx}\cdot\Delta x=f'(1)\times 0.2$，由题设它等于 0．1，于是 $f'(1)=0.5$，应选(D).

(2)【答案】(D)

【详解】对与(D)，令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$，则 $F(-x)=\int_0^{-x}t[f(t)+f(-t)]dt$，令 $t=-u$，则 $dt=-du$，所以

$$F(-x)=\int_0^{-x}t[f(t)+f(-t)]dt=\int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)]-du$$

$$=\int_0^x u[f(-u)+f(u)]du=F(x),$$

所以(D)为偶函数．同理证得(A)、(C)为奇函数，而(B)不确定，如 $f(t)=1+t$．故应选(D).

(3)【答案】(C)

【详解】由 $y''+py'+qy=e^{3x}$，且 $y(0)=y'(0)=0$，可知 $y''(0)=1$

方法 1：因为当 $x^2\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{1}=2,$$

故选(C).

方法 2：由于 $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=1$．将函数 $y(x)$ 按麦克劳林公式展开 $y(x)=0+0+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，代入 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}=2.$$

(4)【详解】**方法 1**：排斥法.

令 $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，故(A)不成立；

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=1\neq 0$，(C)和(D)不成立，故选(B).

方法 2：证明(B)正确．设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$，证明 $A=0$.

用反证法，若 $A>0$，则对于 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，存在 $X>0$，使当 $x>X$ 时，$|f'(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}$，即 $\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2}$

由此可知，$f'(x)$ 有界且大于 $\frac{A}{2}$．在区间 $[x,X]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与题设 $f(x)$ 有界矛盾．类似可证当 $A<0$ 时亦有矛盾．故 $A=0$.

(5)【答案】A

【详解】**方法 1**：对任意常数 k，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关．用反证法，若

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关，因已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $k\beta_1+\beta_2$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出． 即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $k\beta_1+\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$

又已知 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即存在常数 l_1,l_2,l_3，使得 $\beta_1=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$ 代入上式，得

$$k\beta_1+\beta_2=k(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)+\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$$

$$\Rightarrow \beta_2=(\lambda_1-kl_1)\alpha_1+(\lambda_2-kl_2)\alpha_2+(\lambda_3-kl_3)\alpha_3$$

与 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出矛盾．故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关，选(A)

方法 2：用排除法

B 选项：取 $k=0$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$k\beta_1+\beta_2$ 即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_2$ 线性相关不成立，否则因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_2$ 线性相关，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$ 与已知矛盾，排除(B).

C 选项：取 $k=0$，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1$ 线性无关不成立，因为 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1$ 线性相关，排除(C).

D 选项：$k\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$ 线性相关不成立．若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\beta_1+k\beta_2$ 线性相关，因已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\beta_1+k\beta_2$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $\beta_1+k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$．又已知 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即存在常数 l_1,l_2,l_3，使得 $\beta_1=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$ 代入上式，得

$$\beta_1+k\beta_2=(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3)+k\beta_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$$

$$\Rightarrow k\beta_2=(\lambda_1-l_1)\alpha_1+(\lambda_2-l_2)\alpha_2+(\lambda_3-l_3)\alpha_3$$

因为 $k\neq 0$，故 $\beta_2=\dfrac{\lambda_1-l_1}{k}\alpha_1+\dfrac{\lambda_2-l_2}{k}\alpha_2+\dfrac{\lambda_3-l_3}{k}\alpha_3$

与 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出矛盾．故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关不成立，排除(D).

故选(A).

三【详解】由极坐标到直角坐标的变换公式 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，化极坐标曲线 $r=1-\cos\theta$ 为直

角坐标的参数方程为

$$\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad 即 \quad \begin{cases} x=\cos\theta-\cos^2\theta \\ y=\sin\theta-\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

曲线上$\theta=\dfrac{\pi}{6}$的点对应的直角坐标为$(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1.$$

于是得切线的直角坐标方程为

$$y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}),\ 即\ x-y-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{5}{4}=0.$$

(这是由直线的点斜式得到的，直线的点斜式方程为$y-y_0=k(x-x_0)$，由导数的几何意义知在$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时斜率为 1，且该点的直角坐标为$(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})$)，

法线方程为

$$y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=-\frac{1}{1}(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})),\ 即\ x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0.$$

(这是由直线的点斜式方程及在同一点切线斜率与法线斜率为负倒数的关系而得)

四【详解】当$-1\le x<0$时

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t\ )dt=\int_{-1}^{x}(2t+\frac{3}{2}t^2)dt=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}.$$

当$0\le x<1$时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt=(t^2+\frac{1}{2}t^3)\Big|_{-1}^{0}+\int_{0}^{x}\frac{te^t}{(e^t+1)^2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}-\int_{0}^{x}td\frac{1}{(e^t+1)}=-\frac{1}{2}-\frac{t}{e^t+1}\Big|_{0}^{x}+\int_{0}^{x}\frac{dt}{e^t+1}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\int_{0}^{x}\frac{e^{-t}dt}{1+e^{-t}}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-t})\Big|_{0}^{x}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x+1}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2} & ,\quad 当-1\le x<0\\ \ln\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x}{e^x+1}+\ln 2-\frac{1}{2}, & 当0\le x<1\end{cases}$$

五【详解】因为$\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{h}\ln\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)}$,

又 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\ln f(x+hx)-\ln f(x)),\qquad x\ne 0$$

$$=\lim_{h\to 0}(\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx})\times x=(\ln f(x))'\times x=\frac{xf'(x)}{f(x)}$$

从而得到 $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\underline{\underline{由题设}}e^{\frac{1}{x}}$$

于是推得 $\frac{xf'(x)}{f(x)}=(\ln f(x))'x=\frac{1}{x}$，即$(\ln f(x))'=\frac{1}{x^2}$

解此微分方程，得 $\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C_1$，改写成 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}$

再由条件$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=C=1$，于是得$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

六【详解】这是一阶线性微分方程$y'-\frac{2}{x}y=-1$，由通解公式(如果一个一阶线性方程为$y'+p(x)y=q(x)$那么通解为$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$)有

$$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}[-\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=x^2[-\int\frac{1}{x^2}dx+C]=x^2(\frac{1}{x}+C)=x+Cx^2,1\le x\le 2$$

由曲线$y=x+Cx^2$与$x=1,x=2$及x轴围成的图形绕x轴旋转一周的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(x+Cx^2)^2dx=\pi(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3})$$

(旋转体的体积公式：设有连续曲线$\Gamma:y=f(x)(a\le x\le b)$，$f(x)\ge 0$与直线$x=a,x=b$及$x$轴围成平面图形．该图形绕$x$轴旋转一周产生旋转体的体积为$V=\int_a^b\pi f(x)^2dx$)

取C使V最小，由求最值的方法知先求函数的驻点，即$\frac{dV}{dC}=0$的点，

$$\frac{dV}{dC}=\pi(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2})=0$$

解得$C=-\frac{75}{124}$. 又$V''(C)>0$，故$C=-\frac{75}{124}$为V 的惟一极小值点，也是最小值点，于是所求曲线为

$$y=x-\frac{75}{124}x^2.$$

七【详解】**方法1**：建立坐标系如下图，

由于底部是二次抛物线我们设此抛物线为

$y=px^2+q$，由坐标轴的建立知此抛物线过

$(0,0),(1,1)$点，把这两点代入抛物线的方程，

得$\begin{cases}0=p\times 0^2+q\\1=p\times 1^2+q\end{cases}$，所以$q=0,p=1$.

即底部的二次抛物线是$y=x^2$，$-1\le x\le 1$.

细横条为面积微元，按所建立的坐标系及抛物线的方程，得到面积微元$dA=2xdy$，因此压力微元

$$dp=2\rho gx(1+h-y)dy \qquad \text{(这是由压力的公式得到的：压力=压强}\times\text{面积)}$$

平板$ABCD$上所受的总压力为

$$P_1=\int_1^{1+h}2\rho gx(1+h-y)dy$$

其中以$x=1$代入，计算得$P_1=\rho gh^2$.

抛物板AOB上所受的总压力为

$$P_2=\int_0^1 2\rho gx(1+h-y)dy,$$

其中由抛物线方程知$x=\sqrt{y}$，代入计算得$P_2=4\rho g(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15})$，

由题意$P_1:P_2=5:4$，即 $\dfrac{h^2}{4(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15})}=\dfrac{5}{4}$

解之得$h=2$(米)($h=-\frac{1}{3}$舍去)，即闸门矩形部分的高应为$2m$.

八【详解】由$0<x_1<3$知x_1及$(3-x_1)$均为正数，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.\qquad (ab\le(\frac{a+b}{2})^2\ a,b\text{为正数})$$

假设$0<x_k\le\frac{3}{2}$，则再一次用不等式$ab\le(\frac{a+b}{2})^2$，得

$$x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}.$$

由数学归纳法知，对任意正整数$n\ge 2$有$0<x_n\le\frac{3}{2}$.

另一方面，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n\le\frac{x_n(3-x_n)-x_n^{\ 2}}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\ge 0.$

所以$\{x_n\}$单调增加．单调增加数列$\{x_n\}$有上界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，记为$a$.

由$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边取极限，于是由极限的运算性质得

$$a=\sqrt{a(3-a)},\text{即}\ 2a^2-3a=0,$$

解得$a=\frac{3}{2}$或$a=0$，但因$x_1>0$且单调增，故$a\ne 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$$

九【详解】左、右两个不等式分别考虑. 先证左边不等式，

方法 1：由所证的形式想到用拉格朗日中值定理.

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},0<a<\xi<b.$$

而$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$中第二个不等式来自不等式$a^2+b^2>2ab$(当$0<a<b$时)，这样就证明了要证明的左边.

方法 2：用单调性证，将b改写为x并移项，命

$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{2a(x-a)}{a^2+x^2}\text{，有}\ \varphi(a)=0.$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2}=\frac{(x-a)^2}{x(a^2+x^2)}+\frac{4ax(x-a)}{(a^2+x^2)^2}>0\ (\text{当}\ 0<a<x),$$

所以，当$x>a>0$时$\varphi(x)$单调递增. 所以$\varphi(x)>\varphi(a)=0$，故$\varphi(b)>0$，

即 $$\varphi(b)=\ln b-\ln a-\frac{2a(b-a)}{a^2+b^2}>0\Rightarrow\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}$$

再证右边不等式，用单调性证，将b改写为x并移项，命

$$\psi(x)=\ln x-\ln a-\frac{1}{\sqrt{ax}}(x-a),$$

有$\psi(a)=0$，及$\psi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}})=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$

所以当$x>a>0$时，$\psi(x)<0$，再以$x=b$代入，得

$$\ln b-\ln a<\frac{1}{\sqrt{ab}}(b-a),\text{即}\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

右边证毕.

十【详解】从题目结论出发，要证存在唯一的一组$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0$$

由极限的四则运算法则知，分子极限应为 0，即

$$\lim_{h\to 0}\left[\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)\right]=f(0)$$

由于$f(x)$在$x=0$连续，于是上式变形为$f(0)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=f(0).$ 由$f(0)\neq 0,$知

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1. \tag{1}$$

由洛必达法则，

$$\begin{aligned}L&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\end{aligned} \tag{2}$$

由极限的四则运算法则知分子的极限应是0，即

$$\lim_{h\to 0}(\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h))=0$$

由于$f'(x)$在$x=0$连续，于是上式变形为$(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)=0$，由$f'(0)\neq 0,$知

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0 \tag{3}$$

对(2)再用洛必达法则，和$f''(x)$在$x=0$连续

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)$$

由$f''(0)\neq 0$，故应有

$$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0 \tag{4}$$

将(1)、(3)、(4)联立解之，由于系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

由克莱姆法则知，存在唯一的一组解满足题设要求，证毕.

十一【详解】(1) 由题设条件 $2A^{-1}B=B-4E$，两边左乘 A，得 $2AA^{-1}B=AB-4A$，即 $2B=AB-4A\Rightarrow AB-2B=4A$

所以 $(A-2E)B=AB-2B=4A=4A-8E+8E=4(A-2E)+8E$，

$$\Rightarrow (A-2E)B-4(A-2E)=8E\Rightarrow (A-2E)B-(A-2E)\cdot 4E=8E$$

$$\Rightarrow (A-2E)(B-4E)=8E\Rightarrow (A-2E)\frac{1}{8}(B-4E)=E$$

根据可逆矩阵的定义知 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 由(1)结果知 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$，根据逆矩阵的性质 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$，其中 k 为不等于零的常数，有

$$A-2E=\left[\frac{1}{8}(B-4E)\right]^{-1}=8(B-4E)^{-1}$$

故 $A=8(B-4E)^{-1}+2E$

又 $B-4E=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$(对应元素相减)

因为若 $\begin{pmatrix}A&E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}E&A^{-1}\end{pmatrix}$，对 $\left[B-4E\vdots E\right]$ 进行初等行变换，

$$\left[B-4E\vdots E\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-3&-2&0&1&0&0\\1&-2&0&0&1&0\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1,3\text{行互换}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&0&1&0\\-3&-2&0&1&0&0\\0&0&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2\text{行}+1\text{行}\times 3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&0&1&0\\0&-8&0&1&3&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{2\text{行}\times(-\frac{1}{8})}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&1&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+2行\times 2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

故 $(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$，代入 $A=8(B-4E)^{-1}+2E$ 中，则

$$A=8(B-4E)^{-1}+2E=8\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

(常数与矩阵相乘，矩阵的每一个元素都需要乘以该常数)

$$=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$(对应元素相加)

十二【详解】**方法 1**: 记 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]$，由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，及 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，即 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，及 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，知

$$r\left[A\vdots\beta\right]=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta\right]=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]=r(A)=r\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=3$$

系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等，故 $Ax=\beta$ 有解.

对应齐次方程组 $Ax=0$，其系数矩阵的秩为 3，故其基础解系中含有 4-3(未知量的个数-系数矩阵的秩)个线性无关的解向量，故其通解可以写成 $k\xi$，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，知 $Ax=\beta$ 的通解为 $k\xi+\eta^*$，其中 $k\xi$ 是对应齐次方程组 $Ax=0$ 的通解，η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，因

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4, \text{故}\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 - 0\alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

故 $\xi = [1,-2,1,0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量，因为 $Ax = 0$ 的基础解系中只含有一个解向量，故 $\xi = [1,-2,1,0]^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

又

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}，\text{即}\ A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta$$

故 $\eta^* = [1,1,1,1]^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解，根据非齐次线性方程组的解的结构定理，方程组的通解为 $k[1,-2,1,0]^T + [1,1,1,1]^T$．(其中 k 是任意常数)

方法 2： 令 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$，则线性非齐次方程为

$$Ax = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \beta$$

已知 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$，故

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

将 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 代入上式，得

$$(2\alpha_2 - \alpha_3)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = (2\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow 2\alpha_2 x_1 - \alpha_3 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_4$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2)\alpha_2 - \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 - 3\alpha_2 - \alpha_4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

由已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，根据线性无关的定义，不存在不全为零的常数使得 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$，上式成立当且仅当

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，因为 3 阶子式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，其秩为 3，故其齐次线性方程组的基础解系中存在 1 个(4-3)线性无关的解向量，取自由未知量 $x_3 = k$，则方程组有解

$$x_4 = 1, x_3 = k, x_1 = x_3 = k, x_2 = -2k + 3$$

故方程组 $Ax = \beta$ 有通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -2k+3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ (其中 k 是任意常数)

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 若 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_____ .

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(1,1)处的切线方程是_____ .

(3) $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 _____ .

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho=e^{a\theta}(a>0)$ ，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____ .

(5) 设 α 为 3 维列向量，α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，则

$\alpha^T\alpha=$_____ .

(6) 设三阶方阵 A,B 满足 $A^2B-A-B=E$，其中 E 为三阶单位矩阵，若

$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $|B|=$_____ .

二、选择题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　)

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

(2) 设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于(　　)

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.

(3) 已知 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\dfrac{x}{y})$ 的表达式为(　　)

(A) $-\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\dfrac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\dfrac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\dfrac{x^2}{y^2}$.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，

则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点.
(B)两个极小值点和一个极大值点.
(C)两个极小值点和两个极大值点.
(D)三个极小值点和一个极大值点.

(5) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$，则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$.　　(B) $1>I_1>I_2$.

(C) $I_2>I_1>1$.　　(D) $1>I_2>I_1$.

(6)设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则(　　)

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

三 、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

四 、(本题满分 9 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2, \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五 、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x))$在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

七 、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

八 、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九 、(本题满分 10 分)

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图)，容器的底面圆的半径为 $2m$. 根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均

匀扩大(假设注入液体前，容器内无液体).

(1) 根据t时刻液面的面积，写出t与$\varphi(y)$之间的关系式；

(2) 求曲线$x=\varphi(y)$的方程.

(注：m表示长度单位米，$\min$表示时间单位分.)

十 、(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f'(x)>0$. 若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

(1) 在(a,b)内$f(x)>0$；

(2) 在(a,b)内存在点ξ，使$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在(a,b)内存在与(2)中ξ相异的点η，使$f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$

十 一、(本题满分 10 分)

若矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角阵$\Lambda$，试确定常数$a$的值；并求可逆矩阵$P$使$P^{-1}AP=\Lambda.$

十二 、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,\quad l_2: bx+2cy+3a=0,\quad l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证: 这三条直线交于一点的充分必要条件为$a+b+c=0.$

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】-4

【详解】当 $x\to 0$ 时，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$，$\sin x\sim x$，则 $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim-\frac{1}{4}ax^2$，$x\sin x\sim x^2$

由题设已知，当 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，

所以 $$1=\lim_{x\to 0}\frac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}ax^2}{x^2}=-\frac{1}{4}a,$$

从而 $a=-4$.

(2)【答案】$x-y=0$

【分析】为了求曲线在点(1,1)处的切线方程，首先需要求出函数在点(1,1)处的导数，然后利用点斜式写出切线方程即可.

【详解】对所给方程两边对 x 求导数，将其中的 y 视为 x 的函数，有

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y'$$

将 $x=1, y=1$ 代入上式，得 $y'(1)=1$. 故函数在点(1,1)处的导数为 1，即点(1,1)处切线的斜率为 1，再利用点斜式得，过点 $(1,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1)，即\ x-y=0.$$

(3)【答案】$\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

【详解】$y=f(x)$ 带佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

求 $y=f(x)$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数相当于先求 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数值 $f^{(n)}(0)$，$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 就是麦克劳林公式中 x^n 项的系数.

$$y'=2^x\ln 2；\ y''=2^x(\ln 2)^2；\ \cdots\cdots\ y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n\quad (归纳法及求导公式)$$

于是有 $y^{(n)}(0)=(\ln 2)^n$，故 $y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

(4)【答案】$\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$

【详解】

方法 1：用定积分计算. 极坐标下平面图形的面积公式：$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)d\theta$，则

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}e^{2a\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1).$$

方法 2：用二重积分计算. D 表示该图形所占的区域，在极坐标下，利用二重积分面积公式：

$$\sigma=\iint_D\rho d\rho d\theta$$

所以 $$S=\iint_D d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{e^{a\theta}}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{2a\theta}d\theta=\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1).$$

(5)【答案】3

【分析】本题的可由矩阵$\alpha\alpha^T$的秩为 1，把其分解为一列乘一行的形式，而行向量一般可选第一行(或任一非零行)，列向量的元素则为各行与选定行的倍数构成. 也可设$A=\alpha\alpha^T$求出α，或利用A^2或设$\alpha=[x_1x_2x_3]^T$，定出α等.

【详解】**方法 1**：观察得 A 的三个行向量成比列，其比为 1:1:1, 故

$$A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix},$$

知$\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，于是$\alpha^T\alpha=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}=3.$

方法 2：$A=\alpha\alpha^T$， $A^2=\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=(\alpha^T\alpha)(\alpha\alpha^T)=\alpha^T\alpha A$ (1)

而 $$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3&3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}=3A \qquad (2)$$

比较(1)，(2)式，得$\alpha^T\alpha=3$.

方法 3：设$\alpha=[x_1x_2x_3]^T$ $A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}x_1^2&x_1x_2&x_1x_3\\x_2x_1&x_2^2&x_2x_3\\x_3x_1&x_3x_2&x_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

故 $\alpha^T\alpha=(x_1x_2x_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ (A 的主对角元之和)

(6)【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】 先化简分解出矩阵 B，再计算行列式 $|B|$ 或者将已知等式变形成含有因子 B 的矩阵乘积形式，而其余因子的行列式都可以求出即可.

【详解】**方法 1:** 由 $A^2B-A-B=E$，知 $(A^2-E)B=A+E$，即 $(A+E)(A-E)B=A+E$，

易知矩阵 $A+E$ 可逆，于是有 $(A-E)B=E.$

再两边取行列式，得 $|A-E||B|=1$，

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=\frac{1}{2}$.

方法 2: 由 $A^2B-A-B=E$，得

$$(A+E)(A-E)B=A+E$$

等式两端取行列式且利用矩阵乘积的行列式=行列式的乘积，得

$$|A+E||A-E||B|=|A+E|$$

约去 $|A+E|\neq 0$，得 $|B|=\frac{1}{|A+E|}=\frac{1}{2}$.

二、选择题

(1)【答案】(D)

【详解】**方法 1:** 推理法

由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在并记为 A，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=A$,这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. 所以选项 (D) 正确.

方法 2: 排除法

取 $a_n=\frac{1}{n}$，$b_n=\frac{n-1}{n}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，而 $a_1=1,b_1=0,a_1>b_1$，(A) 不正确；

取 $b_n=\dfrac{n-1}{n}$， $c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,而 $b_1=0>-1=c_1$， (B) 不正确；

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$， $c_n=n-2$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$， (C) 不正确.

(2)【答案】(B)

【详解】$a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx=\dfrac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\,d(1+x^n)$ (第一类换元法)

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{n}$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}=\left[\left(1+\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left\{(1+\frac{-1}{n+1})^{-(n+1)}\right\}^{-\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$ (凑重要极限形式)

$$=(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$$ (重要极限)

所以选项 (B) 正确

(3)【答案】(A)

【详解】将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 $y'=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，得：

$$\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)，即\quad \varphi(\ln x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$$

令 $\ln x=u$，有 $\varphi(u)=-\dfrac{1}{u^2}$，以 $u=\dfrac{x}{y}$ 代入，得

$$\varphi(\frac{x}{y})=-\frac{y^2}{x^2}.$$

故选项 (A) 正确.

(4) 【答案】(C)

【分析】函数的极值点可能是驻点(一阶导数为零)或导数不存在的点，极值点是极大值点还是极小值点可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.

【详解】根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个(导函数与 x 轴交点的个数)；$x=0$ 是导数不存在的点.

对 3 个一阶导数为零的点左右两侧导数符号均不一致，故必为极值点，其中第一个交点左右两侧导数符号由正变为负，是极大值点；第二个交点和第三个交点左右两侧导数符号由负变为正，是极小值点，则三个驻点中有两个极小值点，一个极大值点；

对导数不存在的点：$x=0$．左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点.

故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，应选(C).

(5)【答案】(B)

【详解】令 $\varphi(x)=\tan x-x$，有 $\varphi(0)=0,\varphi'(x)=\sec^2 x-1>0,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时 $\varphi(x)$ 单调递增，则 $\varphi(x)>0$，即 $\tan x>x>0$，$\dfrac{\tan x}{x}>1$，$\dfrac{x}{\tan x}<1$，由定积分的不等式性质知，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=\frac{\pi}{4}>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx=I_2$$

可见有 $I_1>I_2$ 且 $I_2<\dfrac{\pi}{4}$.

(6)【分析】 本题为一般教材上均有的比较两组向量个数的定理：若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关． 或其逆否命题：若向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且向量组 I 线性无关，则必有 $r\le s$． 可见正确选项为(D)． 本题也可通过举反例用排除法找到答案.

【详解】 用排除法：

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\alpha_1=0\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$，但 β_1,β_2 线性无关，排除(A)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 可由 β_1 线性表示，但 β_1 线性无关，排除(B)；

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$ 可由 β_1,β_2 线性表示，但 α_1 线性无关，排除(C).

三【详解】函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则要求函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既是左连续又是右连续，

即 $f(0^+)=f(0)=f(0^-)$.

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

(由于 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$，所以 $\ln(1+ax^3)\sim ax^3\ (x\to 0)$)

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\qquad（\frac{0}{0}\text{型极限，用洛必达法则}）$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\lim_{x\to 0^-}\sqrt{1-x^2}\qquad(\text{极限的四则运算})$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}\qquad（(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x^2)=-\frac{1}{2}x^2\quad(x\to 0)）$$

$$=-6a$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}=4\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2\lim_{x\to 0^+}(a^2e^{ax}+2)=2a^2+4$$

$f(0)=6.$

所以，$x=0$ 为 $f(x)$ 的连续点 $\Leftrightarrow$ $f(0^+)=f(0^-)$ $\Leftrightarrow$ $-6a=6=2a^2+4$，得 $a=-1$；

所以，$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点 $\Leftrightarrow$ $-6a=2a^2+4\neq 6$，即 $2a^2+6a+4=0$,但 $a\neq -1$

解得 $a=-2$，此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 为可去间断点.

四【分析】(i)变上限积分求导公式：$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)}f(t)dt\right)=f(u)u'(x)-f(v)v'(x)$；

(ii)参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 的一阶导数: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$；

(iii)若 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 二阶可导，函数的二阶导数公式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【详解】设 $x=\varphi(t)=1+2t^2$, $y=\psi(t)=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du$，则

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)=4t;\quad \frac{dy}{dt}=\psi'(t)=\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{e\cdot t^2}{1+2\ln t}\cdot\frac{2}{t}=\frac{2et}{1+2\ln t};$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t}=\frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{e}{2(1+2\ln t)}\right)'\cdot\frac{1}{4t}=\frac{-4e\frac{1}{t}}{4(1+2\ln t)^2}\cdot\frac{1}{4t}=-\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$$

当 $x=9$ 时，由 $x=1+2t^2$ 及 $t>1$ 得 $t=2$，故

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}=-\left.\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}.$$

五【详解】**方法 1**：第二类换元法. 由于被积函数中含有根号 $\sqrt{1+x^2}$，作积分变量变换

$x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$，那么 $(1+x^2)^{3/2}=\sec^3 t$，$dx=\sec^2 tdt$，则

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{e^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 tdt=\int\frac{e^t\tan t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt \qquad \text{三角变换公式}$$
$$=\int e^t\frac{\tan t}{\sec t}dt=\int e^t\sin tdt.$$

又 $\int e^t\sin tdt=-\int e^t d\cos t=-(e^t\cos t-\int e^t\cos tdt)$ 分部积分

$=-(e^t\cos t-\int e^t d(\sin t))=-(e^t\cos t-e^t\sin t+\int e^t\sin tdt)$ 分部积分

$=-e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\sin tdt$，

故 $\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$

由 $x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 得 $t=\arctan x$，因此

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{2}e^{\arctan x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

方法 2：分部积分法

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x}) = e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \qquad \text{分部积分}$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x}) = e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \left(\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int e^{\arctan x}\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{(1+x^2)^{3/2}}dx\right) \qquad \text{分部积分}$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

移项整理得；

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

六【详解】 (1) 将题中的 $\frac{dx}{dy}$ 与 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 变换成以 x 为自变量 y 为因变量的导数 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 来表示(即通常所说的反函数变量变换)，有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原方程，得 $\qquad y'' - y = \sin x. \qquad (*)$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程为 $y'' - y = 0$，特征方程为 $r^2 - 1 = 0$，根 $r_{1,2} = \pm 1$，因此通解为 $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. 由于 $\lambda + i\omega$ 不是特征方程得根，所以设方程(*)的特解为

$$y^* = A\cos x + B\sin x$$

则 $\qquad y^{*\prime} = -A\sin x + B\cos x$， $y^{*\prime\prime} = -A\cos x - B\sin x$

代入方程(*)，得：$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = -2A\cos x - 2B\sin x = \sin x$

解得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$，故 $y^* = -\frac{1}{2}\sin x$. 从而 $y'' - y = \sin x$ 的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1 = 1, C_2 = -1$．故变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

且 $y(x)$ 的导函数 $y'(x) = e^x + e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x > 0$，满足题设 $y' \neq 0$ 条件.

七【详解】讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数等价于讨论方程

$$\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内的零点问题，为此对函数求导，得

$$\varphi'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x}(\ln^3 x - 1 + x).$$

可以看出 $x=1$ 是 $\varphi(x)$ 的驻点，而且当 $0<x<1$ 时，$\ln^3 x < 0$，则 $\ln^3 x - 1 + x < 0$，而 $\frac{4}{x} > 0$，有 $\varphi'(x) < 0$，即 $\varphi(x)$ 单调减少；当 $x>1$ 时，$\ln^3 x > 0$，则 $\ln^3 x - 1 + x > 0$，而 $\frac{4}{x} > 0$，有 $\varphi'(x) > 0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为函数 $\varphi(x)$ 的惟一极小值即最小值.

① 当 $\varphi(1) = 4 - k > 0$，即当 $k < 4$ 时，$\varphi(x) \geq \varphi(1) > 0$，$\varphi(x)$ 无零点，两曲线没有交点；

② 当 $\varphi(1) = 4 - k = 0$，即当 $k = 4$ 时，$\varphi(x) \geq \varphi(1) = 0$，$\varphi(x)$ 有且仅有一个零点，即两曲线仅有一个交点；

③ 当 $\varphi(1) = 4 - k < 0$，即当 $k > 4$ 时，由于

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+}[\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty；$$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty}[\ln x(\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

由连续函数的介值定理，在区间(0,1)与 $(1,+\infty)$ 内各至少有一个零点，又因 $\varphi(x)$ 在区间(0,1)与 $(1,+\infty)$ 内分别是严格单调的，故 $\varphi(x)$ 分别各至多有一个零点. 总之，$\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述，当 $k<4$ 时，两曲线没有交点；当 $k=4$ 时，两曲线仅有一个交点；当 $k>4$ 时，两曲线有两个交点.

八【详解】(1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

令 $X=0$，则它与 y 轴的交点为 $(0,y+\frac{x}{y'})$. 由题意，此点与点 $P(x,y)$ 所连的线段被 x 轴平分，由中点公式得

$$\frac{1}{2}(y+y+\frac{x}{y'})=0\text{，即 }2ydy+xdx=0.$$

积分得 $\frac{x^2}{2}+y^2=C$（C 为任意常数），代入初始条件 $y\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$ 得 $C=\frac{1}{2}$，故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$\frac{x^2}{2}+y^2=\frac{1}{2}\text{，即 }x^2+2y^2=1.$$

(2) 曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为

$$l\overset{\text{弧长公式}}{=}\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}dx\overset{x=\frac{\pi}{2}+t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 t}dt.$$

另一方面，将(1)中所求得的曲线 $y=f(x)$ 写成参数形式，在第一象限中考虑，于是

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

于是该曲线的弧长为：

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t+\frac{1}{2}\cos^2 t}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}dt$$

$$\overset{t=\frac{\pi}{2}-u}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\cos^2 u}(-du)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 u}du$$

所以 $\sqrt{2}s=\frac{1}{2}l$，即 $s=\frac{\sqrt{2}}{4}l$.

