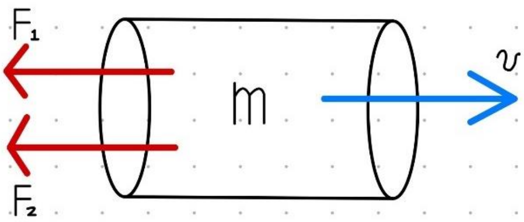
[1~3] <보기>를 참조하여 질량 m, 반지름 r인 원기둥 형태의 물체에 다음 그림과 같이 두 종류의 저항력이 작용하는 상황에 대하여 물음에 답하시오.
(단, 중력은 없다고 가정하고 문제에 주어진 저항력을 제외한 힘은 고려하지 않는다.)



<보기>

우리는 "지면"에 서있으면 중력, 수직항력 등의 여러가지 외력을 받는다. 만약 우리가 다른 환경에 놓여져 있으면 어떻게 될까? 만약 물(유체)속에 있으면 어떤 힘을 받게 될까? 물체는 유체 속에서 운동하거나 정지해 있을 때 "항력"이라는 외력을 받게 된다. 쉽게 말해서 운동을 방해하는 힘인데 이를 정량적인 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$F_2 = \frac{1}{2}\rho v^2 A C_d$$

다음의 식에서 F_d는 항력, ρ는 유체의 밀도, v는 유체에 대한 물체의 상대속도, A는 기준 면적, C_d는 항력 계수이다. 여기서 중요한 점은 항력은 유체에 대한 상대속도의 제곱에 비례하여 증가한다는 점이다. 여기서 항력 계수와 기준 면적은 상황에 따라서 달라질 수 있는데, 예를 들어서 하늘 위를 날아다니는 비행기를 생각해보자. 기준 면적은 정면으로 보았을 때를 기준으로 삼기 때문에 기준 면적이 동일 하더라도 전체 부피를 고려하여 비행기 골격 설계를 해야한다. 물체가 유체 속을 운동할 때 정확히 어떤 힘들을 받게 되는 것인지 조금 더 구체적으로 살펴보도록 하자 물체가 운동을 할 때는 불가피하게 마찰력을 받을 수 밖에 없다. 이런 일종의 항력의 역할을 하고 있는 마찰력을 스토크스의 법칙을 통해서 정량적으로 구해볼 수 있다. 식은 다음과 같다.

$$F_1 = 6\pi\mu r v$$

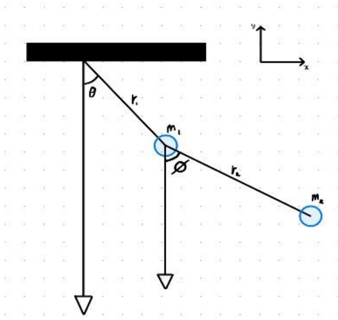
스토크스의 법칙에서는 입자들에 작용 하는 외력에 대해서 고려하기 때문에 입자의 반지름(r)이라는 변수가 필요하다. 그 다음 μ는 유체의 점성계수를 뜻하고 v는 입자의 속도이다. 앞서 살펴보았던 항력을 구하는 식과는 다른 점은 속력에 1차적으로 비례한다는 점이다. 여기서 점성 계수 라는 변수가 포함되어 있는 이유는 유체 저항을 논할 때 보통 점성을 가진 기체나 액체 속을 움직이는 구가 유체로부터 받는 저항에 대해서 생각하기 때문이다. 좀 더 구체적으로 말하자면 이는 레이놀즈 수와 관련이 있는데, 쉽게 말해 레이놀즈 수는 유체가 어떤 식으로 운동하고 있는지를 판별해주게 하는 수인데, 바로 이 레이놀즈 수가 적은 경우에 대해서 스토크스의 법칙이 성립하게 된다.

1. F_1과 F_2의 방향을 고려하여 가속도를 주어진 물리량으로 표현하시오.

2. Euler method를 활용하여 시간에 대한 변위, 속도 그래프를 그리시오.
   (단, 초기 속력은 v_0이며 $r = 1,\ \mu = 0.01,\ C_d = 0.03,\ \rho = 0.05$라 하자.)

3. 2번의 상황에서 시간에 따른 F_1과 F_2의 크기를 한 그래프 위에 표현하고 그 크기가 역전되는 시간을 찾으시오.

