《信号检测与估计》作业三 *

施念 1120161302

May 9, 2019

一　第 4 章 估计的基本理论

1. 一随机参数 θ 通过对另一随机变量 z 来观测，已知

$$p(z|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta z}, z \geq 0, \theta > 0 \\ 0, \theta < 0 \end{cases}$$

假定 θ 的先验密度为

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{l^n}{\Gamma(n)} e^{-\theta l} \theta^{n-1}, \theta \geq 0 \\ 0, \theta < 0 \end{cases}$$

试求 $\hat{\theta}_{MAP}$ 与 $\hat{\theta}_{MS}$，并求 $E\{[\theta - \hat{\theta}_{MS}]^2\}$。

解：

由题目可知：

$$\begin{aligned} \ln p(z|\theta) &= \ln\theta - \ln z \\ \ln p(\theta) &= \ln\left(\frac{l^n}{\Gamma(n)}\right) - \theta l + (n-1)\ln\theta \end{aligned}$$

因此，有

$$\frac{\partial \ln p(z|\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} - z - l + \frac{n-1}{\theta}$$

令其结果为 0，得 $\hat{\theta}_{MAP}$, 其值为：

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{n}{z+l}$$

同样，对 $\hat{\theta}_{MS}$, 有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{MS} =& \frac{\int_0^\infty \theta p(z|\theta)p(\theta)d\theta}{\int_0^\infty p(z|\theta)p(\theta)d\theta} \\ =& \frac{(n+1)!/(z+l)^{n+2}}{n!/(z+l)^{n+1}} \\ =& \frac{n+1}{z+l} \end{aligned}$$

*习题 4.1　4.2　4.3　4.4

接下来求解 $E\{[\theta-\hat{\theta}_{MS}]^2\}$
因为

$$
\begin{aligned}
p(\theta;z) =& p(z|\theta)p(\theta) \\
=& \begin{cases} \frac{l^n}{\Gamma(n)}\theta^n e^{-\theta(z+l)}, z\geq 0, \theta>0 \\ 0, \theta<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以，有

$$
\begin{aligned}
E\{{[\theta-\hat{\theta}_{MS}]}^2\} &= \iint \left[\theta^2 - 2\theta\frac{n+1}{z+l} + \left(\frac{n+1}{z+l}\right)^2\right] p(\theta;z)d\theta dz \\
&= \frac{l^n}{\Gamma(n)} \int\limits_0^\infty \left[\frac{(n+2)!}{{(z+l)}^{n+3}} - 2\frac{(n+1)!\times(n+1)}{{(z+l)}^{n+3}} + \frac{n!\times{(n+1)}^2}{{(z+l)}^{n+3}}\right] dz \\
&= l^n \int\limits_0^\infty \frac{n(n+1)(n+2) - 2n{(n+1)}^2 + n{(n+1)}^2}{{(z+l)}^{n+3}} dz \\
&= l^n \int\limits_0^\infty \frac{n(n+1)}{{(z+l)}^{n+3}} dz \\
&= \frac{l^n n(n+1)}{-(n+2)} (z+l)^{-(n+2)}|_0^\infty \\
&= \frac{n(n+1)}{l^2(n+2)}
\end{aligned}
$$

2. 根据一次观测 z 来估计信号的参量 θ。已知

$$
\begin{aligned}
p(\theta) =& 2exp(-2\theta), \quad \theta\geq 0 \\
p(z|\theta) =& \theta exp(-z\theta), \quad \theta\geq 0, z\geq 0
\end{aligned}
$$

(1) 求估计量 $\hat{\theta}_{MAP}(z)$ 和 $\hat{\theta}_{MS}(z)$

(2) 若 $z=2$，求对应的估计值；若 $z=4$，求对应的估计值。

解：

(1) 对 $\hat{\theta}_{MS}(z)$，根据定义计算得：

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}_{MS} &= \frac{\int_0^\infty \theta p(z|\theta)p(\theta)d\theta}{\int_0^\infty p(z|\theta)p(\theta)d\theta} \\
&= \frac{\int_0^\infty 2\theta^2 e^{-\theta(z+2)}d\theta}{\int_0^\infty 2\theta e^{-\theta(z+2)}d\theta} \\
&= \frac{2/(z+2)^3}{1/(z+2)^2} \\
&= \frac{2}{z+2}
\end{aligned}
$$

