《信号检测与估计》作业四 *

施念 1120161302

一　第 5 章 噪声中的信号处理

1. 在功率谱密度 $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ 的加性高斯白噪声 $n(t)$ 背景中，假设 H_j 下的接受信号为

$$H_j : z(t) = s_j(t) + n(t), \quad 0 \le t \le$$

其中，信号 $s_j(t)$ 的能量为

$$E_j = \int_0^T s_j^2(t)dt$$

采用正交级数展开法时，先建立 N 维似然比检验 $\Lambda[z_N]$，再取 $N \to \infty$ 的极限获得 $\Lambda[z_N]$。如果在获得前 N 个系数 z_k 的联合概率密度函数（似然函数）$p(r_n|H_j)$ 后，先取 $N \to \infty$ 的极限，求得似然函数 $p(z(t)|H_j)$，再建立似然比检验，结果是一样的。请证明似然函数 $p(z(t)|H_j)$ 可以表示为

$$p[z(t)|H_j] = Fexp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [z(t) - s_j(t)]^2 dt\right\}$$

其中

$$F = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2}$$

证明：

设一组正交函数集为 $\{f_k(t)\}$，则在 $\{f_k(t)\}$ 下，有

$$z(t) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N} z_i f_i(t)$$

$$s(t) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N} s_i f_i(t)$$

$$n(t) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{i=1}^{N} n_i f_i(t)$$

$$\int_0^T f_k(t)f_l(t)dt = \delta_{k-l}$$

*习题 2.27　2.28　3.1　3.2　3.5

因此，有

$$\begin{aligned}
z_k =& \int_0^T z(t) f_k(t) dt \\
\mathbb{E}[z_k|H_j] =& s_{jk} \\
\mathrm{Var}[z_k|H_j] =& \frac{N_0}{2} \\
\int_0^T z^2(t) dt =& \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} z_i^2 \\
\int_0^T z(t) s_j(t) dt =& \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} z_i s_{ji} \\
\int_0^T s_j^2(t) dt =& \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i^2
\end{aligned}$$

对于似然函数 $p(z(t)|H_j)$，有

$$\begin{aligned}
p(z(t)|H_j) &= \lim_{N\to+\infty} p(z_1, z_2, \ldots, z_N|H_j) \\
&= \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left[-\frac{1}{N_0} \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} (z_k - s_{jk})^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left[-\frac{1}{N_0} \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^{N} (z_k^2 - 2z_k s_{jk} + s_{jk}^2)\right] \\
&= \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z^2(t) - 2z(t)s_j(t) + s_j^2(t)] dt\right\} \\
&= \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_j(t)]^2 dt\right\} \\
&= F exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [z(t) - s_j(t)]^2 dt\right\}
\end{aligned}$$

证毕

2. 如果二元通信系统在两个假设下的接收信号分别为

$$H_0 : z(t) = B\cos(\omega_2 t + \theta) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$H_1 : z(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t + \theta) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

式中，A, B, ω_1, ω_2 和 θ 均为已知的常数。噪声 $n(t)$ 是功率谱密度 $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。设计似然比门限为 λ_0 的最佳检测系统。信号 $B\cos(\omega_2 t + \theta)$ 对接收机性能有什么影响？

解：设

$$
\begin{aligned}
&s_0(t) = B\cos(\omega_2 t + \theta) \\
&s_1(t) = A\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t + \theta) \\
&\int_0^T s_0^2(t)dt = E_0 \\
&\int_0^T s_1^2(t)dt = E_1 \\
&\alpha(t) = A\cos(\omega_1 t) \\
&\beta(t) = B\cos(\omega_2 t + \theta)
\end{aligned}
$$

因此，似然比

$$
\Lambda(z) = \frac{p[z(t)|H_1]}{p[z(t)|H_0]} = exp\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [-2z(t)\alpha(t) + \alpha^2(t) + 2\alpha(t)\beta(t)]dt\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0
$$

