《信号检测与估计》作业二*

施念 1120161302

April 12, 2019

一 第 2 章 检测基本理论

1. 根据 N 个独立样本，设计一个似然比检验，对下列假设进行选择

$$H_0 : z(t) = n(t)$$
$$H_1 : z(t) = 1 + n(t)$$
$$H_2 : z(t) = -1 + n(t)$$

其中 n(t) 是零均值、方差 σ^2 的高斯过程。假定各假设的先验概率相等，正确判断无代价，任何错误的代价相同。证明检验统计量可选为 $l(z) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$。求 $l(z)$ 的判决区域。

解：

根据各假设的先验概率相等以及代价因子的特性，三元假设检验可按照最大似然准则来设计。

N 维观测矢量的似然函数为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}|H_i) &= \prod_{k=1}^{N} P(z_k|H_i) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left[-\sum_{k=1}^{N}\frac{(z_k - s_i)^2}{2\sigma_n^2}\right], s_i(i) = 0(0), 1(1), -1(2) \end{aligned}$$

似然比为

$$\Lambda(x) = \frac{p(x|H_i)}{p(x|H_j)} \underset{H_i}{\overset{H_j}{\gtrless}} 1$$

因此三元假设判决规则等价于选择最大的

$$\frac{2s_i}{N}\sum_{k=1}^{N} z_k - s_i^2 \qquad i = 0, 1, 2$$

故对检验统计量 $\hat{z} = l(z) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i$，判决区域为：

$$l(z) \le -0.5\text{，判断 } H_2 \text{ 成立}$$
$$-0.5 \le l(z) \le 0.5\text{，判断 } H_0 \text{ 成立}$$
$$l(z) \ge 0.5\text{，判断 } H_1 \text{ 成立}$$

*习题 2.1 2.2 2.3 2.4

2. 根据一次观测，用极大极小化检验来对下面两个假设做出判断。

$$H_0: z(t) = 1 + n(t)$$
$$H_1: z(t) = n(t)$$

假定 n(t) 是具有零均值和功率 σ^2 的高斯过程，以及 $C_{00} = C_{11} = 0,\ C_{01} = C_{10} = 1$。根据观测结果给出的门限是什么？答案意味着每一个假设的先验概率是多少？

解:

因为 $C_{00} = C_{11} = 0,\ C_{01} = C_{10} = 1$，所以对代价函数有

$$C(P_1, P_{1g}) = (1 - P_1)P_F(P_{1g}) + P_M(P_{1g})P_1$$

求导并令结果为 0 得

$$P_F(P_{1g}) = P_M(P_{1g})$$

由题目可知，当 $P_F(P_{1g}) = P_M(P_{1g})$ 时，门限 $\lambda = (1+0)/2 = 0.5$。此时意味着每一个假设的先验概率相等都为 1/2

3. 若题 2.2 假定 $C_{10} = 3, C_{01} = 6$。

   (1) 每个假设的先验概率为何值时达到最大的可能代价？

   解:

   根据 2.2，可知，当 $C_{10} = 3, C_{01} = 6$ 时，欲使代价最小，有

   $$P_F(P_{1g}) = 2P_M(P_{1g})$$

   即

   $$P(H_1|H_0) = 2P(H_0|H_1)$$

   结合

   $$P(H_1|H_0) = \frac{P(H_0|H_1)P(H_1)}{P(H_0)}$$
   $$P(H_1) + P(H_0) = 1$$

   可知先验概率为

   $$\begin{cases} P(H_1) = \frac{2}{3} \\ P(H_0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

   此时达到最大的可能代价

   (2) 根据一次观测的判决区域如何？

   根据上式可知

   $$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)} = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{6 \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

   因为

   $$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} = \mathrm{e}^{[-\frac{x^2-(x-1)^2}{2\sigma^2}]} = e^{(-2x+1)/(2\sigma^2)}$$

   所以，有

   $$e^{(-2x+1)/(2\sigma^2)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{4}$$

化简得

$$x \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} \frac{1}{2} + \sigma^2 \ln 4$$

判决区域为 (z 为一次观测量)：

$$z \le \tfrac{1}{2} + \sigma^2 \ln 4\text{，判断 } H_1 \text{ 成立}$$
$$z \ge \tfrac{1}{2} + \sigma^2 \ln 4\text{，判断 } H_0 \text{ 成立}$$

4. 证明二元假设检验贝叶斯平均代价 $\bar{C}$ 可表示为

$$\begin{gathered}\bar{C} = C_{00} + (C_{10} - C_{00})P(H_1|H_0) + P(H_1)[(C_{11} - C_{00}) + \\ (C_{01} - C_{11})P(H_0|H_1) - (C_{10} - C_{00})P(H_1|H_0)]\end{gathered}$$

解:

对于二元假设检验，有

$$P(H_1) = 1 - P(H_0) \qquad P(H_0) = 1 - P(H_1)$$

$$P(H_0|H_0) = 1 - P(H_1|H_0) = 1 - P_F$$

$$P(H_1|H_1) = 1 - P(H_0|H_1) = 1 - P_M$$

所以对贝叶斯平均代价 $\bar{C}$，有

$$\begin{aligned}\bar{C} &= C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0) + C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1) + \\ &\quad C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0) + C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1) \\ &= C_{00}[1 - P(H_1)](1 - P_F) + C_{01}P(H_1)P_M + \\ &\quad C_{10}[1 - P(H_1)]P_F + C_{11}P(H_1)(1 - P_M) \\ &= C_{00} + (C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)(P_F C_{00} - C_{00} \\ &\quad + C_{01}P_M - C_{10}P_F + C_{11} - C_{11}P_M) \\ &= C_{00} + (C_{10} - C_{00})P_F + P(H_1)[(C_{11} - C_{00}) \\ &\quad + (C_{01} - C_{11})P_M - (C_{10} - C_{00})P_F] \\ &= C_{00} + (C_{10} - C_{00})P(H_1|H_0) + P(H_1)[(C_{11} - C_{00}) + \\ &\quad (C_{01} - C_{11})P(H_0|H_1) - (C_{10} - C_{00})P(H_1|H_0)]\end{aligned}$$

证毕