

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \sin \gamma_2 \sin(\theta_2 - \psi_2) + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \gamma_2 \cos(\theta_2 - \psi_2) \\
&\quad + \ddot{\psi}_2^2 \sin \gamma_2 \cos \gamma_2 \left(\frac{1}{4} m_2 L_2^2 - I_{x22}^{(22)} + I_{y22}^{(22)} \right) + \left(\frac{1}{4} m_2 L_2^2 + I_{z22}^{(22)} \right) \ddot{\gamma}_2 + \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \psi_2 \sin \gamma_2 \\
&\quad + (\lambda_4 \cos \alpha_2 + \lambda_5 \sin \alpha_2) L_2 \cos \psi_2 \sin \gamma_2 + (\lambda_4 \sin \alpha_2 - \lambda_5 \cos \alpha_2) L_2 \cos \gamma_2 = \lambda_6 L_2 \sin \psi_2 \sin \gamma_2 \\
0 &= \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_3 \sin \gamma_3 \sin(\theta_3 - \psi_3) + \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_3^2 \sin \gamma_3 \cos(\theta_3 - \psi_3) \\
&\quad + \ddot{\psi}_3^2 \sin \gamma_3 \cos \gamma_3 \left(\frac{1}{4} m_2 L_2^2 - I_{x23}^{(23)} + I_{y23}^{(23)} \right) + \left(\frac{1}{4} m_{23} L_2^2 + I_{z23}^{(23)} \right) \ddot{\gamma}_3 + \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin \psi_3 \sin \gamma_3 \\
&\quad + (\lambda_7 \cos \alpha_3 + \lambda_8 \sin \alpha_3) L_2 \cos \psi_3 \sin \gamma_3 + (\lambda_7 \sin \alpha_3 - \lambda_8 \cos \alpha_3) L_2 \cos \gamma_3 - \lambda_9 L_2 \sin \psi_3 \sin \gamma_3 \\
0 &= m_3 \ddot{x}_P + \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7 \\
0 &= m_3 \ddot{y}_P + \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_8 \\
0 &= m_3 \ddot{z}_P + m_3 g + \lambda_3 + \lambda_6 + \lambda_9 \\
f_1 &= x_P - (R - r + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \psi_1 \cos \gamma_1) \cos \alpha_1 + L_2 \sin \gamma_1 \sin \alpha_1 = 0 \\
f_2 &= y_P - (R - r + L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \psi_1 \cos \gamma_1) \sin \alpha_1 - L_2 \sin \gamma_1 \cos \alpha_1 = 0 \\
f_3 &= z_P + L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \psi_1 \cos \gamma_1 = 0 \\
f_4 &= x_P - (R - r + L_1 \cos \theta_2 + L_2 \cos \psi_2 \cos \gamma_2) \cos \alpha_2 + L_2 \sin \gamma_2 \sin \alpha_2 = 0 \\
f_5 &= y_P - (R - r + L_1 \cos \theta_2 + L_2 \cos \psi_2 \cos \gamma_2) \sin \alpha_2 - L_2 \sin \gamma_2 \cos \alpha_2 = 0 \\
f_6 &= z_P + L_1 \sin \theta_2 + L_2 \sin \psi_2 \cos \gamma_2 = 0 \\
f_7 &= x_P - (R - r + L_1 \cos \theta_3 + L_2 \cos \psi_3 \cos \gamma_3) \cos \alpha_3 + L_2 \sin \gamma_3 \sin \alpha_3 = 0 \\
f_8 &= y_P - (R - r + L_1 \cos \theta_3 + L_2 \cos \psi_3 \cos \gamma_3) \sin \alpha_3 - L_2 \sin \gamma_3 \cos \alpha_3 = 0 \\
f_9 &= z_P + L_1 \sin \theta_3 + L_2 \sin \psi_3 \cos \gamma_3 = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4.2 Thiết lập phương trình chuyển động cho mô hình 2 của robot 3RUS

Với mô hình này khâu $B_i D_i$ được mô hình hóa thành hai chất điểm đặt tại B_i và D_i , mỗi chất điểm có khối lượng m_b và được nối với nhau bằng thanh cứng, không trọng lượng. Như vậy, mô hình động lực học của mô hình này bao gồm 4 vật rắn, trong đó các khâu $A_i B_i (i=1, 2, 3)$ chuyển động quay quanh các trục vuông góc với mặt phẳng $O A_i B_i$ tại A_i có khối lượng m_l và vật rắn còn lại là bàn máy động (bao gồm ba chất điểm gắn tại D_i) chuyển động tịnh tiến có khối lượng $(m_p + 3m_b)$ và 3 chất điểm đặt tại các điểm B_i có khối lượng m_b . Trong đó m_p là khối lượng của khâu thao tác. Trên các khâu $A_i B_i$ đặt các lực mô men phát động như hình vẽ 2.8. Vì mô hình này tương đối đơn giản nên ta sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử

để thiết lập phương trình chuyển động. Tọa độ suy rộng dư được chọn để thiết lập phương trình chuyển động của robot là:

$$\mathbf{q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad x_P \quad y_P \quad z_{P-}]^T \quad (2.40)$$

2.4.2.1 Thiết lập các phương trình liên kết:

Từ hình vẽ 2.8, ta có phương trình liên kết cho điểm B₁ và D₁ như sau:

$$l_2^2 - (\mathbf{r}_{D_1} - \mathbf{r}_{B_1})^T (\mathbf{r}_{D_1} - \mathbf{r}_{B_1}) = 0 \quad (2.41)$$

trong đó: \mathbf{r}_{B_1} , \mathbf{r}_{D_1} là các véc tơ định vị các điểm B₁ và D₁ trong hệ tọa độ cố định Oxyz, \mathbf{r}_{B_1} được tính theo phương trình véc tơ:

$$\mathbf{r}_{B_1} = \mathbf{r}_{A_1} + \mathbf{u}_{A_1B_1} \quad (2.42)$$

Trong đó, tọa độ của các véc tơ \mathbf{r}_{A_1} , $\mathbf{u}_{A_1B_1}$ trong hệ tọa độ Ox₁Y₁Z₁ có dạng:

$$\mathbf{r}_{A_1} = [R \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{u}_{A_1B_1} = [l_1 \cos \theta_1 \quad 0 \quad -l_1 \sin \theta_1]^T \quad (2.43)$$

Thay (2.43) vào (2.42) ta được tọa độ \mathbf{r}_{B_1} trong hệ tọa độ Ox₁Y₁Z₁:

$$\mathbf{r}_{B_1} = [R + l_1 \cos \theta_1 \quad 0 \quad -l_1 \sin \theta_1]^T \quad (2.44)$$

Ma trận cosin chỉ hướng của hệ tọa độ Ox₁Y₁Z₁ với hệ tọa độ Oxyz là:

$$\mathbf{A}_z(\alpha_1) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Suy ra tọa độ của véc tơ \mathbf{r}_{B_1} trong hệ tọa độ Oxyz:

$$\mathbf{r}_{B_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R + l_1 \cos \theta_1 \\ 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \alpha_1 + l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 \\ R \sin \alpha_1 + l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 \\ -l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Tọa độ của véc tơ \mathbf{r}_{D_1} được tính như sau:

$$\mathbf{r}_{D_1} = \mathbf{r}_P + \mathbf{u}_{PD_1} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P + \cos \alpha_1 r \\ y_P + \sin \alpha_1 r \\ z_P \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Kết hợp phương trình (2.46) và (2.47) ta có:

$$\mathbf{r}_{D_1} - \mathbf{r}_{B_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 (R - r) + l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 - x_P \\ \sin \alpha_1 (R - r) + l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 - y_P \\ -l_1 \sin \theta_1 - z_P \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Thay phương trình (2.48) vào phương trình (2.41) ta được phương trình liên kết cho chân thứ nhất. Tương tự với chân thứ hai và ba, ta được các phương trình liên kết của robot như sau:

$$\begin{aligned} f_1 &= l_2^2 - (\cos \alpha_1 (R - r) + l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 - x_P)^2 - (\sin \alpha_1 (R - r) + l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 - y_P)^2 \\ &\quad - (l_1 \sin \theta_1 + z_P)^2 = 0 \\ f_2 &= l_2^2 - (\cos \alpha_2 (R - r) + l_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 - x_P)^2 - (\sin \alpha_2 (R - r) + l_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 - y_P)^2 \\ &\quad - (l_1 \sin \theta_2 + z_P)^2 = 0 \\ f_3 &= l_2^2 - (\cos \alpha_3 (R - r) + l_1 \cos \alpha_3 \cos \theta_3 - x_P)^2 - (\sin \alpha_3 (R - r) + l_1 \sin \alpha_3 \cos \theta_3 - y_P)^2 \\ &\quad - (l_1 \sin \theta_3 + z_P)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.4.2.2 Tính động năng, thế năng của robot:

Động năng của các khâu $A_i B_i$ được tính như sau:

$$T_{A_i B_i} = \frac{1}{2} I_{1y} \omega_{A_i B_i}^2 = \frac{1}{2} I_{1y} \dot{\theta}_i^2 \quad (2.50)$$

Động năng của khối lượng m_b đặt tại B_1 như sau:

$$T_{m_b} = \frac{1}{2} m_b v_{B_1}^2 = \frac{1}{2} m_b l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.51)$$

Động năng của bàn máy động và các khối lượng m_b của robot có dạng:

$$T_3 = \frac{1}{2} (m_P + 3m_b) v_P^2 = \frac{1}{2} (m_P + 3m_b) (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2) \quad (2.52)$$

Kết hợp các biểu thức động năng ở trên, ta được biểu thức động năng mô hình 2 của robot:

$$T = \frac{1}{2}(I_{1y} + m_b I_1^2)(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2}(m_p + 3m_b)(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \quad (2.53)$$