整理后可得：

$$
\int_0^T \alpha(t)z(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)
$$

即对输入 $z(t)$ 信号，将其与 $s_1(t) - s_0(t) = \alpha(t)$ 信号进行相乘后积分，每隔 T 时刻进行抽样判决，判决门限为 $\frac{N_0}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0)$，大于判决门限判为发送 $s_1(t)$，否则判为 $s_0(t)$。（相关接收机）

讨论信号 $B\cos(\omega_2 t + \theta)$ 对接收机性能有什么影响：

设在正交函数集中，$f_1(t) = K[s_1(t) - s_0(t)] = \sqrt{2}\alpha(t)/A$，则有

$$
l = \int_0^T \alpha(t)z(t)dt = \frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^T f_1(t)z(t)dt = \frac{Az_1}{\sqrt{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
z(t)|H_0 =& \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N} z_k f_k(t) = (s_{01} + n_1)f_1(t) + M \\
z(t)|H_1 =& (s_{11} + n_1)f_1(t) + M
\end{aligned}
$$

上式中，

$$
\begin{aligned}
M &= \sum_2^{+\infty} z_k f_k(t) \\
s_{11} &= \int_0^T s_1(t)f_1(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{A}\int_0^T [\alpha(t) + \beta(t)]\alpha(t)dt \\
s_{01} &= \int_0^T s_0(t)f_1(t)dt = \frac{\sqrt{2}}{A}\int_0^T \alpha(t)\beta(t)dt
\end{aligned}
$$

因此，有：

$$
\begin{aligned}
l|H_0 =& \frac{Az_1}{\sqrt{2}} = \frac{A(s_{01} + n_1)}{\sqrt{2}} \\
l|H_1 =& \frac{Az_1}{\sqrt{2}} = \frac{A(s_{11} + n_1)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

即：

$$l|H_0 \sim N\left(\frac{As_{01}}{\sqrt{2}}, \frac{N_0}{4}\right)$$
$$l|H_1 \sim N\left(\frac{As_{11}}{\sqrt{2}}, \frac{N_0}{4}\right)$$

因此信噪比（偏移系数）d^2 为：

$$\begin{aligned} d^2 =& \frac{[E(l|H_1) - E(l|H_0)]^2}{\mathrm{var}(l|H_0)} \\ =& \frac{[A(s_{11} - s_{01})]^2/2}{N_0/4} \\ =& \frac{[\int_0^T \alpha^2(t)dt]^2}{N_0/4} \\ =& \frac{A^2 T}{N_0} \end{aligned}$$

与 $\beta(t) = B\cos(w_2 t + \theta)$ 无关，因此其对接收机性能并没有什么影响。

从“两个高斯分布的信号根据门限来判别的过程”这个角度分析，经过计算（和上面基本相同）发现，门限和两个高斯分布的均值之间的距离均与 $\beta(t)$ 无关，因此在判决（积分）时得到的 $P(H_1|H_1)$ $P(H_0|H_0)$ 不受 $\beta(t)$ 的影响。从完全统计量的角度来看，观测量在 $s_1(t) - s_0(t) = \alpha(t)$ 这个向量上的投影决定了判决的结果，与 $\beta(t)$ 无关。

3. 在高斯白噪声中检测像 $\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sin(\omega_0 t + \theta)$ 这样一类确知信号时，其中相位 θ 是已知的，但不一定为 0. 假设为雷达类型的问题，则

$$\begin{aligned} &H_0 : z(t) = n(t), && 0 \le t \le T \\ &H_1 : z(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sin(\omega_0 t + \theta) + n(t), && 0 \le t \le T \end{aligned}$$

其中，E_s 为信号的能量，ω_0 和 θ 已知；噪声 $n(t)$ 是功率谱密度 $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。

(1) 如果在相关运算中，把相位 θ 作为 0 来处理，但实际接收信号的 θ 可能不等于 0，求作为 θ 函数的检测概率，并把它同 $\theta = 0$ 的情况作比较。

(2) 证明检测概率可能小于虚警概率，这取决于 θ 的数值。

解：

(1) 在接收信号时，判决规则为：

$$l(z) = \int_0^T s(t)z(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0 T}{2}\ln\lambda_0 + \frac{1}{2}E_s = \gamma$$