[4~7] 다음 그림과 같은 이중 진자에 대해 <보기>를 참고하여 물음에 답하시오. (단, 실의 질량과 모든 저항력은 무시한다.)



첫번째 줄의 길이 r_1
두번째 줄의 길이 r_2
첫번째 물체의 질량 m_1
두번째 물체의 질량 m_2

<보기>

동일한 현상을 나타내는 여러가지의 수식이 있다면 어떨까? 물리학을 예로 들면 뉴턴 역학과 라그랑주 역학이 그러하다. 뉴턴 역학을 한마디로 표현하자면 가속도를 가지고 물체의 운동을 설명하고 있다고 할 수 있다. 반면 라그랑주 역학은 라그랑지언 이라는 물리량을 가지고 설명한다. 여기서 라그랑지안은 물체의 운동에너지(L)에서 퍼텐셜에너지(U)를 뺀 값을 말하고 $\boldsymbol{L = T - U}$와 같이 표기한다 이 라그랑주 역학과 관련하여 항상 성립하는 방정식이 있는데, 그것은 바로 오일러-라그랑주 방정식이고 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

한 물리량(ex.변위, $\boldsymbol{x}$) 대해서 라그랑지안을 미분하고, 그 물리량을 시간에 대해 미분(ex.속도, $\dot{\boldsymbol{x}}$)한 물리량으로 라그랑지안을 미분한 것을 다시 시간에 대해 미분한 것을 빼면 방정식이 완성된다. 이는 $\boldsymbol{x}$ 대신 각 $\boldsymbol{\theta}$와 같은 물리량을 넣어도 성립한다.

4. <보기>를 참고하여 라그랑주 방정식을 이용해 $\ddot{\theta}$와 $\ddot{\phi}$을 $\theta, \phi, r_1, r_2, m_1, m_2$ 등 주어진 물리량으로 표현하시오. (단, 중력가속도는 $g = 9.8$ 이다)

5. Euler method를 두 번 사용하여 60초 동안 시간에 대한 θ와 ϕ의 그래프를 그리시오. 60초를 5000 등분하여 구현하여라.
(단, $t = 0$일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\phi = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = 0$ 이고 $r_1 = 10, r_2 = 10, m_1 = 1, m_2 = 1$ 이다.)

6. 2번 문제에 대해 1000번째 시간 요소에 대해 $\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ 값을 찾으시오

7. Vpython을 설치한 후 해설지 코드의 주석을 해제한 후 실행하여 2번 문제의 상황에서 이중진자의 실제 동작을 확인하여라

[1~3] 예시 코드

```python
import pylab as plt

import numpy as np

mu = 0.01

r = 1

Cd = 0.03

rho = 0.05

def f1(v):

    return 6*np.pi*mu*r*v


def f2(v):

    return (1/2)*Cd*rho*np.pi*r*r*v*v


def Euler_method(func1,func2,t0,t1,x0,v0,step):

    t = np.linspace(t0,t1,step)

    h = t[1]-t[0]

    X = [x0]

    V = [v0]

    F1 = [f1(v0)]

    F2 = [f2(v0)]

    x= x0

    v = v0

    for i in range(1,len(t)) :

        v = v+h*(-f1(v)-f2(v))

        x = x+h*v

        V.append(v)

        X.append(x)

        F1.append(f1(v))

        F2.append(f2(v))


    V=np.array(V)

    X=np.array(X)

    F1=np.array(F1)

    F2=np.array(F2)

    fig = plt.figure()


    plt_X = fig.add_subplot(3,1,1)

    plt_V = fig.add_subplot(3,1,2)

    plt_F = fig.add_subplot(3,1,3)

    plt_X.plot(t,X)

    plt_V.plot(t,V)

    plt_F.plot(t,F1,color = 'red')

    plt_F.plot(t,F2, color='blue')

    plt.show()


Euler_method(f1, f2, 0, 5, 0, 100, 10000)
```