对 $\hat{\theta}_{MAP}(z)$，因为

$$\ln p(z|\theta) = \ln\theta - z\theta$$

$$\ln p(\theta) = \ln 2 - 2\theta$$

所以，有

$$\frac{\partial \ln p(z|\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} - z - 2$$

令其为 0，可得：

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{1}{z+2}$$

(2) 当 $z = 2$ 时，$\hat{\theta}_{MS}(2) = 1/2$，$\hat{\theta}_{MAP}(2) = 1/4$
当 $z = 4$ 时，$\hat{\theta}_{MS}(4) = 1/3$，$\hat{\theta}_{MAP}(4) = 1/6$

3. 给定独立观测序列 $z_1, z_2, ..., z_N$，具有均值 m，方差 σ^2。

(1) 问取样平均

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$$

是否为 m 的无偏估计？μ 的方差是什么？

(2) 可以找出方差的估计为

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[z_i - \mu]^2$$

问这是否是 σ^2 的无偏估计？试求他的方差。

解：

(1) 因为

$$E[\mu] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(z_i) = \frac{Nm}{N} = m$$

所以 μ 是 m 的无偏估计。

若取 $s_i = z_i - m$，则 $E[s_i s_j] = 0, \quad i \neq j$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\mu) &= E[(\mu - m)^2] \\
&= \frac{1}{N^2} E[(\sum_{i=1}^{N} s_i)^2)] \\
&= \frac{1}{N^2} E[\sum_{i=1}^{N} s_i^2)] \\
&= \frac{N\sigma^2}{N^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}
\end{aligned}$$

即 μ 的方差为 $\frac{\sigma^2}{N}$

(2) 因为

$$
\begin{aligned}
E[V] &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[(z_i-\mu)^2] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\{[(z_i-m)-(\mu-m)]^2\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \{E[(z_i-m]^2 - 2E[(z_i-m)(\mu-m)] + E[(\mu-m)^2]\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \{\sigma^2 - 2\frac{1}{N}E[(z_i-m)^2] + \frac{\sigma^2}{N}\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{N}) \\
&= \frac{N-1}{N}\sigma^2 \\
&\neq \sigma^2
\end{aligned}
$$

所以 $V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[z_i-\mu]^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。

从样本的角度出发：
因为对于样本方差 S^2，有

$$
S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i-\mu)^2 = \frac{N}{N-1}V
$$

$$
E(S^2) = \sigma^2
$$

$$
\mathrm{Var}(S^2) = \frac{1}{N}\left(m^4 - \frac{N-3}{N-1}\sigma^4\right)
$$

所以

$$
E[V] = \frac{N-1}{N}E(S^2) = \frac{N-1}{N}\sigma^2
$$

对于 $V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[z_i-\mu]^2$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(V) &= \mathrm{Var}(S^2)\frac{(N-1)^2}{N^2} \\
&= \frac{(N-1)^2}{N^2}\times\frac{1}{N}\left(m^4 - \frac{N-3}{N-1}\sigma^4\right) \\
&= \frac{(N-1)^2}{N^3}\left(m^4 - \frac{N-3}{N-1}\sigma^4\right)
\end{aligned}
$$

特殊的，当 z_i 服从正态分布

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(V) &= \operatorname{Var}(S^2)\frac{(N-1)^2}{N^2} \\ &= \frac{(N-1)^2}{N^2} \times \frac{2\sigma^4}{N-1} \\ &= \frac{2(N-1)\sigma^4}{N^2}\end{aligned}$$

