



1

# ROBOT DELTA

## MỤC LỤC

<b>ROBOT DELTA .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Giới thiệu .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Robot delta kiểu ba khớp quay.....</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Cấu trúc robot .....</b>	<b>4</b>
2.1.1. Bậc tự do .....	7
<b>2.2. Phân tích động học .....</b>	<b>8</b>
2.2.1. Xây dựng hệ phương trình động học và ma trận Jacobi.....	8
2.2.2. Nghiệm bài toán động học ngược .....	12
2.2.2.1. Phương pháp giải tích .....	12
2.2.2.1. Phương pháp số Newton-Raphson .....	14
2.2.3. Nghiệm bài toán động học thuận.....	17
<b>2.3. Phân tích động lực học .....</b>	<b>20</b>
<b>2.4. Vùng làm việc .....</b>	<b>32</b>
2.4.1. Vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU .....	33
2.4.2. Vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay .....	35
2.4.2.1. Khảo sát vùng làm việc.....	37
2.4.2.2. Ảnh hưởng của vị trí cơ cấu hình bình hành đến hình dạng vùng làm việc IIe, IIIb .....	40
2.4.3. Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất.....	41

<b>3.</b>	<b>Robot delta kiểu ba khớp trượt.....</b>	<b>61</b>
<b>3.1.</b>	<b>Cấu trúc robot .....</b>	<b>61</b>
<b>3.2.</b>	<b>Phân tích động học .....</b>	<b>64</b>
3.2.1.	Nghiệm bài toán động học ngược.....	66
3.2.2.	Nghiệm bài toán động học thuận.....	67
3.2.3.	Phương trình vận tốc động học.....	70
<b>3.3.</b>	<b>Phân tích động lực học .....</b>	<b>71</b>
<b>3.4.</b>	<b>Vùng làm việc .....</b>	<b>72</b>
3.4.1.	Vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU .....	72
3.4.2.	Đặc điểm của vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU .....	72
3.4.3.	Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất.....	74
3.4.4.	Ví dụ về phân tích vùng làm việc .....	77
<b>3.5.</b>	<b>Thiết kế robot với vùng làm việc mong muốn .....</b>	<b>79</b>
3.5.1.	Mô tả phương pháp thiết kế .....	79
<b>4.</b>	<b>Khớp cầu cho robot delta .....</b>	<b>82</b>
	<b>Khớp các đắng (Cardan joint).....</b>	<b>82</b>
	<b>Ổ cầu (Rod end bearing) .....</b>	<b>82</b>
	<b>Khớp cầu nam châm (Magnetic joint) .....</b>	<b>83</b>
	<b>Phụ lục A: Thuật toán tìm giao điểm ba mặt cầu .....</b>	<b>85</b>
	<b>Phụ lục B: Thuật toán tìm giao điểm ba mặt cầu .....</b>	<b>88</b>
	<b>Phụ lục C: Khảo sát vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay .....</b>	<b>92</b>

## 1. Giới thiệu

Robot delta là robot mà trong đó có một tấm đế (*platform* - mà sau này ta gọi là tấm đế di động) được giữ theo phương nằm ngang bởi ba cánh tay.

Có hai nguyên lý để di chuyển các cánh tay:

- Quay: Kiểu này được sử dụng rộng rãi cho việc "gắp và thả" (*pick and place*) sử dụng trong công nghiệp (điện tử, thực phẩm).
- Trượt: Mỗi cánh tay gắn với một khớp trượt trượt dọc các ray trượt song song. Kiểu này được sử dụng nhiều trong các máy in 3D.