Thế năng của robot được tính như sau:

$$\pi = -gl_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_b \right) (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3) + g(3m_b + m_p)z_p \quad (2.54)$$

2.4.2.3 Thiết lập phương trình vi phân chuyển động

Ta sử dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của mô hình này với các liên kết holo-nôm có dạng như sau:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \quad (k=1,2,\dots,m) \quad (2.55)$$

trong đó q_k là các tọa độ suy rộng dư của robot, f_i là các phương trình liên kết, Q_k là các lực suy rộng, λ_i là các nhân tử Lagrange. Với mô hình này, véc tơ tọa độ suy rộng $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ và số phương trình liên kết là ba, do vậy $m=6$, $r=3$. Ta phân các lực tác dụng lên robot thành các lực có thể và các lực không có thể thì lực suy rộng Q_k được tính như sau:

$$Q_k = -\frac{\partial \pi}{\partial q_k} + Q_k^{np}$$

Trong đó Q_k^{np} là các lực suy rộng ứng với các lực không có thể. Công ảo của lực suy rộng không có thể là:

$$\delta A = \tau_1 \delta \theta_1 + \tau_2 \delta \theta_2 + \tau_3 \delta \theta_3$$

Như vậy ta có: $Q_1^{np} = \tau_1$, $Q_2^{np} = \tau_2$, $Q_3^{np} = \tau_3$, các trường hợp: $Q_k^{np} = 0$ với $k=4,5,6$.

Thay các biểu thức động năng (2.53), thế năng (2.54) và các phương trình liên kết (2.49) vào phương trình (2.55), ta được phương trình chuyển động của robot là hệ phương trình vi phân – đại số như sau:

CONST

$$\begin{aligned}
& \left(I_{1y} + m_b l_1^2 \right) \ddot{\theta}_1 = g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_b \right) \cos \theta_1 + \tau_1 - \\
& \quad - 2 \lambda_1 l_1 \left(\sin \theta_1 (R - r) - \cos \alpha_1 \sin \theta_1 x_p - \sin \alpha_1 \sin \theta_1 y_p - \cos \theta_1 z_p \right); \\
& \left(I_{1y} + m_b l_1^2 \right) \ddot{\theta}_2 = g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_b \right) \cos \theta_2 + \tau_2 - \\
& \quad - 2 \lambda_2 l_1 \left(\sin \theta_2 (R - r) - \cos \alpha_2 \sin \theta_2 x_p - \sin \alpha_2 \sin \theta_2 y_p - \cos \theta_2 z_p \right); \\
& \left(I_{1y} + m_b l_1^2 \right) \ddot{\theta}_3 = g l_1 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_b \right) \cos \theta_3 + \tau_3 - \\
& \quad - 2 \lambda_3 l_1 \left(\sin \theta_3 (R - r) - \cos \alpha_3 \sin \theta_3 x_p - \sin \alpha_3 \sin \theta_3 y_p - \cos \theta_3 z_p \right); \\
& (m_p + 3m_b) \ddot{x}_p = -2 \lambda_1 \left(\cos \alpha_1 (R - r) + l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 - x_p \right) - \\
& \quad - 2 \lambda_2 \left(\cos \alpha_2 (R - r) + l_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 - x_p \right) - 2 \lambda_3 \left(\cos \alpha_3 (R - r) + l_1 \cos \alpha_3 \cos \theta_3 - x_p \right); \\
& (m_p + 3m_b) \ddot{y}_p = -2 \lambda_1 \left(\sin \alpha_1 (R - r) + l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 - y_p \right) - \\
& \quad - 2 \lambda_2 \left(\sin \alpha_2 (R - r) + l_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 - y_p \right) - 2 \lambda_3 \left(\sin \alpha_3 (R - r) + l_1 \sin \alpha_3 \cos \theta_3 - y_p \right); \\
& (m_p + 3m_b) \ddot{z}_p = -(3m_b + m_p)g + 2 \lambda_1 (z_p + l_1 \sin \theta_1) + 2 \lambda_2 (z_p + l_1 \sin \theta_2) + 2 \lambda_3 (z_p + l_1 \sin \theta_3); \\
& l_1^2 - \left(\cos \alpha_1 (R - r) + l_1 \cos \alpha_1 \cos \theta_1 - x_p \right)^2 - \left(\sin \alpha_1 (R - r) + l_1 \sin \alpha_1 \cos \theta_1 - y_p \right)^2 \\
& \quad - \left(l_1 \sin \theta_1 + z_p \right)^2 = 0 \\
& l_1^2 - \left(\cos \alpha_2 (R - r) + l_1 \cos \alpha_2 \cos \theta_2 - x_p \right)^2 - \left(\sin \alpha_2 (R - r) + l_1 \sin \alpha_2 \cos \theta_2 - y_p \right)^2 \\
& \quad - \left(l_1 \sin \theta_2 + z_p \right)^2 = 0 \quad (2.56) \\
& l_1^2 - \left(\cos \alpha_3 (R - r) + l_1 \cos \alpha_3 \cos \theta_3 - x_p \right)^2 - \left(\sin \alpha_3 (R - r) + l_1 \sin \alpha_3 \cos \theta_3 - y_p \right)^2 \\
& \quad - \left(l_1 \sin \theta_3 + z_p \right)^2 = 0
\end{aligned}$$

