北京理工大學
Beijing Institute of Technology

本科实验报告

实验名称：基于 LMS 和 RLS 的滤波器的实现与分析

课程名称：	自适应信号处理	实验时间：	2019.4.25
任课教师：	许文龙	实验地点：	图书馆
实验教师：	许文龙	实验类型：	☐ 原理验证 ■ 综合设计 ☐ 自主创新
学生姓名：	施念		
学号/班级：	1120161302	组　　号：	
学　　院：	信息与电子学院	同组搭档：	
专　　业：	电子信息工程	成　　绩：	

信息与电子学院
SCHOOL OF INFORMATION AND ELECTRONICS

基于 LMS 和 RLS 的滤波器的实现与分析

一 实验目的

1. 熟悉并了解各种算法的原理、含义及推导过程。
2. 掌握各种算法的编程方法，通过仿真实现各种算法。
3. 观察仿真结果，分析不同算法之间的联系与差异。

二 实验原理

1. LMS 算法

（1）LMS 算法

最小均方算法（LMS）是一种搜索算法，其通过对目标函数的调整，简化了对梯度向量的计算。特点是计算复杂度低、平稳环境下易于收敛、能无偏收敛到维纳解、利用有限精度算法实现稳定性。

其系数更新方程为：

$$\boldsymbol{w}(k+1)=\boldsymbol{w}(k)+2\mu e(k)\boldsymbol{x}(k)$$

（2）NLMS 算法

归一化的 LMS 算法（NLMS）采用可变收敛因子（步长）μ_k 的思想，在保证不利用相关矩阵的估计值的前提下提高收敛速度。

其系数更新方程为：

$$\boldsymbol{w}(k+1)=\boldsymbol{w}(k)+2\mu_k e(k)\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{w}(k)+\Delta\tilde{\boldsymbol{w}}(k)$$

取

$$\mu_k=\frac{\mu_n}{\gamma+x^T(k)x(k)}$$

其中 γ 作用是为了避免 $x^T(k)x(k)$ 很小时出现步长很大的情况，同时，为了控制失调量，需要引入一个固定收敛因子 μ_n。

（3）LMS-Newton 算法

当输入信号相关性强时，收敛速度慢，LMS-Newton 算法通过对输入信号二阶统计量的估计，提高收敛速度，但也增加计算复杂度。其实质是 Karhunen-Loeve Transform（KL，卡亨南-洛伊夫变换）的最陡下降法。

LMS-Newton 算法的系数更新方程为：

$$\boldsymbol{w}(\mathrm{k}+1)=\boldsymbol{w}(\mathrm{k})-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{g}_{\mathrm{w}}$$

但实际上只能得到 R^{-1} 的估计值，采用加权求和的方法得到 $\hat{R}(k)$，即

$$\begin{aligned}\hat{R}(k)&=\alpha X(k)X^{T}(k)+(1-\alpha)\hat{R}(k-1)\\&=\alpha X(k)X^{T}(k)+\alpha\sum_{i=0}^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}X(i)X^{T}(i)\end{aligned}$$

其中因子 α 用来平衡当前和过去的输入信号，通常取 $0<\alpha\le 0.1$。

通过矩阵求逆引理可得

$$\hat{R}^{-1}(k)=\frac{1}{1-\alpha}\left[\hat{R}^{-1}(k-1)-\frac{\hat{R}^{-1}(k-1)X(k)X^{T}(k)\hat{R}^{-1}(k-1)}{\frac{1-\alpha}{\alpha}+X^{T}(k)\hat{R}^{-1}(k-1)X(k)}\right]$$

2. RLS 算法

最小二乘算法（RLS）采用递归形式，旨在使期望信号与滤波器输出信号之差的平方和达到最小。即使输入信号相关矩阵的特征值扩展比较大，RLS 算法也能实现快速收敛，但是同时需要以增加计算复杂度和存在稳定性为代价。