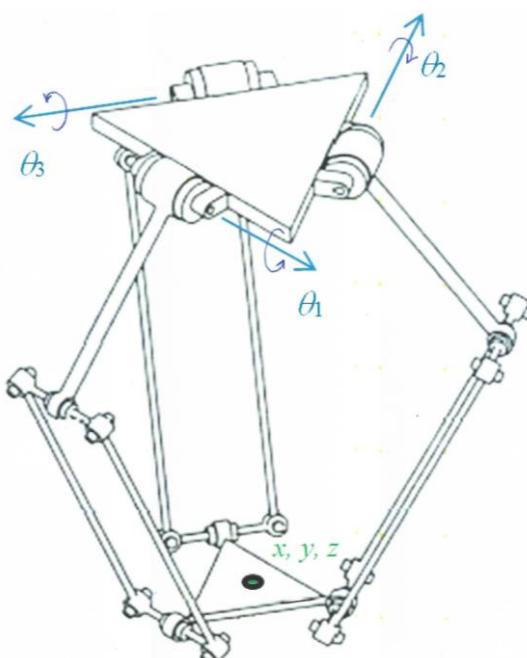
Tài liệu này trình bày các tính toán động học, động lực học, phân tích vùng làm việc, cách thiết kế robot theo vùng làm việc mong muốn. Việc điều khiển robot delta cũng bước đầu được đề cập với điều khiển điểm-điểm. Các thuật toán điều khiển thông minh hơn sẽ được dần dần cập nhật. Mô hình robot delta sẽ được mô phỏng bằng MATLAB Simmechanics hoặc MapleSim. Cuối cùng, việc chế tạo các mô hình thực nghiệm cũng được thực hiện.

Tài liệu đề cập tới cả hai loại robot delta thông dụng hiện nay: loại ba khớp quay và loại ba khớp trượt. Phần tính toán động học chủ yếu tham khảo từ tài liệu [WILLIAMS, 2016]. Phần tính toán động lực học chủ yếu tham khảo từ các tài liệu ... Phần phân tích vùng làm việc tham khảo từ các tài liệu [LIU et al, 2003] đối với kiểu ba khớp quay và [LIU et al, 2004] đối với kiểu ba khớp trượt.