Phương trình (2.56) được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \mathbf{\Phi}_s^T(\mathbf{s}) \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

trong đó: $\mathbf{f}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^3$; $\mathbf{\Phi}_s(\mathbf{s}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$; $\mathbf{s} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad x_p \quad y_p \quad z_p]^T$;

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T; \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T;$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) = \text{diag}(I_{1y} + m_b l_1^2, I_{1y} + m_b l_1^2, I_{1y} + m_b l_1^2, m_p + 3m_b, m_p + 3m_b, m_p + 3m_b);$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} -gl_1(m_1/2 + m_b)\cos\theta_1; & -gl_1(m_1/2 + m_b)\cos\theta_2 \\ & -gl_1(m_1/2 + m_b)\cos\theta_3; & 0; & 0; & (m_p + 3m_b)g \end{bmatrix}^T$$

Nhận xét: Phương trình (2.56) bao gồm 6 phương trình vi phân và 3 phương trình đại số, so sánh với các phương trình chuyển động của mô hình 1 (2.39) bao gồm 12 phương trình vi phân và 9 phương trình đại số. Như vậy, ta thấy phương trình chuyển động của mô hình 2 đơn giản hơn mô hình 1 rất nhiều.

2.5 Thiết lập phương trình chuyển động robot song song Delta không gian 3PUS

2.5.1 Thiết lập phương trình chuyển động mô hình 1 của robot 3PUS

2.5.1.1 Thiết lập phương trình liên kết

Từ phân tích động học ở trên, vị trí các con trượt B_1, B_3, B_3 lần lượt được xác định bởi các tọa độ d_1, d_2, d_3 . Vị trí các khâu B_iD_i được xác định bởi vị trí các con trượt B_i và các góc θ_i, γ_i tương ứng. Vị trí bàn máy động $D_1D_2D_3$ được xác định bởi các tọa độ x_p, y_p, z_p trong hệ tọa độ (R_0) . Do vậy, ta chọn các tọa độ suy rộng như sau:

$$\mathbf{s} = [\mathbf{q}_a^T \quad \mathbf{q}_p^T \quad \mathbf{x}^T]^T$$

$$\text{với: } \mathbf{q}_a = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T, \quad \mathbf{q}_p = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3]^T, \quad \mathbf{x} = [x_p \quad y_p \quad z_p]^T$$

Do có 12 tọa độ suy rộng, nhưng lại chỉ có 3 tọa độ độc lập, nên ta cần thêm 9 phương trình liên kết để giải quyết bài toán động học.

Từ sơ đồ thiết lập hệ tọa độ ở trên, ta xét 3 vòng kín độc lập là $OA_1B_1D_1PO$, $OA_2B_2D_2PO$ và $OA_3B_3D_3PO$. Với mỗi vòng kín ta sẽ thiết lập được 3 phương trình liên kết, như vậy với 3 vòng, ta sẽ có 9 phương trình liên kết độc lập. Do tính chất đối xứng, dưới đây, ta sẽ xét việc thiết lập phương trình liên kết đối với vòng $OA_1B_1D_1PO$.

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1D_1} + \overrightarrow{D_1P} = \overrightarrow{OP} \quad (2.59)$$

Để thuận tiện ta đưa vào các ký hiệu sau:

$$\|\mathbf{e}(t_k)\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{q}_k, \mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon \quad (3.19)$$

Nếu độ chính xác của từng bước tính không thỏa mãn điều kiện (3.19) quá trình tính phải trở lại đầu bước lặp và phải hiệu chỉnh độ lớn của Δt .

3.2 Phương pháp số giải bài toán động lực học ngược robot song song

3.2.1 Bài toán động lực học ngược

Phương trình chuyển động tổng quát của robot có dạng như sau:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \Phi_s^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\tau} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Gọi $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^f$ là véc tơ các tọa độ khớp chủ động, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^r$ là véc tơ tọa độ các suy rộng dư (bao gồm các tọa độ khớp bị động và tọa độ thao tác). Ký hiệu

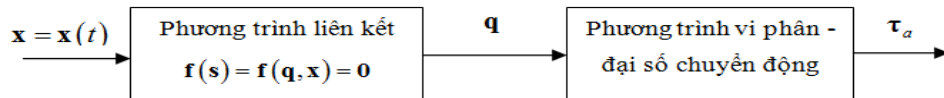
$$\mathbf{s} = [\mathbf{q}_a^T, \mathbf{z}^T]^T, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, \quad n = f + r$$