[4~7] 예시 코드

```
import pylab as plt
import numpy as np
#import vpython as vp       # 시뮬레이션 용 (pip install vpython 으로 설치 후 실행하시오)

g = 9.8

def f1(theta, phi, m1, m2, r1, r2):
    return ((m1*g*r1*r1+m2*g*r1*r2)*np.sin(theta)-m2*g*r1*r2*np.sin(phi))/((m1+m2)*r1*r1*r2-m2*r1*r1*r2)

def f2(theta, phi, m1, m2, r1, r2):
    return (m2*g*r2*np.sin(phi)-m2*r1*r2*f1(theta,phi,m1,m2,r1,r2))/(m2*r2*r2)

def Euler_method(func1,func2,t0,t1,theta0,phi0,theta_dot0,phi_dot0,m1,m2,r1,r2, step):
    #-----------------------------------시뮬레이션 용----------------------------------#  (pip install vpython 으로 설치 후 실행하시오)
    '''M1 = vp.sphere(pos=vp.vector(r1*np.sin(theta0),-r1*np.cos(theta0),0), radius = 1, color = vp.color.red)
    M2 = vp.sphere(pos=vp.vector(r1*np.sin(theta0)+r2*np.sin(phi0),-r1*np.cos(theta0)-r2*np.cos(phi0),0), radius = 1, color =
vp.color.blue)
    point1 = vp.arrow(pos=vp.vector(0,0,0), axis=M1.pos, shaftwidth = 0.3)
    point2 = vp.arrow(pos=M1.pos, axis=M2.pos, shaftwidth = 0.3)'''
    #--------------------------------------------------------------------------------#

    t = np.linspace(t0,t1,step)
    h = t[1]-t[0]
    Theta = [theta0]
    Phi = [phi0]
    theta = theta0
    phi = phi0
    theta_dot = theta_dot0
    phi_dot = phi_dot0
    for i in range(1,len(t)) :
        theta_dot = theta_dot+h*func1(theta,phi,m1,m2,r1,r2)
        phi_dot = phi_dot+h*func2(theta,phi,m1,m2,r1,r2)
        theta = theta + h*theta_dot
        phi = phi + h*phi_dot
        Theta.append(theta)
        Phi.append(phi)
        #-----------------------------------시뮬레이션 용----------------------------------#  (pip install vpython 으로 설치 후 실행하시오)
        '''M1.pos = vp.vector(r1*np.sin(theta),r1*np.cos(theta),0)
        M2.pos = vp.vector(r1*np.sin(theta)+r2*np.sin(phi),r1*np.cos(theta)+r2*np.cos(phi),0)
        point1.axis = M1.pos
        point2.pos = M1.pos
        point2.axis = M2.pos-M1.pos
        vp.rate(200)'''
        #--------------------------------------------------------------------------------#
    Theta=np.array(Theta)
```

```python
    Phi=np.array(Phi)

    fig = plt.figure()

    plt_theta = fig.add_subplot(2,1,1)

    plt_phi = fig.add_subplot(2,1,2)

    plt_theta.plot(t,Theta)

    plt_phi.plot(t,Phi)

    plt.show()


Euler_method(f1,f2,0,15,(1/6)*np.pi,(1/6)*np.pi,0,0,1,1,10,10,5000)
```

[4~7] 수식 유도 과정

주어진 그림에서 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

$x_1 = r_1 \sin\theta \;\; y_1 = -r_1 \cos\theta,\;\; x_2 = r_1 \sin\theta + r_2 \sin\phi \;\;,\;\; y_2 = -r_1 \cos\theta - r_2 \cos\phi$

이를 미분하고 운동에너지와 퍼텐셜에너지를 표현하자

$\dot{x}_1 = r_1 \cos\theta\, \dot{\theta}_1,\;\; \dot{y}_1 = r_1 \sin\theta\, \dot{\theta}_1\;, \dot{x}_2 = \dot{\theta} r_1 \cos\theta +\; r_2 \cos\phi\, \dot{\phi},\;\; \dot{y}_2 = r_1 \sin\theta\dot{\theta} +\; r_2 \sin\phi\, \dot{\phi}$