4. 若观测方程为

$$z_k = h_k\theta + n_k \quad k = 1, 2, ..., N$$

其中 θ 是方差为 σ_θ^2 的零均值高斯随机变量；n_k 是方差为 σ_n^2 的零均值高斯白噪声。

(1) 求 θ 的最小均方误差估计 $\hat{\theta}_{MS}(z)$ 和最大后验概率估计 $\hat{\theta}_{MAP}(z)$，并考察其主要性能。

(2) 如果 θ 具有瑞利分布，即

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{\sigma_\theta^2}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right), \theta \geq 0 \\ 0, \qquad \theta < 0 \end{cases}$$

求 θ 的最大后验概率估计 $\hat{\theta}_{MAP}(z)$

解:

(1) 由题目可知，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}\theta + \boldsymbol{n}$

因为

$$\begin{aligned} p(\theta|z) &= \frac{p(z|\theta)p(\theta)}{p(z)} \\ p(z|\theta) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(z_i - h_i\theta)^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ p(\theta) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right)\end{aligned}$$

观测可知 $p(\theta|z)$ 也服从高斯分布，所以

$$
\begin{aligned}
p(\theta|z) &= K_1(z)\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{(z_i-h_i\theta)^2}{2\sigma_n^2}-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}\right]\\
&= K_2(z)\exp\left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(-2z_ih_i\theta+h_i\theta^2\right)}{2\sigma_n^2}\right]\\
&= K_3(z)\exp\left[-\frac{\left(\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2\right)\theta^2-2\theta\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}z_ih_i}{2\sigma_n^2\sigma_\theta^2}\right]\\
&= K_3(z)\exp\left[-\frac{\theta^2-2\theta\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}z_ih_i/\left(\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2\right)}{2\sigma_n^2\sigma_\theta^2/\left(\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2\right)}\right]
\end{aligned}
$$

其中 $K_1(z)$ $K_2(z)$ $K_3(z)$ 均为与 θ 无关的系数。

因此，有

$$
\hat{\theta}_{MAP}=\hat{\theta}_{MS}=\frac{\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}z_ih_i}{\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2}
$$

$$
\operatorname{var}(\hat{\theta}_{MAP})=\operatorname{var}(\hat{\theta}_{MS})=\frac{\sigma_n^2\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2}
$$

考察其无偏性，因为

$$
E[\hat{\theta}_{MAP}]=\mathrm{E}[\hat{\theta}_{MS}]=\frac{\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}E[z_i]h_i}{\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2}=0=E[\theta]
$$

所以其估计是无偏的。考察其 Cramer-Rao 下界，为

$$
\left\{-E\left[\frac{\partial^2\ln p(z;\theta)}{\partial\theta^2}\right]\right\}^{-1}=\frac{\sigma_n^2\sigma_\theta^2}{\sigma_n^2+\sigma_\theta^2\sum\limits_{i=1}^{N}h_i^2}=\operatorname{var}\left(\hat{\theta}_{MAP}\right)
$$

所以其无偏估计是有效的。

(2) 当 θ 具有瑞利分布时，显然 $\hat{\theta}_{MAP}>0$，因此

$$
\frac{\partial\ln p(z|\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\ln p(\theta)}{\partial\theta}=-\sum_{i=1}^{N}\frac{(\theta h_i-z_i)h_i}{\sigma_n^2}+\frac{1}{\theta}-\frac{\theta}{\sigma_\theta^2}
$$

令其为 0 可得 $\hat{\theta}_{MAP}$，整理得

$$
\hat{\theta}_{MAP}^2\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i^2}{\sigma_n^2}\right)-\hat{\theta}_{MAP}^2\sum_{i=1}^{N}\frac{z_ih_i}{\sigma_n^2}-1=0
$$

因此可得：

$$\hat{\theta}_{MAP} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i h_i}{\sigma_n^2} + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i h_i}{\sigma_n^2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i^2}{\sigma_n^2}\right)}}{2\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i^2}{\sigma_n^2}\right)}$$