Trong các phương trình (3.20) và (3.21) ta có

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^r, \quad \Phi_s^T(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r,$$

$$\Phi_s = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$$

Bài toán động lực học ngược của robot song song được phát biểu như sau: Cho biết hệ phương trình chuyển động của robot dạng (3.20), (3.21), cho biết quy luật chuyển động của khâu thao tác $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Xác định mô men/ lực của các khâu dẫn động $\boldsymbol{\tau}_a \in \mathbb{R}^f$ cần thiết để tạo ra chuyển động mong muốn của khâu thao tác. Sơ đồ khối của bài toán động lực học ngược như sau:



Hình 3.1: Sơ đồ khối bài toán động lực học ngược

3.2.2 Giải bài toán động lực học ngược bằng phương pháp khử các nhân tử Lagrange [4]

Bài toán động lực học ngược là bài toán cho trước quy luật biến đổi của các tọa độ, vận tốc và gia tốc khâu thao tác cần tìm lực hoặc momen dẫn động. Như vậy, qua bài toán động lực học ngược với quỹ đạo cho trước của tâm bàn máy động đã tìm được các véc tơ $\mathbf{s}(t)$, $\dot{\mathbf{s}}(t)$, $\ddot{\mathbf{s}}(t)$. Từ đó các biểu thức về ma trận khối lượng, ma trận quán tính ly tâm và Coriolis, ma trận Φ_s , cũng như véc tơ $\mathbf{tog}(\mathbf{s})$ đã xác định hoàn toàn. Như vậy, phương trình (3.20) là phương trình đại số tuyến tính với ẩn là các véc tơ momen dẫn động $\boldsymbol{\tau}_a$ và các nhân tử Lagrange λ với số phương trình bằng số ẩn. Vì vậy, ta có thể giải trực tiếp hệ phương trình này sau đó tách lấy kết quả là các mô men dẫn động $\boldsymbol{\tau}_a$.

Trong luận án này sẽ không giải trực tiếp phương trình (3.20) mà tìm cách khử nhân tử Lagrange λ , biến đổi hệ phương trình vi phân – đại số (3.20), (3.21) về hệ phương trình chỉ có các ẩn là mô men khớp chủ động $\boldsymbol{\tau}_a$.

Ta phân tập các tọa độ vật lý s_1, \dots, s_n thành hai tập con: Tập các tọa độ suy rộng độc lập q_1, \dots, q_f và tập các tọa độ suy rộng phụ thuộc z_1, \dots, z_r . Chú ý rằng $f + r = n$. Số lượng các tọa độ suy rộng phụ thuộc bằng số lượng các phương trình liên kết bổ sung. Ma trận Φ_s có dạng

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial s_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f} & \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Để biến đổi, ta sẽ sử dụng các ký hiệu

$$\Phi_z = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} \end{bmatrix}, \quad \Phi_q = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Bây giờ ta đưa vào ký hiệu:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\Phi_z^{-1} \Phi_q \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

trong đó \mathbf{E} là ma trận đơn vị cỡ $f \times f$.

Định lý [4]: Giữa ma trận \mathbf{R} và ma trận Φ_s có hệ thức liên hệ

$$\mathbf{R}^T \Phi_s^T = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Chứng minh. Từ (3.22) và (3.24) ta suy ra

$$\mathbf{R}^T = [\mathbf{E}, -\Phi_q^T (\Phi_z^{-1})^T] \quad , \quad \Phi_s^T = \begin{bmatrix} \Phi_q^T \\ \Phi_z^T \end{bmatrix}$$

Nhân hai ma trận trên với nhau ta được

$$\mathbf{R}^T \Phi_s^T = [\mathbf{E}, -\Phi_q^T (\Phi_z^{-1})^T] \begin{bmatrix} \Phi_q^T \\ \Phi_z^T \end{bmatrix} = \Phi_q^T - \Phi_q^T (\Phi_z^{-1})^T \Phi_z^T = \mathbf{0}$$

Định lý được chứng minh xong.

Nhân hai vế phương trình (3.20) với ma trận $\mathbf{R}^T(\mathbf{s})$ ta được:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{s}) (\mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \Phi_s^T(\mathbf{s}) \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.26)$$

Giả sử véc tơ $\boldsymbol{\tau}$ có dạng:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_a^T & \boldsymbol{\tau}_z^T \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

trong đó $\boldsymbol{\tau}_a$ là véc tơ mô men/ lực tác động lên các khâu dẫn, $\boldsymbol{\tau}_z$ là véc tơ mô men/ lực tác dụng lên các khâu còn lại.

Chú ý đến công thức (3.25), (3.26) ta suy ra:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\tau}_a - \Phi_q^T (\Phi_z^{-1})^T \boldsymbol{\tau}_z \quad (3.28)$$

Xét trường hợp các khâu bị dẫn không có lực ngoài lực phát động. Khi đó $\boldsymbol{\tau}_z = \mathbf{0}$ từ (3.28) suy ra:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T(\mathbf{s}) \mathbf{g}(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\tau}_a \quad (3.29)$$

Các đại lượng ở vế trái của phương trình (3.29) đã được biết từ kết quả của bài toán động học ngược. Do vậy, các mô men khớp chủ động được tính theo phương trình này.