对于 RLS，其目标函数是确定性的，为

$$\begin{aligned}\xi^{d}(k)&=\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}\varepsilon(i)^{2}\\&=\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}[d(i)-x^{T}(i)w(k)]^{2}\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon(i)$ 为后验误差（$e(i)$ 为先验误差），λ 为遗忘因子（$0\ll\lambda\le 1$）。

$\xi^{d}(k)$ 对 $w(k)$ 求偏导，令其结果为 0 可得 RLS 算法的最优向量，即

$$\begin{aligned}w(k)&=\left[\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}x(i)x^{T}(i)\right]^{-1}\sum_{i=0}^{k}\lambda^{k-i}x(i)d(i)\\&=\mathrm{R}_{D}^{-1}(k)p_{D}(k)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{R}_{D}(k)$ 是输入信号的确定性相关矩阵，$p_{D}(k)$ 为输入信号与期望信号的确定性互相关向量。并且 $\mathrm{R}_{D}^{-1}(k)$ 采用 LMS-Newton 算法中的求逆引理进行求解。

上式经过变换，采用先验误差，可得到另一种常规的 RLS 算法，其系数更新方程为：

$$w(k) = w(k-1) + e(k)S_D(k)x(k)$$

三 实验内容

1. 基于 LMS 的自适应滤波器

（1）基本框架说明

a. 滤波器框图

下图为经典滤波器框图，本实验中主要改变的是不同的自适应算法（LMS 算法及其变形、RLS 算法）。

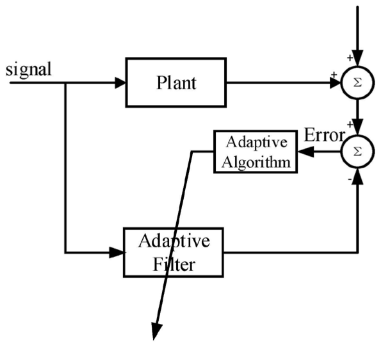

图 一 经典滤波器框图

b. 算法实现

如下图所示，通常采用延迟线的方法实现 LMS 算法。本实验中为了更好的绘制 MSE 曲面上的收敛路径，采用一阶 FIR 自适应滤波器。

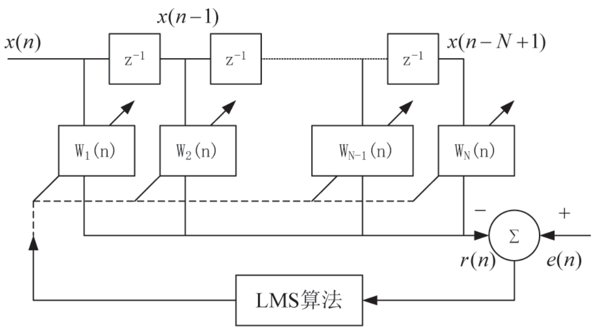

图 二 LMS 自适应滤波器

（2）LMS 滤波器

a. 初始化

假设滤波器为基于 LMS 的一阶自适应 FIR 滤波器，以系统辨识为例。取滤波器的最优系数为$\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix}$，步长为 0.1，观察噪声的方差（能量）为 0.04。观察迭代 500 次的 MSE 和系数收敛路径。