## 2. Robot delta kiểu ba khớp quay

### 2.1. Cấu trúc robot

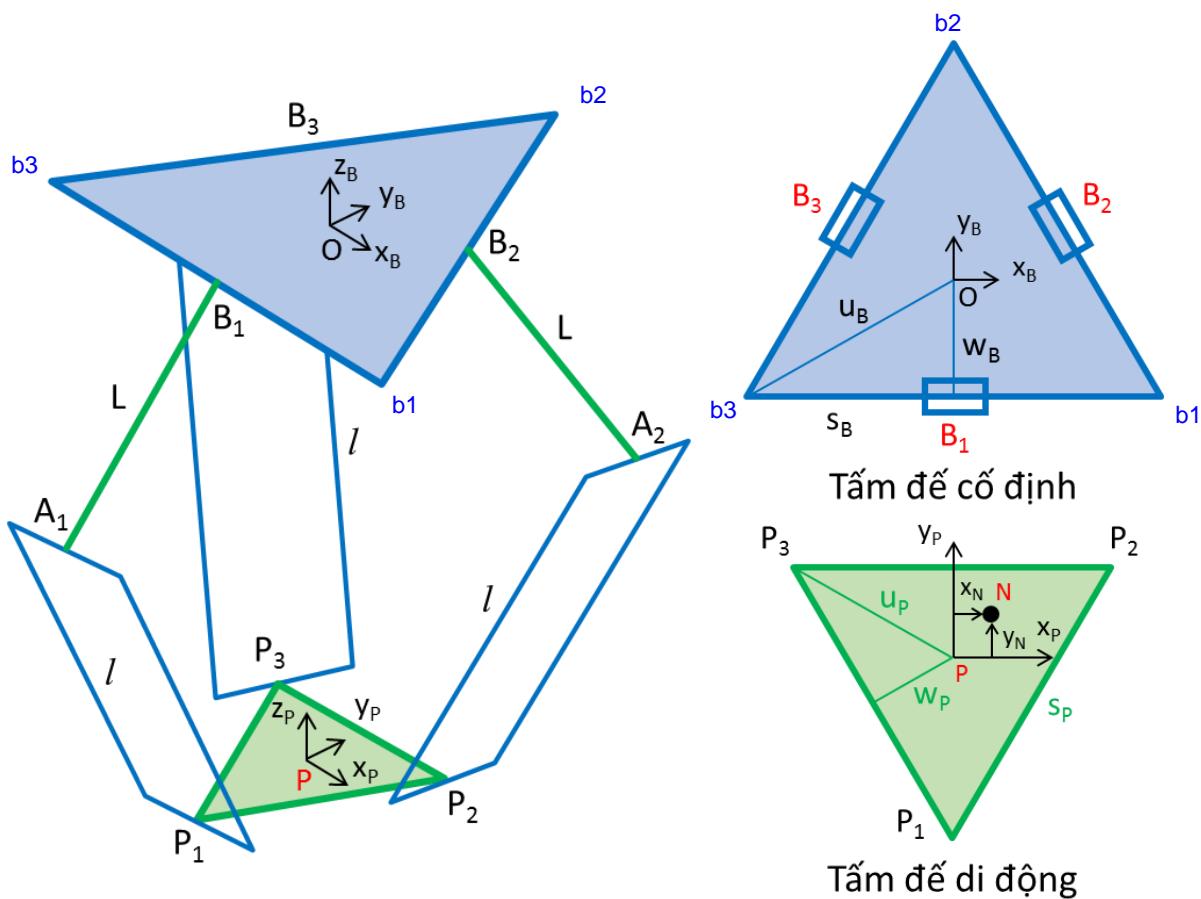
Robot delta kiểu ba khớp quay gồm ba cánh tay giống nhau RUU duy trì sự song song giữa tấm để cố định và tấm để di động có gắn khâu chấp hành cuối. Các khớp quay trên cùng được dẫn động (kí hiệu bởi từ gạch chân R – Revolute) bởi các cơ cầu chấp hành tạo chuyển động quay (động cơ) gắn trên tấm để cố định. Các biến khớp là  $\theta_i$  với  $i = 1, 2, 3$  như Hình 2.1. Trong hình này, chiều dương của  $\theta_i$  được xác định theo qui tắc bàn tay phải. Góc  $\theta_i = 0$  được xác định khi khâu dẫn động nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Cơ cấu hình bình hành gồm bốn thanh trong ba khâu bên dưới đảm bảo chuyển động tịnh tiến. Các khớp các-đăng (U – Universal) được tạo bởi ba khớp quay R không nằm cùng một chỗ (non-collocated) (gồm hai song song và một vuông góc, ta có sáu khớp các-đăng như vậy) như trong Hình 2.1.



Hình 2.1. Robot delta kiểu ba khớp quay

Robot delta ba bậc tự do có khả năng điều khiển tấm để di động di chuyển tịnh tiến theo các phương xyz trong vùng làm việc của nó. Xét ba chuỗi RUU giống nhau, ba chuỗi này có cấu trúc giống chân người với các điểm  $B_i$  với  $i = 1, 2, 3$  là các khớp hông (hip), các điểm  $A_i$  với  $i = 1, 2, 3$  là các khớp gối (knee), các điểm  $P_i$  với  $i = 1, 2, 3$  là các mắt cá chân (ankle). Chiều dài cạnh tam giác đều tấm để cố định là  $s_B$  và chiều dài cạnh tam giác đều tấm để di động là  $s_P$ . Tam giác đều tấm để di động ngược với tam giác đều tấm để cố định theo hướng không đổi. Hình dạng tam giác đều của tấm di chuyển được nghịch đảo với hình tam giác tấm để cố định theo phương không đổi (Hình 2.2).

Các thông số hình học của tấm để cố định và tấm để di động (chứa khâu chấp hành cuối) được thể hiện trong Hình 2.2 với các kí hiệu và ý nghĩa được tóm tắt bằng Bảng 2.1.