九【详解】(1) 设在 t 时刻，液面的高度为 y，此时液面的面积为

$$A(t)\overset{\text{圆的面积公式}}{=}\pi\varphi^2(y),$$

由题设：液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大，可得

$$\frac{dA(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\pi\varphi^2(y)=\pi\text{，即 }\frac{d}{dt}\varphi^2(y)=1$$

所以 $\varphi^2(y)=t+C$，由题意，当 $t=0$ 时 $\varphi(y)=2$，代入求得 $C=4$，于是得

$$\varphi^2(y)=t+4.$$

从而 $$t=\varphi^2(y)-4.$$

(2) 液面的高度为 y 时，液体的体积为 $V(t)=\pi\int_0^y\varphi^2(u)du$，由题设：以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体，得

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\pi\int_0^y\varphi^2(u)du\right)=3$$

所以 $$\pi\int_0^y\varphi^2(u)du=3t=3\varphi^2(y)-12.$$

上式两边对 y 求导，得

$$\pi\varphi^2(y)\overset{\text{变限积分求导}}{=}6\varphi(y)\varphi'(y),$$

即 $$\frac{d\varphi(y)}{dy}=\frac{\pi}{6}\varphi(y)$$

解此微分方程，得

$$\varphi(y)=Ce^{\frac{\pi}{6}y}，\text{其中}C\text{为任意常数，}$$

由 $\varphi(0)=2$ 知 $C=2$，故所求曲线方程为

$$x=2e^{\frac{\pi}{6}y}.$$

十【详解】(1) 因为极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)=0$，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$

又 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=f(a)$，则 $f(a)=0$.

由于 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加，所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取最小值，即

$$f(x)>f(a)=0, x\in(a,b).$$

(2) 由要证明的形式知，要用柯西中值定理证明．取 $F(x)=x^2$， $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a\le x\le b)$，则 $g'(x)=f(x)>0$，则 $F(x),g(x)$ 满足柯西中值定理的条件，于是在 (a,b) 内存在点 ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\left.\frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)dt)'}\right|_{x=\xi}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

即 $$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 在区间$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理，得在(a,ξ)内存在一点η，使

$$f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$$

因 $f(a)=0$，上式即 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，代入(2) 的结论得，

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$$

即 $$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$$

十一【分析】 已知A相似于对角矩阵，应先求出A的特征值，再根据特征值的重数与线性无关特征向量的个数相同，转化为特征矩阵的秩，进而确定参数a. 至于求P，则是常识问题.

【详解】矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2.$

由于A相似于对角矩阵Λ，故对应$\lambda_1=\lambda_2=6$应有两个线性无关的特征向量，即

$3-r(6E-A)=2$，于是有 $r(6E-A)=1.$

$$6E-A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以$a=0$. 于是对应于$\lambda_1=\lambda_2=6$的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

当$\lambda_3=-2$时，

$$-2E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

解方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$得对应于$\lambda_3=-2$的特征向量$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$.

令$P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，则$P$可逆，并有$P^{-1}AP=\Lambda$.

十二【分析】三条直线相交于一点，相当于对应线性方程组有唯一解，进而转化为系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2.

【详解】**方法 1**:“必要性”．设三条直线l_1,l_2,l_3交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b,\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解，故系数矩阵$A=\begin{bmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{bmatrix}$与增广矩阵$\overline{A}=\begin{bmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{bmatrix}$的秩均为 2，于是$|\overline{A}|=0$.

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&2(b+c+a)&-3(c+a+b)\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&2&-3\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&0&0\\b&c-b&a-b\\c&a-c&b-c\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}c-b&a-b\\a-c&b-c\end{vmatrix}$$

$$=-6(a+b+c)[(c-b)(b-c)-(a-b)(a-c)]$$

$$=-6(a+b+c)(bc-c^2-b^2+bc-a^2+ac+ab-bc)$$

$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-ab-bc)$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

由于三条直线互不相同，所以$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故

$$a+b+c=0.$$

“充分性”．由$a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$\left|\overline{A}\right|=0$，故秩$(\overline{A})<3.$

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0,$$

故秩$(A)=2$．于是，秩(A)=秩$(\overline{A})$=2．因此方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点．

方法 2：“必要性”

设三直线交于一点(x_0,y_0)，则$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$为$BX=0$的非零解，其中$B=\begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{bmatrix}$.

所以$|B|=0$．而

$$|B|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=-\left|\overline{A}\right|$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],\text{(解法同方法 1)}$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0.$

“充分性”：考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b, \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由$a+b+c=0.$可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases} \qquad (**)$$

因为 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$

故方程组(* *)有唯一解，所以方程组(*)有唯一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点．

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ _____ .

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 _____ .

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ _____ .

(4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ _____ .

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为 _____ .

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$ _____ .

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　）

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.

(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则（　）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（　）

(A) $\int_1^2\ln^2 xdx$.　　(B) $2\int_1^2\ln xdx$.

(C) $2\int_1^2\ln(1+x)dx$.　　(D) $\int_1^2\ln^2(1+x)dx$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　）

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

(C)对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D)对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为（　）

(A) $y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y*=ax^2+bx+c+A\cos x$

(12) 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于（　）

(A) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$.　　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$.

(C) $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$.　　(D) $\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

(13) 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为（　）

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(14) 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　）

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(I)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式;　　(II)问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(17)(本题满分 11 分)

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$,

(I)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;　　(II)求 $f(x)$ 的值域.

(18)(本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,\ x=t\,(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值; (Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(19)(本题满分 12 分)

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 $9000kg$ 的飞机,着陆时的水平速度为 $700km/h$.经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$).问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少? (注：kg 表示千克, km/h 表示千米/小时)

(21)(本题满分 10 分)

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中 f 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(22)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\ 4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解

(23)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】0.

【详解】本题属于确定由极限定义的函数的连续性与间断点. 对不同的 x, 先用求极限的方法得出 $f(x)$ 的表达式, 再讨论 $f(x)$ 的间断点.

由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，显然当 $x=0$ 时, $f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})x}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(2)【详解】判别由参数方程定义的曲线的凹凸性，先用由 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 定义的参数方程求出二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，再由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ 确定 x 的取值范围.

$$\frac{dy}{dt}=\left(t^3-3t+1\right)'=3t^2-3,\quad \frac{dx}{dt}=\left(t^3+3t+1\right)'=3t^2+3$$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=\frac{t^2+1-1-1}{t^2+1}=1-\frac{2}{t^2+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ (或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\leq 0$)，即 $\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}<0$ (或 $\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}\leq 0$) $\Rightarrow t<0\ \left(或 t\leq 0\right)$

又 $x=t^3+3t+1$， $x'=3t^2+3>0$，所以 $x\left(t\right)$ 单调增，当 $t=0$ 时，$x=1$，所以当 $t<0$ 时 $x\left(t\right)<x\left(0\right)=1$ (或当 $t\leq 0$ 时， $x\left(t\right)\leq x\left(0\right)=1$)，即 $x\in(-\infty,1)$ (或 $x\in(-\infty,1]$)时，曲线凸

(3)【答案】$\dfrac{\pi}{2}$.

【详解】利用变量代换法可得所求的广义积分值.

方法 1：作积分变量变换，

令 $x=\sec t$，则 $x^2-1=\sec^2 t-1=\tan^2 t$， $dx=d\sec t=\sec t\tan t dt$， $t:0\to\dfrac{\pi}{2}$，

代入原式：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

方法 2： 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=d\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}dt$，$t:1\to 0$，代入原式：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4)【答案】2 .

【详解】此题可利用复合函数求偏导法、公式法或全微分公式求解.

方法 1： 复合函数求偏导，在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x , y 求偏导, z 为 x, y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x}),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}(-3\frac{\partial z}{\partial y})+2,$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

所以 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

方法 2： 令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z=0$，则 $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{2x-3z}\cdot 2$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2$，$\frac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{e^{2x-3z}\cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

从而 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

方法 3： 利用全微分公式,得

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy=2e^{2x-3z}dx+2dy-3e^{2x-3z}dz$$

即 $(1+3e^{2x-3z})dz=2e^{2x-3z}dx+2dy$，得 $dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

从而 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=3\cdot\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

(5)【答案】$y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}$.

【详解】此题为一阶线性方程的初值问题.可以利用常数变易法或公式法求出方程的通解,再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解.

方法 1：原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=0$ 的通解:

分离变量： $\frac{dy}{y}=\frac{1}{2x}dx$

两边积分得： $\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln c \quad\Rightarrow\quad y=c\sqrt{x}$

用常数变易法，设 $y=c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解，则 $y'=c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$，

代入 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$，得 $c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}c(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^2$，即 $c'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$,

积分得 $c(x)=\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$,

于是非齐次方程的通解为： $y=\sqrt{x}(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C)=C\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$

又由于 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 代入通解，得 $C\sqrt{1}+\frac{1}{5}1^3=\frac{6}{5}\quad\Rightarrow C=1$,

故所求特解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

方法 2：原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

由一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 通解公式：

$$f(x)=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

这里 $P(x)=-\frac{1}{2x}$, $Q(x)=\frac{1}{2}x^2$，代入上式得： $y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$

由于方程 $x=0$ 处方程无定义，所以解的存在区间内不能含有点 $x=0$.因此解的存在区间要么为 $x>0$ 的某区间，要么为 $x<0$ 的某区间. 现在初值给在 $x=1$ 处，所以 $x>0$，于是

$$y=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right]$$

再 $y(1)=\dfrac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad C=1$,

从而特解为 $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{5}x^3$.

(6) 【答案】$\dfrac{1}{9}$

【详解】

方法 1：已知等式两边同时右乘 A，得 $ABA^*A=2BA^*A+A$，

由伴随矩阵的运算规律：$A^*A=AA^*=|A|E$，有 $AB|A|=2B|A|+A$，而

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3,$$

于是有 $3AB=6B+A$，移项、合并有 $(3A-6E)B=A$，再两边取行列式，由方阵乘积的行列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，有

$$|(3A-6E)B|=|3A-6E||B|=|A|=3,$$

而 $$|3A-6E|=\left|3\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix}6&3&0\\3&6&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&-3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}(-3)\begin{vmatrix}0&3\\3&0\end{vmatrix}=(-3)\times3\times3=27,$$

故所求行列式为 $|B|=\dfrac{|A|}{|3A-6E|}=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

方法 2：由题设条件 $ABA^*=2BA^*+E$，得 $ABA^*-2BA^*=(A-2E)BA^*=E$

由方阵乘积行的列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，故两边取行列式，有 $|(A-2E)BA^*|=|A-2E||B||A^*|=|E|=1$

其中 $|A|=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=2\times2-1\times1=3$；

由伴随矩阵行列式的公式：若 A 是 n 阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

所以，$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{3-1}=\left|A\right|^2$=9 ； 又 $\left|A-2E\right|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$=1.

故$\left|B\right|=\dfrac{1}{\left|A-2E\right|\left|A^*\right|}=\dfrac{1}{9}$.

二、选择题

(7)【答案】 (B)

【详解】

方法 1：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x\cos t^2dt}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2}=0$，则$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，

根据题设，排在后面的是前一个的高阶无穷小，所以可排除(C),(D)选项，

又$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\gamma}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}$

$\xlongequal{\text{等价无穷小替换}}\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2}=\infty$，

可见γ是比β低阶的无穷小量，故应选(B).

方法 2：用x^k(当$x\to0$时)去比较.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为0，应取$k=1$，有$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos t^2}{x^0}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0^+}\cos t^2}{\lim\limits_{x\to0^+}x^0}=1$，

所以(当$x\to0^+$时)α与x同阶.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot 2x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{kx^{k-3}}$$

欲使上式极限存在但不为0，应取$k=3$，有$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\beta}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\tan x}{3x^{3-2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\tan x}{3x}=\dfrac{2}{3}$，

所以(当$x\to0^+$时)β与x^3同阶.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{x^k}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0，应取 $k=2$，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{2\cdot 2x^{2-1}}=\dfrac{1}{4}$，

所以(当 $x\to 0^+$ 时) γ 与 x^2 同阶.因此，后面一个是前面一个的高阶小的次序是 α,γ,β，选(B).

(8)【答案】C

【详解】由于是选择题，可以用图形法解决，也可用分析法讨论.

方法 1：由于是选择题，可以用图形法解决，令 $\varphi(x)=x(x-1)$，则 $\varphi(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$，

是以直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 为对称轴，顶点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$，开口向上的一条抛物线，与 x 轴相交的两点坐标为 $(0,0),(1,0)$， $y=f(x)=|\varphi(x)|$ 的图形如图.

点 $x=0$ 是极小值点；又在点 $(0,0)$ 左侧邻近曲线是凹的，右侧邻近曲线是凸的，所以点 $(0,0)$ 是拐点，选 C.

方法 2：写出 $y=f(x)$ 的分段表达式： $f(x)=\begin{cases}-x(1-x), & -1<x\le 0\\ x(1-x), & 0<x<1\end{cases}$，

从而 $f'(x)=\begin{cases}-1+2x, & -1<x<0\\ 1-2x, & 0<x<1\end{cases}$， $f''(x)=\begin{cases}2, & -1<x<0\\ -2, & 0<x<1\end{cases}$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-2x)=1>0$，所以 $0<x<1$ 时， $f(x)$ 单调增，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1+2x)=-1<0$，所以 $-1<x\le 0$ 时， $f(x)$ 单调减，

所以 $x=0$ 为极小值点.

当 $-1<x<0$ 时， $f''(x)=2>0$， $f(x)$ 为凹函数； 当 $1>x>0$ 时， $f''(x)=-2<0$， $f(x)$ 为凸函数，于是 $(0,0)$ 为拐点.

(9)【答案】 B

【详解】由对数性质，

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=2\int_0^1\ln(1+x)dx\ \underline{\underline{1+x=t}}\ 2\int_1^2\ln t\,dt=2\int_1^2\ln x\,dx$$

(10)【答案】 (C)

【详解】函数 $f(x)$ 只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B).

由导数的定义，知 $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$

根据极限的保号性，知存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，有 $\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$.

即当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$x<0$，有 $f(x)<f(0)$；而当 $x\in(0,\delta)$ 时，$x>0$ 有 $f(x)>f(0)$.

(11)【答案】A

【详解】利用待定系数法确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，则特征根为 $\lambda=\pm i$，

对 $y''+y=x^2+1=e^0(x^2+1)$ 为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型，其中 $\lambda=0, P_m(x)=x^2+1$，因 0 不是特征根，从而其特解形式可设为

$$y_1^*=(ax^2+bx+c)e^0=ax^2+bx+c$$

对 $y''+y=\sin x$，为 $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$ 型，其中 $\lambda=0$，$\omega=1, P_l(x)=0, P_n(x)=1$，因 $\lambda+\omega i=0+i=i$ 为特征根，从而其特解形式可设为

$$y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$$

由叠加原理，故方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

$$y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$$

(12)【答案】D

【详解】由 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le2y\right\}$，则积分

区域是以$(0,1)$为圆心，1 为半径的圆及其内部，

积分区域见右图.

在直角坐标系下，先x后y，

$$-\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{2y-y^2}\ ,\quad 0\le y\le 2$$

则应是

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$$

先y后x，由$x^2+(y-1)^2\le 1\Rightarrow 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1$，则应是

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$$

故应排除$[A],[B]$.

在极坐标系下，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ ，

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr,$$ 故应选 D.

或直接根据极坐标下，其面积元素为$rdrd\theta$，则可排除 C

(13)【答案】(D)

【详解】由题设，将A的第 1 列与第 2 列交换，即

$$AE_{12}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B,$$

将B的第 2 列加到第 3 列，即

$$B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=AQ.$$

故$Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，应选(D).

(14)【答案】(A)

【详解】**方法 1：**由矩阵秩的重要公式：若A为$m\times n$矩阵，B 为$n\times p$矩阵，如果$AB=0$，

则$r(A)+r(B)\le n$

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，由 $AB=0$ 知，$r(A)+r(B)\le n$，其中 n 是矩阵 A 的列数，也是 B 的行数

因 A 为非零矩阵，故 $r(A)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(B)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵，故 $r(B)\ge 1$，因 $r(A)+r(B)\le n$，从而 $r(A)\le n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 A 的列向量组线性相关.

故应选(A).

方法 2： 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，将 B 按列分块，由 $AB=0$ 得，

$$AB=A\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right]=0, A\beta_i=0, i=1,2,\cdots,s.$$

因 B 是非零矩阵，故存在 $\beta_i\ne 0$，使得 $A\beta_i=0$. 即齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件 $r(A)<n$，知 $r(A)<n$. 所以 A 的列向量组线性相关.

又 $(AB)^T=B^TA^T=0$，将 A^T 按列分块，得

$$B^TA^T=B^T[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T]=0, B^T\alpha_i^T=0, i=1,2,\cdots,m.$$

因 A 是非零矩阵，故存在 $\alpha_i^T\ne 0$，使得 $B^T\alpha_i^T=0$，即齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解的充要条件，知 B^T 的列向量组线性相关，由 B^T 是由 B 行列互换得到的，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

方法 3： 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times s}$，将 A 按列分块，记 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\end{pmatrix}$

$$\text{由 } AB=0\Rightarrow\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{pmatrix}$$

$$=\left(b_{11}A_1+\cdots+b_{n1}A_n,\ \cdots\ ,b_{1s}A_1+\cdots+b_{ns}A_n\right)=0 \qquad (1)$$

由于 $B\ne 0$，所以至少有一个 $b_{ij}\ne 0$（$1\le i\le n, 1\le j\le s$），又由 (1) 知，$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{ij}A_i+\cdots+b_{nj}A_n=0$，所以 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 线性相关. 即 A 的列向量组线性相关.

(向量组线性相关的定义：如果对 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in R^n$，有 m 个不全为零

的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in R$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_m\alpha_m=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.)

又将 B 按行分块，记 $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix}$，同样，

$$AB=0\Rightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n\\a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2n}B_n\\\cdots\\a_{m1}B_1+a_{m2}B_2+\cdots+a_{mn}B_n\end{pmatrix}=0$$

由于 $A\neq0$,则至少存在一个 $a_{ij}\neq0\,(1\le i\le m,1\le j\le n)$, 使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{in}B_n=0,$$

由向量组线性相关的定义知，$B_1,B_2,\cdots,B_m$ 线性相关, 即 B 的行向量组线性相关，

故应选(A).

方法 4：用排除法.取满足题设条件的 A,B.

取 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\neq0,B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\neq0$，有 $AB=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=0,$

A 的行向量组，列向量组均线性相关，但 B 的列向量组线性无关，故(B)，(D)不成立.

又取 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\neq0,B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq0$，有 $AB=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$，

A 的行向量组线性无关，B 的列向量组线性相关，故(C)不成立.

由排除法知应选(A).

三、解答题.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【答案】$-\dfrac{1}{6}$

【详解】此极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式.可利用洛必达法则,并结合无穷小代换求解.

方法 1： $\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x} = e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}\xlongequal{\text{洛}}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(2+\cos x)-\ln 3)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{1}{6}$$

方法 2： $\text{原式}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}\xlongequal{e^x-1\sim x}\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\xlongequal{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(16)【详解】(I)当$-2\le x<0$,则$0\le x+2<2$,由题设：区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$知,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=k(x+2)(x^2+4x)=kx(x+2)(x+4).$$

(II) 由(I)知：$f(x)=\begin{cases}x(x^2-4), & x\in[0,2]\\ kx(x+2)(x+4), & x\in[-2,0)\end{cases}$，所以$f(0)=0\cdot(0^2-4)=0$，

按函数在某点可导的充要条件：在这点的左右导数存在且相等. 所以根据导数的定义求$f(x)$在$x=0$的左右导数，使其相等，求出参数k.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)-0}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)-0}{x}=8k.$$

令$f'_-(0)=f'_+(0)$，得$k=-\dfrac{1}{2}$. 即当$k=-\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$x=0$处可导.

(17)【详解】利用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性,利用求函数最值的方法讨论函数的值域.

(I) 要证 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，即证： $f(x)=f(x+\pi)$

因为 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$，所以 $f(x+\pi)=\int_{(x+\pi)}^{(x+\pi)+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt$

利用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性，设 $t=u+\pi$，因为 $t:x+\pi\to x+\dfrac{3\pi}{2}$，所以 $u:x\to x+\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|d(u+\pi)\ \underline{\underline{\sin(u+\pi)=-\sin u}}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(II) 因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域. 又因 $f(x)$ 为积分函数，则一定连续，根据有界性与最大值最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值，所以 $f(x)$ 的值域就是区间 $[\min f(x),\max f(x)]$.

令 $f'(x)=\left|\sin(x+\dfrac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|=0$，在区间 $[0,\pi]$ 内求得驻点，$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3\pi}{4}$，且

$$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin t|dt\ \underline{\underline{\sin t>0}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2},$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,dt=2-\sqrt{2},$$

又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=1$,

比较极值点与两个端点处的值，知 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(18)【详解】(I) 旋转体体积：$V(t)=\pi\int_0^t y^2dx=\pi\int_0^t\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx$

旋转体的侧面积：$S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'^2}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx,$$

所以 $$\frac{S(t)}{V(t)}=\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}=2.$$

(Ⅱ) 在 $x=t$ 处旋转体的底面积为

$$F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\Bigg|_{x=t}=\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2,$$

所以 $$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx\right)'}{\left[\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\right]'}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1+e^{-2t}}{1-e^{-2t}}=1$$

(19) 【详解】根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

方法 1：因为函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]\subset(e,e^2)$ 上连续，且在 (a,b) 内可导，所以满足拉格朗日中值定理的条件，

对函数 $f(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\left(\ln^2\xi\right)'(b-a)=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\ e<a<\xi<b<e^2$$

下证：$\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{4}{e^2}$.

设$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，当$t>e$时，$1-\ln t<1-\ln e=0$ ，即$\varphi'(t)<0,$

所以$\varphi(t)$单调减少，又因为$\xi<e^2$，所以$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}，得\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$$

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 2：利用单调性， 设$\varphi(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$，证$\varphi(x)$在区间$\left(e,e^2\right)$内严格单调增即可.

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}，(\varphi'(e^2)=2\frac{\ln e^2}{e^2}-\frac{4}{e^2}=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0，)\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

当$x>e$时，$1-\ln x<1-\ln e=0$，$\varphi''(x)<0,$ 故$\varphi'(x)$单调减少，从而当$e<x<e^2$时，

$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=0$，即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此当$e<x<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即$\ln^2 b-\dfrac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}a$，

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

方法 3：设$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，则$\varphi'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$， $\varphi''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\Rightarrow x>e$时，$1-\ln x<1-\ln e=0$，得$\varphi''(x)<0$，

$\Rightarrow \varphi'(x)$在(e,e^2)上单调减少，从而当$e<x<e^2$时，$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\dfrac{4}{e^2}-\dfrac{4}{e^2}=0$，

$\Rightarrow \varphi(x)$在(e,e^2)上单调增加. 从而当$e<a<x\le b<e^2$时，$\varphi(x)>\varphi(a)=0$.

$\Rightarrow \varphi(b)>0$，即$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

(20) 【详解】 本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可.

方法 1：由题设，飞机质量$m=9000kg$，着陆时的水平速度$v_0=700km/h$. 从飞机接触跑道开始计时，设t时刻飞机的滑行距离为$x(t)$，速度为$v(t)$，则 $v(0)=v_0,x(0)=0$.

根据牛顿第二定律，得$m\dfrac{dv}{dt}=-kv$. 又$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$.

由以上两式得 $dx=-\frac{m}{k}dv$，积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C.$

由于 $v(0)=v_0, x(0)=0$，所以 $x(0)=-\frac{m}{k}v_0+C=0.$ 故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，

从而 $x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$

当 $v(t)\to 0$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

方法 2：根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt}=-kv,$

分离变量：$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt$，两端积分得：$\ln v=-\frac{k}{m}t+C_1$，

通解：$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$，解得 $C=v_0$，故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$

飞机在跑道上滑行得距离相当于滑行到 $v\to 0$，对应地 $t\to+\infty$．于是由 $dx=vdt$，有

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=\int_0^{+\infty}v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

或由 $v(t)=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\frac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为

当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to\frac{kv_0}{m}=1.05(km).$

方法 3：由 $m\frac{dv}{dt}=-kv$ ，$v=\frac{dx}{dt}$，化为 x 对 t 的求导，得 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$，变形为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0,\quad v(0)=x'(0)=v_0, x(0)=0$$

其特征方程为 $\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{k}{m}$，故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}.$

由 $x\big|_{t=0}=0, v\big|_{t=0}=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$，得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k},$

于是 $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$ 当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 $1.05\,km$.

(21)【详解】利用复合函数求偏导和混合偏导的方法直接计算.

令 $u=x^2-y^2, v=e^{xy}$，则 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})=f(u,v)$，

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$， $\dfrac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy},\dfrac{\partial v}{\partial y}=xe^{xy}$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2yf_1'+xe^{xy}f_2'\right)$$

$$=-2y\left(f_{11}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}''\frac{\partial v}{\partial x}\right)+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+xe^{xy}\left(f_{21}''\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=-2y\left(2xf_{11}''+ye^{xy}f_{12}''\right)+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+xe^{xy}\left(2xf_{21}''+ye^{xy}f_{22}''\right)$$

$$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''++xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f_2'$$

(22) 【详解】

方法 1：对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1\text{行}\times(-i)+i\text{行}}\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B$$

对 $|B|$ 是否为零进行讨论：

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n$，由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$．故此方程组有非零解，把 $a=0$ 代入原方程组，得其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \qquad (*)$$

此时，$r(A)=1$，故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量. 选 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，将他们的 $n-1$ 组值 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 分别代入 $(*)$ 式，得基础解系

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\ \cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}，其中 k_1,\cdots,k_{n-1} 为任意常数.$$

当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1行} \begin{bmatrix} a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

可知 $a = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A) = n-1 < n$，由齐次方程组有非零解的判别定理，知方程组也有非零解，把 $a = -\dfrac{n(n+1)}{2}$ 代入原方程组，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

此时，$r(A) = n-1$，故方程组有 $n - r = n-(n-1) = 1$ 个自由未知量.选 x_2 为自由未量，取 $x_2 = 1$，由此得基础解系为 $\eta = (1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x = k\eta$，其中 k 为任意常数.

方法 2：计算方程组的系数行列式：

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \xlongequal{矩阵加法} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$= aE + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \triangleq aE + Q,$$

下面求矩阵 Q 的特征值：

$$|\lambda E - Q| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & \cdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -n & -n & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{1行\times(-i)+i行} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\substack{i列\times(i)+1列\\(i=2,3,\cdots,n)}}}\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{n(n+1)}{2} & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

则 Q 的特征值 $0,\cdots,0,\dfrac{n(n+1)}{2}$，由性质：若 $Ax=\lambda x$，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$，因此对任意多项式 $f(x)$， $f(A)x=f(\lambda)x$，即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故， A 的特征值为 $a,a,\cdots,a+\dfrac{n(n+1)}{2}$，由特征值的乘积等于矩阵行列式的值，得 A 行列式 $|A|=(a+\dfrac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

由齐次方程组有非零解的判别定理：设 A 是 n 阶矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$. 可知，当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n&n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,\cdots n)]{1行\times(-i)+i行}\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},.$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

此时， $r(A)=1$，故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量.选 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由未知量，将他们的 $n-1$ 组值 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 分别代入 $(*)$ 式， 由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，

$$B\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\xrightarrow[(i=2,3\cdots n)]{i\times(-1)+1行}\begin{bmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2}&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

即 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，其同解方程组为$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$

此时，$r(A) = n-1$，故方程组有$n-r = n-(n-1) = 1$个自由未知量. 选x_2为自由未量，取$x_2 = 1$，由此得基础解系为$\eta = (1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为$x = k\eta$，其中k为任意常数.

(23) 【详解】A的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \xlongequal{2\text{行}\times(-1)+1\text{行}} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提出1行公因数}} (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \xlongequal{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}} (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{1\text{行}+2\text{行}} (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)] = (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

已知A有一个二重特征值，有两种情况，(1) $\lambda = 2$就是二重特征值，(2)若$\lambda = 2$不是二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$是一个完全平方

(1) 若$\lambda = 2$是特征方程的二重根，则有$2^2-16+18+3a = 0$, 解得$a = -2$. 由

$$|\lambda E - A| = (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-2)) = (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12) = (\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

求得A的特征值为2,2,6, 由

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1行的1倍加到3行}]{\text{1行(-1)倍加到2行,}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知$\text{秩}(2E-A) = 1$，故$\lambda = 2$对应的线性无关的特征向量的个数为$n-r = 3-1 = 2$，等于$\lambda = 2$的重数. 由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 从而A可相似对角化.

(2) 若$\lambda = 2$不是特征方程的二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$为完全平方，从而

$18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$. 当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，由

$$|\lambda E-A|==(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3\times(-\frac{2}{3}))=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+16)=(\lambda-2)(\lambda-4)^2=0$$

知 A 的特征值为 2，4，4，由

$$4E-A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \frac{2}{3} & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times\frac{1}{3}+3行}\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

知 $秩(4E-A)=2$，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量有 $n-r=3-2=1$, 不等于 $\lambda=4$ 的重数，则由矩阵与对角矩阵相似的充要条件：对矩阵的每个特征值，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 知 A 不可相似对角化.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\Big|_{x=\pi}$ = _____ .

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ = _____

(4) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为_____.

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_____ .

(6) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$____.

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　）

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有（　）

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数.　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是（　）

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.

(10) 设区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$为$D$上的正值连续函数，$a,b$为常数，则$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$（　）

(A) $ab\pi$.　　(B) $\frac{ab}{2}\pi$.　　(C) $(a+b)\pi$.　　(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

(11) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$ 具有一阶导数，则必有（　）

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(12) 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　）

(A) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第一类间断点.

(B) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点.

(D) $x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点.

(13) 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是（　）

(A) $\lambda_1\ne 0$.　　(B) $\lambda_2\ne 0$.　(C) $\lambda_1=0$.　(D) $\lambda_2=0$.

(14) 设A为n ($n\ge 2$)阶可逆矩阵，交换A的第 1 行与第 2 行得矩阵B，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，则（　）

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.　　(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

(16)(本题满分 11 分)

如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\dfrac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 $M(x,y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$)与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$.

(18)(本题满分 12 分)

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

(19)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

(I)存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$；

(II)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta) f'(\zeta) = 1$.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$，并且 $f(1,1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \left| x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right.\}$ 上的最大值和最小值.

(21)(本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \left| x^2 + y^2 - 1 \right| d\sigma$，其中 $D = \{(x, y) \left| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right.\}$

(22)(本题满分 9 分)

确定常数 a，使向量组 $\alpha_1 = (1,1,a)^T$，$\alpha_2 = (1,a,1)^T$，$\alpha_3 = (a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1,1,a)^T$，$\beta_2 = (-2,a,4)^T$，$\beta_3 = (-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $AB = 0$，求线性方程组 $AX = 0$ 的通解.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【详解】先求出函数的导数,再求函数在某点的微分.

