《信号检测与估计》作业一

施念 1120161302

March 10, 2019

一 第 2 章 检测基本理论

1. 设矩形包络的单个中频脉冲信号为

$$s(t) = Arect(\frac{t}{\tau})cos\omega_0 t$$

其中，$rect(\cdot)$ 为矩形函数，即

$$rect(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

(1) 求信号 $s(t)$ 的匹配滤波器的系统函数 $H(w)$ 和冲激响应 $h(t)$。

解：

$\because$ 由题目可知

$$s(t) = Arect(\frac{t}{\tau})cos\omega_0 t$$

$\therefore$ 根据公式，其对应的匹配滤波器为

$$h(t) = ks(t_0 - t) = kArect(\frac{t_0 - t}{\tau})cos\omega_0(t_0 - t)$$

又 $\because$ 对 $cos\omega_0 t$ 、$rect(\frac{t}{\tau})$, 有

$$\mathscr{F}[cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
$$\mathscr{F}[rect(\frac{t}{\tau})] = \tau sinc(\frac{\omega\tau}{2})$$

$\therefore$ 对 $s(t)$, 有

$$\mathscr{F}[s(t)] = \frac{A\tau}{2}[sinc(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau) + sinc(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau)]$$

$\therefore$ 对 $H(\omega)$, 有

$$H(\omega) = kS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} = \frac{kA\tau}{2}[sinc(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau) + sinc(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau)]e^{-j\omega t_0}$$

在上述公式中，可取 $t_0 = \frac{\tau}{2}, k = 1$

(2) 若匹配滤波器输入噪声 $n(t)$ 是功率谱密度 $G_\omega = \frac{N_0}{2}$ 的白噪声，求匹配滤波器的输出功率信噪比 SNR。

解：

$\because H(\omega) = kS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}, k = 1$

$\therefore$ 对输出信噪比，有

$$
\begin{aligned}
SNR_o = d^2 =& \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega}{N_0/2} \\
=& \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\omega)|^2 d\omega}{N_0/2} \\
=& \frac{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}|s(t)|^2 dt}{N_0/2} \\
=& A^2\frac{2\int_0^{\frac{\tau}{2}} cos^2(\omega_0 t)dt}{N_0/2} \\
=& A^2\frac{\frac{\tau}{2} + \frac{sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}|_0^{\frac{\tau}{2}}}{N_0/2} \\
=& \frac{A^2\tau}{N_0}
\end{aligned}
$$

2. 设线性调频矩形脉冲信号为

$$s(t) = Arect(\frac{t}{\tau})cos(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2})$$

式中，$rect(\cdot)$ 为矩形函数;μ 为调频系数.

线性调频信号的瞬时频率为

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \mu t$$

在脉冲宽度 τ 内，信号的角频率由 $w_0 - \frac{\mu\pi}{2}$ 变化到 $w_0 + \frac{\mu\pi}{2}$；调频带宽 $B = \frac{\mu\pi}{2\pi}$；重要参数时宽带宽积 D 为

$$D = B\tau = \frac{1}{2\pi}\mu\tau^2$$

(1) 求线性调频信号的频谱函数 $S(\omega)$。

解：

对 $s(t) = Arect(\frac{t}{\tau})cos(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2})$, 将其表示为复数形式 $\widetilde{s}(t) = Arect(\frac{t}{\tau})e^{j(\frac{\mu}{2}t^2+\omega_0 t)}$

则有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}(\omega)=\mathscr{F}[\widetilde{s}(t)] &= A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j(\frac{\mu}{2}t^2+\omega_0 t)}e^{-j\omega t}dt \\
&= A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j[(\sqrt{\frac{\mu}{2}}t+\frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{2\mu}})^2-\frac{(\omega_0-\omega)^2}{2\mu}]}dt \\
&= Ae^{-jp^2}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j(\sqrt{\frac{\mu}{2}}t+p)^2}dt \qquad for \quad p=\frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{2\mu}} \\
&= A\sqrt{\frac{2}{\mu}}e^{-jp^2}\int_{q_2}^{q_1}[cos(m^2)+jsin(m^2)]dm \qquad for \quad q_1=p-\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad q_2=p+\frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2}} \\
&= A\sqrt{\frac{2}{\mu}}e^{-jp^2}\{[\mathcal{C}(q_2)-\mathcal{C}(q_1)]+j[\mathcal{S}(q_2)-\mathcal{S}(q_1)]\}
\end{aligned}
$$

(2) 求匹配滤波器的系统函数 $H(\omega)$。

解:

由（1）可知，$S(\omega)=A\sqrt{\frac{2}{\mu}}e^{-jp^2}\{[\mathcal{C}(q_2)-\mathcal{C}(q_1)]+j[\mathcal{S}(q_2)-\mathcal{S}(q_1)]\}$

故, 对 $H(\omega)$, 有

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= kS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \\
&= kA\sqrt{\frac{2}{\mu}}e^{j(p^2-\omega t_0)}\{[\mathcal{C}(q_2)-\mathcal{C}(q_1)]-j[\mathcal{S}(q_2)-\mathcal{S}(q_1)]\}
\end{aligned}
$$

一般取 $k=1$ 或 $k=\frac{\sqrt{\mu/2}}{A}$

(3) 求匹配滤波器的输出信号 $s_o(t)$ 和输出功率信噪比 SNR。

解:

由给出的公式（2.7.50）可知:

输出信号

$$s_o(t)=\frac{kA^2\tau}{2}\frac{sin[\frac{\tau\mu}{2}t(1-\frac{t}{\tau})]}{\frac{\tau\mu}{2}t}cos2\pi f_0 t$$

信噪比

$$SNR=d_{max}=\frac{s_o^2(0)}{n_o^2(t)}=\frac{2E}{N_0}=\frac{A\tau^2}{N_0}$$

3. 设计一个最大输出信噪比滤波器，发送信号是 $y(t)$，并在加性白噪声中观测，噪声谱密度是 $N_0/2$。信号 $y(t)$ 为

$$y(t)=\begin{cases} e^{-t/2}-e^{3t/2}, & 0\le t\le T \\ 0, & others \end{cases}$$

最大输出信噪比是多少？假定 $\int_0^T y^2(t)dt=1$。

解:

由于匹配滤波器的最大分值信噪比 d_{max} 只取决于输入信号的能量和白噪声功率谱密度，与输入信号

形状和噪声分布律无关，所以

$$\begin{aligned} d_{max} &= \frac{2E}{N_0} \\ &= \frac{2}{N_0} \end{aligned}$$