其中，发射信号 $s(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\sin(\omega_0 t)$（无相位延迟）。

在正交函数集 $\{f_k(t)\}$ 上，取 $f_1(t) = \frac{s(t)}{\sqrt{E_s}}$，则有

$$\begin{aligned} l(z) &= \int_0^T s(t)z(t)dt \\ &= \int_0^T \sqrt{E_s} f_1(t)z(t)dt \\ &= \sqrt{E_s} z_1 \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} l|H_1 &= \sqrt{E_s}(s_1 + n_1) \\ &= \int_0^T s(t)s(t)\cos\theta dt + \sqrt{E_s} n_1 \\ &= E_s \cos\theta + \sqrt{E_s} n_1 \\ &\sim N(E_s\cos\theta, N_0E_s/2) \\ l|H_0 &= \sqrt{E_s} n_1 \\ &\sim N(0, N_0E_s/2) \end{aligned}$$

因此检测概率为：

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_\gamma^{+\infty} p(l|H_1)dl = Q\left(\frac{\gamma - E_s\cos\theta}{\sqrt{N_0E_s/2}}\right)$$

特殊的，当 $\theta = 0$ 时

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma - E_s}{\sqrt{N_0E_s/2}}\right)$$

(2) 由（1）可知，虚警概率为

$$P_F = P(H_1|H_0) = \int_\gamma^{+\infty} p(l|H_0)dl = Q\left(\frac{\gamma}{\sqrt{N_0E_s/2}}\right)$$

当 $P_D < P_F$ 时，

$$\gamma - E_s\cos\theta < \gamma$$

即在

$$\cos\theta > 0$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$$

检测概率小于虚警概率，这取决于 θ。

4. 考虑在高斯噪声背景中检测高斯信号的问题。设

$$\begin{aligned} H_0 &: z(t) = n(t), & 0 \le t \le T \\ H_1 &: z(t) = s(t) + n(t), & 0 \le t \le T \end{aligned}$$

其中 $n(t)$ 和 $s(t)$ 分别是零均值的高斯噪声和高斯信号，其带宽限于 $|\omega| < \Omega = 2\pi B$，功率谱密度分别为 $N_0/2$ 和 $S_0/2$。假设以 π/Ω 的间隔取 $2BT$ 个样本的方式进行统计检测，试求似然比检测系统。

解：因为采样频率

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Omega}{\pi} = 2B$$

所以采样所得的样本之间相互独立。

对第 k 次采样，有

$$p(z_k|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi N_0 B}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2N_0 B} z_k^2\right)$$
$$p(z_k|H_1) = \left[\frac{1}{2\pi(N_0+S_0)B}\right]^{\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2(N_0+S_0)B} z_k^2\right]$$

设似然比检测门限为 λ, $\quad N = 2BT$, 则

$$p(z|H_0) = \left(\frac{1}{2\pi N_0 B}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left(-\frac{1}{2N_0 B}\sum_{k=1}^{N} z_k^2\right)$$
$$p(z|H_1) = \left[\frac{1}{2\pi(N_0+S_0)B}\right]^{\frac{N}{2}} exp\left[-\frac{1}{2(N_0+S_0)B}\sum_{k=1}^{N} z_k^2\right]$$

因此似然比检测系统的判决准则为

$$\frac{P(z|H_1)}{P(z|H_0)} = \left(\frac{N_0}{N_0+S_0}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left[\frac{S_0}{2(S_0+N_0)N_0 B}\sum_{k=1}^{N} z_k^2\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

即

$$l(z) = \sum_{i=1}^{2BT} z_k^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \left[\ln\lambda + BT\ln(1+\frac{S_0}{N_0})\right]\frac{2(S_0+N_0)N_0 B}{S_0} = \gamma$$

5. 考虑简单二元随机相位信号的检测问题，两个假设分别为

$$H_0 : z(t) = n(t), \qquad 0 \le t \le T$$
$$H_1 : z(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t), \quad 0 \le t \le T$$