Hình 2.2. Thông số hình học

Ký hiệu	Ý nghĩa
$P_i$	$i = 1, 2, 3$ điểm nối giữa cánh tay hình bình hành và tấm đế di động
$s_B$	chiều dài cạnh tam giác đều tấm đế cố định
$w_B$	khoảng cách từ tâm $O$ đến đỉnh của tấm đế cố định
$u_B$	khoảng cách từ tâm $O$ đến đỉnh của tấm đế cố định
$s_P$	chiều dài cạnh tam giác đều tấm đế di động
$w_P$	khoảng cách từ tâm $P$ đến đỉnh của tấm đế di động
$u_P$	khoảng cách từ tâm $P$ đến đỉnh $P_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) của tấm đế di động
$L$	chiều dài cánh tay $B_i A_i$ ( $i = 1, 2, 3$ )
$l$	chiều dài của mỗi cánh tay hình bình hành
$h$	chiều rộng của mỗi cánh tay hình bình hành

Bảng 2.1. Giải thích các thông số hình học của robot delta kiểu ba khớp quay

Hệ tọa độ  $\{B\}$  gắn với tấm đế cố định và có gốc tọa độ là tâm của tam giác đều tấm đế cố định. Tương tự, hệ tọa độ  $\{P\}$  gắn vào tấm đế di động và có gốc tọa độ là

tâm của tam giác đều tẩm để di động. Hai hệ tọa độ  $\{B\}$  và  $\{P\}$  luôn luôn cùng phương do đó ma trận quay  $[{}_P^B R] = I_3$ . Các biến khớp là  $\Theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ , và biến thể hiện vị trí của khâu chấp hành cuối  $P$  trong hệ tọa độ  $\{B\}$  đang xem xét là  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \quad y \quad z]^T$ . Thiết kế có sự đối xứng cao với ba cánh tay trên có chiều dài  $L$  và ba cánh tay dưới có chiều dài  $l$  (Hình 2.2).

Ta nhận thấy rằng các khớp quay  $B_i$  cố định trong hệ tọa độ  $\{B\}$  và các khớp các-đăng  $P_i$  cố định trong hệ tọa độ  $\{P\}$ . Ta có:

$$\overrightarrow{OB}_{1/B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\overrightarrow{OB}_{2/B} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} w_B \\ \frac{1}{2} w_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\overrightarrow{OB}_{3/B} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} w_B \\ \frac{1}{2} w_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\overrightarrow{PP}_{1/P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\overrightarrow{PP}_{2/P} = \begin{bmatrix} \frac{s_P}{2} \\ w_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\overrightarrow{PP}_{3/B} = \begin{bmatrix} -\frac{s_P}{2} \\ w_P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Tọa độ các đỉnh tam giác đều tẩm để cố định:

$$\overrightarrow{Ob}_{1/B} = \begin{bmatrix} \frac{s_B}{2} \\ -w_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\overrightarrow{Ob_2/B} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\overrightarrow{Ob_3/B} = \begin{bmatrix} -\frac{s_B}{2} \\ w_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Với:

$$w_B = \frac{\sqrt{3}}{6} s_B \quad u_B = \frac{\sqrt{3}}{3} s_B \quad w_P = \frac{\sqrt{3}}{6} s_P \quad u_P = \frac{\sqrt{3}}{3} s_P$$

### 2.1.1. Bậc tự do

Phần này chứng minh robot delta có 3 bậc tự do. Sử dụng công thức tính bậc tự không gian của Kutzbach, ta có:

$$M = 6(N - 1) - 5J_1 - 5J_2 - 3J_3 \quad (2.10)$$

Với:

- $M$  là số bậc tự do (*dof – degrees-of-freedom*)
- $N$  là số khâu, kể cả đế
- $J_1$  là các khớp có một bậc tự do (khớp quay hoặc khớp trượt)
- $J_2$  là các khớp có hai bậc tự do (khớp các-đăng)
- $J_3$  là các khớp có ba bậc tự do (khớp cầu)

Đối với robot delta kiểu ba khớp quay, ta có:  $N = 17, J_1 = 21, J_2 = 0, J_3 = 0$ . Do đó:  $M = 6(17 - 1) - 5(21) - 4(0) - 3(0) = -9$  bậc tự do.