方法 1：利用恒等变形得 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，于是

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

从而 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

方法 2：两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\bullet y'=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

于是 $$y'=(1+\sin x)^x\cdot[\ln(1+\sin x)+x\cdot\frac{\cos x}{1+\sin x}],$$

故 $$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

(2)曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

【详解】由求斜渐近线公式 $y=ax+b$ (其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$)，得：

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

(3)【详解】通过还原变换求定积分

方法 1：令 $x=\sin t\quad(0<t<\dfrac{\pi}{2})$,则

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

方法 2：令 $\sqrt{1-x^2}=t$，有 $x^2=1-t^2$, 所以有 $xdx=-tdt$，其中 $0<t<1$.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{-dt}{1+t^2} = \arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

(4)【答案】$y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x.$

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的解，有公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] \text{ (其中 } C \text{ 是常数).}$$

将原方程等价化为 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + C]$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2 \ln x dx + C] = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x + \frac{C}{x^2}, \text{ (其中 } C \text{ 是常数)}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$，故所求解为 $y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x.$

(5)【详解】由题设，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{x\arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2k}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right],$$

又因为 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$，$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \overset{\arcsin x = u}{=\!=\!=} \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 1$

所以 $\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{1}{2k}(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{4k}$

由题设 $x \to 0$ 时 $\alpha(x) \sim \beta(x)$，所以 $\frac{3}{4k} = 1$， 得 $k = \frac{3}{4}.$

(6)【答案】2

【详解】

方法 1：因为 $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，

$$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},$$

故 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$,

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2.$$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{=\!=\!=\!=}}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2+8\alpha_3|\overset{[3]-2[2]}{=\!=\!=\!=}|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_3|\overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{=\!=\!=\!=}}2|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3|\overset{[1]-[2]}{=\!=\!=\!=}2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

又因为 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=1$，故 $|B|=2|A|=2$.

二、选择题

(7)【答案】C

【详解】分段讨论，并应用夹逼准则，

当 $|x|<1$ 时，有 $\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2}$，命 $n\to\infty$ 取极限，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，

由夹逼准则得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$；

当 $|x|>1$ 时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}|x|^3$，命 $n\to\infty$ 取极限，得

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3\left(\frac{1}{|x|^{3n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ |x^3|, & |x|\ge 1\end{cases}$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点. 按导数定义，易知 $x=\pm1$ 处 $f(x)$ 不可导，故应选(C).

(8)【答案】A

【详解】

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，亦即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数；

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$，令 $t=-k$，则有 $dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_0^{x} f(-k)dk+C=\int_0^{x} f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令 $f(x)=x$， 则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9)【答案】A

【详解】当 $x=3$ 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t_1=1,t_2=-3$ (舍去，此时 y 无意义)，

曲线 $y=y(x)$ 的导数为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\dfrac{1}{2(t+1)^2}$，

所以曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ (即 $t=1$)处的切线斜率为 $\frac{1}{8}$

于是在该处的法线的斜率为 -8，所以过点 $(3,\ln 2)$ 的法线方程为

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 $y=0$，得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$，故应(A).

(10)【答案】D

【详解】由于积分区域 D 是关于 $y=x$ 对称的，所以 x 与 y 互换后积分值不变，所以有

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}]d\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$ 应选(D).

(11)【答案】B

【详解】因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(12)【答案】D

【详解】由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$， $x=1$ 点处无定义，因此是间断点.

且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$，所以 $x=1$ 为第一类间断点，故应选(D).

(13)【答案】B

【详解】

方法 1：利用线性无关的定义

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2.$$

设有数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0\Rightarrow(k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1, α_2 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1 + k_2\lambda_1 = 0, \\ k_2\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$ 时，方程只有零解，则 $k_1 = 0, k_2 = 0$，此时 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2 \neq 0$ (否则，α_1 与 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法 2：将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1, α_2 分别是特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$.

由于 $\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = \left(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2\right) = \left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，知 α_1, α_2 线性无关. 若 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关，则 $r\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = 2$，则

$$2 = r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \leq \min\left\{r\left(\alpha_1, \alpha_2\right), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\} \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2,$$

故 $2 \leq r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leq 2$ 从而 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$，从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$，则 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2$，又 α_1, α_2 线性无关，则

$$r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 2,$$

则

$$r\left(\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)\right) = r\left(\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 2$$

从而 α_1，$A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 \neq 0$. 故应选(B).

方法 3：利用矩阵的秩

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，又

$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，故 α_1， $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=2$

又因为 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)\overset{\text{将}\alpha_1\text{的}-\lambda_1\text{倍加到第2列}}{=}\left(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2\right)$

则 $r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2 \Leftrightarrow \lambda_2\neq 0$ (若 $\lambda_2=0$，与 $r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2$ 矛盾)

方法 4：利用线性齐次方程组

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，

$\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关

$\Leftrightarrow \alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$ 线性无关

$\Leftrightarrow \left|\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right|\neq 0$，

$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)X=0$ 只有零解，又 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关时 $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)Y=0$ 只有零解，故 $Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$，只有零解，

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ 的系数矩阵是个可逆矩阵，

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$，故应选(B)

方法 5：由 $\lambda_1\neq\lambda_2$， α_1,α_2 线性无关

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

向量组$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2$和向量组$(\mathrm{II}):\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$. 显然向量组$(\mathrm{II})$可以由向量组$(\mathrm{I})$线性表出；当$\lambda_2\neq 0$时，不论$\lambda_1$的取值如何，向量组$(\mathrm{I})$可以由向量组$(\mathrm{II})$线性表出

$$\alpha_1=\alpha_1,\quad \alpha_2=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1)+\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1+\frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1+\alpha_2),$$

从而(I)，(II)是等价向量组$\Rightarrow$当$\lambda_2\neq 0$时，$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$

(14)【答案】(C)
【详解】

方法 1：由题设，存在初等矩阵E_{12}(交换n阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得)，使得

$E_{12}A=B$，(A进行行变换，故A左乘初等矩阵)，于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E^*_{12}$，

又初等矩阵都是可逆的，故 $E_{12}^{-1}=\dfrac{E_{12}^*}{|E_{12}|}$，

又$|E_{12}|=-|E|=-1$(行列式的两行互换，行列式反号)，$E_{12}^{-1}=E_{12}$，故

$$B^*=A^*E^*_{12}=A^*|E_{12}|\cdot E_{12}^{-1}=-A^*E_{12}^{-1}=-A^*E_{12},$$

即$A^*E_{12}=-B^*$,可见应选(C).

方法 2：交换A的第一行与第二行得B，即$B=E_{12}A$.

又因为A是可逆阵，$|E_{12}|=-|E|=-1$，故$|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|\neq 0$，

所以B可逆，且$B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}$.

又$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}, B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}$，故$\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{A^*}{|A|}E_{12}$，又因$|B|=-|A|$，故$A^*E_{12}=-B^*$.

三、解答题

(15)【详解】 作积分变量代换，命$x-t=u$，则

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du,$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$

$$\overset{\text{整理}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}\overset{\text{上下同除}x}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\int_0^x f(t)dt)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

所以由极限的四则运算法则得，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{f(x)+\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}{\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}\overset{f(0)\neq 0}{=}\frac{1}{2}.$$

(16) 【详解】由题设图形知，C_3在C_1的左侧，根据平面图形的面积公式得，

$$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)]dt=\frac{1}{2}(e^x-x-1),$$

$$S_2(y)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

由$S_1(x)=S_2(y)$，得

$$\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

注意到$M(x,y)$是$y=e^x$的点，

于是 $\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt$

两边对y求导得 $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y})=\ln y-\varphi(y)$，

整理上面关系式得函数关系为：$x=\varphi(y)=\ln y-\frac{y-1}{2y}$.

(17)【详解】由直线l_1过$(0,0)$和$(2,4)$两点知直线l_1的斜率为 2. 由直线l_1是曲线C在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知$f'(0)=2$. 同理可得$f'(3)=-2$. 另外由点(3,2)是曲线C的

一个拐点知 $f''(3)=0.$

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3 (2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times 3+1)f'(3)+(2\times 0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

(18)【详解】 由题设 $x=\cos t(0<t<\pi)$，有 $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，由复合函数求导的链式法则得

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},\quad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t}),$$

代入原方程，$(1-\cos^2 t)[\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\dfrac{1}{\sin t})-\cos t(-\dfrac{1}{\sin t}\dfrac{dy}{dt})+y=0$，

化简得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$，其特征方程为 $r^2+1=0$，特征根 $r_{1,2}=\pm i$，通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$

所以 $\quad y=C_1\cos t+C_2\sin t=C_1x+C_2\sqrt{1-x^2}$，

将初始条件 $y\Big|_{x=0}=1$, 代入得，$1=C_1\times 0+C_2\sqrt{1-0^2}=C_2$，即 $C_2=1$.

而 $\quad y'=C_1x'+C_2(\sqrt{1-x^2})'=C_1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$，

将 $y'\Big|_{x=0}=2$ 代入得 $2=C_1+\dfrac{2\times 0}{2\sqrt{1-0^2}}=C_1$，即 $C_1=2$.

将 $C_1=2,C_2=1$ 代入通解公式得满足条件的特解为 $y=2x+\sqrt{1-x^2}$，$-1<x<1.$

(19)【详解】

(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在[0，1]上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，

于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点

$\eta \in (0,\xi), \zeta \in (\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$， $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是 $$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

(20)【详解】由 $dz=2xdx-2ydy$ 知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$. 对 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ 两边积分得 $z=f(x,y)=x^2+c(y)$. 将 $z(x,y)=x^2+c(y)$ 代入 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ 得 $c'(y)=2y$. 所以 $c(y)=y^2+c$. 所以 $z=x^2-y^2+c$.再由 $x=1,y=1$ 时 $z=2$ 知， $c=2$. 于是所讨论的函数为 $z=x^2-y^2+2$.

求 z 在 $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ 中的驻点. 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ 得驻点 $(0,0)$ ，对应的 $z=f(0,0)=2$.

讨论 $z=x^2-y^2+2$ 在 D 的边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的最值，有两个方法.

方法 1：把 $y^2=4(1-x^2)$ 代入 z 的表达式，有

$$z=x^2-y^2+2=5x^2-2,\quad -1\le x\le 1$$

$$z'_x=10x$$

命 $z'_x=0$ 解得 $x=0$，对应的 $y=\pm 2$， $z\big|_{x=0,y=\pm 2}=-2$

还要考虑 $-1\le x\le 1$ 的端点 $x=\pm 1$，对应的 $y=0$， $z\big|_{x=\pm 1,y=0}=3$

由 $z=2,z=-2,z=3$ 比较大小，故

$\min z=-2$ (对应于 $x=0$， $y=\pm 2$)， $\max z=3$ (对应于 $x=0$， $y=\pm 2$)

方法 2：用拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1)$

解方程组 $\begin{cases} F'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1+\lambda)x = 0, \\ F'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\lambda y}{2} = -2y + \dfrac{1}{2}\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$

由上面的第一个方程解得 $x=0$ 或 $\lambda=-1$：当 $x=0$ 时由最后一个方程解得 $y=\pm 2$；当 $\lambda=-1$ 是由第二个方程解得 $y=0$，这时由最后一个方程解得 $x=\pm 1$．故解得 4 个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$.计算对应 z 的值：

$$z\big|_{(0,2)} = -2,\quad z\big|_{(0,-2)} = -2,\quad z\big|_{(1,0)} = 3,\quad z\big|_{(-1,0)} = 3$$

再与 $z\big|_{(0,0)} = 2$ 比较大小，结论同方法 1.

(21)【详解】D：$x^2+y^2-1=0$ 为以 O 为中心半径为 1 的圆周，划分 D 如下图为 D_1 与 D_2.

这时可以去掉绝对值符号 $\left|x^2+y^2-1\right| = \begin{cases} x^2+y^2-1, & (x,y)\in D_2 \\ 1-x^2-y^2, & (x,y)\in D_1 \end{cases}$

方法 1： $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma = -\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$

后一个积分用直角坐标做，

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy = \int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1)dy$$

$$= \int_0^1 [(x^2-1)-(x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$= \int_0^1 [(x^2-\frac{2}{3}) + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx = \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 \frac{2}{3}dx + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1+\cos 2t}{2})^2 dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\ dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2})dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times 0=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.$$

前一个积分用极坐标做，

$$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

所以 $$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\frac{\pi}{8}+-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

方法 2：由于区域 D_2 的边界复杂，计算该积分较麻烦，可以将 D_2 内的函数“扩充”到整个区域 $D=D_1\cup D_2$，再减去“扩充”的部分，就简化了运算. 即

$$\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

因此 $$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=2\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma$$

由极坐标 $$\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})d\theta=\frac{\pi}{8}.$$

而 $$\iint_D(x^2+y^2-1)d\sigma=\int_0^1dy\int_0^1(x^2+y^2-1)dx=\int_0^1[\frac{x^3}{3}+(y^2-1)x]_0^1dy$$

$$=\int_0^1[\frac{1}{3}+y^2-1]dy=\int_0^1(y^2-\frac{2}{3})dy=[\frac{y^3}{3}-\frac{2}{3}y]_0^1=-\frac{1}{3}$$

所以 $$\iint_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=2\times\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

(22)【详解】

方法 1： 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第1行}]{\text{把第2、3行}}\begin{vmatrix}2+a&2+a&2+a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{公因子}(2+a)]{\text{提取第1行的}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3\text{行}-1\text{行}]{2\text{行}-1\text{行}}(2+a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\a-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第3列展开}}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times1\times\begin{vmatrix}0&a-1\\a-1&0\end{vmatrix}=-(2+a)(a-1)^2=0$$

(其中 $(-1)^{1+3}$ 指数中的 1 和 3 分别是1所在的行数和列数)

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=[1,1,1]^T$，则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但 $\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出(因为方程组 $\beta_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=-2\\k_1+k_2+k_3=1\\k_1+k_2+k_3=4\end{cases}$ 无解)，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时,由于

$$[B\vdots A]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[3\text{行}+1\text{行}\times2]{2\text{行}-1\text{行},}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&-3\\0&0&-6&0&0&0\end{array}\right]$$

因 $r(B)=2\neq r(B\vdots\alpha_2)=3$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，故方程组 $BX=\alpha_2$ 无解，故 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，这和题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

因此 $a=1$.

方法 2： 对矩阵 $\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换，有

$$\overline{A}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3\vdots\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\1&a&a&\vdots&1&a&1\\a&4&a&\vdots&a&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\0&a+2&a+2&\vdots&0&a-1&0\\0&4+2a&3a&\vdots&0&1-a&1-a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行-2行\times 2}\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&a\\0&a+2&a+2&\vdots&0&a-1&0\\0&0&a-4&\vdots&0&3(1-a)&1-a\end{bmatrix},$$

当$a=-2$时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&-2\\0&0&0&\vdots&0&-3&0\\0&0&-6&\vdots&0&3&3\end{bmatrix}$，不存在非零常数$k_1,k_2,k_3$，

使得$\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$，$\alpha_2$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，因此$a\neq-2$；

当$a=4$时，

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&\vdots&1&1&4\\0&6&6&\vdots&0&3&0\\0&0&0&\vdots&0&-9&-3\end{bmatrix},$$

α_3不能由β_1,β_2,β_3线性表示，不存在非零常数k_1,k_2,k_3，使得$\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$. 因此$a\neq4$.

而当$a\neq-2$且$a\neq4$时，秩$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可由向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示. 又

$$\overline{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\1&a&1&\vdots&1&a&a\\a&1&1&\vdots&a&4&a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1&1&a&\vdots&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&\vdots&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&\vdots&0&4+2a&3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix},$$

由题设向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则方程组 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_1$ 或 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_2$ 或 $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)x=\beta_3$ 无解，故系数矩阵的秩 $\neq$ 增广矩阵的秩，故 $r(\overline{B})\neq r(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$.

又当 $a\neq -2$ 且 $a\neq 4$ 时，$r(\overline{B})=3$，则必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 $a=1$ 或 $a=-2$.

综上所述，满足题设条件的 a 只能是：$a=1$.

方法 3： 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵 $(A\vdots B)$ 作初等行变换，得

$$(A\vdots B)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a\\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3行-1行\times a]{2行-1行,}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3行+2行}\begin{bmatrix}1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2\\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2\end{bmatrix},$$

由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $r(A)<3$，(若 $r(A)=3$，则任何三维向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出)，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[加到第1行]{把第2、3行}\begin{vmatrix}2+a & 2+a & 2+a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[公因子(2+a)]{提取第1行的}(2+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[3行-1行]{2行-1行}(2+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ a-1 & 0 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{按第3列展开}(2+a)\cdot(-1)^{1+3}\times 1\times\begin{vmatrix}0 & a-1\\ a-1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(2+a)(a-1)^2=0$$

从而得 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，

$$\left(A \vdots B\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\vdots 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\vdots 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\vdots 0 & 9 & 6\end{pmatrix},$$

则 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1+0\cdot\beta_2+0\cdot\beta_3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表出，但由于 $r\left(A\right)=1\neq r\left(A\vdots\beta_2\right)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_2$ 无解，$\beta_2=[-2,1,4]^T$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. 或由于 $r\left(A\right)=1\neq r\left(A\vdots\beta_3\right)=2$，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，方程组 $Ax=\beta_3$ 无解， β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，即 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，

$$\left(A \vdots B\right)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\vdots 1 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\vdots 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\vdots 0 & 0 & -6\end{pmatrix},$$

因 $r\left(A\right)=2\neq r\left(A\vdots\beta_3\right)=3$，，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等， β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但 $r\left(B\right)=2\neq r\left(B\vdots\alpha_2\right)=3$(或 $r\left(B\vdots\alpha_3\right)=3$)，系数矩阵的秩和增广矩阵的秩不相等，即 $BX=\alpha_2$ (或 $BX=\alpha_3$)无解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，与题设矛盾，故 $a=-2$ 不合题意.

故 $a=1$.

(23)【详解】 由 $AB=0$ 知，B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，且 $r(A)+r(B)\leq 3$.(3 是 A 的列数或 B 的行数)

(1) 若 $k\neq 9$，β_1,β_3 不成比例，β_1,β_2 成比例，则 $r(B)=2$，方程组 $Ax=0$ 的解向量中至少有两个线性无关的解向量，故它的基础解系中解向量的个数 ≥ 2，又基础解系中解向量的个数=未知数的个数 $-r(A)=3-r(A)$，于是 $r(A)\leq 1$.

又矩阵 A 的第一行元素 $\left(a,b,c\right)$ 不全为零，显然 $r(A)\geq 1$，故 $r(A)=1$. 可见此时 $Ax=0$ 的基础解系由 $3-r(A)=2$ 个线性无关解向量组成，β_1,β_3 是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故 $Ax=0$ 的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix},k_1,k_2\text{为任意常数.}$$

(2) 若 $k=9$，则 β_1,β_2,β_3 均成比例，故 $r(B)=1$, 从而 $1\le r(A)\le 2$. 故 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

①若 $r(A)=2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系， 则 $Ax=0$ 的通解为：$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},k_1$ 为任意常数.

②若 $r(A)=1$, 则 A 的三个行向量成比例，因第 1 行元素 (a,b,c) 不全为零，不妨设 $a\ne 0$，则 $Ax=0$ 的同解方程组为：$ax_1+bx_2+cx_3=0$，系数矩阵的秩为 1，故基础解系由 $3-1=2$ 个线性无关解向量组成，选 x_2,x_3 为自由未知量，分别取 $x_2=1,x_3=0$ 或 $x_2=0,x_3=1$，方程组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，则其通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$ 为任意常数.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 _____

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ _____

(3) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=$ _____

(4) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____

(5) 设函数 $y=y(x)$由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ _____

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$,则 $|B|=$_____.

二、选择题：9-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ \ f''(x)>0$, $\triangle x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，$\triangle y$ 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应增量与微分，若 $\triangle x>0$，则(　)

(A) $0<dy<\triangle y$　　(B) $0<\triangle y<dy$

(C) $\triangle y<dy<0$　　(D) $dy<\triangle y<0$

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 是(　　)

(A)连续的奇函数　　(B)连续的偶函数

(C)在 $x=0$ 间断的奇函数　　(D)在 $x=0$ 间断的偶函数

(9) 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$, 则 $g(1)$ 等于(　)

(A) $\ln 3-1$　　(B) $-\ln 3-1$　　(C) $-\ln 2-1$　　(D) $\ln 2-1$

(10) 函数 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是(　)

(A) $y''-y'-2y=3xe^x$　　(B) $y''-y'-2y=3e^x$

(C) $y''+y'-2y=3xe^x$　　(D) $y''+y'-2y=3e^x$

(11) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于(　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(12) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y) \neq 0$,已知 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是(　)

(A)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$　　(B)若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$　　(D)若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是(　)

(A)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D)若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　)

(A) $C=P^{-1}AP.$　　(B) $C=PAP^{-1}.$　　(C) $C=P^TAP.$　　(D) $C=PAP^T.$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16)(本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$

(18)(本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$

(I) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限;　　(II) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分 10 分)

证明：当 $0<a<b<\pi$ 时， $b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

(20)(本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $Z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

(I)验证　$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$;　　(II)若 $f(1)=0, f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases}$ ，$(t\ge 0)$，

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0,y_0)，并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应 $x\le x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(I) 证明此方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$;　　(Ⅱ) 求 a,b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ ,使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y=\frac{1}{5}$

【详解】 由水平渐近线的定义及无穷小量的性质----“无穷小量与有界函数的乘积是无穷小量”可知

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4\sin x}{x}}{5-\frac{2\cos x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}$$

$x\to 0$ 时 $\frac{1}{x}$ 为无穷小量，$\sin x$，$\cos x$ 均为有界量. 故，$y=\frac{1}{5}$ 是水平渐近线.

(2)【答案】 $\frac{1}{3}$

【详解】按连续性定义，极限值等于函数值，故

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2}{x^3}\overset{洛}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

注：$\frac{0}{0}$ 型未定式，可以采用洛必达法则；等价无穷小量的替换 $\sin x^2\sim x^2$

(3)【答案】$1/2$

【详解】

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

(4) 【答案】Cxe^{-x}.

【详解】分离变量，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{(1-x)}{x}dx\Rightarrow\frac{dy}{y}=(\frac{1}{x}-1)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{x}dx-\int dx$$

$$\Rightarrow\ln y=\ln x-x+c\ \Rightarrow e^{\ln y}=e^{\ln x-x+c}\ \Rightarrow y=Cxe^{-x}$$

(5)【答案】$-e$

【详解】题目考察由方程确定的隐函数在某一点处的导数.

在原方程中令 $x=0\Rightarrow y(0)=1$.

将方程两边对 x 求导得 $y'=-e^y-xe^yy'$，令 $x=0$ 得 $y'(0)=-e$

(6) 【答案】 2

【详解】由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得，$BA-2E=B\Rightarrow B(A-E)=2E$，两边取行列式，得

$$|B(A-E)|=|2E|=4|E|=4$$

其中，$|A-E|=\left|\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，$|2E|=2^2|\mathrm{E}|=4$

因此，$|B|=\dfrac{|2E|}{|A-E|}=\dfrac{4}{2}=2$.

二、选择题.

(7)【答案】A

【详解】

方法 1： 图示法.

因为 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 严格单调增加；因为 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 是凹函数，又 $\triangle x>0$，画 $f(x)=x^2$ 的图形

结合图形分析，就可以明显得出结论：$0 < dy < \triangle y$.

方法 2：用两次拉格朗日中值定理

$$\triangle y - dy = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) - f'(x_0)\triangle x \text{(前两项用拉氏定理)}$$

$$= f'(\xi)\triangle x - f'(x_0)\triangle x \qquad \text{(再用一次拉氏定理)}$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\triangle x, \qquad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \triangle x, x_0 < \eta < \xi$$

由于 $f''(x) > 0$，从而 $\triangle y - dy > 0$. 又由于 $dy = f'(x_0)\triangle x > 0$，故选 $[A]$

方法 3：　用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中 $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^n$. 此时 n 取 1 代入，可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2} f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由 $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$，选 (A) .

(8)【答案】(B)

【详解】

方法 1：赋值法

特殊选取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，满足所有条件，则 $\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$.

它是连续的偶函数. 因此，选(B)

方法 2：显然 $f(x)$ 在任意区间 $[a,b]$ 上可积，于是 $F(x) \overset{记}{=} \int_0^x f(t)dt$ 处处连续，又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^{-x} f(-t)dt \overset{s=-t}{=} \int_0^x f(s)ds = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数 . 选 (B).

(9)【答案】(C)

【详解】利用复合函数求导法

$h(x) = e^{1+g(x)}$ 两边对 x 求导 $\Rightarrow h'(x) = g'(x)e^{1+g(x)}$

将 $x = 1$ 代入上式，$\Rightarrow 1 = 2e^{1+g(1)} \Rightarrow g(1) = \ln\dfrac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1$. 故选$(C)$.

(10)【答案】(C)

【详解】题目由二阶线性常系数非齐次方程的通解，反求二阶常系数非齐次微分方程，分两步进行，先求出二阶常系数齐次微分方程的形式，再由特解定常数项.

因为 $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+xe^x$ 是某二阶线性常系数非齐次方程的通解，所以该方程对应的齐次方程的特征根为 1 和-2，于是特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+2)=\lambda^2+\lambda-2=0$，对应的齐次微分方程为 $y''+y'-2y=0$

所以不选(A)与(B)，为了确定是(C)还是(D)，只要将特解 $y^*=xe^x$ 代入方程左边，计算得 $(y^*)''+(y^*)'-2y^*=3e^x$，故选(D).

(11) 【答案】(C)

【详解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则区域 D 的极坐标表示是：$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$. 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题，画出积分区间，结合图形可以看出，直角坐标的积分范围（注意 $y=x$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的交点是（$\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}$）），于是 $D:0\le y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2},y\le x\le\sqrt{1-y^2}$

所以，原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$. 因此选 ($C$)

(12) 【答案】D

【详解】

方法 1： 化条件极值问题为一元函数极值问题。

已知 $\varphi(x_0,y_0)=0$，由 $\varphi(x,y)=0$，在（x_0,y_0）邻域，可确定隐函数 $y=y(x)$，满足 $y(x_0)=y_0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$。

（x_0,y_0）是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点 $\Leftrightarrow x=x_0$ 是 $z=f(x,y(x))$ 的极值点。它的必要条件是

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\left.\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}\right|_{x=x_0}=0$$

若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$，或 $\varphi_x'(x_0,y_0)=0$，因此不选 (A)，(B).

若 $f_x'(x_0,y_0)\ne 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\ne 0$ (否则 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}\ne 0$). 因此选 ($D$)

方法 2：用拉格朗日乘子法. 引入函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，有

$$\begin{cases} F_x' = f_x'(x,y) + \lambda\varphi_x'(x,y) = 0 & (1) \\ F_y' = f_y'(x,y) + \lambda\varphi_y'(x,y) = 0 & (2) \\ F_\lambda' = \varphi'(x,y) = 0 \end{cases}$$

因为$\varphi_y'(x_0,y_0) \neq 0$，所以$\lambda = -\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$，代入(1)得

$$f_x'(x_0,y_0) = -\frac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$$

若 $f_x'(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$，选(D)

(13) 【答案】A

【详解】

方法 1：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则由线性相关定义存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到$A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s$的形式，用$A$左乘等式两边，得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \cdots + k_sA\alpha_s = 0 \qquad ①$$

于是存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$使得①成立，所以$A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s$线性相关.

方法2：如果用秩来解,则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质，它们是:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$；2. $r(AB) < r(B)$.

矩阵$(A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s) = A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，设$B = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则由$r(AB) < r(B)$得$r(A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) < s$. 所以答案应该为($A$).

(14) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

将A的第2行加到第1行得B，即 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \xlongequal{\text{记}} PA$

将B的第1列的-1倍加到第2列得C，即$C = B\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{记}} BQ$

因为 $PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$，故 $Q=P^{-1}E=P^{-1}$.

从而 $C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$,故选(B).

三、解答题

(15) 【详解】

方法 1：用泰勒公式

将 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ 代入题设等式整理得

$$1+(B+1)x+(C+B+\frac{1}{2})x^2+\left(\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}\right)+o(x^3)=1+Ax+o(x^3)$$

比较两边同次幂函数得 $\begin{cases}B+1=A\\C+B+\frac{1}{2}=0\\\frac{B}{2}+C+\frac{1}{6}=0\end{cases}$，由此可解得 $A=\frac{1}{3}$， $B=-\frac{2}{3}$， $C=\frac{1}{6}$

方法 2： 用洛必达法则. 由 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o(x^3),(x\to 0)$

$$\Rightarrow \quad J\overset{(记)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)-1-Ax}{x^3}=0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+e^x(B+2Cx)-A}{3x^2}$$

要求分子极限为 0，即 $1+B-A=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \quad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+2e^x(B+2Cx)+2e^xC}{6x}$$

要求分子极限为 0，即 $1+2B+2C=0$，否则 $J=\infty$

$$\Rightarrow \quad J=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)+3e^x(B+2Cx)+6e^xC}{6}=\frac{1+3B+6C}{6}=0$$

$$\Rightarrow \quad 1+3B+6C=0$$

所以

$$\begin{cases} 1+B-A=0 \\ 1+2B+2C=0 \\ 1+3B+6C=0 \end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{2}{3} \\ C=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

(16)【详解】题目考察不定积分的计算，利用变量替换和分部积分的方法计算.

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=\int \frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}\cdot e^x dx=\int \frac{\arcsin e^x}{e^{2x}}de^x \underline{\underline{令 e^x=t}} \int \frac{\arcsin t}{t^2}dt$$

$$=-\int \arcsin t d(\frac{1}{t})=-\frac{\arcsin t}{t}+\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{dt^2}{t^2\sqrt{1-t^2}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{d(1-t^2)}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}}$$

$$\underline{\underline{令\sqrt{1-t^2}=u}}=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{u^3-u}=-\frac{\arcsin t}{t}+\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$=-\frac{\arcsin t}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

所以 $$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\frac{\arcsin e^x}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+C$$

(17)【详解】积分区域对称于 x 轴，$\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ y 为 y 的奇函数，

从而知 $$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$$

所以 $$I=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy \underline{\underline{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

(18)【详解】(I) 由于 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，于是 $0<x_{n+1}=\sin x_n\le x_n$，说明数列 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$. 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.记为 A.

递推公式两边取极限得 $A=\sin A,\ \therefore A=0$

(II) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}$，为“$1^\infty$”型.