b. 说明

为了使结果更加准确，每次的系数迭代都进行 1000 次，取 1000 次的系数均值作为迭代后的系数。

c. 结果与分析

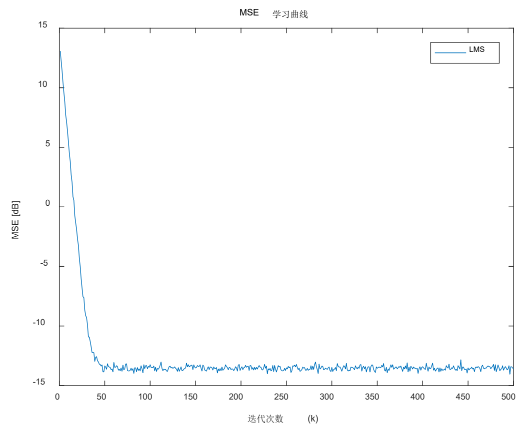

图 三 LMS 算法的 MSE 学习曲线

从图三我们可以看出，在迭代次数到 50 次时，系数收敛，达到最优系数。

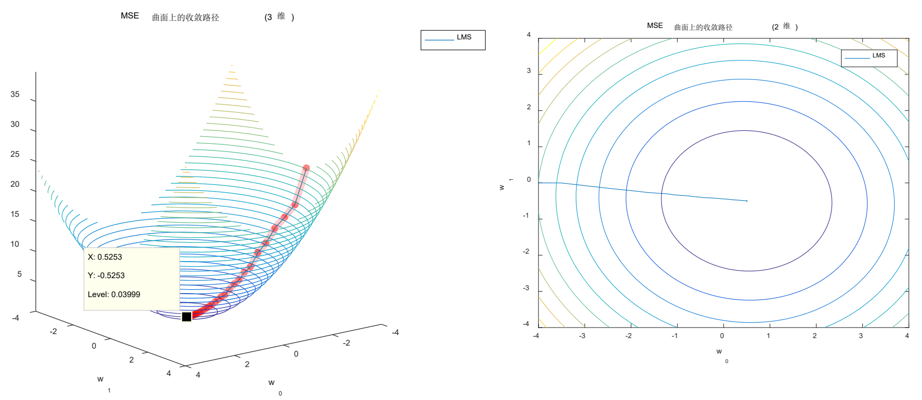

图 四 LMS 算法下系数的收敛路径

从图四（a）可以看出，随着系数不断靠近最优系数，MSE 越来越小，到靠近最优系数$\begin{bmatrix}0.5\\-0.5\end{bmatrix}$时，$\xi = 0.03999$ ($w = \begin{bmatrix}0.5253\\-0.5253\end{bmatrix}$)，接近理论的$\xi_{nin}(\sigma_d^2)$，即 0.04。图四（b）是收敛路径在 x-y 平面上的投影。

（3）NLMS 滤波器

a. 初始化

对于 NLMS 来说，其可变步长μ_k由γ、μ_n以及 k 时刻的输入信号$x^T(k)x(k)$决定。初始化γ为一很小的常数（$1e-12$），μ_n取 0.1，其他的与上述 LMS 算法的初始化相同。

b. 说明

为了观察 NLMS 收敛路径“先趋向于主轴再靠近最优系数”的特性，选择$\begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix}$作为起点。