Các bước giải bài toán động lực học ngược theo phương pháp này:

Bước 1: Giải bài toán động học ngược. Cho biết $\mathbf{x}(t)$ và $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Tính $\mathbf{s}(t)$, $\dot{\mathbf{s}}(t)$, $\ddot{\mathbf{s}}(t)$

Bước 2: Tính các ma trận $\Phi_z(\mathbf{s})$, $\Phi_q(\mathbf{s})$, $\Phi_z^{-1}(\mathbf{s})$, $\mathbf{R}(\mathbf{s})$, $\mathbf{M}(\mathbf{s})$, $\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{s})$

Bước 3: Tính các mô men (lực) các khâu dẫn theo công thức (3.29)

Dựa trên các thuật toán trình bày ở trên chúng tôi đã xây dựng một chương trình tính toán động học ngược và động lực học ngược robot song song Delta. Chương trình này có tên là DELTA-IMECH (xem phụ lục). Khi tính toán có sự trợ giúp của phần mềm đa năng MATLAB. Các kết quả mô phỏng số trong luận án này được thực hiện bằng phần mềm này.

3.3 Mô phỏng số bài toán động học ngược robot song song Delta không gian

3.3.1 Mô phỏng số bài toán động học ngược robot 3RUS

Để có thể tính toán mô phỏng số ta phải biết các tham số động học và động lực học. Dưới đây ta mô phỏng số bài toán động học ngược robot 3RUS với hai bộ số liệu.

3.3.1.1 Bộ số liệu 1:

Hình 3.2 là một loại robot song song Delta không gian 3RUS đã được nhóm nghiên cứu thiết kế, chế tạo ở Trường Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội. Từ robot thực thể ta có thể xác định các tham số của robot 3RUS (xem bảng 1.2).

Tâm P của bàn máy động chuyển động theo quy luật sau:

$$\begin{aligned} x_p &= 0.3 \cos(2\pi t) ; y_p = 0.3 \sin(2\pi t) \\ z_p &= -0.7 \text{ (m)} \end{aligned}$$



Hình 3.2: Robot Delta 3RUS đã chế tạo tại Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội

Do $\bar{\mathbf{M}}$ là xác định dương nên từ (4.30) ta có

$$\ddot{\mathbf{e}}_a + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_a + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_a + \mathbf{K}_I \int_0^t \mathbf{e}_a(\tau) d\tau = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (4.31) theo thời gian ta được

$$\ddot{\mathbf{e}}_a + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}}_a + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_a + \mathbf{K}_I \mathbf{e}_a = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

Do \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_P , \mathbf{K}_I là các ma trận đường chéo, nên từ (4.32) ta suy ra hệ phương trình vi phân cấp 3

$$\ddot{e}_{ai} + k_{Di} \dot{e}_{ai} + k_{Pi} e_{ai} + k_{Ii} e_{ai} = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n_a) \quad (4.33)$$

Các phương trình (4.33) là các phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số. Phương trình đặc trưng có dạng

$$\lambda_i^3 + k_{Di} \lambda_i^2 + k_{Pi} \lambda_i + k_{Ii} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n_a) \quad (4.34)$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz, điều kiện để các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm là

$$k_{Di} > 0, k_{Pi} > 0, k_{Ii} > 0, k_{Di} k_{Pi} - k_{Ii} > 0, \quad i=1, 2, \dots, n_a \quad (4.35)$$

Như thế, nếu các hệ số k_{Di}, k_{Pi}, k_{Ii} được chọn sao cho các điều kiện (4.35) được thỏa mãn thì các phương vi phân (4.33) sẽ ổn định mũ. Do đó $\mathbf{q}_a(t) \rightarrow \mathbf{q}_a^d(t)$.

4.2.2.3 Điều khiển trượt robot song song

Khi sử dụng các luật điều khiển PD, PID ta cần phải biết chính xác các ma trận, véc tơ \mathbf{M}_a , \mathbf{C}_a , \mathbf{g}_a , \mathbf{d}_a . Do đó cần phải biết chính xác các tham số động lực học của robot (khối lượng, vị trí khối tâm, mô men quán tính...). Tuy nhiên trong thực tế, nhiều khi ta chỉ có thể biết một cách gần đúng các tham số động lực của robot. Để khắc phục nhược điểm này ta sử dụng luật điều khiển thích nghi bền vững, chẳng hạn như luật điều khiển trượt.