因为离散型不能直接用洛必达法则，先考虑 $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}$

$$\lim_{t\to 0}(\frac{\sin t}{t})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln(\frac{\sin t}{t})}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\cdot\frac{(t\cos t-\sin t)}{t^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-t\sin t-\cos t}{6t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_{n+1}}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin x_n}{x_n})^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

(19) 【详解】令 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，只需证明 $0<x<\pi$ 时，$f(x)$ 单调增加(严格)

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$$

$\therefore f'(x)$ 单调减少(严格)，

又 $f'(\pi)=\pi\cos\pi+\pi=0$，故 $0<x<\pi$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调增加(严格)

由 $b>a$ 有 $f(b)>f(a)$ 得证

(20) 【详解】(I)由于题目是验证，只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

同理 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，

所以 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$ 于是上述方程成为 $\frac{dp}{du}=-\frac{p}{u}$，则 $\int\frac{dp}{p}=-\int\frac{du}{u}+c$，

即 $\ln|p|=-\ln u+c$，所以 $f'(u)=p=\frac{c}{u}$

因为 $f'(1)=1$，所以 $c=1$，得 $f(u)=\ln u+c_2$

又因为 $f(1)=0$，所以 $c_2=0$，得 $f(u)=\ln u$

(21)【详解】

方法 1：计算该参数方程的各阶导数如下

(I) $\frac{dx}{dt}=2t,\frac{dy}{dt}=4-2t,\frac{dy}{dx}=\frac{4-2t}{2t}=\frac{2}{t}-1$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\left(-\frac{2}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2t}=-\frac{1}{t^3}<0\quad(t>0\text{处})$$

所以曲线 L 在 $t>0$ 处是凸的

(II) 切线方程为 $y-0=\left(\frac{2}{t}-1\right)(x+1)$，设 $x_0=t_0^2+1$，$y_0=4t_0-t_0^2$，

则 $4t_0-t_0^2=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(t_0^2+2),4t_0^2-t_0^3=(2-t_0)(t_0^2+2)$

得 $t_0^2+t_0-2=0,(t_0-1)(t_0+2)=0\quad\because t_0>0\quad\therefore t_0=1$

所以，切点为(2，3)，切线方程为 $y=x+1$

(III) 设 L 的方程 $x=g(y)$，则 $S=\int_0^3\left[\left(g(y)-(y-1)\right)\right]dy$

由 $t^2-4t+y=0$ 解出 $t=2\pm\sqrt{4-y}$ 得 $x=\left(2\pm\sqrt{4-y}\right)^2+1$

由于点(2，3)在 L 上，由 $y=3$ 得 $x=2$，可知 $x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2+1=g(y)$

所以 $S=\int_0^3\left[\left(9-y-4\sqrt{4-y}\right)-(y-1)\right]dy=\int_0^3(10-2y)dy-4\int_0^3\sqrt{4-y}dy$

$$=(10y-y^2)\Big|_0^3+4\int_0^3\sqrt{4-y}d(4-y)=21+4\times\frac{2}{3}\times(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$$

$$=21+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

方法 2：(I) 解出 $y=y(x)$：由 $t=\sqrt{x-1}\quad(x\geq 1)$ 代入 y 得 $y=4\sqrt{x-1}-x+1$.

于是 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x-1}}-1$ ，$\frac{d^2y}{dx^2}=-(x-1)^{-\frac{3}{2}}<0\quad(x>1)\quad\Rightarrow$ 曲线 L 是凸的 .

(II) L 上任意点 (x_0,y_0) 处的切线方程是 $y-y_0=(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1)(x-x_0)$ ，其中 $x_0>1$ ($x_0=1$ 时不合题意).

令 $x=-1,\quad y=0$，得 $\quad -4\sqrt{x_0-1}+x_0-1=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0)$

令 $t_0=\sqrt{x_0-1}$ ，得 $\quad -4t_0+{t_0}^2=(\frac{2}{t_0}-1)(-2-{t_0}^2)$.

其余同方法 1，得 $t_0=1$

(III) 所求图形面积

$$S=\frac{9}{2}-\int_1^2 y(x)dx=\frac{9}{2}-\int_1^2(4\sqrt{x-1}-x+1)dx$$

$$=\frac{9}{2}-(4\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+x)\Big|_1^2=\frac{9}{2}-(\frac{8}{3}-\frac{3}{2}+1)=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3}\ .$$

(22) 【详解】(I)系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix}$ 未知量的个数为 $n=4$，且又 $AX=b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. 因为 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 线性无关又是齐次方程的解，于是 $AX=0$ 的基础解系中解的个数不少于 2，得 $4-r(A)\geq 2$，从而 $r(A)\leq 2$.

又因为 A 的行向量是两两线性无关的，所以 $r(A)\geq 2$. 所以 $r(A)=2$.

(II)对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & |-1 \\ a & 1 & 3 & b & |1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]+[1]\times(-a)}]{[2]+[1]\times(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & |1+a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2]\times(1-a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & |4-2a \end{bmatrix},$$

由 $r(A)=2$，得 $\begin{cases} 4-2a=0 \\ 4a+b-5=0 \end{cases}$， 即 $a=2,\ \ b=-3.$

所以 $[A|b]$ 作初等行变换后化为；$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & |2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & |-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$，

它的同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 2-2x_3+4x_4 \\ x_2 = -3+x_3-5x_4 \end{cases}$ ①

①中令 $x_3=0, x_4=0$ 求出 $AX=b$ 的一个特解 $(2,-3,0,0)^T$；

$AX=0$ 的同解方程组是 $\begin{cases} x_1 = -2x_3+4x_4 \\ x_2 = x_3-5x_4 \end{cases}$ ②

取 $x_3=1, x_4=0$，代入②得 $(-2,1,1,0)^T$；取 $x_3=0, x_4=1$，代入②得 $(4,-5,0,1)^T$. 所以

$AX=0$ 的基础解系为 $(-2,1,1,0)^T$，$(4,-5,0,1)^T$

所以方程组 $AX=b$ 的通解为：

$(2,-3,0,0)^T + c_1(-2,1,1,0)^T + c_2(4,-5,0,1)^T$，$c_1, c_2$ 为任意常数

(23)【详解】(I) 由题设条件 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$，$A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$，故 α_1, α_2 是 A 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量，又因为 α_1, α_2 线性无关，故 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3，所以有 $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$，由特征值、特征向量的定义，$\alpha_0 = (1,1,1)^T$ 是 A 的特征向量，特征值为 $\lambda_3 = 3$，λ_3 只能是单根，$k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$ 是全体特征向量，从而知 $\lambda=0$ 是二重特征值.

于是 A 的特征值为 $3,0,0$；属于 3 的特征向量：$k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$；属于 0 的特征向量：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，$k_1, k_2$ 不都为 0.

(Ⅱ) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化 .

先将 α_0 单位化, 得 $\eta_0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$.

对 α_1,α_2 作施密特正交化, 得 $\eta_1=(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$, $\eta_2=(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})^T$.

作 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 则 Q 是正交矩阵,并且 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：$1\sim10$ 小题，每小题 4 分，共 40 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to0^{+}$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

$A.\ 1-e^{\sqrt{x}}$　　$B.\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　$C.\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　$D.1-\cos\sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　　)

$A.\ 0$　　$B.1$　　$C.\ -\dfrac{\pi}{2}$　　$D.\ \dfrac{\pi}{2}$

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是(　　)

$A.\ F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　$B.\ F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

$C.\ F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　$D.\ F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是(　)

$A.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　$B.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

$C.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　$D.$ 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　)

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是(　)

$A.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$B.$ 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

$C.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛　　$D.$ 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　)

$A.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$

$B.$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left[f(x,0)-f(0,0)\right]}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\frac{\left[f(0,y)-f(0,0)\right]}{y}=0$

$C.$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$D.$ $\lim\limits_{x\to0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$ 且 $\lim\limits_{y\to0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$

(8) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy$ 等于(　)

$A.$ $\int_0^1dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$　　$B.$ $\int_0^1dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx$

$C.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$　　$D.$ $\int_0^1dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

(9) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是 (　)

$A.$ $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　$B.$ $\alpha_2+\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

$C.$ $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　$D.$ $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

(10) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 与 B (　)

$A.$ 合同，且相似　　$B.$ 合同，但不相似

C. 不合同，但相似　　D. 既不合同，也不相似

二、填空题：11-16 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$_____

(12) 曲线$\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t\\ y=1+\sin t\end{cases}$上对应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处的法线斜率为_____

(13) 设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$_____

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为$y=$_____

(15) 设$f(u,v)$是二元可微函数，$z=f(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y})$,则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____

(16) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则$A^3$的秩为_____.

三、解答题：17－24 小题，共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本题满分 10 分)

设$f(x)$是区间$[0,\dfrac{\pi}{4}]$上的单调、可导函数，且满足$\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

其中f^{-1}是f的反函数，求$f(x)$.

(18)(本题满分 11 分)

设D是位于曲线$y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$下方、$x$轴上方的无界区域.

(I) 求区域D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积$V(a)$;

(II) 当a为何值时，$V(a)$最小？并求出最小值.

(19)(本题满分 11 分)

求微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解.

(20)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定.

设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\frac{dz}{dx}\Big|_{x=0}, \frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$， $f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)(本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\le 2\}$

(23)(本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ (1)

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ (2)

有公共解，求 a 得值及所有公共解.

(24)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量.记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I)验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 B .

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】B

【详解】

方法 1：排除法：由几个常见的等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，

$e^x-1\sim x;\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x;\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{2}$, 当 $x\to 0^+$ 时，此时

$\sqrt{x}\to 0$，所以$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x});\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x};1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2$, 可以排除 A、C、D，所以选(B).

方法 2： $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}=\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]$

当 $x\to 0^+$ 时，$1-\sqrt{x}\to 1$，$\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\to 0$，又因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，

所以 $\ln[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}]\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\sim\sqrt{x}$，选(B).

方法 3： $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})}{\sqrt{x}}\overset{洛}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left[\ln(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})\right]'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}})'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}$$

设 $\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-\sqrt{x}}$，则 $A\left(1-\sqrt{x}\right)+B(1+x)=4x+2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}$

对应系数相等得：$A=2\sqrt{x},B=1$，所以

原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1-x\right)}{(1+x)\left(1-\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right]$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=0+1=1$$，选(B).

(2)【答案】(A)

【详解】首先找出 $f(x)$ 的所有不连续点，然后考虑 $f(x)$ 在间断点处的极限.

$f(x)$ 的不连续点为 0、1、$\pm\frac{\pi}{2}$，第一类间断点包括可去间断点及跳跃间断点.逐个考虑各个选项即可.

对 A: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e(1+e^{1-\frac{1}{x}})}{e(1-e^{1-\frac{1}{x}})}=1,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}=\frac{e}{-e}=-1.$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 存在左右极限，但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，选(A)；

同样，可验证其余选项是第二类间断点，$\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)=\infty$.

(3)【答案】C

【详解】由题给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，由 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，知

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt\underline{\underline{令t=-u}}\int_0^x f(-u)d(-u)\underline{\underline{因为f(-u)=-f(u)}}\int_0^x f(u)du=F(x),$$

故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$.

而 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt$ 表示半径 $R=1$ 的半圆的面积，所以 $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{\pi}{2}$，

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$，其中 $\int_2^3 f(t)dt$ 表示半径 $r=\frac{1}{2}$ 的半圆的面积的负值，所以 $\int_2^3 f(t)dt=-\frac{\pi r^2}{2}=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{\pi}{8}$

所以 $F(3)=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}F(2)$

所以 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{4}F(2)$，选择 C

(4)【答案】(D)

【详解】

方法 1：论证法，证明 $A.B.C$ 都正确，从而只有 $D.$ 不正确.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$，所以(A)正确；

由选项(A)知，$f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，根据导数定义，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$ 存在，所以(C)也正确；

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+f(-x)\right]=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}f(-x)=f(0)+f(0)=2f(0)$$

所以 $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=0$

即有 $f(0)=0$.所以(B)正确，故此题选择(D).

方法 2：举例法，举例说明(D)不正确. 例如取 $f(x)=|x|$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0\text{ 存在}$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$，

左右极限存在但不相等，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在. (D)不正确，选(D).

(5)【答案】D

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\infty$，

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^x)=0+0=0$，

所以 $y=0$ 是沿 $x\to-\infty$ 方向的一条水平渐近线；

令 $$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}\ \underline{\underline{\text{洛必达法则}}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1$$

令 $$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-a\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-x\right)\ \underline{\underline{x=\ln e^x}}\ 0+\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^x)-\ln e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1+e^x}{e^x})=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln 1=0$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线，所以共有 3 条，选择(D)

(6)【答案】(D)

【详解】$u_n=f(n)$，由拉格朗日中值定理，有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),(n=1,2,\cdots),$$

其中 $n<\xi_n<n+1$，$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\cdots$. 由 $f''(x)>0,$ 知 $f'(x)$ 严格单调增，故

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$$

若 $u_1<u_2$，则 $f'(\xi_1)=u_2-u_1>0,$ 所以 $0<f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1).$$

而 $f'(\xi_1)$ 是一个确定的正数. 于是推知 $\lim_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty,$ 故 $\{u_n\}$ 发散. 选(D)

(7)【答案】(C)

【详解】一般提到的全微分存在的一个充分条件是：设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在全微分，但题设的 $A.B.C.D.$ 中没有一个能推出上述充分条件，所以改用全微分的定义检查之. 全微分的定义是：设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内有定义，且 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以写成 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 为与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$\lim_{\rho\to0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处

可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为 $f(x,y)$ 在点 $\left(x_0,y_0\right)$ 处的全微分，对照此定义，就可解决本题.

选项 A. 相当于已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；选项 B. 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'\left(0,0\right)$，$f_y'\left(0,0\right)$ 存在，因此 A. B. 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 选项 D. 相当于已知两个一阶偏导数 $f_x'\left(0,0\right)$，$f_y'\left(0,0\right)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f_x'\left(x,y\right)$，$f_y'\left(x,y\right)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此也不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

由 C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left[f(x,y)-f(0,0)\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，推知

$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha\sqrt{x^2+y^2}=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\alpha=0$.对照全微分定义，相当于

$$x_0=0,y_0=0,\Delta x=x,\Delta y=y,A=0,B=0.$$

可见 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，故选择(C).

(8)【答案】(B)

【详解】画出该二次积分所对应的积分区域 $D:\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi,\sin x\le y\le1$

交换为先 x 后 y，则积分区域可化为：$0\le y\le1,\pi-\arcsin y\le x\le\pi$

所以 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)dy=\int_0^1dy\int_{\pi-arc\sin y}^{\pi}f(x,y)dx$， 所以选择(B).

(9) 【答案】A

【详解】

方法 1：根据线性相关的定义，若存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

因 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，故 $\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，所以选择(A).

方法 2：排除法

因为 $\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1\right)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C_2,\text{其中}C_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

且 $|C_2|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}$

$=1\times1-1\times(-1)=2\neq0$.

故 C_2 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_2 右乘 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，排除(B).

因为 $(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C_3,\text{ 其中}C_3=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

$|C_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal{1\text{行}\times2+2\text{行}}\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&-2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\-2&1\end{vmatrix}$

$=1\times1-(-2)\times(-4)=-7\neq0.$

故 C_3 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_3 右乘 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$ 线性无关，排除(C).

因为 $(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C_4,\text{ 其中}C_4=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

$$|C_4|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}\xlongequal{1行\times(-2)+2行}\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$=1\times1-2\times(-4)=9\neq0.$

故 C_4 是可逆矩阵，由可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，C_4 右乘 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 时，等于作若干次初等变换，初等变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$$

所以，$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$ 线性无关，排除(D).

综上知应选(A).

(10)【答案】B

【详解】

方法 1： $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{2、3列分别加到1列}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\\lambda&\lambda-2&1\\\lambda&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{提出\lambda}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}\xlongequal{1行\times(-1)+2行}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{1行\times(-1)+3行}\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&0\\0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2\lambda=0$$

则 A 的特征值为 3，3，0; B 是对角阵，对应元素即是的特征值，则 B 的特征值为 1，1，0. A,B 的特征值不相同，由相似矩阵的特征值相同知，A与B 不相似.

由 A,B 的特征值可知，A,B 的正惯性指数都是 2，又秩都等于 2 可知负惯性指数也相同，则由实对称矩阵合同的充要条件是有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数，知 A 与 B 合同，应选(B).

方法 2: 因为迹(A)=2+2+2=6，迹(B)=1+1=2 $\neq$ 6，所以 A 与 B 不相似(不满足相似的必要条件).

又 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$A$ 与 B 是同阶实对称矩阵，其秩相等，且有相同的正惯性指数，故 A 与 B 合同.

二、填空题

(11)【答案】$-\frac{1}{6}$

【详解】由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{x^3}\ \underline{\underline{\frac{0}{0}}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2\right)\cos x}{3x^2\left(1+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\left(1+x^2\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}-\cos x\right)=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}-1\right)=-\frac{1}{6}$$

(12)【答案】$1+\sqrt{2}$

【详解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\left(1+\sin t\right)'}{\left(\cos t+\cos^2 t\right)'}=\frac{\cos t}{-\sin t-2\sin t\cos t}$

把$t=\frac{\pi}{4}$代入，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$，所以法线斜率为$1+\sqrt{2}$.

(13)【答案】$\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$

【详解】$y=\frac{1}{2x+3}=\left(2x+3\right)^{-1}$，

$$y'=(-1)\cdot\left(2x+3\right)^{-1-1}\cdot\left(2x\right)'=(-1)^1\cdot 1!\cdot 2^1\cdot\left(2x+3\right)^{-1-1},$$

$$y''=(-1)\cdot(-2)\cdot 2^2\cdot\left(2x+3\right)^{-3}=(-1)^2 2!\cdot 2^2\cdot\left(2x+3\right)^{-2-1},\cdots,$$

由数学归纳法可知 $y^{(n)}=(-1)^n 2^n n!\left(2x+3\right)^{-n-1}$，

把$x=0$代入得 $y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$

(14)【答案】$C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$

【详解】这是二阶常系数非齐次线性微分方程，且函数 $f\left(x\right)$ 是 $P_m\left(x\right)e^{\lambda x}$ 型(其中 $P_m\left(x\right)=2,\lambda=2$).

所给方程对应的齐次方程为$y''-4y'+3y=0$，它的特征方程为$r^2-4r+3=0$，得特

征根 $r_1=1, r_2=3,$ 对应齐次方程的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$,

所以 $\left(y^*\right)'=2Ae^{2x}$，$\left(y^*\right)''=4Ae^{2x}$，代入原方程：$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}$，

则 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$. 故得原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(15)【答案】$2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$

【详解】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x}=f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

所以 $$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left[f_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_2'\cdot\frac{1}{y}\right]-y\left[f_1'\cdot\frac{1}{x}+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]$$

$$=\left(-\frac{y}{x}\right)\cdot f_1'+f_2'\cdot\frac{x}{y}-f_1'\cdot\frac{y}{x}+f_2'\cdot\frac{x}{y}=2(-\frac{y}{x}f_1'+\frac{x}{y}f_2')$$

(16) 【答案】1

【详解】

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由阶梯矩阵的行秩等于列秩，其值等于阶梯形矩阵的非零行的行数，知 $r\left(A^3\right)=1.$

三、解答题.

(17)【分析】本题要求函数详解式，已知条件当中关于函数有关的式子只有

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt,$$

这是一个带有积分符号的式子，如果想求出函数的详解式，首先要去掉积分符号，即求导.

【详解】方程$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt$两边对$x$求导， 得

$$f^{-1}[f(x)]\bullet f'(x) = x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}，即 xf'(x) = x\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$$

当$x\neq 0$时，对上式两边同时除以x，得$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$，所以

$$f(x)=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

在已知等式中令$x=0$，得$\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt=0$. 因$f(x)$是$[0,\frac{\pi}{4}]$上的单调可导函数，$f^{-1}(t)$的值域为$[0,\frac{\pi}{4}]$，它是单调非负的，故必有$f(0)=0$，从而两边对上式取$x\to 0^+$极限

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=C=0$$

于是$f(x)=\ln\left|\sin x+\cos x\right|$，因为$x\in[0,\frac{\pi}{4}]$，故$f(x)=\ln(\sin x+\cos x), x\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

(18)【详解】(I) $V(a)=\pi\int_0^{\infty} xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} xd\left(a^{-\frac{x}{a}}\right)$

$$=-\frac{a}{\ln a}\pi[xa^{-\frac{x}{a}}]\Big|_0^{+\infty}+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{\infty} a^{-\frac{x}{a}}dx=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2$$

(Ⅱ) $V'(a)=[\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2]'=\pi\bullet\frac{2a\ln^2 a-a^2\bullet 2\ln a\bullet\frac{1}{a}}{\ln^4 a}=\pi\bullet\frac{2a\ln a-2a}{\ln^3 a}=2\pi\left(\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}\right)$

令$V'(a)=0$，得$\ln a=1$，从而$a=e$. 当$1<a<e$时，$V'(a)<0$，$V(a)$单调减少；当$a>e$时，$V'(a)>0$，$V(a)$单调增加. 所以$a=e$时V最小，最小体积为$V_{\min}(a)=\pi e^2$

(19)【详解】令$y'=p$，则$y''=p'$，原方程化为$p'(x+p^2)=p$.

两边同时除以$p'p$，得$\frac{x}{p}+p=\frac{1}{p'}$

将$p'=\frac{dp}{dx}$带入上式，得$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=p$

按一阶线性方程求导公式，得

$$x=e^{\int\frac{1}{p}dp}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp+C)=e^{\ln p+C}(\int pe^{\int-\frac{1}{p}dp}dp)=p[\int dp+C]=p(p+C)$$

带入初始条件得$C=0$，于是 $p^2=x$. 由$y'(1)=1$知$p=\sqrt{x}$，即$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

解得$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_1$，带入初始条件得$C_1=\dfrac{1}{3}$，所以特解为$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{3}$.

(20)【详解】在$y-xe^{y-1}=1$中，令$x=0$，得$y=1$，即$y(0)=1$

$y-xe^{y-1}=1$两边对x求导，得$y'-(xe^{y-1})'=1'=0\Rightarrow y'-x'e^{y-1}-x(e^{y-1})'=0$

$\Rightarrow y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$（$y=y(x)$是$x$的函数，故$e^{y-1}$是关于$x$的复合函数，在求导时要用复合函数求导的法则)

$\Rightarrow\left(2-y\right)y'-e^{y-1}=0$ (*)　　(由$y-xe^{y-1}=1$知，$xe^{y-1}=y-1$，把它代入)

在(*)中令$x=0$，由$x=0,y=1$，得$y'\big|_{x=0}=1$

在(*)两边求导，得$\left(2-y\right)y''-y'^2-e^{y-1}y'=0$. 令$x=0$，由$x=0,y=1,y'=1$得，$y''\big|_{x=0}=2$

因为$z=f(\ln y-\sin x)$，令$u=\ln y-\sin x$，根据复合函数的求导法则，

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\qquad(**)$$

在$u=\ln y-\sin x$中把x,y看成独立的变量，两边关于x求导，得$u'_x=-\cos x$

在$u=\ln y-\sin x$中把x,y看成独立的变量，两边关于y求导，得$u'_y=\dfrac{1}{y}$

把以上两式代入(**)中，$\dfrac{dz}{dx}=f'(u)\cdot(-\cos x)+f'(u)\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$

即 $\dfrac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)(\dfrac{y'}{y}-\cos x)$ (***)

把$x=0,y=1,y'=1$代入(***)，得$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(\ln 1-\sin 0)(\dfrac{1}{1}-\cos 0)=0$

在(***)左右两端关于x求导，

$$\frac{d^2z}{dx^2}=[f'(\ln y-\sin x)]'(\frac{y'}{y}-\cos x)+f'(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)'$$

根据复合函数的求导法则 $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$，有

$$[f'(\ln y-\sin x)]'=f''(\ln y-\sin x)(-\cos x)+f''(\ln y-\sin x)\cdot\frac{y'}{y}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)$$

$$(\frac{y'}{y}-\cos x)'=(\frac{y'}{y})'-(\cos x)'=-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x$$

故 $\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)(\frac{y'}{y}-\cos x)^2+f'(\ln y-\sin x)\left[-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}+\sin x\right]$

把 $x=0,y=1,y'=1,y''=2$ 代入上式，得

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln 1-\sin 0)(\frac{1}{1}-\cos 0)^2+f'(\ln 1-\sin 0)\left[-\frac{1^2}{1^2}+\frac{2}{1}+\sin 0\right]=f'(0)(2-1)=1$$

(21)【详解】欲证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$，可构造函数 $\varphi(f(x),g(x))=0$，从而使用介值定理、微分中值定理等证明之.

令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$ 使得 $f(x_1)=\max\limits_{[a.b]}f(x)=g(x_2)=\max\limits_{[a.b]}g(x)$. 于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geq 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leq 0$

若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$ 有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_1)>0,\varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$.

不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$, 使 $\varphi(\eta)=0$.

再 $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\varphi(b)=f(b)-g(b)=0$，将 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\eta],[\eta,b]$ 分别应用罗尔定理，得存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$, 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$, $\varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使 $\varphi''(\xi)=0$.即有 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(22)【详解】记 $D_1=\{(x,y)\|x|+|y|\le 1\}$， $D_2=\{(x,y)|1<|x|+|y|\le 2\}$ 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} x^2d\sigma+\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$

再记 $\sigma_1=\{(x,y)|0\le x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$， $\sigma_2=\{(x,y)|1\le x+y\le 2,x\ge 0,y\ge 0\}$

由于 D_1 与 D_2 都与 x 轴对称，也都与 y 轴对称，函数 x^2 与 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 都是 x 的偶函数，也都是 y 的偶函数，所以由区域对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint_{D_1} x^2d\sigma=4\iint_{\sigma_1} x^2d\sigma=4\int_0^1dx\int_0^{1-x}x^2dy=4\int_0^1x^2(1-x)dx=4\int_0^1(x^2-x^3)dx=\frac{1}{3}$$

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\iint_{\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma.$$

对第二个积分采用极坐标，令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}$.则 $x+y=1$ 化为 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$， $x+y=2$ 化为 $r=\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}$，于是，

$$\iint_{D_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}rdr$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta=2\sqrt{2}\ln\left[\sec(\theta-\frac{\pi}{4})+\tan(\theta-\frac{\pi}{4})\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\ln\left(\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right|\right)=2\sqrt{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

所以 $$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma=\frac{1}{3}+2\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2})$$

(23)【详解】

方法 1：因为方程组(1)、(2)有公共解，将方程组联立得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases} \qquad (3)$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(A|b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1行\times(-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4行\times(-1)+2行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4行\times(-3)+3行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{换行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{3行\times(-a-1)+4行} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{pmatrix}$$

由此知，要使此线性方程组有解，a 必须满足 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量. 选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得两方程组的公共解为 $k\left(1,0,-1\right)^T$，其中 k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，联立方程组(3)的同解方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{cases}$，解得两方程的公共解为 $\left(0,1,-1\right)^T$.

方法 2：将方程组(1)的系数矩阵 A 作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times(-1)+2行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\1&4&a^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{1行\times(-1)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&3&a^2-1\end{bmatrix}\xrightarrow{2行\times(-3)+3行}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&a-1\\0&0&(a-1)(a-2)\end{bmatrix}$$

当$a=1$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_1$为自由未知量，取$x_1=1$，解得(1)的通解为$k\left(1,0,-1\right)^T$，其中$k$是任意常数. 将通解$k\left(1,0,-1\right)^T$代入方程(2)得$k+0+(-k)=0$，对任意的$k$成立，故当$a=1$时，$k\left(1,0,-1\right)^T$是(1)、(2)的公共解.

当$a=2$时，$r(A)=2$，方程组(1)的同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，由$r(A)=2$，方程组有$n-r=3-2=1$个自由未知量.选$x_2$为自由未知量，取$x_2=1$，解得(1)的通解为$\mu\left(0,1,-1\right)^T$,其中$\mu$是任意常数. 将通解$\mu\left(0,1,-1\right)^T$代入方程(2)得$2\mu-\mu=1$，即$\mu=1$，故当$a=2$时，(1)和(2)的公共解为$\left(0,1,-1\right)^T$.

(24)【详解】(I) 由$A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$是正整数,故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1$$

于是α_1是矩阵B的特征向量(对应的特征值为$\lambda_1'=-2$).

若 $Ax=\lambda x$ ，则 $(kA)x=(k\lambda)x, A^m x=\lambda^m x$ 因此对任意多项式 $f(x)$ ，$f(A)x=f(\lambda)x$，即$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值.

故B的特征值可以由A的特征值以及B与A的关系得到，A的特征值$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,$ $\lambda_3=-2,$ 则B有特征值$\lambda_1'=f(\lambda_1)=-2,\lambda_2'=f(\lambda_2)=1,\lambda_3'=f(\lambda_3)=1,$所以$B$的全部特征值为－2，1，1.

由A是实对称矩阵及B与A的关系可以知道，B也是实对称矩阵，属于不同的特征值的特征向量正交. 由前面证明知α_1是矩阵B的属于特征值$\lambda_1'=-2$的特征向量，设B的属

于 1 的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，α_1与$(x_1,x_2,x_3)^T$正交，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

选x_2,x_3为自由未知量，取$x_2=0,x_3=1$和$x_2=1,x_3=0$，于是求得B的属于 1 的特征向量为

$$\alpha_2=k_2(-1,0,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$$

故B的所有的特征向量为:对应于$\lambda_1'=-2$的全体特征向量为$k_1\alpha_1$,其中k_1是非零任意常数，对应于$\lambda_2'=\lambda_3'=1$的全体特征向量为$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中k_2,k_3是不同时为零的任意常数.

(II) **方法 1**：令矩阵$P=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，求逆矩阵$P^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{1行+2行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{1行+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&2&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{行\times2+3行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&3&1&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\div3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&2&1&1&0\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]\xrightarrow{3行\times(-2)+2行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{3行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&2/3&-2/3&-1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)+1行}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&-1&0&1/3&-1/3&-2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2行\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1/3&-1/3&1/3\\0&1&0&-1/3&1/3&2/3\\0&0&1&1/3&2/3&1/3\end{array}\right]$$

则 $$P^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&-1/3&1/3\\-1/3&1/3&2/3\\1/3&2/3&1/3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

由 $P^{-1}BP = diag(-2,1,1)$，所以

$$B = P\cdot diag(-2,1,1)\cdot P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

方法 2： 由 (I) 知 α_1 与 α_2,α_3 分别正交，但是 α_2 和 α_3 不正交，现将 α_2,α_3 正交化：

取 $\beta_2 = \alpha_2, \beta_3 = \alpha_3 + k_{12}\beta_2 = (1,1,0) + (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

其中，$k_{12} = -\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = -\frac{1\times(-1)}{(-1)\times(-1)+1\times 1}(-1,0,1)^T = (-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

再对 $\alpha_1,\ \beta_2,\beta_3$ 单位化：

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \xi_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) =, \xi_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$$

其中，$\|\alpha_1\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}, \|\beta_2\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \|\beta_3\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

合并成正交矩阵，

记 $$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

由 $Q^{-1}BQ = diag(-2,1,1)$，有 $B = Q\cdot diag(-2,1,1)\cdot Q^{-1}$. 又由正交矩阵的性质：

$Q^{-1} = Q^T$，得

$$B = Q \cdot diag(-2,1,1) \cdot Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，求 $f'(x)$ 的零点个数(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 如图，曲线段方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于(　　)

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.

(D) 三角形 ACD 面积.

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是(　　)

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{|x-1|}\sin x(x>0)$ 间断点的情况(　)

(A) 有 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点

(B) 有 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 有两个无穷间断点

(D) 有两个跳跃间断点

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$(　　)

(A) $vf\left(u^2\right)$

(B) $\frac{v}{u}f\left(u^2\right)$

(C) $vf(u)$

(D) $\frac{v}{u}f(u)$

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则(　　)

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ _____

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ _____

(11) 曲线$\sin\left(xy\right)+\ln\left(y-x\right)=x$在点$\left(0,1\right)$处的切线方程为_____.

(12) 求函数 $f(x)=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点_____.

(13) 已知$z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____.