c. 结果与分析

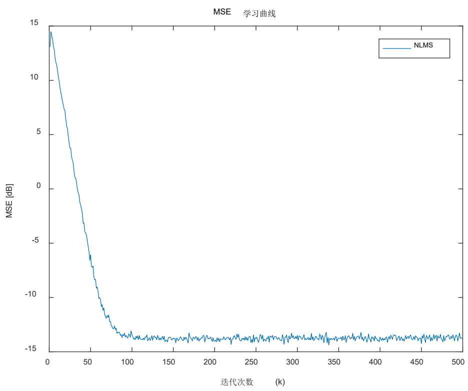

图 五 NLMS 算法的 MSE 学习曲线

从图五我们可以看出，随着迭代次数的不断增加，在大约 100 次时，系数收敛，近似达到最优系数。

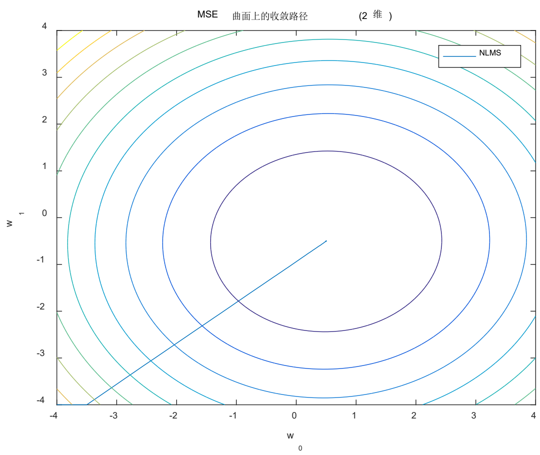

图 六 NLMS 算法下系数的收敛路径

从图六我们可以看出，该算法路径先靠近主轴，再沿着主轴方向收敛到最优系数。

在实验中，我发现：如图七所示，在其他条件相同的情况下，NLMS 算法到达最优系数所需迭代次数是 LMS 算法的两倍。

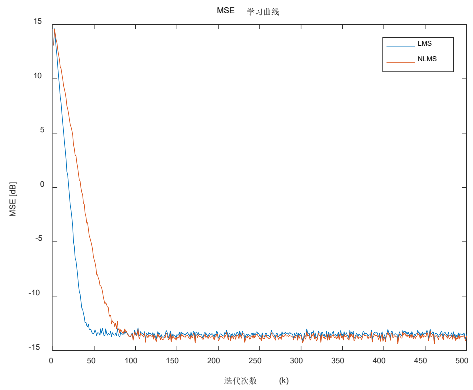

图 七 MSE 学习曲线对比

通过分析代码和洗漱更新方程可知，在输入信号（sign(randn(N,1))）瞬时功率（ $x^T(k)x(k)$ ）一定时（本实验为 2），若 γ 很小，则 $\mu_k = \frac{\mu_n}{2}$，收敛步长为 LMS 的一半，自然迭代次数大约是 LMS 的两倍。由此可知，**NLMS 算法并不适用于所有信号，当输入信号 $x^T(k)x(k)$ 为一定值时，NLMS 退化为 LMS。**

（4）LMS-Newton 算法

a. 初始化

对于 LMS-Newton 算法，$\hat{R}^{-1}$ 初始化为 δI，δ 为一很小的正常数（取 0.1），平衡当前与过去的因子 α 取 0.05，在进行系数更新之前要计算 $\hat{R}^{-1}$ 的值。其他参数的初始化与 LMS 算法相同

b. 说明

当 RLS 算法选取的遗忘因子 γ 满足 $2\mu = \alpha = 1-\gamma$，则对于 LMS-Newton 算法，其在此时与 RLS 算法在数学上是等价的。

c. 结果与分析

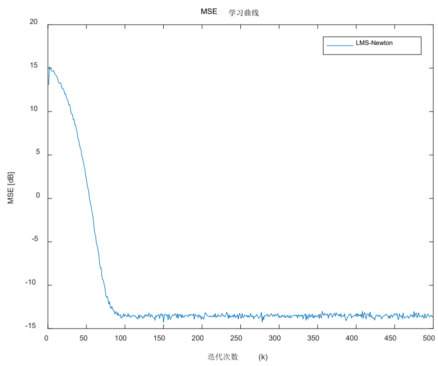

图 八 LMS-Newton 算法的 MSE 学习曲线

从图八可以看出，在接近 100 次迭代后，系数收敛，近似达到最优系数。

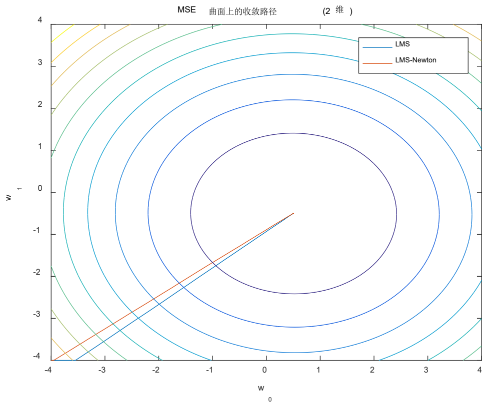

图 九 MSE 曲面上的系数收敛路径

从图九可以看出，LMS-Newton 算法直接趋近于极小值点。其**区别于 LMS 算法，不需要接近小特征值的主轴（特征向量），能够以更加直接的路径收敛到 MSE 曲面的极小值点。**