Trong thực tế các tham số của hệ động lực thường khó xác định thật chính xác. Do đó các phương trình vi phân chuyển động của robot song song $n_a = f$ bậc tự do (4.16) có thể viết lại dưới dạng:

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{q}}_a + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{q}}_a + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{s}) + \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.36)$$

trong đó các ma trận/véc tơ $\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{d}}$ thường chỉ có thể xác định được một cách gần đúng. Để chính xác hóa về mặt toán học, ta có thể biểu diễn các đại lượng trên như sau:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{s}) &= \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s}) + \Delta\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s}), \quad \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) + \Delta\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \\ \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{s}) &= \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{s}) + \Delta\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{s}), \quad \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) + \Delta\bar{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

với $\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{d}}$ là các ma trận/véc tơ chính xác của hệ, còn $\Delta\bar{\mathbf{M}}, \Delta\bar{\mathbf{C}}, \Delta\bar{\mathbf{g}}, \Delta\bar{\mathbf{d}}$ là các ẩn biểu thị sai số. Chúng ta chấp nhận các giả thiết sau:

$$\|\Delta\bar{\mathbf{M}}\| \leq m_0, \quad \|\Delta\bar{\mathbf{C}}\| \leq c_0, \quad \|\Delta\bar{\mathbf{g}}\| \leq g_0, \quad \|\Delta\bar{\mathbf{d}}\| \leq d_0$$

trong đó m_0, c_0, g_0, d_0 là các hằng số xác định. Thế biểu thức (4.37) vào phương trình (4.36) ta được:

$$(\bar{\mathbf{M}} + \Delta\bar{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{q}}_a + (\bar{\mathbf{C}} + \Delta\bar{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{g}} + \Delta\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{d}} + \Delta\bar{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.38)$$

Từ (4.38) ta suy ra

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\dot{\mathbf{q}}_a + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{s}) + \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) + \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.39)$$

trong đó ta ký hiệu

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \Delta\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}_a + \Delta\bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}_a + \Delta\bar{\mathbf{g}} + \Delta\bar{\mathbf{d}} \quad (4.40)$$

là tổng các thành phần chưa xác định được của hệ động lực, với giả thiết $\|\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\| \leq h_0$.

Điều khiển trượt có một số ưu điểm nổi trội là bền vững, ít nhạy cảm với sự thay đổi các tham số của hệ và các nhiễu động. Vì vậy điều khiển trượt hay được áp dụng trong bài toán điều khiển phi tuyến các robot [1, 101]. Quá trình điều khiển trượt thường gồm hai bước: Bước một là đưa hệ thống vào quỹ đạo của mặt trượt, bước hai là duy trì hệ thống trên mặt trượt. Để sử dụng điều khiển trượt ta phải xác định mặt trượt. Ở đây mặt trượt được chọn dưới dạng PD như sau

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{e}}_a(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_a(t) \quad (4.41)$$

trong đó $\mathbf{\Lambda}$ là ma trận đường chéo xác định dương

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_a}) \quad , \quad \lambda_i > 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_a \quad (4.42)$$

còn $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{n_a}]^T$

Hệ phương trình (4.41) có thể viết lại dưới dạng

$$v_i(t) = \dot{e}_{ai}(t) + \lambda_i e_{ai}(t) \quad i = 1, 2, \dots, n_a \quad (4.43)$$

Khi $v_i(t) \equiv 0$, từ (4.43) ta suy ra

$$\dot{e}_{ai}(t) + \lambda_i e_{ai}(t) = 0 \quad \Rightarrow \frac{de_{ai}}{dt} = -\lambda_i e_{ai}(t) \quad (4.44)$$

Nghiệm của phương trình (4.44) có dạng:

$$e_{ai}(t) = e_{ai}(0) e^{-\lambda_i t} \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty \text{ do } \lambda_i > 0$$

Bài toán đặt ra như sau: Chọn luật điều khiển $\mathbf{u}(t)$ sao cho $v_i \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$ hay

$$e_{ai}(t) \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty.$$

Để giải quyết bài toán trên ta có định lý như sau.

Định lý: Quỹ đạo $\mathbf{q}_a(t)$ của hệ động lực (4.36) với mặt trượt $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{e}}_a(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_a(t)$

sẽ bám quỹ đạo mong muốn $\mathbf{q}_a^d(t)$ với sai số $\mathbf{e}_a(t) = \mathbf{q}_a(t) - \mathbf{q}_a^d(t) \rightarrow \mathbf{0}$, nếu ta

chọn luật điều khiển $\mathbf{u}(t)$ có dạng như sau:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{q}}_a^d + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{q}}_a^d + \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s}) \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{e}}_a - \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_a - \mathbf{K}_{PD} \mathbf{v} - \mathbf{K}_S \text{sign}(\mathbf{v}) \quad (4.45)$$

trong đó:

$$\text{sign}(\mathbf{v}) = [\text{sign}(v_1), \text{sign}(v_2), \dots, \text{sign}(v_{n_a})]^T \quad (4.46)$$

\mathbf{K}_{PD} , \mathbf{K}_S là các ma trận đường chéo cấp n_a xác định dương

$$\mathbf{K}_{PD} = \text{diag}(k_{PD1}, k_{PD2}, \dots, k_{PDna}), \quad k_{PDi} > 0$$

$$\mathbf{K}_S = \text{diag}(k_{S1}, k_{S2}, \dots, k_{Sna}), \quad k_{Si} > 0$$

Chú ý: Các đại lượng \mathbf{q}_a , $\dot{\mathbf{q}}_a$ trong luật điều khiển (4.45) được xác định bằng đo (hoặc bằng giải bài toán động lực học thuận trong mô phỏng) sau đó giải bài toán động lực học thuận để tính \mathbf{s} , $\dot{\mathbf{s}}$.