(14) 矩阵A的特征值是$\lambda,2,3$，其中λ未知，且$\left|2A\right|=-48$，则$\lambda=$_____.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sin x-\sin\left(\sin x\right)\right]\sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中$x(t)$是初值问题

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0\\ x\big|_{t=0}=0\end{cases}$的解. 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(18)(本题满分 11 分)

计算$\iint\limits_D\max\left\{xy,1\right\}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$. 对于任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线$x=0,x=t$，曲线$y=f(x)$以及x轴所围成曲边梯形绕x轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足，$\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ & & a^2 & 2a\end{pmatrix}_{n\times n},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$

(II) 当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1

(III) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解

(23)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(I) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题

(1)【答案】D

【详解】因为 $f(0)=f(1)=f(2)=0$，由罗尔定理知至少有 $\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,2)$ 使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，所以 $f'(x)$ 至少有两个零点. 由于 $f'(x)$ 是三次多项式，三次方程 $f'(x)=0$ 的实根不是三个就是一个，故 D 正确.

(2)【答案】C

【详解】$\int_0^a xf'(x)dx=\int_0^a xdf(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)dx=af(a)-\int_0^a f(x)dx$

其中 $af(a)$ 是矩形 $ABOC$ 面积，$\int_0^a f(x)dx$ 为曲边梯形 $ABOD$ 的面积，所以 $\int_0^a xf'(x)dx$ 为曲边三角形的面积.

(3)【答案】D

【详解】由微分方程的通解中含有 e^x、$\cos 2x$、$\sin 2x$ 知齐次线性方程所对应的特征方程有根 $r=1, r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 故以已知函数为通解的微分方程是 $y'''-y''+4y'-4=0$

(4) 【答案】A

【详解】$x=0, x=1$ 时 $f(x)$ 无定义，故 $x=0, x=1$ 是函数的间断点

因为 $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x}=0$$

同理 $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

又 $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=\left(\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\right)\sin 1=\sin 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1^+}\sin x=-\sin 1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点.

(5)【答案】B

【详解】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调. 所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界. 故

$\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

(6)【答案】A

【详解】用极坐标得 $F(u,v)=\iint\limits_D \frac{f\left(u^2+v^2\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\int_0^v dv\int_1^u \frac{f(r^2)}{r}rdr=v\int_1^u f(r^2)dr$

所以 $\frac{\partial F}{\partial u}=vf\left(u^2\right)$

(7) 【答案】C

【详解】$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E$，$(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$

故 $E-A,E+A$ 均可逆.

(8) 【答案】D

【详解】记 $D=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$,

则 $|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$，又 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4$

所以 A 和 D 有相同的特征多项式，所以 A 和 D 有相同的特征值.
又 A 和 D 为同阶实对称矩阵，所以 A 和 D 相似．由于实对称矩阵相似必合同，故 D 正确.

二、填空题

(9)【答案】2

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]}{x^2f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2[xf(x)/2]\cdot f(x)}{[xf(x)/2]^2\cdot 4}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=1$

所以 $f(0)=2$

(10)【答案】$x(-e^{-x}+C)$

【详解】微分方程 $\left(y+x^2e^{-x}\right)dx-xdy=0$ 可变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=xe^{-x}$

所以 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=x\left(\int xe^{-x}\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)=x(-e^{-x}+C)$

(11)【答案】$y=x+1$

【详解】设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$，则 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{y\cos(xy)-\dfrac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\dfrac{1}{y-x}}$，

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$，所以切线方程为 $y-1=x-0$，即 $y=x+1$

(12)【答案】$(-1,-6)$

【详解】$y=x^{5/3}-5x^{2/3}\Rightarrow y'=\dfrac{5}{3}x^{2/3}-\dfrac{10}{3}x^{-1/3}=\dfrac{10(x+2)}{3x^{1/3}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10(x+1)}{9x^{4/3}}$$

$x=-1$ 时，$y''=0$；$x=0$ 时，y'' 不存在

在 $x=-1$ 左右近旁 y'' 异号，在 $x=0$ 左右近旁 $y''>0$，且 $y(-1)=-6$

故曲线的拐点为 $(-1,-6)$

(13)【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$

【详解】设 $u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$，则 $z=u^v$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}(-\frac{y}{x^2})+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}$$

$$=u^v\left(-\frac{vy}{ux^2}+\frac{\ln u}{y}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)^{x/y}\cdot\frac{1}{y}\left(-1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

所以 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$$

(14)【答案】-1

【详解】$\because |A|=2\times3\times\lambda=6\lambda$ $\qquad |2A|=2^3|A|$

$\therefore 2^3\times6\lambda=-48 \qquad \Rightarrow\lambda=-1$

三、解答题

(15)【详解】

方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

方法二：$\because\ \sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\qquad \sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^4 x}{6x^4}+\frac{o(\sin^4 x)}{x^4}\right]=\frac{1}{6}$$

(16)【详解】

方法一：由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}[(1+t^2)\ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$=(1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$$

方法二：由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x\big|_{t=0}$ 得 $e^x=1+t^2$，即 $x=\ln(1+t^2)$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)=e^x x$$

所以 $$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(x+1)$$

(17)【详解】

方法一：由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1\dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分.

令 $\arcsin x=t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\pi/2)$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{t}{2} - \frac{t\cos 2t}{2})dt$$

$$= \frac{t^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t d\sin 2t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

方法二：$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 d(\arcsin x)^2$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arcsin x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx$$

令 $\arcsin x = t$，有 $x = \sin t$， $t \in [0, \pi/2)$

$$\int_0^1 x(\arcsin x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 d\cos 2t$$

$$= -\frac{1}{4}(t^2\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

故，原式 $= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$

(18)【详解】 曲线 $xy = 1$ 将区域分成两个区域 D_1 和 $D_2 + D_3$，为了便于计算继续对区域分割，最后为

$$\iint_D \max(xy, 1)dxdy$$

$$= \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} dxdy + \iint_{D_3} dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_0^2 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}} 1dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy$$

$$= 1 + 2\ln 2 + \frac{15}{4} - \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2$$

(19)【详解】旋转体的体积 $V = \pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积 $S = 2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，由题

设条件知

$$\int_0^t f^2(x)dx = \int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

上式两端对t求导得 $f^2(t) = f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$， 即 $y' = \sqrt{y^2-1}$

由分离变量法解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1}) = t + C_1$， 即 $y+\sqrt{y^2-1} = Ce^t$

将$y(0)=1$代入知$C=1$，故$y+\sqrt{y^2-1}=e^t$， $y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

于是所求函数为 $y = f(x) = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

(20)【详解】(I) 设M与m是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值，即

$$m \le f(x) \le M \qquad x\in[a,b]$$

由定积分性质，有 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$，即 $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$

由连续函数介值定理，至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

即 $$\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$$

(II) 由(I)的结论可知至少存在一点$\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$，知 $2<\eta\le 3$

对$\varphi(x)$在$[1,2][2,\eta]$上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到$\varphi(1)<\varphi(2)$，$\varphi(\eta)<\varphi(2)$得

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} > 0 \qquad 1<\xi_1<2$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} < 0 \qquad 2<\xi_1<\eta\le 3$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对导函数$\varphi'(x)$应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0 \qquad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$$

(21)【详解】

方法一：作拉格朗日函数$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$

令 $\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$

解方程组得 $(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2), (x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

方法二：问题可转化为求 $u = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ 在 $x + y + x^2 + y^2 = 4$ 条件下的最值

设 $F(x, y, \lambda) = u = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + \lambda(x + y + x^2 + y^2 - 4)$

令 $\begin{cases} F'_x = 4x^3 + 4xy^2 + 2x + \lambda(1 + 2x) = 0 \\ F'_y = 4y^3 + 4x^2y + 2y + \lambda(1 + 2y) = 0 \\ F'_\lambda = x + y + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

解得 $(x_1, y_1) = (1,1), (x_2, y_2) = (-2,-2)$，代入 $z = x^2 + y^2$，得 $z_1 = 2, z_2 = 8$

故所求的最大值为 72，最小值为 6.

(22)【详解】(I)**证法一**：

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 - \frac{1}{2}ar_1} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\xlongequal{r_n - \frac{n-1}{n}ar_{n-1}} \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n$$

证法二：记 $D_n = |A|$，下面用数学归纳法证明 $D_n = (n+1)a^n$.

当 $n = 1$ 时，$D_1 = 2a$，结论成立.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立．将 D_n 按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$$

故 $\quad |A|=(n+1)a^n$

证法三：记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $\quad D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$，

所以 $\quad D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})$

$$=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n$$

即 $\quad D_n=a^n+aD_{n-1}=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}$

$$=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1$$

$$=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n$$

(II)因为方程组有唯一解，所以由 $Ax=B$ 知 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$.

由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n\times n}=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=D_{n-1}=na^{n-1}$$

所以 $\quad x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$

(III)方程组有无穷多解，由$|A|=0$，有$a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为$n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为$k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$，$k$为任意常数.

(23)【详解】(I)

证法一：假设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. 因为$\alpha_1,\alpha_2$分别属于不同特征值的特征向量，故$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，则$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，不妨设$\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，其中$l_1,l_2$不全为零(若$l_1,l_2$同时为0，则$\alpha_3$为0，由$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$可知$\alpha_2=0$，而特征向量都是非0向量，矛盾)

$\because A\alpha_1=-\alpha_1,\ A\alpha_2=\alpha_2$

$\therefore A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，又$A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$

$\therefore -l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$，整理得：$2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$

则α_1,α_2线性相关，矛盾. 所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

证法二：设存在数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ (1)

用A左乘(1)的两边并由$A\alpha_1=-\alpha_1,\ A\alpha_2=\alpha_2$得

$$-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (2)$$

(1)—(2)得 $$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0 \qquad (3)$$

因为α_1,α_2是A的属于不同特征值的特征向量，所以α_1,α_2线性无关，从而$k_1=k_3=0$，代入(1)得$k_2\alpha_2=0$，又由于$\alpha_2\neq 0$，所以$k_2=0$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(II) 记$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则$P$可逆，

$AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 ( )

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$ ( )

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$. (B) $\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

(C) $\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$. (D) $\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$.

(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内 ( )

(A) 有极值点，无零点. (B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点. (D) 无极值点，无零点.

(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为 （ ）

(A)

(B)

(C)

(D)

(7) 设 $A,\ B$ 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 $A,\ B$ 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 （ ）

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(8) 设 A,P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为 （ ）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

二、填空题：9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$, 则 $k=$_____.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$_____.

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$_____.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____.

(14) 设 α,β 为 3 维列向量, β^{T} 为 β 的转置, 若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$

_____.

三、解答题：15－23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx \quad (x>0)$.

(17) (本题满分 10 分)

设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18) (本题满分 10 分)

设非负函数 $y=y(x)\ (x\geq 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体

积.

(19) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

(20) (本题满分 12 分)

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线, 当 $-\pi<x<0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\le x<\pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

(22) (本题满分 11 分)

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\ \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

(23) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数为（　　）

$\left(A\right)$1.　　$\left(B\right)$2.　　$\left(C\right)$3.　　$\left(D\right)$无穷多个.

【答案】C

【解析】

$$f\left(x\right)=\frac{x-x^3}{\sin \pi x}$$

则当 x 取任何整数时，$f\left(x\right)$ 均无意义

故 $f\left(x\right)$ 的间断点有无穷多个，但可去间断点为极限存在的点，故应是 $x-x^3=0$ 的解

$$x_{1,2,3}=0,\pm 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}$$

故可去间断点为 3 个，即 $0,\pm 1$

（2）当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 是等价无穷小，则（　　）

$\left(A\right)$ $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　$\left(B\right)$ $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　$\left(C\right)$ $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. $\left(D\right)$ $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

【答案】A

【解析】$f(x)=x-\sin ax, g(x)=x^2 ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-\dfrac{6b}{a}\cdot ax}=-\frac{a^3}{6b}=1\qquad \therefore a^3=-6b\quad 故排除 B,C.$$

另外$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$存在，蕴含了$1-a\cos ax\to 0\ (x\to 0)$故$a=1$. 排除$D$.
所以本题选 A.

（3）设函数$z=f(x,y)$的全微分为$dz=xdx+ydy$，则点$(0,0)$（　　）

(A)不是$f(x,y)$的连续点.　(B)不是$f(x,y)$的极值点.

(C)是$f(x,y)$的极大值点.　(D)是$f(x,y)$的极小值点.

【答案】 D

【解析】因$dz=xdx+ydy$可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=y$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$$

又在（0，0）处，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$$AC-B^2=1>0$$

故（0，0）为函数$z=f(x,y)$的一个极小值点.

（4）设函数$f(x,y)$连续，则$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$（　　）

$(A)\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$.　$(B)\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

$(C)\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$.　$(D).\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

【答案】C

【解析】$\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_x^2 f(x,y)dx$的积分区域为两部分：

$D_1=\{(x,y)|1\le x\le 2,x\le y\le 2\}$，$D_2=\{(x,y)|1\le y\le 2,y\le x\le 4-y\}$

将其写成一块$D=\{(x,y)|1\le y\le 2,1\le x\le 4-y\}$

故二重积分可以表示为$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$，故答案为 C.

（5）若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（　　）

(A) 有极值点，无零点.　(B) 无极值点，有零点.

(C) 有极值点，有零点.　(D) 无极值点，无零点.

【答案】　B

【解析】由题意可知，$f(x)$ 是一个凸函数，即 $f''(x)<0$，且在点 $(1,1)$ 处的曲率

$\rho=\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，而 $f'(1)=-1$，由此可得，$f''(1)=-2$

在 $[1,2]$ 上，$f'(x)\le f'(1)=-1<0$，即 $f(x)$ 单调减少，没有极值点.

对于 $f(2)-f(1)=f'(\zeta)<-1$　，$\zeta\in(1,2)$，　（拉格朗日中值定理）

$\therefore$　$f(2)<0$ 而　$f(1)=1>0$

由零点定理知，在 $[1,2]$ 上，$f(x)$ 有零点.　故应选（B）.

（6）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为

则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为（　　）

(A).

(B).

(C).

(D).

【答案】D

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y=f(x)$ 的图形可见，其图像与 x 轴及 y 轴、$x=x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$，从而可得出几个方面的特征：

① $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\le 0$，且单调递减.

② $x\in[1,2]$ 时，$F(x)$ 单调递增.

③ $x\in[2,3]$ 时，$F(x)$ 为常函数.

④ $x\in[-1,0]$ 时，$F(x)\le 0$ 为线性函数，单调递增.

⑤由于 F(x)为连续函数

结合这些特点，可见正确选项为 D.

（7）设 A，B 均为 2 阶矩阵，A^*，B^* 分别为 A，B 的伴随矩阵.若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）

(A). $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　　(B). $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(D).\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

【答案】 B

【解析】根据 $CC^* = |C|E$ 若 $C^* = |C|C^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{|C|}C^*$

分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式 $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|A||B| = 2\times 3 = 6$ 即分块矩阵可逆

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = 6\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{|B|}B^* \\ \frac{1}{|A|}A^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}B^* \\ \frac{1}{2}A^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$$

（8）设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 Q^TAQ 为（　　）

$(A).\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(B).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(C).\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $(D).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】 A

【解析】$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)E_{12}(1)$，即：

$$Q = PE_{12}(1)$$

$$Q^T AQ = [PE_{12}(1)]^T A[PE_{12}(1)] = E_{12}^T(1)[P^T AP]E_{12}(1)$$

$$= E_{21}^T(1)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}E_{12}(1)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线$\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y = t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在（0，0）处的切线方程为_____.

【答案】$y = 2x$

【解析】$\dfrac{dy}{dt} = 2t\ln(2-t^2) - t^2\cdot\dfrac{2t}{2-t^2}\Big|_{t=1} = -2$

$\dfrac{dx}{dt} = e^{-(1-t)^2}\cdot(-1)\Big|_{t=1} = -1$

所以 $\dfrac{dy}{dx} = 2$

所以 切线方程为 $y = 2x$.

（10）已知$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx = 1$,则 k =_____.

【答案】-2

【解析】$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{kx}dx = 2\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^b$

因为极限存在所以$k < 0$

$1 = 0 - \dfrac{2}{k}$

$k = -2$

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx =$_____.

【答案】0

【解析】令 $I_n = \int e^{-x}\sin nxdx = -e^{-x}\sin nx + n\int e^{-x}\cos nxdx$

$= -e^{-x}\sin nx - ne^{-x}\cos nx - n^2 I_n$

所以 $I_n=-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}+C$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nxdx=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{n\cos nx+\sin nx}{n^2+1}e^{-x}\Big|_0^1)$

$$=\lim_{n\to\infty}(-\frac{n\cos n+\sin n}{n^2+1}e^{-1}+\frac{n}{n^2+1})$$

$$=0$$

（12）设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=0}=$_____.

【答案】-3

【解析】对方程 $\mathrm{xy}+e^y=x+1$ 两边关于 x 求导有 $y+xy'+y'e^y=1$，得 $y'=\dfrac{1-y}{x+e^y}$

对 $y+xy'+y'e^y=1$ 再次求导可得 $2y'+xy''+y''e^y+(y')^2e^y=0$，

得 $y''=-\dfrac{2y'+(y')^2e^y}{x+e^y}$ (*)

当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'_{(0)}=\dfrac{1-0}{e^0}=1$，代入 (*) 得

$$y''(0)=-\frac{2y'(0)+(y'(0))^2e^0}{(0+e^0)^3}=-(2+1)=-3$$

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为_____.

【答案】$e^{-\frac{2}{e}}$

【解析】因为 $y'=x^{2x}\left(2\ln x+2\right)$，令 $y'=0$ 得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$.

又 $y''=x^{2x}\left(2\ln x+2\right)^2+x^{2x}\cdot\dfrac{2}{x}$，得 $y''\left(\dfrac{1}{e}\right)=2e^{-\frac{2}{e}+1}>0$，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $y=x^{2x}$ 的极小值点，此时 $y=e^{-\frac{2}{e}}$，

又当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$y'(x)<0$；$x\in\left(\dfrac{1}{e},1\right]$ 时，$y'(x)>0$，故 y 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ 上递增.

而 $y(1)=1$，$y_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-2x)}=1$，

所以 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

(14) 设 α，β 为 3 维列向量，β^{T} 为 β 的转置，若矩阵 $\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$_____.

【答案】2

【解析】因为 $\alpha\beta^{T}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^{T}$ 得特征值

是 $2,0,0$ 而 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha$ 是一个常数，是矩阵 $\alpha\beta^{T}$ 的对角元素之和，则 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2+0+0=2$

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx\quad(x>0)$.

【解析】

令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$ 得 $x=\frac{1}{t^2-1},dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$

$$\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\int\ln(1+t)d\frac{1}{t^2-1}$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt$$

而

$$\int \frac{1}{t^2-1}\frac{1}{t+1}dt=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2})dt$$

$$\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+2\frac{1}{t+1}+C$$

所以

$$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C$$

（17）（本题满分 10 分）

设 $z=f\left(x+y,x-y,xy\right)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解析】

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$$

$$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot(-1)+f_{13}''\cdot x+f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot(-1)+f_{23}''\cdot x+f_3'+y[f_{31}''\cdot 1+f_{32}''\cdot(-1)+f_{33}''\cdot x]$$

$$=f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 $y=y\left(x\right)\left(x\geq 0\right)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y\left(x\right)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

【解析】

解微分方程 $xy''-y'+2=0$ 得其通解 $y=C_1+2x+C_2x^2$,其中C_1，C_2 为任意常数

又因为 $y=y(x)$ 通过原点时与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域的面积为 2，于是可得

$C_1=0$

$$2=\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1(2x+C_2x^2)dx=(x^2+\frac{C_2}{3}x^3)\Big|_0^1=1+\frac{C_2}{3}$$

从而$C_2=3$

于是，所求非负函数$y=2x+3x^2\ \ (x\geq 0)$

又由$y=2x+3x^2$ 可得，在第一象限曲线$y=f(x)$表示为$x=\frac{1}{3}(\sqrt{1+3y}-1)$

于是 D 围绕y轴旋转所得旋转体的体积为$V=5\pi-V_1$，其中

$$V_1=\int_0^5\pi x^2dy=\int_0^5\pi\cdot\frac{1}{9}(\sqrt{1+3y}-1)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{9}\int_0^5(2+3y-2\sqrt{1+3y})dy$$

$$=\frac{39}{18}\pi$$

$$V=5\pi-\frac{39}{18}\pi=\frac{51}{18}\pi=\frac{17}{6}\pi.$$

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分$\iint\limits_D(x-y)dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2,y\geq x\right\}$.

【解析】由$(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2$得$r\leq 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

$$\therefore\iint\limits_D(x-y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3 d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta+\cos\theta)^3 d(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=-\frac{8}{3}.$$

（20）（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 是区间（-π，π）内过点（-$\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}$）的光滑曲线，当 -$\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点，当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$.求 $y(x)$ 的表达式.

【解析】由题意，当 $-\pi<x<0$ 时，$y=-\frac{x}{y'}$，即 $ydy=-xdx$，得 $y^2=-x^2+c$，

又 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 代入 $y^2=-x^2+c$ 得 $c=\pi^2$，从而有 $x^2+y^2=\pi^2$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 得 $y''+y=0$ 的通解为 $y^*=c_1\cos x+c_2\sin x$

令解为 $y_1=Ax+b$，则有 $0+Ax+b+x=0$，得 $A=-1,b=0$，

故 $y_1=-x$，得 $y''+y+x=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x$

由于 $y=y(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 内的光滑曲线，故 y 在 $x=0$ 处连续

于是由 $y(0-)=\pm\pi$ ，$y(0+)=c_1$ ，故 $c_1=\pm\pi$ 时，$y=y(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又当 $-\pi<x<0$ 时，有 $2x+2y\cdot y'=0$，得 $y_-'(0)=-\frac{x}{y}=0$，

当 $0\le x<\pi$ 时，有 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x-1$，得 $y_+'(0)=c_2-1$

由 $y_-'(0)=y_+'(0)$ 得 $c_2-1=0$，即 $c_2=1$

故 $y=y(x)$ 的表达式为 $y=\begin{cases}-\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ -\pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 或

$y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，又过点$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $y=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

（21）（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【解析】（Ⅰ）作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，易验证 $\varphi(x)$ 满足：$\varphi(a)=\varphi(b)$；$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

根据罗尔定理，可得在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\therefore f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

（Ⅱ）任取 $x_0\in(0,\delta)$，则函数 $f(x)$ 满足；

在闭区间 $[0,x_0]$ 上连续，开区间 $(0,x_0)$ 内可导，从而有拉格朗日中值定理可得：存在 $\xi_{x_0}\in(0,x_0)\subset(0,\delta)$，使得 $f'(\xi_{x_0})=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}\cdots\cdots(*)$

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，对上式（*式）两边取 $x_0\to0^+$ 时的极限可得：

$$f_+'(0)=\lim_{x_0\to0^+}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\lim_{x_0\to0^+}f'(\xi_{x_0})=\lim_{\xi_{x_0}\to0^+}f'(\xi_{x_0})=A$$

故 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

（22）（本题满分 11 分设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求满足 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任一向量ξ_2,ξ_3，证明：ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

【解析】（Ⅰ）解方程$A\xi_2=\xi_1$

$$(A,\xi_1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$故有一个自由变量，令$x_3=2$，由$Ax=0$解得，$x_2=-1,x_1=1$

求特解，令$x_1=x_2=0$，得$x_3=1$

故$\xi_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_1$为任意常数

解方程$A^2\xi_3=\xi_1$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

$$(A^2,\xi_1)=\begin{pmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&\frac{-1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故有两个自由变量，令$x_2=-1$，由$A^2x=0$得$x_1=1,x_3=0$

求特解$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ 故 $\xi_3=k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$，其中$k_2$为任意常数.

（Ⅱ）证明：

由于$\begin{vmatrix}-1&k_1&k_2+\frac{1}{2}\\1&-k_1&-k_2\\-2&2k_1+1&0\end{vmatrix}=2k_1k_2+(2k_1+1)(k_2+\frac{1}{2})-2k_1(k_2+\frac{1}{2})-k_2(2k_1+1)$

$=\frac{1}{2}\neq 0$　　故 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【解析】（Ⅰ）　$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & 1 \\ 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \lambda-a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-1]-[0+(\lambda-a)]$$
$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2]$$
$$=(\lambda-a)[\lambda^2-2a\lambda+\lambda+a^2-a-2]$$
$$=(\lambda-a)\{[a\lambda+\frac{1}{2}(1-2a)]^2-\frac{9}{4}\}$$
$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

$$\therefore \lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$$

（Ⅱ）　若规范形为 $y_1^2+y_2^2$，说明有两个特征值为正，一个为 0.则

1)　若 $\lambda_1=a=0$，则 $\lambda_2=-2<0$ ，$\lambda_3=1$ ，不符题意

2)　若 $\lambda_2=0$ ，即 $a=2$，则 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_3=3>0$，符合

3)　若 $\lambda_3=0$ ，即 $a=-1$，则 $\lambda_1=-1<0$ ，$\lambda_2=-3<0$，不符题意

综上所述，故 $a=2$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、**选择题**(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p\left(x\right)y=q\left(x\right)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则( )

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$. (B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$. (D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切, 则 $a=$ ( )

(A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e.

(4) 设 m,n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2\left(1-x\right)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性 ( )

(A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关. (D) 与 m,n 取值都无关.

(5) 设函数 $z=z(x,y)$, 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ( )

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{\left(n+i\right)\left(n^2+j^2\right)}=$ ( )

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y^2\right)}dy$. (B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}dy$.

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}dy$. (D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1+y^2\right)}dy$.

(7) 设向量组 $\mathrm{I}:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\mathrm{II}:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是( )

(A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r\leq s$. (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r>s$.

(C) 若向量组II线性无关, 则$r \le s$.　　(D) 若向量组II线性相关, 则$r > s$.

(8) 设A为4阶实对称矩阵, 且$A^2 + A = O$, 若A的秩为3, 则A相似于　(　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

二、**填空题**(9~14小题, 每小题4分, 共24分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 3阶常系数线性齐次微分方程$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$的通解为$y =$ _____.

(10) 曲线$y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$的渐近线方程为_____.

(11) 函数$y = \ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0) =$ _____.

(12) 当$0 \le \theta \le \pi$时, 对数螺线$r = e^{\theta}$的弧长为_____.

(13) 已知一个长方形的长l以2 cm/s的速率增加, 宽w以3 cm/s的速率增加. 则当$l = 12\text{cm}$, $w = 5\text{cm}$时, 它的对角线增加的速率为_____.

(14) 设A, B为3阶矩阵, 且$|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则$|A + B^{-1}| =$ _____.

三、**解答题**(15~23小题, 共94分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分11分)

求函数$f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} d$的单调区间与极值.

(16) (本题满分10分)

(Ⅰ) 比较$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n |\ln t| dt \ (n = 1, 2, \cdots)$的大小, 说明理由;

(Ⅱ) 记$u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \ (n = 1, 2, \cdots)$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(17) (本题满分10分)

设函数$y = f(x)$由参数方程$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$所确定, 其中$\psi(t)$具有2阶导数, 且

$\psi(1)=\dfrac{5}{2}$， $\psi'(1)=6$. 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

(18) (本题满分 10 分)

一个高为 *1* 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常数 ρ kg/m^3)

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$, 确定 a , b 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(20) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}drd\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

(21) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$， $f(1)=\dfrac{1}{3}$, 证明：存在 $\xi\in(0,\dfrac{1}{2})$, $\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

（Ⅰ）求 λ , a ;

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(23) (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, 求 a,Q .

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (B).

【解析】因为 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 有间断点 $x=0,\pm1$, 又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,\lim\limits_{x\to0^-}=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$, 所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

显然 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $x=1$ 为连续点.

而 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$, 所以 $x=-1$ 为无穷间断点, 故答案选择 B.

(2)【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解, 故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$, 所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x),y_2'+P(x)y_2=q(x)$, 所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x)\neq0$, 所以 $\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得 $$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即 $$(\lambda+\mu)q(x)=q(x),\text{由 } q(x)\neq0 \text{ 可知 } \lambda+\mu=1, \qquad ②$$

由①②求解得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$, 故应选(A).

(3)【答案】 (C).

【解析】因为曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq0)$ 相切, 所以在切点处两个曲线的斜率相同,

所以 $2x=\dfrac{a}{x}$, 即 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}\ (x>0)$. 又因为两个曲线在切点的坐标是相同的, 所以在 $y=x^2$ 上,

当 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时 $y=\dfrac{a}{2}$；在 $y=a\ln x$ 上, $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 时, $y=a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

所以 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. 从而解得 $a=2e$. 故答案选择(C).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然, 当 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$, 则该反常积分收敛.

当 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}\le0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 取 $0<\delta<1$, 不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛, 故选(D).

(5) 【答案】 (B).

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{F_1'\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{F_1'\cdot\dfrac{y}{x}+F_2'\cdot\dfrac{z}{x}}{F_2'}=\dfrac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z.$$

(6) 【答案】 (D).

【解析】$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}(\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})=(\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1\frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$$

(7) 【答案】 (A).

【解析】由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以 $r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$, 即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以 $r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$, 即 $r\le s$, 选(A).

(8) 【答案】 (D).

【解析】: 设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2+A=O$, 所以 $\lambda^2+\lambda=0$, 即 $(\lambda+1)\lambda=0$, 这样 A 的特征值只能为-1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即 $A\sim\Lambda$,

$r(A)=r(\Lambda)=3$, 因此, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$, 即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

二、**填空题**

(9)【答案】 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

【解析】该常系数线性齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$, 因式分解得

$$\lambda^2(\lambda-2)+(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0,$$

解得特征根为 $\lambda=2,\ \lambda=\pm i$, 所以通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

(10) 【答案】 $y=2x$.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^2+1}}{x}=2$, 所以函数存在斜渐近线, 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3-2x}{x^2+1}=0,$$ 所以斜渐近线方程为 $y=2x$.

(11)【答案】 $-2^n\cdot(n-1)!$.

【解析】由高阶导数公式可知 $\ln^{(n)}(1+x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

所以 $\ln^{(n)}(1-2x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}\cdot(-2)^n=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2x)^n}$,

即 $y^{(n)}(0)=-2^n\dfrac{(n-1)!}{(1-2\cdot 0)^n}=-2^n(n-1)!$.

(12)【答案】 $\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)$.

【解析】因为 $0\le\theta\le\pi$, 所以对数螺线 $r=e^{\theta}$ 的极坐标弧长公式为

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(e^{\theta}\right)^2+\left(e^{\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right).$$

(13)【答案】 $3\,\mathrm{cm/s}$.