2. 基于 RLS 的自适应滤波器

（1）RLS 常规算法

a. 初始化

假设滤波器为基于 LMS 的四阶自适应 FIR 滤波器，以系统辨识为例。取滤波器的最优系数为$[1.6-j0.3,\ -0.6+j1.25,\ 0.8-j0.1,\ 0.75+j0.3,\ 1.2+j0.5]^T$，观察噪声的方差（能量）为 0.04。遗忘因子$\lambda$取 0.9，初始化$S_D=\delta I$（$\delta$取 0.1），观察迭代 500 次的 MSE 以及前两次的系数收敛曲线。

b. 说明

为了使结果更加准确，每次的系数迭代都进行 1000 次，取 1000 次的系数均值作为迭代后的系数。

c. 结果与分析

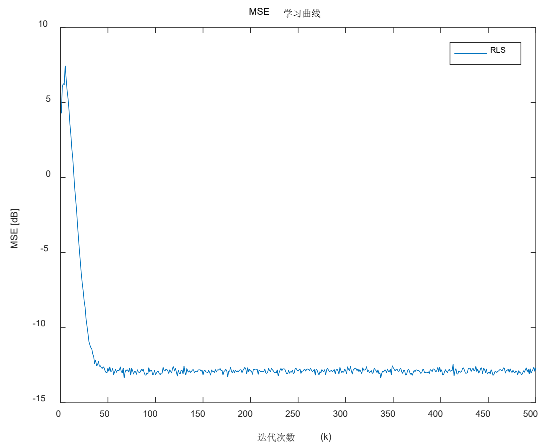

图 十 RLS 算法的 MSE 学习曲线

从图十可以看出，在进行 50 次迭代后，系数逐渐收敛，在 80 次近似达到最优系数 w_o。

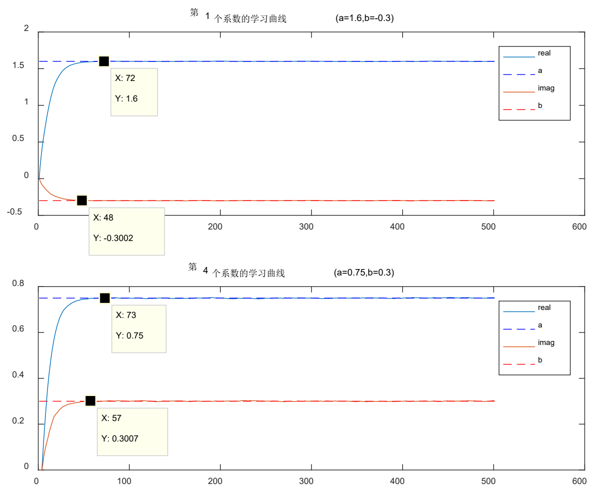

图 十一 某个系数的学习曲线

从图十一可以看出，对于第 1 个系数和第 4 个系数，在迭代次数达到 75 次左右，二者均收敛到最优系数（$1.6-j0.3$ 和 $0.75+j0.3$）。

四 实验总结

本次实验，第一方面加深了我对 LMS 算法和 RLS 算法以及一些基于二者的算法有了更深的印象和理解，更加熟悉了公式的推倒以及各个算法的内涵。

以 LMS 算法为例，LMS-Newton 算法其性能与输入信号相关矩阵的特征值扩展无关，其与 RLS 算法相近（当 RLS 算法选取的遗忘因子γ满足$2\mu = \alpha = 1-\gamma$，LMS-Newton 算法在此时与 RLS 算法在数学上是等价的），其能降低计算复杂度（主要针对$\hat{R}^{-1}$）。对于归一化的 LMS 算法（NLMS），其核心内涵是可变的步长，当将其步长进一步扩展，利用最大相关熵（MCC）的思想，可得到基于 MCC 的可变步长自适应滤波器。

通过此次实验，我掌握了 MATLAB 实现自适应滤波器的编程方法，并且学会了如何从多个角度去评价一个算法的好坏。除此之外，这个实验也为我下个实验（LMS 和 RLS 滤波器的应用）提供一定的基础。