$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m_1 ({r_1}^2 \dot{\theta^2})(cos^2\theta + sin^2\theta) \;+\; \frac{1}{2} m_2 ({r_1}^2 \dot{\theta^2})(cos^2\theta + sin^2\theta) \;+ {r_2}^2 \dot{\phi}^2 (cos^2\theta + sin^2\theta) + \quad 2 r_1 r_2 \dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$

$\quad = \;\; \frac{1}{2} m_1 {r_1}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left({r_1}^2 \dot{\theta}^2 + {r_2}^2 \dot{\phi}^2 + 2 r_1 r_2 \dot{\theta}\dot{\phi} \cdot (\cos(\theta - \phi)) \right)$

$\quad \simeq \frac{1}{2}(m_1 + m_2) {r_1}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2 \dot{\phi}^2 + m_2 r_1 r_2 \dot{\theta}\dot{\phi}$

$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g r_1 \cos\theta - m_2 g (r_1 \cos\theta + r_2 \cos\phi)$

이때 cos을 1로 근사하자. 즉 삼차항 이상은 무시한다. 이를 바탕으로 라그랑지안을 구하자.

$\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{U} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) {r_1}^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 {r_2}^2 \dot{\phi}^2 + m_2 r_1 r_2 \dot{\theta}\dot{\phi} + m_1 g r_1 \cos\theta + m_2 g (r_1 \cos\theta + r_2 \cos\phi)$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 g r_1 \sin\theta + m_2 g r_1 \sin\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) {r_1}^2 \dot{\theta} + \; m_2 r_1 r_2 \dot{\phi} \quad\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2) {r_1}^2 \ddot{\theta} + m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi}$

$\boldsymbol{m_1 g r_1 \sin\theta + m_2 g r_1 \sin\theta - (m_1 + m_2) {r_1}^2 \ddot{\theta} \;-\; m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi} \;=\; 0}$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m_2 g r_2 \sin\phi$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_2 g {r_2}^2 \dot{\phi} + m_2 r_1 r_2 \dot{\theta} \quad\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \; m_2 {r_2}^2 \ddot{\phi} + m_2 r_1 r_2 \ddot{\theta}$

$\boldsymbol{m_2 g r_2 \sin\phi - \; m_2 {r_2}^2 \ddot{\phi} \;-\; m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi} = 0}$

미분한 뒤 오일러-라그랑주 방정식에 대입 해주자. 이때 θ, ϕ에 대해 모두 구한다.

이후 적절히 잘 연립한 뒤 f1, f2를 정하자

$(m_1 + m_2) {r_1}^2 \ddot{\theta} + m_2 r_1 r_2 \ddot{\phi} \;=\; (m_1 g r_1 + m_2 g r_2)\sin\theta$

$m_2 r_1 r_2 \ddot{\theta} + m_2 {r_2}^2 \ddot{\phi} = m_2 g r_2 \sin\phi$

$\{(m_1 + m_2) {r_1}^2 r_2 - m_2 {r_1}^2 r_2\}\ddot{\theta} = (m_1 g {r_1}^2 + m_2 g r_1 r_2) sin\theta - m_2 g r_1 r_2 \sin\phi$

$$\ddot{\theta} = \frac{(m_1 g {r_1}^2 + m_2 g r_1 r_2)\sin\theta - m_2 g r_1 r_2 \sin\phi}{(m_1 + m_2) {r_1}^2 r_2 - m_2 {r_1}^2 r_2}$$

⇨ $\boldsymbol{f_1(\theta, \phi) \;=\; \frac{(m_1 g {r_1}^2 + m_2 g r_1 r_2)\sin\theta - m_2 g r_1 r_2 \sin\phi}{(m_1 + m_2) {r_1}^2 r_2 - m_2 {r_1}^2 r_2}}$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{m_2 {r_2}^2} \times \{m_2 g r_2 \sin\phi - (m_2 r_1 r_2) \times \ddot{\theta}\}$$

⇨ $\boldsymbol{f_2(\theta, \phi) \;=\; \frac{1}{m_2 {r_2}^2} \times \{m_2 g r_2 \sin\phi - (m_2 r_1 r_2) \times f_1(\theta, \phi)\}}$