【解析】设 $l=x(t),w=y(t)$, 由题意知, 在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12,y(t_0)=5$, 且 $x'(t_0)=2,$ $y'(t_0)=3$, 设该对角线长为 $S(t)$, 则 $S(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$, 所以

$$S'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

所以 $$S'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{12\cdot 2+5\cdot 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3.$$

(14)【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$, 所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $\left|B\right|=2$, 所以 $\left|B^{-1}\right|=\left|B\right|^{-1}=\frac{1}{2}$, 因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

三、**解答题**

(15)【解析】因为 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=0,x=\pm 1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$, 则 $f''(0)=2\int_1^{0}e^{-t^2}dt<0$, 所以

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$, 所以 $f(\pm 1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge 1$ 时, $f'(x)>0$; $0\le x<1$ 时, $f'(x)<0$; $-1\le x<0$ 时, $f'(x)>0$; $x<-1$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(16)【解析】(I) 当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$, 故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$, 所以

$$\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n<\left|\ln t\right|t^n,$$

则 $$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt\ \left(n=1,2,\cdots\right).$$

(II) $\int_0^1\left|\ln t\right|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)=\frac{1}{\left(n+1\right)^2}$, 故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(17)【解析】根据题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{2t+2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{2t+2}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^2}}{2t+2}=\frac{3}{4(1+t)}$$

即 $\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)=6(t+1)^2$, 整理有 $\psi''(t)(t+1)-\psi'(t)=3(t+1)^2$, 解

$$\begin{cases}\psi''(t)-\frac{\psi'(t)}{t+1}=3(t+1)\\ \psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=6\end{cases}$$, 令 $y=\psi'(t)$, 即 $y'-\frac{1}{1+t}y=3(1+t)$.

所以 $y=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left(\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C\right)=(1+t)(3t+C)$, $t>-1$. 因为 $y(1)=\psi'(1)=6$,

所以 $C=0$, 故 $y=3t(t+1)$, 即 $\psi'(t)=3t(t+1)$,

故 $\psi(t)=\int 3t(t+1)dt=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_1$.

又由 $\psi(1)=\frac{5}{2}$, 所以 $C_1=0$, 故 $\psi(t)=\frac{3}{2}t^2+t^3,(t>-1)$.

(18)【解析】油罐放平, 截面如图建立坐标系之后, 边界椭圆的方程为:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

阴影部分的面积

$$S=\int_{-b}^{\frac{b}{2}}2xdy=\frac{2a}{b}\int_{-b}^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}dy$$

令 $y=b\sin t, y=-b$ 时 $t=-\frac{\pi}{2}$; $y=\frac{b}{2}$ 时 $t=\frac{\pi}{6}$.

$$S=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 tdt=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})ab$$

所以油的质量 $m=(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4})abl\rho$.

(19)【解析】由复合函数链式法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+b\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=a(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})+b(a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta})$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta},$$

故 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$=(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\left[12(a+b)+10ab+8\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0,$$

所以 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\5b^2+12b+4=0\\12(a+b)+10ab+8\neq 0\end{cases}$,

则 $a=-\frac{2}{5}$ 或 -2，$b=-\frac{2}{5}$ 或 -2. 又因为当 (a,b) 为 $(-2,-2),(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5})$ 时方程(3)不满足，所以当 (a,b) 为 $(-\frac{2}{5},-2)$，$(-2,-\frac{2}{5})$ 满足题意.

(20)【解析】$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$

$$=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}\cdot rdrd\theta$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy=\int_0^1\frac{1}{3}\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{3}{16}\pi .$$

(21)【解析】令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$, 对于 $F(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上利用拉格朗日中值定理, 得存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi).$$

对于 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上利用拉格朗日中值定理, 得存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta),$$

两式相加得 $$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

所以存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1:(Ⅰ)已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时, $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$, 此时, $r(A)\neq r(\bar{A})$, 故 $Ax=b$ 无解(舍去).

当 $\lambda=-1$ 时, $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$, 由于 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 所以 $a=-2$, 故 $\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 因此 $|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\bar{A})$, 得 $a=-2$.

（ II ）对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&2\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(23)【解析】由于 $A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵, 且 Q 的第一

列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, 故$A$对应于$\lambda_1$的特征向量为$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义, 有$A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 即

$\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, 由此可得$a=-1,\lambda_1=2$. 故$A=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix}$.

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$,

可得A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$.

由$(\lambda_2E-A)x=0$, 即$\begin{pmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$, 可解得对应于$\lambda_2=-4$的线性无关的特征向量为$\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由$(\lambda_3E-A)x=0$, 即$\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$, 可解得对应于$\lambda_3=5$的特征向量为$\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于A为实对称矩阵, ξ_1,ξ_2,ξ_3为对应于不同特征值的特征向量, 所以ξ_1,ξ_2,ξ_3相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T,\eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 则$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&5\end{pmatrix}$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，$f\left(x\right)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A) $k=1,c=4$．　(B) $k=1,c=-4$．　(C) $k=3,c=4$．　(D) $k=3,c=-4$．

(2) 已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f\left(0\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$=(　　)

(A) $-2f'\left(0\right)$．　(B) $-f'\left(0\right)$．　(C) $f'\left(0\right)$．　(D) 0．

(3) 函数 $f(x)=\ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|$ 的驻点个数为(　　)

(A) 0．　(B) 1．　(C) 2．　(D) 3．

(4) 微分方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为(　　)

(A) $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$．　(B) $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$．

(C) $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$．　(D) $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$．

(5) 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0,$ 且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0.$　(B) $f''(0)<0,g''(0)<0.$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0.$　(D) $f''(0)>0,g''(0)<0.$

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$．　(B) $I<K<J$．　(C) $J<I<K$．　(D) $K<J<I$．

(7) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2．　(B) $P_1^{-1}P_2$．　(C) P_2P_1．　(D) $P_2P_1^{-1}$．

(8) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组

$Ax=0$的一个基础解系，则$A^*x=0$的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2})^{\frac{1}{x}}=$ _____.

(10) 微分方程$y'+y=e^{-x}\cos x$满足条件$y(0)=0$的解为_____.

(11) 曲线$y=\int_0^x \tan t dt \quad (0\le x\le \frac{\pi}{4})$的弧长$s=$ _____.

(12) 设函数$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}\lambda>0,$则$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=$ _____.

(13) 设平面区域D由直线$y=x,$圆$x^2+y^2=2y$及y轴围成，则二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma=$_____.

(14) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则$f$的正惯性指数为_____.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

已知函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^a}$，设$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0,$试求$a$的取值范围.

(16)（本题满分 11 分）

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3},\end{cases}$确定，求$y=y(x)$的极值和曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

(17)（本题满分 9 分）

设函数$z=f(xy,yg(x))$，其中函数f具有二阶连续偏导数，函数$g(x)$可导且在$x=1$处取得极值$g(1)=1$，求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(18)（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）

(I) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20)（本题满分 11 分）

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\ge\frac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\le\frac{1}{2})$ 连接而成的.

(I) 求容器的容积；

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？（长度单位：m，重力加速度为 gm/s^2，水的密度为 $10^3 kg/m^3$）.

图 1

(21)（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

(22)（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(23)（本题满分 11 分）

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A .

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(3-\cos 2x-2\cos^2 x\right)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 2x-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{cx^{k-3}}=1 .$$

所以 $c=4,k=3$，故答案选(C).

(2)【答案】(B).

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故答案选(B).

(3)【答案】(C).

【解析】$f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$，故 $f(x)$ 有两个不同的驻点.

(4)【答案】(C).

【解析】微分方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-\lambda^2=0$，解得特征根 $r_1=\lambda, r_2=-\lambda$.

所以非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$ 有特解 $y_1=x\cdot a\cdot e^{\lambda x}$,

非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$ 有特解 $y_2=x\cdot b\cdot e^{-\lambda x}$，

故由微分方程解的结构可知非齐次方程 $y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$ 可设特解 $y=x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5)【答案】(A).

【解析】由题意有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$

所以，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0$，即 $(0,0)$ 点是可能的极值点.

又因为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=g''(y)f(x)$，

所以，$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(0)\cdot g(0)$，$B=\dfrac{\alpha^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(0)\cdot g'(0)=0$，

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(0)\cdot g''(0),$$

根据题意由$(0,0)$为极小值点，可得$AC-B^2=A\cdot C>0$,且$A=f''(0)\cdot g(0)>0$，所以有$C=f(0)\cdot g''(0)>0$.由题意$f(0)>0,g(0)<0$，所以$f''(0)<0,g''(0)>0$，故选(A).

(6)【答案】(B).

【解析】因为$0<x<\frac{\pi}{4}$时，　$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(7)【答案】 (D).

【解析】由于将A的第2列加到第1列得矩阵B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$，$A=BP_1^{-1}$.

由于交换B的第2行和第3行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即$P_2B=E$,故$B=P_2^{-1}=P_2$．因此，$A=P_2P_1^{-1}$，故选(D).

(8)【答案】(D).

【解析】由于$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以$A(1,0,1,0)^T=0$，且$r(A)=4-1=3$，即$\alpha_1+\alpha_3=0$，且$|A|=0$．由此可得$A^*A=|A|E=O$，即$A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A^*x=0$的解.

由于$r(A)=3$，$\alpha_1+\alpha_3=0$，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关．又由于$r(A)=3$，所以$r(A^*)=1$，因此$A^*x=0$的基础解系中含有$4-1=3$个线性无关的解向量．而$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且为$A^*x=0$的解，所以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可作为$A^*x=0$的基础解系，故选(D).

二、填空题(9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9)【答案】$\sqrt{2}$.

【解析】原式=$e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+2^x}{2}-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\cdot\ln 2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\ln 2}=\sqrt{2}$.

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$.

【解析】由通解公式得

$$y=e^{-\int dx}(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C)$$

$$=e^{-x}(\int\cos xdx+C)$$

$$=e^{-x}(\sin x+C).$$

由于 $y(0)=0$, 故 C=0．所以 $y=e^{-x}\sin x$.

(11)【解析】选取 x 为参数，则弧微元 $ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec xdx$

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$.

(12)【答案】$\frac{1}{\lambda}$.

【解析】原式$=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\lambda x}$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}-\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}-e^0\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

(13)【答案】$\frac{7}{12}$.

【解析】原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta rdr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot 16\sin^4\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin^5\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{12}.$$

(14)【答案】2.

【解析】方法 1： f 的正惯性指数为所对应矩阵的特征值中正的个数.

二次型 f 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -\lambda\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -1 & \lambda-3 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-4\right),$$

故 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$．因此 f 的正惯性指数为 2.

方法 2：f 的正惯性指数为标准形中正的平方项个数.

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2+2x_2^2,$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=x_2,\\ y_3=x_3,\end{cases}$ 则 $f=y_1^2+2y_2^2$，故 f 的正惯性指数为 2.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

【解析】如果 $a\le 0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-a}\cdot\int_0^x\ln(1+t^2)dt=+\infty$，

显然与已知矛盾，故 $a>0$.

当 $a>0$ 时，又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{a}\cdot x^{3-a}=0$.

所以 $3-a>0$ 即 $a<3$.

又因为 $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}}=\dfrac{2}{a(a-1)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{3-a}}{1+x^2}$

所以 $3-a<2$，即 $a>1$，综合得 $1<a<3$.

(16)（本题满分 11 分）

【解析】因为 $y'(x)=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，

$$y''(x)=\frac{d(\frac{t^2-1}{t^2+1})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$

令 $y'(x)=0$ 得 $t=\pm 1$，

当 $t=1$ 时，$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，此时 $y''>0$，所以 $y=-\frac{1}{3}$ 为极小值.

当 $t=-1$ 时，$x=-1$，$y=1$，此时 $y''<0$，所以 $y=1$ 为极大值.

令 $y''(x)=0$ 得 $t=0$，$x=y=\frac{1}{3}$.

当 $t<0$ 时，$x<\frac{1}{3}$，此时 $y''<0$；当 $t>0$ 时，$x>\frac{1}{3}$，此时 $y''>0$.

所以曲线的凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，凹区间为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，拐点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

(17)（本题满分 9 分）

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]+y\left[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)\right]$$

$$+g'(x)\cdot f_2'\left[xy,yg(x)\right]+yg'(x)\left\{f_{12}''[xy,yg(x)]\cdot x+f_{22}''[xy,yg(x)]g(x)\right\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

(18)（本题满分 10 分）

【解析】由题意可知当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'(0)=1$，由导数的几何意义得 $y'=\tan\alpha$，

即 $\alpha=\arctan y'$，由题意 $\frac{d}{dx}\left(\arctan y'\right)=\frac{dy}{dx}$，即 $\frac{y''}{1+y'^2}=y'$.

令 $y'=p$，$y''=p'$，则 $\frac{p'}{1+p^2}=p$，$\int\frac{dp}{p^3+p}=\int dx$，即

$$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{p}{p^2+1}dp=\int dx,\quad \ln|p|-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=x+c_1,\quad 即\ p^2=\frac{1}{ce^{-2x}-1}.$$

当 $x=0$， $p=1$，代入得 $c=2$，所以 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2e^{-2x}-1}}$，

则 $y(x)-y(0)=\int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{2e^{-2t}-1}}=\int_0^x \dfrac{e^t dt}{\sqrt{2-e^{2t}}}$

$$=\int_0^x \frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-(\frac{e^t}{\sqrt{2}})^2}}=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}\Big|_0^x=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $y(0)=0$，所以 $y(x)=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^x-\dfrac{\pi}{4}$.

(19)（本题满分 10 分）

【解析】（Ⅰ）设 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right),x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(0\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ 时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}，即：\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

$$亦即：\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

结论得证.

（II）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$.

先证数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln\left(n+1\right)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用（I）的结论可以得到 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})$，所以 $\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0$ 得到 $a_{n+1}<a_n$，即

数列$\{a_n\}$单调递减.

再证数列$\{a_n\}$有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛.

(20)（本题满分 11 分）

【解析】(I)容器的容积即旋转体体积分为两部分

$$V=V_1+V_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2y-y^2\right)dy+\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)dy$$

$$=\pi\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}+\pi\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\pi\left(5+\frac{1}{4}-3\right)=\frac{9}{4}\pi.$$

(II) 所做的功为

$$dw=\pi\rho g(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$w=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$=\pi\rho g\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(y^3-2y^2-y+2)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}+y^3-4y^2+4y)dy\right)$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{y^4}{4}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{2y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}+2y\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{4}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{4y^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}+2y^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right)$$

$$=\frac{27\times10^3}{8}\pi g=3375g\pi.$$

(21)（本题满分 11 分）

【解析】因为$f(x,1)=0$，$f(1,y)=0$，所以$f_x'(x,1)=0$.

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf'_x(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]=\int_0^1 xdx\left(f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right)$$

$$=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=\iint_D f(x,y)dxdy=a.$$

(22)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当 $a=5$ 时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示.

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(23)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0

（B）1

（C）2

（D）3

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f^{'}(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^{n}n!$

【答案】：C

【解析】：$f^{'}(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f^{'}(0)=(-1)^{n-1}n!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$，则数列(s_n)有界是数列（a_n）收敛的

(A)充分必要条件. (B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件. （D）即非充分地非必要条件.

【答案】：(B)

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x dx(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_2<I_2<I_3$.

(C) $I_1<I_3<I_1$,　　(D) $I_1<I_2<I_3$.

【答案】: (D)

【解析】：：$I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 看为以 k 为自变量的函数，则可知 $I_k'=e^{k^2}\sin k\ge 0,k\in(0,\pi)$，即可知 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\sin xdx$ 关于 k 在 $(0,\pi)$ 上为单调增函数，又由于 $1,2,3\in(0,\pi)$，则 $I_1<I_2<I_3$，故选 D

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2, y_1<y_2$.　　(B) $x_1>x_2, y_1>y_1$.

(C) $x_1<x_2, y_1<y_2$.　　(D) $x_1<x_2, y_1>y_2$.

【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\frac{\pi}{2},y=1,$ 围成，则 $\iint(x^5y-1)dxdy=$(　)

$(A)\pi\quad(B)2\quad(C)-2\quad(D)-\pi$

【答案】:（D）

【解析】:　由二重积分的区域对称性，

$$\iint(x^5y-1)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)dy=-\pi$$

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于$\left|\left(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。故选（C）

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$则$Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ _____。

【答案】：1

【解析】：将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$ ， $x=0$、$y=0$ 代入可得，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$$

再次求导得 $2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}$，再将 $x=0$、$y=0$、$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1。$$

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$_____。

【答案】：$\frac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$

（11）设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$_____。

【答案】：0.

【解析】：因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为_____。

【答案】：$x=y^2$

【解析】：$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\frac{dx}{dy}=3y-\frac{1}{y}x\Rightarrow\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，所以

$$x=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{y}\left[\int 3y^2dy+C\right]=(y^3+C)\frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是_____。

【答案】：$(-1,0)$

【解析】：将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$或-1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为$(-1,0)$

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B ,则

$|BA^*|=$_____。

【答案】：**-27**

【解析】：由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x,}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】：**（1）** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}+1=1$，即 $a=1$

（2）,当 $x\to 0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为,当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\dfrac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a\sim\dfrac{1}{6}x$，即 $k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

【解析】：$f\left(x,y\right)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

先求函数的驻点．$f_x'\left(x,y\right)=e-x=0,\ f_y'\left(x,y\right)=-y=0$，解得函数为驻点为$\left(e,0\right)$.

又$A=f_{xx}'\left(e,0\right)=-1,B=f_{xy}'\left(e,0\right)=0,C=f_{yy}'\left(e,0\right)=-1$，

所以$B^2-AC<0,A<0$，故$f\left(x,y\right)$在点$\left(e,0\right)$处取得极大值$f\left(e,0\right)=\dfrac{1}{2}e^2$.

（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】：

设切点坐标为$A\left(x_0,\ln x_0\right)$，斜率为$\dfrac{1}{x_0}$，所以设切线方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，又因为该切线过$B(0,1)$，所以$x_0=e^2$，故切线方程为：$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$

切线与x轴交点为$B\left(-e^2,0\right)$

（1）$A=\int_0^2\left[e^y-e^2(y-1)\right]dy=\left[e^y-e^2(\dfrac{1}{2}y^2-y)\right]_0^2=e^2-1$

（2）

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 x dx\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln x dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi\left(e^2+3\right)
\end{aligned}
$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

【解析】: $\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\frac{\theta}{2}$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11}tdt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9tdt$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{5}$$

$$=\frac{16}{15}$$

（19）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

【解析】:

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，$y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y''>0$；当 $x<0$ 时，$2x<0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $\left(0,0\right)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f^{'}\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{\left(1-x\right)^2}-\sin x-x$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x$$

当$0<x<1$时，有$\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以$\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\geq 0$，

故 $f^{'}\left(x\right)\geq 0$，而 $f\left(0\right)=0$，即得$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当$-1<x<0$，有$\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以$\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\leq 0$，

故 $f^{'}\left(x\right)\geq 0$，即得$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程$x^n+x^{n-1}+...+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限。

【解析】：**(1)** 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>0$，再由 $f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理得在$(\frac{1}{2},1)$肯定有解$x_0$，假设在此区间还有另外一根$x_1$，

所以 $x_0{}^n+x_0{}^{n-1}+\cdots+x_0-1=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1$，由归纳法得到 $x_1=x_0$，即唯一性得证

（2）假设根为 x_n，即 $f(x_n)=x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，所以 $f(x_n)=\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=0,(\dfrac{1}{2}<x_n<1)$，

由于 $x_{n+1}{}^{n+1}+x_{n+1}{}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知 $x_{n+1}{}^n+x_{n+1}{}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$，由于 $x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，可知 $x_{n+1}<x_n$。又由于 $\dfrac{1}{2}<x_n<1$，也即 $\{x_n\}$ 是单调的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a<x_2<x_1=1$。

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a_n}-1=0,$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

线性方程组$Ax=b$存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故$\lambda=-1$.

（23）（本题满分 11 分）三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，$A^T$为矩阵$A$的转置，已知$r(A^TA)=2$，且二次型$f=x^TA^TAx$。

1）求a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-6\right)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0,$ 解 $\left(\lambda_1E-B\right)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2,$ 解 $\left(\lambda_2E-B\right)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6,$ 解 $\left(\lambda_3E-B\right)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$$

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

（5）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

（6）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　　）

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（8）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$_____.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}dt$ ，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$_____.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\,(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为_____.

(12) 曲线$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为_____.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0$ $y'\big|_{x=0}=1$的解为 $y=$_____.

（14）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i,j}=1,2,3)$，则$|A|=$____

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

（16）（本题满分 10 分）

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x,V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值。

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域D由直线$x=3y, y=3x$及$x+y=8$围成.计算$\iint\limits_D x^2dxdy$。

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数，且$f(1)=1$.证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；（II）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

（19）（本题满分 11 分）

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

（20）（本题满分 11 分）

设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求$f(x)$的最小值

（II）设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限.

（21）（本题满分 11 分）

设曲线L的方程为$y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\leq x\leq e)$，

（1）求L的弧长；

（2）设D是由曲线L，直线$x=1, x=e$及x轴所围平面图形，求D的形心的横坐标。

（22）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$。

（23）（本题满分 11 分）

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β正交且均为单位向量，证明二次型f在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 等价的无穷小

【答案】（C）

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\alpha(x)=0$，

因此当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，所以 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\alpha(x)$ 是与 x 同阶但不等价的无穷小。

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【答案】（A）

【解析】由于 $f(0)=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}\right]=2f'(0)$，

对此隐函数两边求导得 $-(y+xy')\sin(xy)+\dfrac{y'}{y}-1=0$，所以 $f'(0)=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\dfrac{2}{n})-1\right]=2$。

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

【答案】（C）

【解析】$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\int_0^x\sin tdt=1-\cos x, & 0\le x<\pi\\ \int_0^\pi\sin tdt+\int_\pi^x 2dt=2(x-\pi+1), & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，

由于 $\lim\limits_{x\to\pi-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi+}F(x)=2$，所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续；

$\lim\limits_{x\to\pi-}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{-1-\cos x}{x-\pi}=0$，$\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi+}\dfrac{2(x-\pi)}{x-\pi}=2$，

所以$F(x)$在$x=\pi$处不可导。

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$，若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　　（B）$\alpha>2$　　（C）$-2<\alpha<0$　　（D）$0<\alpha<2$

【答案】（D）

【解析】 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$

因为$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{e}f(x)dx+\int_e^{+\infty}f(x)dx$，

当$1<x<e$时，$\int_1^{e}f(x)dx=\int_1^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}\int_\varepsilon^{e}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]-\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(e-1)^{\alpha-2}}$，

要使$\lim\limits_{\varepsilon\to1+}[\dfrac{1}{2-\alpha}\dfrac{1}{(\varepsilon-1)^{\alpha-2}}]$存在，需满足$\alpha-2<0$；

当$x\ge e$时，$\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}\dfrac{d\ln x}{\ln^{\alpha+1}x}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})+\dfrac{1}{\alpha}$，

要使$\lim\limits_{\lambda\to\infty}(-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\ln^{\alpha}\lambda})$存在，需满足$\alpha>0$；所以$0<\alpha<2$。

（5）设$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数f可微，则$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

【答案】（A）

【解析】已知$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f(xy)+\dfrac{y^2}{x}f'(xy)$，

所以$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=[-\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)]+(\dfrac{1}{x}f(xy)+yf'(xy))=2yf'(xy)$。

（6）设D_k是圆域$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\right\}$在第$k$象限的部分，记$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　　）

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

【答案】（B）

【解析】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则有

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_0^1 rdr\int_\alpha^\beta(r\sin\theta-r\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_\alpha^\beta$$

故当 $k=2$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\pi$，此时有 $I_2=\frac{2}{3}\Big|>0.$ 故正确答案选 B。

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 C 可逆，则（　　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】（B）

【解析】由 $C=AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（8）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $2,b,0$。

又$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$_____.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$

【解析】原式=$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x})}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x+o(x))}{x}=\frac{1}{2}$$

因此答案为$e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=$_____.

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-e^x},\therefore\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}},\dfrac{dx}{dy}|_{y=0}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^x}}|_{x=-1}=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos3\theta\,(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6})$，则 L 所围成的平面图形的面积为_____.

【答案】$\dfrac{\pi}{12}$

【解析】所围图形的面积是$S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1+\cos6\theta}{2}d\theta=\dfrac{\pi}{12}$

(12) 曲线$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的法线方程为_____.

【答案】$y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{1+t^2}}=t$，$\frac{dy}{dx}|_{t=1}=1,$

当$t=1$时，$x=\frac{\pi}{4},y=\ln\sqrt{2}$，故法线方程为$y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$.

(13)已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，

该方程满足条件$y|_{x=0}=0$ $y'|_{x=0}=1$的解为$y=$_____.

【答案】$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【解析】由题意知：e^{3x},e^x是对应齐次方程的解，$-xe^{2x}$是非齐次方程的解，

故非齐次的通解为$y=C_1e^{3x}+C_2e^x-xe^{2x}$，将初始条件代入，得到$C_1=1,C_2=-1$,

故满足条件的解为$y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$。

（14）设$\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$为$\mathrm{a_{ij}}$的代数余子式，若$\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i,j}=1,2,3)$,则$|A|=$____

【答案】-1

【解析】

由$a_{ij}+A_{ij}=0$可知，$A^T=-A^*$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$
$$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$$

从而有$|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2$,故$|A|$=-1.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值。

【解析】因为当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1$

又因为：

$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$

$=1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$

$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1-\cos x}{ax^n}+\dfrac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\dfrac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n})$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\dfrac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n})$

所以 $n=2$ 且 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{2a}+\dfrac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

【解析】由题意可得：

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以 $\dfrac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\dfrac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

【解析】$\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy$

$=\int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$

$=\dfrac{416}{3}$

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$.证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；（II）存在$\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

【解析】（1）令$F(x)=f(x)-x, F(0)=f(0)=0, F(1)=f(1)-1=0,$

则$\exists\xi\in(0,1)$使得$F'(\xi)=0,$即$f'(\xi)=1$

（2）令$G(x)=e^x(f'(x)-1),$则$G(\xi)=0,$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知$G(-\xi)=0$,

则$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$使$G'(\xi)=0,$

即$e^{\eta}[f'(\eta)-1]+e^{\eta}f''(\eta)=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 11 分）

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

【解析】本题本质上是在条件$x^3-xy+y^3=1(x\geq 0, y\geq 0)$下求函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最值。

故只需求出$\sqrt{x^2+y^2}$在条件$x^3-xy+y^3=1$下的条件极值点，再将其与曲线端点处（$(0,1),(1,0)$）的函数值比较，即可得出最大值与最小值。

由于函数$\sqrt{x^2+y^2}$与x^2+y^2的增减性一致，故可以转化为求x^2+y^2的条件极值点：

构造拉格朗日函数$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$，求其驻点得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+3\lambda x^2-\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+3\lambda y^2-\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0\end{cases}$$

为了求解该方程组，将前两个方程变形为$\begin{cases}2x=\lambda y-3\lambda x^2\\ 2y=\lambda x-3\lambda y^2\end{cases}$

进一步有$\begin{cases}2xy=\lambda y^2-3\lambda x^2y\\ 2xy=\lambda x^2-3\lambda xy^2\end{cases}$，故$\lambda x^2-3\lambda xy^2=\lambda y^2-3\lambda x^2y$

即$\lambda(x-y)(x+y+3xy)=0$。则有$\lambda=0$或$x-y=0$或$x+y+3xy=0$。

当$\lambda=0$时，有$x=y=0$，不可能满足方程$x^3-xy+y^3-1=0$；

当 $x+y+3xy=0$，由于 $x\ge 0, y\ge 0$，也只能有 $x=y=0$，不可能满足第三个方程；

故必有 $x-y=0$，将其代入 $x^3-xy+y^3-1=0$ 得 $2x^3-x^2-1=0$，解得 $x=1, y=1$。

可知 $(1,1)$ 点是唯一的条件极值点。

由于 $f(1,1)=\sqrt{2}$， $f(0,1)=f(1,0)=\sqrt{2}$，故曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\ge 0, y\ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$ 与最短距离为1。

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

（I）求 $f(x)$ 的最小值

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限.

【解析】（I） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，则当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$。

可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$。

（2）、由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n}\ge 1$，则 $\dfrac{1}{x_{n+1}}<\dfrac{1}{x_n}$，即 $x_{n+1}>x_n$，故 x_n 单调递增。

又由于 $\ln x_n<\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则 $x_n<e$，故 x_n 有上界，则由单调有界收敛定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\left(n x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)=\ln a+\dfrac{1}{a}$，由于 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_n+1}<1$，则

$\ln a+\dfrac{1}{a}\le 1$，故 $a=1$。

（21）（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \quad (1\le x\le e)$，

（1）求 L 的弧长；

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围平面图形，求 D 的形心的横坐标。

【解析】（1）由弧长的计算公式得 L 的弧长为

$$\int_1^e\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)'\right]^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}dx$$
$$=\frac{e^2+1}{4}$$

（2）由形心的计算公式可得，D 的形心的横坐标为

$$\frac{\int_1^e x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}{\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)dx}=\frac{3\left(e^4-2e^2-3\right)}{4\left(e^3-7\right)}$$

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad（1）$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & -1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有 $1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，故有\begin{cases}x_1=k_1+k_2+1\\ x_2=-k_1\\ x_3=k_1\\ x_4=k_2\end{cases},其中k_1、k_2任意.$$

从而有$C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

【解析】(1)

$$f=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1b_2)x_1x_2$$
$$+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3$$

则f的矩阵为$\begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$

$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）令A=$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,则$A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha,A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的可能取值范围是（　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$　　（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

【详解】$\ln^{\alpha}(1+2x)\sim 2^{\alpha}x^{\alpha}$，是 α 阶无穷小，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}x^{\frac{2}{\alpha}}$ 是 $\frac{2}{\alpha}$ 阶无穷小，由题意可知 $\begin{cases}\alpha>1\\ \frac{2}{\alpha}>1\end{cases}$

所以 α 的可能取值范围是 $(1,2)$，应该选（B）.

2．下列曲线有渐近线的是

（A）$y=x+\sin x$　　（B）$y=x^2+\sin x$（C）$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　（D）$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

【详解】对于 $y=x+\sin\frac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以有斜渐近线 $y=x$

应该选（C）

3．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（D）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法.

【详解 1】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话，可以直接做出判断．　显然

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 就是联接 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 两点的直线方程．故当 $f''(x)\ge 0$ 时，曲线是凹的，也就是 $f(x)\le g(x)$，应该选（D）

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话，可令

$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则 $F(0)=F(1)=0$，且 $F''(x)=f''(x)$，故当 $f''(x)\ge 0$ 时，曲线是凹的，从而 $F(x)\le F(0)=F(1)=0$，即 $F(x)=f(x)-g(x)\le 0$，也就是

$f(x)\le g(x)$，应该选（D）

4．曲线$\begin{cases}x=t^2+7,\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{10}}{50}$　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{100}$　（C）$10\sqrt{10}$　（D）$5\sqrt{10}$

【详解】 曲线在点$(x,f(x))$处的曲率公式$K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$，曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$.

本题中$\dfrac{dx}{dt}=2t,\dfrac{dy}{dt}=2t+4$，所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+4}{2t}=1+\dfrac{2}{t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-\frac{2}{t^2}}{2t}=-\dfrac{1}{t^3}$，

对应于$t=1$的点处$y'=3,y''=-1$，所以$K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\dfrac{1}{10\sqrt{10}}$，曲率半径$R=\dfrac{1}{K}=10\sqrt{10}$.

应该选（C）

5．设函数$f(x)=\arctan x$，若$f(x)=xf'(\xi)$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

（A）1　（B）$\dfrac{2}{3}$　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{1}{3}$

【详解】注意（1）$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，（2）$x\to0$时,$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

由于$f(x)=xf'(\xi)$．所以可知$f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\arctan x}{x}$，$\xi^2=\dfrac{x-\arctan x}{(\arctan x)^2}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-arx\tan x}{x(\arctan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

6．设$u(x,y)$在平面有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\ne0$及$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，则（　　）.