Như thường lệ, công thức Kutzbach cho ta kết quả sai vì kết quả rõ ràng phải là 3 bậc tự do. Kết quả sai này cho ta dự đoán rằng robot delta là một cấu trúc siêu tĩnh. Điều này là sai.

Thực tế thì công thức Kutzbach không sử dụng được cho cấu trúc đặc biệt – trong trường hợp của robot delta, đó là ba cơ cấu hình bình hành. Nếu ta bỏ bớt đi một cạnh dài ở mỗi cơ cấu hình bình hành (tức là bỏ bớt đi hai khớp quay ở mỗi cơ cấu hình bình hành) thì robot vẫn hoạt động y hệt về mặt động học như robot delta ban đầu. Với trường hợp tương đương này, công thức Kutzbach cho ta:  $N = 14, J_1 = 15, J_2 = 0, J_3 = 0$  và  $M = 6(14 - 1) - 5(15) - 4(0) - 3(0) = 3$  bậc tự do.

Đây là kết quả đúng. Có một cách khác để tính số bậc tự do của robot delta, đó là thay ba cơ cấu hình bình hành bằng ba khâu đơn (tạm gọi là khâu ảo). Trong trường hợp này, ta vẫn phải xem ở hai đầu của khâu ảo này là các khớp các-đăng. Công thức Kutzbach cho trường hợp này vẫn cho ta kết quả tương tự:  $N = 8, J_1 = 3, J_2 = 6, J_3 = 0$  và  $M = 6(8 - 1) - 5(3) - 4(6) - 3(0) = 3$  bậc tự do.

## 2.2. Phân tích động học

### 2.2.1. Xây dựng hệ phương trình động học và ma trận Jacobi

Từ sơ đồ động học ở Hình 2.1, ta có thể biểu diễn tọa độ của khâu chấp hành cuối (điểm  $P$ ) trong hệ tọa độ  $\{B\}$  gắn với khâu chấp hành cuối:

$$\overrightarrow{OB}_{l/B} + \overrightarrow{B_l A_{l/B}} + \overrightarrow{A_l P_{l/B}} = \overrightarrow{OP}_{/B} + [{}^B_P R] \cdot \overrightarrow{PP}_{l/P} = \overrightarrow{OP}_{/B} + \overrightarrow{PP}_{l/P} \quad (2.11)$$

Vì hướng của hệ tọa độ  $\{B\}$  và  $\{P\}$  là đồng nhất nên ma trận xoay  $[{}^B_P R] = I_3$ . Ngoài ra, cấu trúc của robot là đối xứng với độ dài cạnh các hình bình hành  $l$ , ta có thể viết lại:

$$l = \|\overrightarrow{A_l P_{l/B}}\| = \|\overrightarrow{OP}_{/B} + \overrightarrow{PP}_{l/P} - \overrightarrow{OB}_{l/B} - \overrightarrow{B_l A_{l/B}}\| \quad (2.12)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán, ta bình phương hai vế của phương trình (2.12). Việc này giúp ta tránh được phép tính căn bậc hai khi tính độ dài của véctơ  $\overrightarrow{A_l P_{l/B}}$ :

$$l^2 = \|\overrightarrow{A_l P_{l/B}}\|^2 = \|\overrightarrow{OP}_{/B} + \overrightarrow{PP}_{l/P} - \overrightarrow{OB}_{l/B} - \overrightarrow{B_l A_{l/B}}\|^2 \quad (2.13)$$