其中 E_s 是信号 $s(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}}\cos(\omega_0 t+\theta)$ 的能量；ω_0 是已知的常数；$n(t)$ 是功率谱密度 $G_n(\omega) = \frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声。假定相位 θ 是概率密度函数为

$$p(\theta) = \frac{exp(v\cos\theta)}{2\pi I_0(v)}, \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

的随机变量。若采用奈曼-皮尔逊准则，证明最佳检测系统如图题 3-5 所示。（注意，经过计算以及查找资料，发现书本上的图有错，下支路中线性滤波器应为 $h(t) = \sqrt{\frac{T}{2}}\cos\omega_0(T-t)$，之后的增益系数应为 $\frac{4E_s}{N_0^2}$）

解：

对于该系统，假设

$$\begin{cases} y_1(t) = \int_0^T z(t)\cos\omega_0 t dt \\ y_2(t) = \int_0^T z(t)\sin\omega_0 t dt \end{cases}$$

其似然比函数为

$$
\begin{aligned}
\Lambda(x) &= \frac{p(z;\theta|H_1)}{p(z|H_0)} \\
&= \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} p(z|H_1;\theta)p(\theta)d\theta}{p(z|H_0)} \\
&= \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{N_0\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int\limits_0^T [z(t)-s(t)]^2 dt\right\} p(\theta)d\theta}{\left(\frac{1}{N_0\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int\limits_0^T z^2(t)dt\right\}} \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int\limits_0^T \left[-2z(t)s(t)+s^2(t)\right]dt\right\} p(\theta)d\theta \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[\int\limits_0^T -2z(t)s(t)dt+E_s\right]\right\} p(\theta)d\theta \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\left[\int\limits_0^T -2z(t)s(t)dt+E_s\right]\right\} p(\theta)d\theta \\
&= \exp\left(\frac{E_s}{N_0}\right)\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{\frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}}\left[y_1(t)\cos\theta-y_2(t)\sin\theta\right]\right\} p(\theta)d\theta \\
&= \frac{\exp(E_s/N_0)}{2\pi I_0(v)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{M\left[y_1(t)\cos\theta-y_2(t)\sin\theta\right]+v\cos\theta\right\}d\theta \\
&= \frac{K}{2\pi I_0(v)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{M\left[\left(y_1(t)+\frac{v}{M}\right)\cos\theta-y_2(t)\sin\theta\right]\right\}d\theta \\
&= \frac{K}{2\pi I_0(v)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp\left[A(t)\cos(\theta+\varphi)\right]d\theta \\
&= \frac{K}{I_0(v)} I_0(A(t))
\end{aligned}
$$

上式中，

$$
\begin{aligned}
K &= exp(E_s/N_0) \\
M &= \frac{2}{N_0}\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \\
A^2(t) &= \left[My_1(t)+v\right]^2+\left[My_2(t)\right]^2 = M^2\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]+2Mvy_1(t)+v^2
\end{aligned}
$$

根据贝塞尔函数 $I_0(x)$ 的单调性，将 v^2 减去，因此判决准则为

$$
M^2\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]+2Mvy_1(t) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda_0
$$

其中，λ_0 根据奈曼-皮尔逊准则获得。

观察给的检测系统，上支路输出为 $2Mvy_1(t)$

下支先经过一个匹配滤波器，在经过一个包络平方检波器得到匹配滤波器包络的平方。
线性滤波器输出为

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^t \cos\omega_0(T-t+\tau)z(\tau)d\tau \\
&= \sqrt{\frac{2}{T}} \left[\cos\omega_0(T-t) \int_0^t z(\tau)\cos\omega_0\tau d\tau + \sin\omega_0(T-t) \int_0^t z(\tau)\sin\omega_0\tau d\tau \right]
\end{aligned}
$$

经过平方检波器后输出为 $\frac{2}{T}\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]$，经过增益后输出

$$
M^2\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]
$$

该检测系统将上下支路相加之后即是之前所求的 $A^2(t)-v^2$，将其和门限比较。符合之前的推倒，此系统为最佳检测系统。

证毕