（A）$u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的边界上；

（B）$u(x,y)$的最大值点和最小值点必定都在区域D的内部；

（C）$u(x,y)$的最大值点在区域D的内部，最小值点在区域D的边界上；

（**D**）$\boldsymbol{u(x,y)}$的最小值点在区域D的内部，最大值点在区域D的边界上.

【详解】$\boldsymbol{u(x,y)}$ 在平面有界闭区域D上连续，所以$\boldsymbol{u(x,y)}$在 D 内必然有最大值和最小值．并且如果在内部存在驻点$\boldsymbol{(x_0,y_0)}$，也就是$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，在这个点处$\boldsymbol{A=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},C=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},B=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}$，由条件，显然$\boldsymbol{AC-B^2<0}$，显然$\boldsymbol{u(x,y)}$不是极值点，当然也不是最值点，所以$\boldsymbol{u(x,y)}$的最大值点和最小值点必定都在区域$D$的边界上.

所以应该选（A）.

7．行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$等于

（A）$\boldsymbol{(ad-bc)^2}$　　（B）$\boldsymbol{-(ad-bc)^2}$　　（C）$\boldsymbol{a^2d^2-b^2c^2}$　　（D）$\boldsymbol{-a^2d^2+b^2c^2}$

【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-(ad-bc)^2$$

应该选（B）.

8．设$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ 是三维向量，则对任意的常数$\boldsymbol{k,l}$，向量$\boldsymbol{\alpha_1+k\alpha_3}$，$\boldsymbol{\alpha_2+l\alpha_3}$线性无关是向量$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性无关的

（A）必要而非充分条件　　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　　（D） 非充分非必要条件

【详解】若向量$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性无关，则

（$\boldsymbol{\alpha_1+k\alpha_3}$，$\boldsymbol{\alpha_2+l\alpha_3}$）$\boldsymbol{=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K}$，对任意的常数$\boldsymbol{k,l}$，矩阵$\boldsymbol{K}$的秩都等于 2，所以向量$\boldsymbol{\alpha_1+k\alpha_3}$，$\boldsymbol{\alpha_2+l\alpha_3}$一定线性无关.

而当$\boldsymbol{\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$时，对任意的常数$\boldsymbol{k,l}$，向量$\boldsymbol{\alpha_1+k\alpha_3}$，$\boldsymbol{\alpha_2+l\alpha_3}$线性无关，但$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性相关；故选择（A）.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$_____.

【详解】$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})\right)=\frac{3\pi}{8}$.

10. 设 $f(x)$ 为周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则 $f(7)=$_____.

【详解】当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C$，由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$；$f(x)$ 为周期为 4 奇函数，故 $f(7)=f(-1)=f(1)=1$.

11. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=$_____.

【详解】设 $F(x,y,z)=e^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$，$F_x=1,F_y=2ze^{2yz}+2y,F_z=2ye^{2yz}+1$，当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，$z=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{2}$，所以 $dz\big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$.

12. 曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为_____.

【详解】先把曲线方程化为参数方程 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta\end{cases}$，于是在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处，$x=0,y=\frac{\pi}{2}$，$\frac{dy}{dx}\big|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\big|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$.

13. 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$_____.

【详解】质心坐标 $\bar{x}=\frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1\rho(x)dx}=\frac{\int_0^1(-x^3+2x^2+x)dx}{\int_0^1(-x^2+2x+1)dx}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$.

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围

是_____.

【详解】由配方法可知

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$
$$=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\geq 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

【分析】. 先用等价无穷小代换简化分母，然后利用洛必达法则求未定型极限.

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})-x\right)=\frac{1}{2}$$

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值和极小值.

【详解】

解：把方程化为标准形式得到 $(1+y^2)\dfrac{dy}{dx}=1-x^2$，这是一个可分离变量的一阶微分方程，两边分别积分

可得方程通解为：$\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+C$，由 $y(2)=0$ 得 $C=\frac{2}{3}$，

即 $\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}$.

令 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}=0$，得 $x=\pm1$，且可知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2x(1+y^2)^2-2y(1-x^2)^2}{(1+y^2)^3}$；

当 $x=1$ 时，可解得 $y=1$，$y''=-1<0$，函数取得极大值 $y=1$；

当 $x=-1$ 时，可解得 $y=0$，$y''=2>0$，函数取得极小值 $y=0$.

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0. y\ge 0\}$. 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

【详解】由对称性可得

$$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\iint\limits_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{1}dxd=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr=-\frac{3}{4}$$

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【详解】

设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$$

由条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，

可知

$$f''(u)=4f(u)+u$$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程.
对应齐次方程的通解为：

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}\text{ 其中 }C_1,C_2\text{ 为任意常数.}$$

对应非齐次方程特解可求得为 $y^*=-\frac{1}{4}u$.

故非齐次方程通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

将初始条件 $f(0)=0, f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$.

所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a.b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1） $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$；

（2） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

【详解】

（1）证明：因为 $0\le g(x)\le 1$，所以 $\int_a^x 0dx\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt\quad x\in[a,b]$.

即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$.

（2）令 $F(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$，

则可知 $F(a)=0$，且 $F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)$，

因为 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,$ 且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\le f(a+x-a)=f(x)$. 从而

$F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0$， $\quad x\in[a,b]$

也是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则 $F(b)\ge F(a)=0$，即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}, x\in[0,1]$，定义函数列

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f(f_1(x)),\quad \cdots, f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$$

设 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1,\ y=0$ 所围图形的面积. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

【详解】

$$f_1(x)=\frac{x}{1+x}, f_2(x)=\frac{f_1(x)}{1+f_1(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x},\quad f_3(x)=\frac{x}{1+3x},\cdots,$$

利用数学归纳法可得 $f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$.

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\frac{1}{n}\int_0^1(1-\frac{1}{1+nx})dx=\frac{1}{n}(1-\frac{\ln(1+n)}{n}),$$

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln(1+n)}{n}\right)=1.$$

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，求曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【详解】

由于函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，所以 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)$，其中 $C(x)$ 为待定的连续函数.

又因为 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，从而可知 $C(y)=1-(2-y)\ln y$，

得到 $f(x,y)=y^2+2y+C(x)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x$.

令 $f(x,y)=0$，可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$. 且当 $y=-1$ 时，$x_1=1,x_2=2$.

曲线 $f(x,y)=0$ 所成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln xdx=(2\ln 2-\frac{5}{4})\pi$$

22.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵.

（1） 求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（2） 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

【详解】（1）对系数矩阵 A 进行初等行变换如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得到方程组 $AX=0$ 同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

得到 $AX=0$ 的一个基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

（2）显然 B 矩阵是一个 4×3 矩阵，设 $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$

对矩阵 (AE) 进行进行初等行变换如下：

$$(AE) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即满足 $AB=E$ 的所有矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 2-c_1 & 6-c_2 & -1-c_3 \\ -1+2c_1 & -3+2c_2 & 1+2c_3 \\ -1+3c_1 & -4+3c_2 & 1+3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

23.（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【详解】证明：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\boldsymbol{n}\end{pmatrix}$.

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-\boldsymbol{n})\lambda^{n-1},$$

所以 A 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值为 $\lambda_1=\boldsymbol{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$；

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda-\boldsymbol{n}\end{vmatrix}=(\lambda-\boldsymbol{n})\lambda^{n-1}$$

所以 B 的 $\boldsymbol{n}$ 个特征值也为 $\lambda_1=\boldsymbol{n},\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

对于 $\boldsymbol{n}-1$ 重特征值 $\lambda=0$，由于矩阵 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}$ 的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应 $\boldsymbol{n}-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 的特征向量应该有 $\boldsymbol{n}-1$ 个线性无关，进一步矩阵 B 存在 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对角化，且 $\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&0&&\\&&\cdots&\\&&&0\end{pmatrix}$

从而可知 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\boldsymbol{n}\end{pmatrix}$ 相似.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题解析

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ( )

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ (C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ (D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

【答案】(D)

【解析】$\int\frac{x}{e^x}dx=-(x+1)e^{-x}$，则 $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=-(x+1)e^{-x}\Big|_2^{+\infty}=3e^{-2}-\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=3e^{-2}$.

(2) 函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内( )

(A) 连续

(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点

(D) 有无穷间断点

【答案】(B)

【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x$， $x\neq0$，故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

(3) 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta},x>0\\0,x\le0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f^{'}\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续则:( )

(A) $\alpha-\beta>0$ (B) $0<\alpha-\beta\le1$

(C) $\alpha-\beta>2$ (D) $0<\alpha-\beta\le2$

【答案】(A)

【解析】$x<0$ 时， $f'\left(x\right)=0$ $f'_-\left(0\right)=0$

$$f'_+\left(0\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

$x>0$ 时， $f'\left(x\right)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\left(-1\right)x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}\left(-\beta\right)\frac{1}{x^{\beta+1}}$

$$=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则： $f'_-(0)=f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}=0$ 得 $\alpha-1>0$

$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=0$$

得：$\alpha-\beta-1>0$，答案选择 A

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(C)

【解析】根据图像观察存在两点，二阶导数变号.则拐点个数为 2 个.

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$ ，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 (　　)

(A) $\dfrac{1}{2},0$　　(B) $0,\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\dfrac{1}{2},0$　　(D) $0,-\dfrac{1}{2}$

【答案】(D)

【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $u=x+y,v=\dfrac{y}{x}$，则 $x=\dfrac{u}{1+v},y=\dfrac{uv}{1+v}$，从而 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$ 变为

$f(u,v)=\left(\dfrac{u}{1+v}\right)^2-\left(\dfrac{uv}{1+v}\right)^2=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$.故 $\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{2u(1-v)}{1+v},\dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{2u^2}{(1+v)^2}$，

因而 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\dfrac{1}{2}$.故选（D）.

(6)设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ (　　)

(A) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dr$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下计算该二重积分的积分区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\left|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le r\le\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right.\right\}$$

所以

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

故选 B.

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　）

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

【答案】(D)

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$,

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$.故选（D）

(8) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

且 $P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

由已知可得 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$

故 $Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.选（A）

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases}x=\arctan t\\y=3t+t^3\end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$

【答案】48

【解析】 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}[3(1+t^2)^2]=\frac{\frac{d[3(1+t^2)^2]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=48$.

(10)函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)=$_____

【答案】$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【解析】根据莱布尼茨公式得：

$f^{(n)}(0)=C_n^2 2(2^x)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=\frac{n(n-1)}{2}2(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

(11) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$

【答案】2

【解析】 已知$\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$，求导得$\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt+2x^2 f(x^2)$，故有

$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1,$

$\varphi'(1)=1+2f(1)=5,$ 则 $f(1)=2$.

(12)设函数$y=y(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解，且在$x=0$处$y(x)$取得极值 3，则

$y(x)$=_____.

【答案】$e^{-2x}+2e^x$

【解析】由题意知：$y(0)=3$，$y'(0)=0$，由特征方程：$\lambda^2+\lambda-2=0$解得$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$

所以微分方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$代入$y(0)=3$，$y'(0)=0$解得：$C_1=2$ $C_2=1$

解得：$y=2e^x+e^{-2x}$

(13)若函数$Z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$\mathrm{dz}\Big|_{(0,0)}$=_____.

【答案】$-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$

【解析】当$x=0,y=0$时$z=0$，则对该式两边求偏导可得

$$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial x}=-yz-e^{x+2y+3z}$$

$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial y}=-xz-2e^{x+2y+3z}$.将（0,0,0）点值代入即有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}.$$

则可得$dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy=-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$.

(14) 若3阶矩阵A的特征值为$2,-2,1$，$B=A^2-A+E$，其中E为3阶单位阵，则行列式

$|B|=$____.

【答案】21

【解析】A的所有特征值为$2,-2,1.$ B的所有特征值为$3,7,1.$

所以$|B|=3\times7\times1=21$.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、

证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】$a=-1,k=-\frac{1}{3},b=-\frac{1}{2}$

【解析】

方法一：

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

那么，

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

可得：$\begin{cases}1+a=0\\ b-\frac{a}{2}=0\\ \frac{a}{3k}=1\end{cases}$，所以，$\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

方法二：

由题意得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，得分子 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+a)=0$，求得 c；

于是 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$$

由分母$\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，得分子

$\lim\limits_{x\to 0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim\limits_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0$，

求得$b=-\dfrac{1}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}$$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{6k}$，求得$k=-\dfrac{1}{3}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 A>0，D 是由曲线段$y=A\sin x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$及直线$y=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$所围成的平面区域，$V_1$，

V_2分别表示 D 绕x轴与绕y轴旋转成旋转体的体积，若$V_1=V_2$，求 A 的值.

【答案】$\dfrac{8}{\pi}$

【解析】由旋转体的体积公式，得

$$\mathrm{V}_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(A\sin x)^2dx=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2A^2}{4}$$

$$\mathrm{V}_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xf(x)dx=-2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos x=2\pi A$$

由题$\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2$，求得$\mathrm{A}=\dfrac{8}{\pi}$.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数$f(x,y)$满足$f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$，$f_x'(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，

求 $f(x,y)$的极值.

【答案】极小值$f(0,-1)=-1$

【解析】 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分，得

$$f'_x(x,y)=2(\frac{1}{2}y^2+y)e^x+\varphi(x)=(y^2+2y)e^x+\varphi(x),$$

故 $f'_x(x,0)=\varphi(x)=(x+1)e^x$，

求得 $\varphi(x)=e^x(x+1)$，

故 $f'_x(x,y)=(y^2+2y)e^x+e^x(1+x)$，两边关于 x 积分，得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(y^2+2y)e^x+\int e^x(1+x)dx\\&=(y^2+2y)e^x+\int(1+x)de^x\\&=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-\int e^x dx\\&=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-e^x+\mathrm{C}\\&=(y^2+2y)e^x+xe^x+\mathrm{C}\end{aligned}$$

由 $f(0,y)=y^2+2y+\mathrm{C}=y^2+2y$，求得 $C=0.$

所以 $f(x,y)=(y^2+2y)e^x+xe^x.$

令 $\begin{cases}f'_x=(y^2+2y)e^x+e^x+xe^x=0\\ f'_y=(2y+2)e^x=0\end{cases}$，求得 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}.$

又 $f''_{xx}=(y^2+2y)e^x+2e^x+xe^x$，

$f''_{xy}=2(y+1)e^x$， $f''_{yy}=2e^x$，

当 $x=0,y=-1$ 时， $A=f''_{xx}(0,-1)=1,\ \mathrm{B}=f''_{xy}(0,-1)=0,\ C=f''_{yy}(0,-1)=2$，

$AC-B^2>0,\ f(0,-1)=-1$ 为极小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\right\}$

【答案】 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$

【解析】 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy$

$$=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t2\cos^2 tdt-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt-\frac{2}{5}\overset{u=2t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 udu-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f\left(x\right)$ 零点的个数？

【答案】2 个

【解析】 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$

令 $f'(x)=0$,得驻点为 $x=\frac{1}{2}$,

在 $(-\infty,\frac{1}{2})$, $f(x)$ 单调递减,在 $(\frac{1}{2},+\infty)$, $f(x)$ 单调递增

故 $f(\frac{1}{2})$ 为唯一的极小值,也是最小值.

而 $f(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}dt$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t}d-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t}d$$

在 $(\frac{1}{2},1)$, $\sqrt{1+t^2}<\sqrt{1+t}$,故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t}dt<0$

从而有 $f(\frac{1}{2})<0$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt]=\lim_{x\to+\infty}[\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt-\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt]$$

考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt}{\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上各有一个零点，所以零点个数为 2.

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为 $120°C$ 的物体在 $20°C$ 的恒温介质中冷却，30min

后该物体降至$30°C$，若要将该物体的温度继续降至$21°C$，还需冷却多长时间？

【答案】$30\min$

【解析】设t时刻物体温度为$x(t)$，比例常数为$k(>0)$，介质温度为m,则

$\frac{dx}{dt}=-k(x-m)$，从而$x(t)=Ce^{-kt}+m$，

$x(0)=120, m=20$，所以$C=100$，即$x(t)=100e^{-kt}+20$

又$x(\frac{1}{2})=30,$所以$k=2\ln 10$，所以$x(t)=\frac{1}{100^{t-1}}+20$

当$x=21$时，$t=1$，所以还需要冷却 3 0 min.

(21) (本题满分 10 分)

已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty]$上具有 2 阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，设$b>a$，曲线$y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与x轴的交点是$(x_0,0)$，证明$a<x_0<b$.

【证明】根据题意得点$(b,f(b))$处的切线方程为$y-f(b)=f'(b)(x-b)$

令$y=0$，得$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$

因为$f'(\mathrm{x})>0$所以$f(\mathrm{x})$单调递增，又因为$f(\mathrm{a})=0$

所以$f(\mathrm{b})>0$，又因为$f'(b)>0$

所以$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}<b$

又因为$x_0-a=b-a-\frac{f(b)}{f'(b)}$，而在区间（a,b）上应用拉格朗日中值定理有

$\frac{f(\mathrm{b})-\mathrm{f}(\mathrm{a})}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$

所以$x_0-a=b-a-\frac{f(b)}{f'(b)}=\frac{f(b)}{f'(\xi)}-\frac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\frac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$

因为$f''(\mathrm{x})>0$所以$f'(\mathrm{x})$单调递增

所以$f'(b)>f'(\xi)$

所以$x_0-a>0$，即$x_0>a$，所以$a<x_0<b$，结论得证.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且 $A^3=O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$， E 为 3 阶单位阵，求 X .

【答案】

$$a=0, X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【解析】

(I) $A^3=O \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3=0 \Rightarrow a=0$

(II)由题意知

$$X-XA^2-AX+AXA^2=E \Rightarrow X\left(E-A^2\right)-AX\left(E-A^2\right)=E$$

$$\Rightarrow (E-A)X\left(E-A^2\right)=E \Rightarrow X=(E-A)^{-1}\left(E-A^2\right)^{-1}=\left[\left(E-A^2\right)(E-A)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(E-A^2-A\right)^{-1}$$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(23) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

【答案】

（1）$a=4,b=5$；

（2）

$$P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

【解析】(I) $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

(II) $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=E+C$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，　$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$

2016年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1～8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合
题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x \to 0^+$ 时，以上3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　)

（A）a_1, a_2, a_3.　　（B）a_2, a_3, a_1.

（C）a_2, a_1, a_3.　　（D）a_3, a_2, a_1.

【答案】(B)

【解析】当 $x \to 0^+$ 时，

$$a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1) \sim -\frac{1}{2}x^2, a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x$$

所以3个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 a_2, a_3, a_1，故选B.

2、已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x<1, \\ \ln x, & x \ge 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A）$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x - 1), & x \ge 1. \end{cases}$　　（B）$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \ge 1. \end{cases}$

（C）$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \ge 1. \end{cases}$　　（D）$F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \ge 1. \end{cases}$

【答案】(D)

【解析】$F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} (x-1)^2 & x<1 \\ x\ln x - x + C & x>1 \end{cases}$，$F(x)$ 需连续，$F(1^+) = F(1^-)$

$\Rightarrow C = 1$

3、反常积分①$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$，②$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

（A）①收敛，②收敛.　　（B）①收敛，②发散.

（C）①发散，②收敛.　　（D）①发散，②发散.

【答案】（B）

【解析】$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=-(\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}})=1$，收敛

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}})=-1+\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

发散

故选 B.

4、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则(　　)

（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

【答案】（B）

【解析】根据极值的必要条件可知，极值点可能是驻点或导数不存在的点。根据极值的充分条件知，在某点左右导函数符号发生改变，则该点是极值点，因此从图形可知函数 $f(x)$ 有 2 个极值点.

根据拐点的必要条件可知，拐点可能是二阶导为 0 的点或二阶导不存在的点，根据拐点的充分条件可知，曲线在某点左右导函数的单调性发生改变，则该点是曲线的拐点，因此曲线 $y=f(x)$ 由 3 个拐点，故选 B.

5、设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个领域内，有(　　)

（A）$f_1(x) \le f_2(x) \le g(x)$　　（B）$f_2(x) \le f_1(x) \le g(x)$

（C）$f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$　　（D）$f_2(x) \le g(x) \le f_1(x)$

【答案】（A）

【解析】因为$f_i''(x)$连续且$f_i^{'}(x_0) < 0$，所以根据连续的定义和极限的保号性在x_0的某领域$U(x_0)$内有$f_i''(x) < 0$，所以$f_i(x)$在$U(x_0)$内是凸的.又因为在$x = x_0$处具有公切线$y = g(x)$，根据凸函数的几何意义可知曲线与切线位置关系为$f_i(x) \le g(x)$.在点x_0处$y = f_1(x)$曲率大于$y = f_2(x)$，所以$f_1''(x_0) < f_2''(x_0) < 0$，所以令$F(x) = f_1(x) - f_2(x)$，因为在$x = x_0$处具有公切线$y = g(x)$，所以$F(x_0) = 0$，$F'(x_0) = 0$.再由$F''(x_0) < 0$得，$F(x_0) = 0$为$F(x)$的极大值，所以在$x_0$的某领域$U_1(x_0)$内$F(x) \le 0$，故$f_1(x) \le f_2(x)$.从而$f_1(x) \le f_2(x) \le g(x)$.故选 A.

6、已知函数$f(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A）$f_x^{'} - f_y^{'} = 0$　　（B）$f_x^{'} + f_y^{'} = 0$

（C）$f_x^{'} - f_y^{'} = f$　　（D）$f_x^{'} + f_y^{'} = f$

【答案】（D）

【解析】因为$f_x'(x,y) = \dfrac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}, f_y'(x,y) = \dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，

所以$f_x'(x,y) + f_y'(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y} = f(x)$.故选 D.

7、设A，B是可逆矩阵，且A与B相似，则下列结论错误的是

（A）A^T与B^T相似　　（B）A^{-1}与B^{-1}相似

（C）$A + A^T$与$B + B^T$相似　　（D）$A + A^{-1}$与$B + B^{-1}$相似

【答案】（C）

【解析】A与B相似，所以存在可逆阵P　使得$P^{-1}AP = B$.

$B^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1}$，即$A^T$与$B^T$相似.

$B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$，即A^{-1}与B^{-1}相似.

又 $B=P^{-1}AP$，从而有 $B^{-1}+B=P^{-1}(A+A^{-1})P$

所以 $A+A^{-1}$ 与 $B^{-1}+B$ 相似，从而选 C.

8、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则(　　)

（A）$a>1$　　（B）$a<-2$

（C）$-2<a<1$　　（D）$a=1$ 与 $a=-2$

【答案】（C）

【解析】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，由

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$ 得，A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$，由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，且正负惯性指数恰好等于特征值中正、负数的个数，所以 $a+2>0$ 且 $a-1<0$，即 $-2<a<1$.故选 C.

二、填空题：9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为_____.

【答案】$y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2))=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x)=\dfrac{\pi}{2}$.所以斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

10、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$_____.

【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+2\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n}{n})$

$=\int_0^1 x\sin x dx=\sin 1-\cos 1$

11、以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为_____.

【答案】$y'-y=2x-x^2$

【解析】设一阶非齐次线性微分方程为 $y'+p(x)y=q(x)$.根据线性微分方程齐次与非齐次解之间的关系知 $x^2-(x^2-e^x)=e^x$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解，所以 $p(x)=-1$.又因为 $y=x^2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，所以 $q(x)=2x-x^2$.故一阶非齐次线性微分方程为 $y'-y=2x-x^2$.

12、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，则当 $n\geq 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$_____.

【答案】$\frac{5}{2}\times 2^n$

【解析】当 $x=0$ 时，$f(0)=1$；

$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导，得 $f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，$f'(0)=4$；

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$ 两边同时对 x 求导，得 $f''(x)=2+2f'(x)$，$f''(0)=10$；

$f''(x)=2+2f'(x)$ 两边同时对 x 求导，得 $f'''(x)=2f''(x)$；

……..

依次求导得 $f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)$；所以 $f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)=10\times 2^{n-2}=\frac{5}{2}\times 2^n$.

13、已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l .若点 P 的横坐标时间的

变化率为常数 V_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是 _____.

【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【解析】$l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$ ，同时对 t 求导得，$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\frac{dx}{dt}$，又因为 $x=1,\frac{dx}{dt}=v_0$，所以 $\frac{dl}{dt}\Big|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$.

14、设矩阵$\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$等价，则$a=$_____.

【答案】2

【解析】$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，$r(B)=2$

$$|\quad|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(\quad+1)^2(\quad-2)=0$$

当$a=-1$时，$r(A)=1$；当$a=2$时，$r(A)=2$，故$a=2$.

三、解答题：15～23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x+2x\sin x-1)}$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x+2x\sin x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)+2x(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+2x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4))-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3}$$

因此，原极限$=e^{\frac{1}{3}}$

16、（本题满分 10 分）

设函数$f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt(x>0)$，求$f'(x)$并求$f(x)$的最小值.

【解析】$f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt,(x>0)$

当$0<x\le 1$时，$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt$

$$=x^3-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^3-x^2(1-x)=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

当 $x>1$ 时，　　$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2\int_0^1 dt-\int_0^1 t^2dt=x^2-\frac{1}{3}$

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3} & 0<x\le 1\\ x^2-\frac{1}{3} & x>1\end{cases}$　　$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x\le 1\\ 2x & x>1\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 可得当 $0<x\le 1$ 时 $x=\frac{1}{2}$ 为驻点且为极小值点 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，而 $f(1)=\frac{2}{3}$

所以 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

17、（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

【解析】$\begin{cases}2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0\\ x^2\frac{\partial z}{\partial y}+2yz+y^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}xz+1=0\\ yz+1=0\\ x^2z+y^2z+\ln z+2(x+y+1)=0\end{cases}$　　$\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=1\end{cases}$

由 $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0$ 再对 x 求导可得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,x=-1,y=-1,z=1$ 代入可得 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}<0$，同理：$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0$

由 $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0$ 再对 y 求导可得

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0,x=-1,y=-1,z=1$ 代入可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

$AC-B^2>0$ 且 $A<0$，所以 $(-1,-1)$ 处取得极大值.

18、（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1$，$y=x$，$y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】$I=\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \frac{x^2+y^2-2y^2}{x^2+y^2}dxdy-\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=I_1+I_2$

又区域 D 关于　轴对称，则 $I_2=0$

$$I_1=\iint\limits_D dxdy-2\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=I_3+I_4$$

其中 $I_3=\iint\limits_D dxdy=1$，

$$I_4=2\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=4\iint\limits_{D_1} \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy=4\int_0^1 dy\int_0^y \frac{y^2}{x^2+y^2}dx$$

又 $\int_0^y \frac{y^2}{x^2+y^2}dx=y\int_0^y \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}d\frac{x}{y}=y\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^y=\frac{\pi}{4}y$

故 $I_4=\pi\int_0^1 ydy=\frac{\pi}{2}$，则 $I=1-\frac{\pi}{2}$.

19、（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=\mu(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y^n-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解，若 $\mu(-1)=e$，$\mu(0)=-1$，求 $\mu(x)$ 并写出该微分方程的通解.

【解析】已知 $y_2(x)=\mu(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的解，代入并整理得 $(2x-1)\mu''=(3-2x)\mu'$，即 $\frac{\mu''}{\mu'}=\frac{3-2x}{2x-1}$，

所以 $\int\frac{\mu''}{\mu'}dx=\int\frac{3-2x}{2x-1}dx$，$\ln|\mu'|=\int\frac{1-2x+2}{2x-1}dx=-x+\ln|2x-1|+\ln C_1$.

所以 $|\mu'(x)|=e^{-x}\cdot|2x-1|C_1$，$\mu'(x)=C_1(2x-1)e^{-x}$。

$$\mu(x)=\int C_1(2x-1)e^{-x}dx=C_1[-2xe^{-x}-e^{-x}+C_2]$$

已知 $\mu(-1)=e$， $\mu(0)=-1$，所以 $C_1=1$， $C_2=0$，即 $\mu(x)=-2xe^{-x}-e^{-x}$.

已知 $y_1(x)$， $y_2(x)$ 必线性无关，从而原方程通解为 $y=k_1e^{-x}+k_2(-2x-1)e^{-x}$， k_1,k_2 为任意常数.

20、（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

【解析】$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt+3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 t dt$$

则 $V==\dfrac{2\pi}{3}-3\pi\cdot\dfrac{16}{35}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{18}{35}\pi$

$$S_1=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx=2\pi$$

$$S_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\sqrt{(3\sin^2 t\cos t)^2+(3\cos^2 t\sin t)^2}dt$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot 3\sin t\cos t dt$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^4 t d\sin t=\frac{6\pi}{5}\sin^5 t\,|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi}{5}$$

所以 $S=S_1+S_2=2\pi+\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{16\pi}{5}$.

21、（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$，

（1）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（2）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点.

【解析】（1）$f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dx\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx}{\frac{3}{2}\pi}$

$$=\frac{-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2}dt}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{-\frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{3\pi}$$

（2）$f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$ 得，$f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$，令 $f'(x)=0$ 解得在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 上的唯一驻点为 $x=\frac{\pi}{2}$，且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ 时，$f'(x)>0$

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内的极小值点，也是最小值点.故 $f_{\min}(x)=f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(0)=0$，$f(\pi)>0$，结合单调性可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内无零点，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 内唯一零点，综上所述，$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内只有唯一零点.

22、（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（1）求 a 的值；

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

【解析】（1）由方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$，故这里有 $|A|=0$，

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$ 或 $a=2$。由于当 $a=0$ 时，$r(A)\neq r(A,\beta)$，而当 $a=2$ 时，$r(A)=r(A,\beta)$ 综上，故 $a=0$ 符合题目.

（2）当 $a=0$ 时，$A^TA=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$，故

$$(A^TA, A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

23、（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（1）求 A^{99}

（2）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(1)由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$。

所以 A 可相似对角化，且 A 与 $\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 相似。

由 $(0E-A)x=0$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$；由 $(-E-A)x=0$ 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；由 $(-2E-A)x=0$ 得

$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&1\\1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=\Lambda$.

所以 $A = P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)由 $B^2 = BA$ 得

$B^3 = B^2A = BA^2 \Rightarrow B^4 = B^2A^2 = BA^3 \Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow B^{100} = BA^{99}$,

所以 $(\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)A^{99}$,

所以 $\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$

$\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2$,

$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1））若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore \dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则（　　）

$(A)\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$　　$(B)\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$

$(C)\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$　　$(D)\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

【答案】B

【解析】

$f(x)$ 为偶函数时满足题设条件，此时 $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx$，排除 C,D.

取 $f(x)=2x^2-1$ 满足条件，则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2-1\right)dx=-\dfrac{2}{3}<0$，选 B.

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n{}^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

【答案】D

【解析】特值法：（A）取 $x_n=\pi$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pi$，A 错；

取 $x_n=-1$，排除 B,C.所以选 D.

（4）微分方程的特解可设为

（A）$Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（B）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（C）$Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（D）$Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

【答案】A

【解析】特征方程为：$\lambda^2-4\lambda+8=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=2\pm 2i$

$\because f(x)=e^{2x}(1+\cos 2x)=e^{2x}+e^{2x}\cos 2x\therefore y_1^*=Ae^{2x},y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x),$

故特解为：$y^*=y_1^*+y_2^*=Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$, 选 C.