Chứng minh: Chọn hàm Lyapunov dạng

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{v} \quad (4.47)$$

Do $\bar{\mathbf{M}}$ là ma trận đối xứng, xác định dương nên $V(t) > 0$ khi $\mathbf{v} \neq 0$ và $V(t)=0$ khi và chỉ khi $\mathbf{v} = 0$. Vậy hàm $V(t)$ chọn theo (4.47) là hàm xác định dương. Đạo hàm $V(t)$ theo thời gian ta được:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \dot{\bar{\mathbf{M}}} \mathbf{v} \quad (4.48)$$

Sử dụng tính chất đối xứng lệch của ma trận $\dot{\bar{\mathbf{M}}} - 2\bar{\mathbf{C}}$ ta có

$$\mathbf{v}^T (\dot{\bar{\mathbf{M}}} - 2\bar{\mathbf{C}}) \mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v}^T \dot{\bar{\mathbf{M}}} \mathbf{v} = 2\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{v} \quad (4.49)$$

Thế (4.49) vào (4.48) ta được

$$\dot{V}(t) = \mathbf{v}^T (\bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{v}) \quad (4.50)$$

Ta chọn $\hat{\mathbf{r}}_a = \mathbf{u}$, từ luật điều khiển (4.45) và (4.39) ta suy ra

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s})(\ddot{\mathbf{q}}_a - \ddot{\mathbf{q}}_a^d) + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})(\dot{\mathbf{q}}_a^d - \dot{\mathbf{q}}_a^d) + \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{s})\Lambda \dot{\mathbf{e}}_a + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})\Lambda \mathbf{e}_a \\ = -\bar{\mathbf{h}} - \mathbf{K}_{PD} \mathbf{v} - \mathbf{K}_S \text{sign}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Từ (4.51) ta có

$$\bar{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{v} = -[\mathbf{K}_{PD} \mathbf{v} + \mathbf{K}_S \text{sign}(\mathbf{v}) + \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{v})] \quad (4.52)$$

Thế (4.52) vào (4.50) ta được

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{v}^T \mathbf{K}_{PD} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{K}_S \text{sign}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{h}} \quad (4.53)$$

Do $\mathbf{K}_{pd}, \mathbf{K}_S$ là các ma trận đường chéo cấp n_a nên từ (4.53) ta có

$$\dot{V}(t) = -\sum_{i=1}^{n_a} k_i^{pd} v_i^2 - \sum_{i=1}^{n_a} k_i^S v_i \text{sign}(v_i) - \sum_{i=1}^{n_a} v_i h_{ai} \quad (4.54)$$

Do $v_i \text{sign}(v_i) = |v_i|$ nên biểu thức (4.54) có dạng

$$\dot{V}(t) = -\sum_{i=1}^{n_a} k_{PDi} v_i^2 - \sum_{i=1}^{n_a} k_{Si} |v_i| - \sum_{i=1}^{n_a} v_i h_{ai} \quad (4.55)$$

Giả sử $|h_{ai}| \leq h_0$. Khi đó từ (4.55) ta có:

$$\dot{V}(t) \leq -\sum_{i=1}^{n_a} k_{PDi} v_i^2 - \sum_{i=1}^{n_a} (k_{Si} - h_0) |v_i| \quad (4.56)$$

Nếu chọn các thành phần các ma trận đường chéo \mathbf{K}_S sao cho $k_{Si} > |h_{ai}|$ thì $\dot{V}(t) < 0$. Khi đó $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$ khi $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$.

Chú ý: Trong bộ điều khiển trượt (4.45) có thành phần không liên tục $\mathbf{K}_S \text{sign}(\mathbf{v})$ nên khi hệ thống làm việc sẽ xuất hiện những dao động không mong muốn có tần số cao xung quanh mặt trượt và có biên độ phụ thuộc vào độ lớn các phần tử k_i^S của ma trận \mathbf{K}_S . Hiện tượng này được gọi là hiện tượng “chattering” làm ảnh hưởng đến chất lượng điều khiển. Để khắc phục hiện tượng này ta có thể thay hàm $\text{sign}(\mathbf{v})$ bằng hàm $\frac{2}{\pi} \arctan(\mathbf{v})$.

4.2.2.4 Điều khiển robot song song theo nguyên lý trượt sử dụng mạng nơ ron

Tương tự như điều khiển trượt, phương trình của robot cũng chỉ viết được một cách gần đúng như (4.36), mặt trượt cũng được chọn dưới dạng PD như (4.41) và tổng các thành phần chưa được xác định của hệ động lực (4.40) hàm $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$ được viết lại một cách hình thức như sau:

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{v}) := \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \quad (4.57)$$