（5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且对任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则

（A）$f(0,0)>f(1,1)$　（B）$f(0,0)<f(1,1)$　（C）$f(0,1)>f(1,0)$　（D）$f(0,1)<f(1,0)$

【答案】C

【解析】$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,\Rightarrow f(x,y)$ 是关于 x 的单调递增函数，是关于 y 的单调递减函数，

所以有 $f(0,1)<f(1,1)<f(1,0)$，故答案选 D.

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）

（A）$t_0=10$　　（B）$15<t_0<20$　　（C）$t_0=25$　　（D）$t_0>25$

【答案】B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(\mathrm{t})dt, \int_0^{t_0} v_2(\mathrm{t})dt$, 则乙要追上甲，则

$\int_0^{t_0} v_2(\mathrm{t}) - \mathrm{v}_1(\mathrm{t})dt = 10$，当 $t_0 = 25$ 时满足，故选 C.

（7）设 A 为三阶矩阵，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$（　　）

（A）$\alpha_1 + \alpha_2$　　（B）$\alpha_2 + 2\alpha_3$　（C）$\alpha_2 + \alpha_3$　　（D）$\alpha_1 + 2\alpha_2$

【答案】 B

【解析】

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 + 2\alpha_3,$$

因此 B 正确。

（8）设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,则（　）

（A）A与C相似, B与C相似　　（B）A与C相似, B与C不相似

（C）A与C不相似, B与C相似　　（D）A与C不相似, B与C不相似

【答案】B

【解析】由 $|\lambda E - A| = 0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1,

因为 $3 - r(2E - A) = 1$，∴A 可相似对角化，即 $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E - B| = 0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3 - r(2E - B) = 2$，∴B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，∴ $A \sim C$，但 B 不相似于 C.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_____

【答案】 $y=x+2$

【解析】

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\arcsin\frac{2}{x})=1,\lim_{x\to\infty}\left(y-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\arcsin\frac{2}{x}=2,$$

$$\therefore y=x+2$$

(10) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$_____

【答案】 $-\frac{1}{8}$

【解析】

$$\frac{dy}{dt}=\cos t,\frac{dx}{dt}=1+e^t\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t}{1+e^t}$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{\cos t}{1+e^t}\right)'}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos te^t}{\left(1+e^t\right)^2}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{8}$$

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx=$_____

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx&=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)d\frac{1}{1+x}\\&=-\left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx\right]\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx=1.\end{aligned}$$

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$， $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$_____

【答案】 xye^y

【解析】 $f_x'=ye^y,\ f_y'=x(1+y)e^y,\ f(x,y)=\int ye^ydx=xye^y+c(y)$, 故

$$f'_y = xe^y + xye^y + c'(y) = xe^y + xye^y,$$

因此$c'(y)=0$，即$c(y)=C$，再由$f(0,0)=0$，可得$f(x,y)=xye^y$.

【答案】

【解析】

（13）$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx =$ _____

【答案】$\ln\cos 1$.

【解析】交换积分次序：

$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx = \int_0^1 dx\int_0^x \frac{\tan x}{x}dy = \int_0^1 \tan x dx = \ln\cos 1$.

（14）设矩阵$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$的一个特征向量为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则$a=$ _____

【答案】-1

【解析】设$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，由题设知$A\alpha=\lambda\alpha$，故

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3+2a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

故$a=-1$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t}{\sqrt{x^3}}dt$，令$x-t=u$，则有

$$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt = -\int_x^0 \sqrt{u}e^{x+u}du = \int_0^x \sqrt{u}e^{x+u}du$$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{u}e^{x+u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{u}du}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sqrt{u}e^{u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}e^x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2}{3}$

（16）（本题满分 10 分）设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1),\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1),$

【解析】

$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$

$\Rightarrow\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1^{'}e^x+f_2^{'}\left(-\sin x\right)\right)\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)\cdot 1+f_2^{'}(1,1)\cdot 0=f_1^{'}(1,1)$

$\Rightarrow\dfrac{d^2y}{dx^2}=f_{11}^{''}e^{2x}+f_{12}^{''}e^x(-\sin x)+f_{21}^{''}e^x(-\sin x)+f_{22}^{''}\sin^2 x+f_1^{'}e^x-f_2^{'}\cos x$

$\Rightarrow\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$

结论：

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}^{''}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$

（17）（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\dfrac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\dfrac{1}{4}$

（18）（本题满分 10 分）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】
两边求导得：

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ （1）

令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$

对（1）式两边关于 x 求导得 $6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0$ （2）

将 $x=\pm1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} or \begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

将 $x=1,y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1,y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点，$y(1)=1$；$x=-1$ 为极小值点，$y(-1)=0$

（19）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Π) 方程 $f(x)f^{'}(x)+(f^{'}(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】
【解析】
（I） $f(x)$ 二阶导数，$f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)$ 有 $f\left(\delta\right)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0,f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理$\exists\eta\in(0,\xi)$,使$f'(\eta)=0$，则$F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对$F(x)$在$(0,\eta),(\eta,\xi)$分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$且$\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$在$(0,1)$至少有两个不同实根。

得证。

（20）（本题满分 11 分）已知平面区域$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\right\}$,计算二重积分$\iint\limits_D(x+1)^2dxdy$。

【答案】$\dfrac{5\pi}{4}$

【解析】$\iint\limits_D(x+1)^2dxdy=\iint\limits_D\left(x^2+1\right)dxdy=2\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cos^2\theta d\theta+\pi=\dfrac{5\pi}{4}$

（21）（本题满分 11 分）设$y(x)$是区间$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$内的可导函数，且$y(1)=0$，点$P$是曲线 L: $y=y(x)$上任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点$\left(0,Y_p\right)$，法线与 x 轴相交于点$\left(X_p,0\right)$，若$X_p=Y_p$，求 L 上点的坐标(x,y)满足的方程。

【答案】

【解析】设$p\left(x,y(x)\right)$的切线为$Y-y(x)=y'(x)\left(X-x\right)$，令$X=0$得$Y_p=y(x)-y'(x)x$，法线$Y-y(x)=-\dfrac{1}{y'(x)}\left(X-x\right)$,令$Y=0$得$X_p=x+y(x)y'(x)$。由$X_p=Y_p$得$y-xy'(x)=x+yy'(x)$，即$\left(\dfrac{y}{x}+1\right)y'(x)=\dfrac{y}{x}-1$。令$\dfrac{y}{x}=u$，则$y=ux$，按照齐次微分方程的解法不难解出$\dfrac{1}{x}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln|x|+C$,

（22）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵$A=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right)$有 3 个不同的特征值，且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明：$r(A)=2$

(Π) 若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组$Ax=\beta$的通解。

【答案】（I）略；（II）通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（I）证明：由$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$可得$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix},\lambda_1\neq\lambda_2\neq0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知$3-r(A)=1$，即$Ax=0$的基础解系只有 1 个解向量，

由$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$可得$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则$Ax=0$的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则$Ax=\beta$的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$的通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（23）（本题满分 11 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$X=QY$下的标准型$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$.

【答案】$a=2;Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},f\ \underline{\underline{x=Qy}}\ -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，，

则 $Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$$f(x_1, x_2, x_3) \underline{\underline{\underline{x=Qy}}} -3y_1^2 + 6y_2^2$$

2018 年考研数学二试题与答案解析（完整版）

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则

A. $a=\frac{1}{2},b=-1$　　B. $a=-\frac{1}{2},b=-1$

C. $a=\frac{1}{2},b=1$　　D. $a=-\frac{1}{2},b=1$

【答案】B

【解析】

$$1=\lim_{x\to 0}\left(e^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+ax^2+bx\right)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x\left(e^x+ax^2+bx\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+2ax+b\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

2.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

A. $f(x)=|x|\sin(x)$　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】D

【解析】

A 正确

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sin(x)}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sin(x)}{x}=0$$

B 正确

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sin\sqrt{-x}}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sin\sqrt{x}}{x}=0$$

C 正确

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$$

D 不正确 $f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}(-x)}{x}=\frac{1}{2}$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$$

$$f_+'(0)\neq f_-'(0)$$

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2-ax, x\leq -1\\ x, \quad -1<x<0,\\ x-b, x\geq 0\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则

A. $a=3,b=1$　　B. $a=3,b=2$

C. $a=-3,b=1$　　D. $a=-3,b=2$

【答案】B

【解析】

$$\lim_{x\to 0^-}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0^-}f(x)+\lim_{x\to 0^-}g(x)=-1+0=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to 0^+}g(x)=1-b$$

$$\Rightarrow -1=1-b\Rightarrow b=2$$

$$\lim_{x\to -1^-}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to -1^-}f(x)+\lim_{x\to -1^-}g(x)=-1+2+a=1+a$$

$$\lim_{x\to -1^+}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to -1^+}f(x)+\lim_{x\to -1^+}g(x)=-1-1=-2$$

$$\Rightarrow -2=1+a\Rightarrow a=3$$

4. .设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,$ 则

A.当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　B. 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

C. 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$　　D. 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

【答案】D

【解析】

A 错误

$$f(x)=-x+\frac{1}{2},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x+\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$f'(x)=-1<0,f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

B 错误

$$f(x)=-x^2+\frac{1}{3},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-x^2+\frac{1}{3}\right)dx=0$$

$$f''(x)=-2<0,f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}>0$$

C 错误

$$f(x)=x-\frac{1}{2},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=0$$

$$f'(x)=1>0,f\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

D 正确

$$f(x)=x^2-\frac{1}{3},\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=0$$

$$f''(x)=2>0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}<0$$

5.设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$

C. $K>M>N$　　D. $K>N>M$

【答案】C

【解析】

$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$1+\sqrt{\cos x}\geq 1$,所以$K>M$

令$f(x)=1+x-e^x, f(0)=0, f'(x)=1-e^x$

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)<0$;当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$f'(x)>0$

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，有$f(x)\leq 0$，从可有$\frac{1+x}{e^x}\leq 1$，由比较定理得N<M, 故选C

6. $\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{6}$

【答案】C

【解析】如图, $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=\iint_D(1-xy)dxdy=\iint_D dxdy=S_D=\frac{7}{3}$.

7.下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】令 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似

故选（A）

8.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则

A. $r(A\quad AB)=r(A)$.　　B. $r(A\quad BA)=r(A)$.

C. $r(A\quad B)=\max\{r(A),\ r(B)\}$.　　D. $r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$.

【答案】（A）

【解析】$r(E,B)=n\Rightarrow r(A,AB)=r[A(E,B)]=r(A)$

故选（A）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$_____.

【答案】1

【解析】令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\arctan(1+\frac{1}{t})-\arctan\frac{1}{t}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+(1+\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})-\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2+(1+t)^2}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+(1+\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})-\frac{1}{1+(\frac{1}{t})^2}(-\frac{1}{t^2})}{2t(1+t^2)[t^2(1+t)^2]}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t+t^2}{2t}$$

$$=1$$

10. 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

【答案】$y=4x-3$

【解析】$y'=x+\frac{2}{x}$，$y''=2-\frac{2}{x^2}$，令 $y''=0$，则 $x_0=\pm 1$，由于 $x>0$，故 $x_0=1$

$y'(x_0)=4$，则过拐点 $(1,1)$ 的切线方程为 $y-1=4(x-1)$ 即 $y=4x-3$.

11. $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$_____.

【答案】$\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}dx$

$$=\int_5^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Big|_5^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x-3}{x-1}-\ln\frac{5-3}{5-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2$$

12. 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为_____.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$y'=\frac{-\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$，$y'|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$，

$$y''\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}，\quad y''\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3(\frac{\sqrt{2}}{2})^5}=\frac{4\sqrt{2}}{3}，$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}.$$

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=$_____.

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】根据题意，得 $z(2,\frac{1}{2})=1$，对方程两边同时对 x 偏导数并讲点代入，得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}$.

14.设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$，则 A 的实特征值为_____.

【答案】2

【解析】

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$ 的值

【答案】$\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1})+C$

【解析】

$$原式=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int e^{2x}\frac{1}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx)$$

$\int\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$，令 $\sqrt{e^x-1}=t,e^x=t^2+1,x=\ln(t^2+1)$

原式

$$=\int\frac{(t^2+1)^2}{2t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt$$
$$=\int(t^2+1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+t+C$$
$$=\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1}+C$$

故原式$=\frac{1}{2}(e^{2x}arc\tan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{e^x-1})+C$

16.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$.

（I）求 $f(x)$；（II）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值。

【答案】（I） $f(x)=e^{-x}(2ae^x-2a)$；（II） $a=\frac{e}{2}$

【解析】（I）

$\int_0^x tf(x-t)dt\ \underline{\underline{令x-t=u}}\ x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

则有$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$，两边同时对$x$求导，则有

$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax,$

$f'(x)+f(x)=2a,$故$f(x)=e^{-x}(2ae^x+C),$由于当$x=0$时，$f(0)=0$，

则$C=-2a,$综上$f(x)=e^{-x}(2ae^x-2a).$

（II）由于$\int_0^1 f(x)dx=1$，则$\int_0^1 e^{-x}(2ae^x-2a)dx=1\Rightarrow 2a+2a(e^{-1}-1)=1\Rightarrow a=\frac{e}{2}.$

17.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与 x 轴围成，计算二重积分$\iint\limits_D(x+2y)dxdy$.

【答案】$\frac{5\pi}{2}$

【解析】

$$\iint_D (x+2y)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\varphi(x)} (x+2y)dy$$

$$=\int_0^{2\pi} [(xy+y^2)\Big|_0^{\varphi(x)}]dx$$

$$=\int_0^{2\pi} [x\varphi(x)+(\varphi(x))^2]dx$$

令 $x=t\sin t$

$$=\int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-cost)+(1-\cos t)^3 dt$$

$$=\int_0^{2\pi} (t-\sin t)d(t-\sin t)+\int_0^{2\pi} 8\sin^6\frac{t}{2}dt$$

$$=0+\frac{5\pi}{2}$$

$$=\frac{5\pi}{2}$$

18. （本题满分 10 分）

已知常数 $k\ge \ln 2-1$，证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$

【解析】

当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$.只需证明 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\le 0$ 即可.

设 $f\left(x\right)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$, 则

$$f'\left(x\right)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$$

设 $g\left(x\right)=x-2\ln x+2k$，则

$$g'\left(x\right)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}<0.$$

故 $g\left(x\right)\ge g\left(1\right)=1+2k\ge 1+2\ln 2-2=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}\ge 0$

$f'\left(x\right)\ge 0$，故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 内单增，故 $f\left(x\right)\le f\left(1\right)=0$.

当 $x\ge 1$ 时，$x-1\ge 0$.只需证明 $x-\ln^2 x+2k\ln x-1\ge 0$ 即可.

设 $f\left(x\right)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$, $g\left(x\right)=x-2\ln x+2k$

$$f'\left(x\right)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{x-2\ln x+2k}{x}$$

$$g'\left(x\right)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}<0.$$

故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单减，$g(x)\ge g(+\infty)\ge 0$

所以 $f'(x)\ge 0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单增，故 $f(x)\ge f(1)=0$.

综上得证.

19. （本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围城圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

【解析】假设圆的半径为 x，正方形边长为 y，正三角形边长为 z，则有

$$2\pi x+4y+3z=2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$$

令 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$

$$f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2\pi x+2\pi\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+4\lambda=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0\\ 2\pi x+4y+3z-2=0\end{cases}$$

求解上述方程得到，驻点为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}(1,2,2\sqrt{3})$

最小面积为，$S_{\min}=\pi\left(\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$。

20. （本题满分 11 分）

已知曲线 L：$y=\frac{4}{9}x^2(x\ge 0)$，点 $O(0,0)$，点 $A(0,1)$，设 P 是 L 上的动点，S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积，若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4，求此时 S 关于时间 t 的变化率。

【答案】

【解析】$S(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{9}x^2\right)x-\int_0^x\frac{4}{9}x^2dx=\frac{x}{2}+\frac{2x^3}{27}$

$$S'(x)=\frac{x'(t)}{2}+\frac{6x^2x'(t)}{27}$$

将 $x=3,x'(t)=4,$ 代入有 $S'=\frac{4}{2}+\frac{6\cdot 3^2\cdot 4}{27}=10$

21. （本题满分 11 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,...)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

【答案】0

【解析】

(1)由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 有 $e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\Rightarrow x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$

则 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$

设 $f(x)=e^x-1-x$

$\because f'(x)=e^x-1>0(x>0)$,且 $f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 单调递增,故 $f(x)>0$ 而 $e^x-1>x(x>0)$

因此 $\frac{e^{x_1}-1}{x_1}$ 在 x_1 时大于 1,而 $x_2=\ln\frac{e^{x_1}-1}{x_1}>0$,

用数学归纳法可证之. 对 $\forall n,x_n>0$

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$$

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$

$\because g'(x)=-xe^x$

显然当 $x>0$ 时，$g'(x)<0,$ 则 $g(x)$ 单调递减，又 $\because g(0)=0$

$\therefore g(x)<g(0)=0,\therefore e^x-1<xe^x\Rightarrow\frac{e^x-1}{xe^x}<1$

$\therefore x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<0, n=1,2,3,\cdots$

故$\{x_n\}$单调递减

综上可知$\{x_n\}$单调递减且存在下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，故$ae^n=e^a-1$，因此$a=0$.

22. （本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数。

（1） 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

（2） 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形

【解析】

（1）

$\because f(x_1,x_2,x_3)=0$

$$\therefore \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

①当$a-2=0$，即$a=2$时，$r(A)=2<3, A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=0$有非零解

通解为$x=k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k\in R$

②当$a-2\neq 0$，即$a\neq 2$时，$r(A)=3, f(x_1,x_2,x_3)=0$只有 0 解

即$x_1=x_2=x_3=0$

(2)当 $a \neq 2$ 时

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a\end{bmatrix},|A|\neq 0$$

$\therefore$ 令 $y=Ax$ 为非退化的线性变换

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

当 $a=2$ 时

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3\right)&=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3\\&=2\left(x_1-\frac{x_2+3x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(x_2-x_3\right)^2\end{aligned}$$

令:

$$\begin{cases}y_1=x_1-\dfrac{x_2+3x_3}{2}\\ y_2=x_2-x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

$\therefore$ 二次型的标准型为 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$

$\therefore$ 二次型的规范型为 $z_1^2+z_2^2$

23. （本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

（1） 求 a

（2） 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P

【答案】

（1） $a=2$

（2） $P=\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$

【解析】

（1）

$\because$ 矩阵 A 经过初等列变换得到矩阵 B

$\therefore$ 矩阵 A,B 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}$$

$\therefore 2-a=0,a=2$

（2）

$$(A,B)=\begin{bmatrix}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{bmatrix},Z=\begin{bmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&k_3-k_2\end{bmatrix}$$

$\because P$ 可逆，$\therefore k_2\neq k_3$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},\quad k_2\neq k_3,k_1,k_2,k_3\in R$$

2019 年全国硕士研究生入学统一考试数二真题解析

一、选择题，1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 为同阶无穷小量，则 $k =$

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【答案】C

【答案解析】$\because x - \tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$,若要 $x - \tan x$ 与 x^k 同阶无穷小，$\therefore k = 3$.故选 C.

对泰勒不熟悉的同学，本题也可以用洛必达法则.

2.函数 $y = x\sin x + 2\cos x \quad (0 < x < 2\pi)$ 的拐点为

A.$\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$　　B.$(0,2)$　　C.$(\pi,-2)$　　D.$\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right)$

【答案】C.

【答案解析】

$$\begin{aligned} y' &= \sin x + x\cos x - 2\sin x \\ &= x\cos x - \sin x \end{aligned}$$

令 $y''(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x = 0$，得 $x = 0, x = \pi$；

$x < 0$ 时，$y''(x) < 0$；$x > 0$ 时，$y''(x) < 0$，故 x=0 不为拐点.

$0 < x < \pi$ 时，$y''(x) < 0$；$\dfrac{3\pi}{2} > x > \pi$ 时，$y''(x) > 0$，故拐点为 $(\pi,-2)$.

3.下列反常积分发散的是

A.$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　B.$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$　　C.$\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　D.$\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx$

【答案 】D.

【答案解析】A、B 选项可以通过积分计算，都是收敛的。C、D 选项可以通过极限形式的比较审敛法，快速得出 D 发散。

选项 D 也可直接计算 $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$

4. 微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$，则 a,b,c 的值为

A.1,0,1　　B.1,0,2　　C.2,1,3　　D.2,1,4

【答案】D.

【答案解析】由题意可知通解为 $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$

因为 $\mathrm{e}^{-x}, x\,\mathrm{e}^{-x}$ 为 $y'' + ay' + by = 0$ 的两个解.即 $\lambda = -1$ 为二重根.

$\lambda^2+a\lambda+b=0\Rightarrow 1-a+b=0 \qquad \Delta=a^2-4b=0\Rightarrow a=2,b=1,$

所以 $y=\mathrm{e}^x$ 为 $y''+ay'+by=c\,\mathrm{e}^x$ 的特解：$y''+2y'+y=c\,\mathrm{e}^x$

将 $\mathrm{e}^x=y$ 代入 $\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=c\,\mathrm{e}^x\Rightarrow c=4$

$a=2,b=1,c=4$，故选 D.

5.已知积分区域 $D=\left\{(x,y)\left||x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\right.\right\}$，$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，

$I_3=\iint\limits_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ 的大小关系为（　）

A. $I_3<I_2<I_1$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2<I_1<I_3$　　D. $I_2<I_3<I_1$

【答案】A

【答案解析】因为 $\sin x<x(x>0时)$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}>\sin\sqrt{x^2+y^2}$，故可知：$I_1>I_2$；

$1-\cos x<\sin x(x>0时)$，故由定积分性质可知：$I_2>I_3$，故选 A.

6.已知 $f(x)g(x)$ 是二阶可导且在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)g(x)$ 相切于 a 且曲率相等是

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 的（　）

A.充分非必要条件　　B.充分必要条件

C.必要非充分条件　　D.既非充分又非必要条件

【答案】A

【答案解析】充分性：

由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 可知 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),f''(a)=g''(a)$，

故两曲线必相切且由曲率公式可知，曲率也相等.

必要性：若曲率相等，由曲率公式得，f 与 g 的二阶导也可能互为相反数，所以无法推出

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$

故选 A.

7.设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

【答案】A.

【答案解析】由于 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，故 $r(A)=4-2=2$，由

$$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$$ 可知 $r(A^*)=0$.

8.设 A 是 3 阶单位矩阵，E 是 3 阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$ 且 $|A|=4$，则二次型 X^TAX 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【答案解析】由 $A^2+A=2E$ 可知，矩阵的特征值满足 $\lambda^2+\lambda=2$，所以A的两个特征值为$-2,1$; 又知道行列式等于所有特征值的乘积，故矩阵的第三个特征值为-2，所以二次型的正负惯性指数分别为 1，2.故选 C.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{2}{x}}=$_____ .

【答案】$4e^2$

【答案解析】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{x}\ln(2^x+x)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2(e^{x\ln 2}+x-1)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2(e^{x\ln 2}+x-1)}{x}}=e^{2(1+\ln 2)}=4e^2$

10.曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ 在对应点 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 处切线在轴上的截距为_____.

【答案】$\dfrac{3\pi}{2}+2$

【答案解析】当 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 时，

$x=\dfrac{3\pi}{2}+1, y=1, \dfrac{dy}{dx}=\left.\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-1,$ 切线方程为：$y=-x+\dfrac{3\pi}{2}+2$，所以 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 处切线

在轴上的截距为$\frac{3\pi}{2}+2$.

11.设函数$f\left(u\right)$可导，$z=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

【答案】z

【答案解析】【秒杀法】$f\left(u\right)=1$，则$z=y$，$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0+y=y=z$。

如果担心，可以再给个特例，$f\left(u\right)=2$，结果仍然是 z.

【常规方法】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\cdot(-\frac{y^2}{x^2}),\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{y^2}{x})+\frac{2y^2}{x}f'$，所以$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=yf(\frac{y^2}{x})=z$

12. 设函数$y=\ln\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{6})$的弧长为 _____ .

【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【答案解析】$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}dx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln 3.$

13.已知函数$f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$,则$\int_0^1 f(x)dx=$ _____ .

【答案】$\frac{1}{4}(\cos 1-1)$

【答案解析】

由题意可知：$f(1)=0$,故$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dtdx=-\int_0^1\frac{\sin t^2}{t}dt\int_0^x xdx=-\frac{1}{2}\int_0^1 t\sin t^2dt$

$=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$

本题也可使用分部积分计算。

14.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$表示$|A|$中$(i,j)$的代数余子式

则 $A_{11}-A_{12}=$ _____ .

【答案】-4

【答案解析】$A_{11}-A_{12}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=-4$

二、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ xe^{x}+1, & x\le 0\end{cases}$,求$f(x)$的极值.

【答案解析】当 $x>0$ 时，$f'(x)=\left(x^{2x}\right)'=\left(e^{2x\ln x}\right)'=e^{2x\ln x}\left(2\ln x+2\right)=x^{2x}\left(2\ln x+2\right)$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=\left(x\mathrm{e}^{x}+1\right)'=\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}=\left(1+x\right)\mathrm{e}^{x}$.

当 x=0 时，$f\left(0\right)=1$，$f'_{+}\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{2x\ln x}{x}=-\infty$，

$f'_{-}\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{xe^{x}+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}e^{x}=1$.故 $f'\left(x\right)=\begin{cases}x^{2x}\left(2\ln x+2\right) & x>0\\ \left(1+x\right)\mathrm{e}^{x} & x<0\end{cases}$.

$\therefore$ 有 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.于是

$$f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2), & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ \mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}, & x<0\end{cases}$$

令 $f'\left(x\right)$=0，得 $x_1=e^{-1},x_2=-1$.

于是有下列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	（-1，0）	0	$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↗	极大值	↓	极小值	↗

当 $x\in\left(0,e^{-1}\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减，当 $x\in\left(e^{-1}，+\infty\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增，

故 $f\left(e^{-1}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$ 为极小值.

当 $x\in\left(-1,0\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增，当 $x\in\left(0,e^{-1}\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减，

故 $f\left(0\right)$=1 为极大值.

当 $x\in\left(-\infty,-1\right),f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减，当 $x\in\left(-1,0\right),f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增，

故 $f\left(-1\right)=-e^{-1}+1$ 为极小值.

16.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

【答案解析】

$$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1})dx$$

$$=\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{x-1}-2\ln\left|x-1\right|+C.$$

17.（本题满分 10 分）

$y=y(x)$是微分方程$y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$满足$y(1)=\sqrt{e}$的特解.

（1）求 $y=y(x)$；

（2）$D=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\right\}$ 求平面区域 D 绕 x 轴旋转成的旋转本体积

【答案解析】（1）由一阶非齐次微分方程的通解公式可知：

通解 $y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$$

由 $f(1)=\sqrt{\mathrm{e}}=(C+1)\sqrt{\mathrm{e}}$ 得 $C=0$，所以 $f(x)=\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

（2）由旋转体体积公式可知：

$$V_x=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_1^2 x\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_1^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}\right)$$

18.（本题满分 10 分）

已知平面区域D满足$|x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4$，求$\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$

【答案解析】

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}rdr=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^5\theta d\theta=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^4\theta d\cos\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)^2 d\cos\theta=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d\cos\theta$$

$$=\frac{43\sqrt{2}}{120}$$

19.（本题满分 10 分）

S_n是$y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$与 x 轴之间图形的面积，求S_n，并求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

【答案解析】

$$S=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}\sin xdx-\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{-2n\pi}+e^{-(2n+1)\pi}]+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}[e^{-(2n+2)\pi}+e^{-(2n+1)\pi}]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-\pi}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$$

20.（本题满分 11 分）

已知函数$u(x,y)$满足$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求$a,b$的值，使得在变换$u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$下，上述等式可化为函数$v(x,y)$的不含一阶偏导的等式.

解：$u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+ave^{ax+by}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+bve^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a^2ve^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b^2ve^{ax+by}$$

带入得$\begin{cases}4a+3=0\\3-4b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\b=\frac{3}{4}\end{cases}$.

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f(1)=1,\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$;

（2）存在$\eta\in(0,1)$,使得$f'(\eta)<-2$.

【答案解析】由拉格朗日中值定理可知，存在$a\in(0,1)$，使得

$$1=\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}=f(a).$$

又$f(1)=f(a)=1$且$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，由罗尔定理可知：

存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=0$;

（2）记$x_0\in(0,1)$为$f(x)$的最大值点，首先由$\int_0^1 f(x)dx=1$可知$f(x_0)\geq 1$

且$f'(x_0)=0$,在$x=x_0$处，由泰勒公式可知，存在ς，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\varsigma)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\varsigma)$$

分别令$x=0,1$我们得到：

$0=f(0)=f(x_0)+\frac{x_0^2}{2}f''(\varsigma_1)$; $1=f(1)=f(x_0)+\frac{(1-x_0)^2}{2}f''(\varsigma_2)$，两者相加得：

$$1-2f(x_0)=\frac{x_0^2}{2}f''(\varsigma_1)+\frac{(1-x_0)^2}{2}f''(\varsigma_2)\geq[\frac{x_0^2}{2}+\frac{(1-x_0)^2}{2}]f''(\eta),$$

其中$f''(\eta)=\min\{f''(\varsigma_1),f''(\varsigma_2)\}$

故$f''(\eta)\leq 2\frac{1-2f(x_0)}{x_0^2+(1-x_0)^2}$,且$f(x_0)\geq 1,\frac{1}{2}<x_0^2+(1-x_0)^2<1$

故 $f''(\eta)<-2$，得证.

22.（本题满分 11 分）

已知向量组（Ⅰ）$a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$,

（Ⅱ）$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求 a 的

取值，并将β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

【答案解析】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

① 若 a=1，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

此时向量组（I）与（II）等价，

令　$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

则　$(A\vdots\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$，此时：$\beta_3=(3-2k)\alpha_1+(-2+k)\alpha_2+k\alpha_3$.

② 若$a=-1$，则$r(A)=2\neq r(A,B)=3$，向量组（I）与（II）不等价.

③ 若$a\neq 1,-1$，此时两个向量组满秩，$(A\vdots\beta_3)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$，所以$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

23.（本题满分 11 分）

已知矩阵$A=\begin{Bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{Bmatrix}$与$B=\begin{Bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{Bmatrix}$相似

（1）求x,y.

（2）求可可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

【答案解析】(1)由题意可知$\lambda_B=2,-1,y,A\sim B$，所以$\lambda_A=2,-1,y$

$|\lambda E-A|=(\lambda+2)[(\lambda+2)(\lambda-x)+4]=0$,所以$y=-2$，

当$\lambda=2$为$(\lambda+2)(\lambda-x)+4=0$的根，所以$x=3$

(2)计算得

A的特征值为$2,-2,1$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

令$P_1=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&2&1\\0&4&0\end{pmatrix}$，则$P_1^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&1\end{pmatrix}$

同理可计算：

B的特征值为$2,-2,1$对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$,令$P_2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$,

则$P_2BP=\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&-1\end{pmatrix}$

所以$P_1AP=P_2BP=P\Rightarrow P=P_2P_1^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$