Nhắc lại, biến thể hiện vị trí của khâu chấp hành cuối  $P$  trong hệ tọa độ Descartes  $\{B\}$  đang xem xét là  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \ y \ z]^T$ . Các véctơ vị trí của các điểm  $B_i$  và  $P_i$  được cho ở các phương trình từ (2.1) đến (2.6). Véctơ  $\overrightarrow{B_l A_{l/B}}$  phụ thuộc vào các biến khớp  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ :

$$\overrightarrow{B_l A_{l/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L \cos \theta_1 \\ -L \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\overrightarrow{B_2 A_{2/B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_2 \\ \frac{1}{2} L \cos \theta_2 \\ -L \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\overrightarrow{B_3 A_{3/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_3 \\ \frac{1}{2} L \cos \theta_3 \\ -L \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Thay các phương trình từ (2.1) đến (2.6) và (2.14) đến (2.16) vào phương trình (2.11), với  $i = 1, 2, 3$ , ta có:

$$\overrightarrow{A_1 P_{1/B}} = \begin{bmatrix} x + 0 - 0 - 0 \\ y - u_P + w_B + L \cos \theta_1 \\ z + L \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + a + L \cos \theta_1 \\ z + L \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\overrightarrow{A_2 P_{2/B}} = \begin{bmatrix} x + \frac{s_P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} w_B - \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_2 \\ y + w_P - \frac{1}{2} w_B - \frac{1}{2} L \cos \theta_2 \\ z + L \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + b - \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_2 \\ y + c - \frac{1}{2} L \cos \theta_2 \\ z + L \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\overrightarrow{A_3 P_{3/B}} = \begin{bmatrix} x - \frac{s_P}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} w_B + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_3 \\ y + w_P - \frac{1}{2} w_B - \frac{1}{2} L \cos \theta_3 \\ z + L \sin \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - b + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_3 \\ y + c - \frac{1}{2} L \cos \theta_3 \\ z + L \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Với:

$$a = -u_P + w_B \quad b = \frac{s_P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} w_B \quad c = w_P - \frac{w_B}{2}$$

Từ các phương trình (2.13), (2.17), (2.18), (2.19), ta có **hệ phương trình động học robot delta kiểu ba khớp quay**:

$$x^2 + (y + a + L \cos \theta_1)^2 + (z + L \sin \theta_1)^2 = l^2 \quad (2.20)$$

$$\left( x + b - \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_2 \right)^2 + \left( y + c - \frac{1}{2} L \cos \theta_2 \right)^2 + (z + L \sin \theta_2)^2 = l^2 \quad (2.21)$$

$$\left( x - b + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cos \theta_3 \right)^2 + \left( y + c - \frac{1}{2} L \cos \theta_3 \right)^2 + (z + L \sin \theta_3)^2 = l^2 \quad (2.22)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán, ta biểu diễn hệ phương trình động học dưới dạng hàm của các vectơ chứa các tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Với:

- $s$  là véctơ chứa các tọa độ suy rộng đầy đủ
- $q$  là véctơ chứa các tọa độ suy rộng độc lập tối thiểu (các biến khớp)
- $x$  là véctơ chứa các tọa độ thao tác (tọa độ khâu chốt hành cuối  $P$ )

Ta có 6 tọa độ suy rộng nhưng chỉ có 3 tọa độ độc lập nên cần có 3 phương trình liên kết, đó là các phương trình (2.20), (2.21), (2.22). Viết lại dưới dạng hàm, ta có:

$$\begin{aligned} f_1 &= 2L(y + a) \cos \theta_1 + 2zL \sin \theta_1 + x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya \\ &\quad - l^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= -L(\sqrt{3}(x + b) + y + c) \cos \theta_2 + 2zL \sin \theta_2 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 \\ &\quad + c^2 + L^2 + 2xb + 2yc - l^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= L(\sqrt{3}(x - b) - y - c) \cos \theta_3 + 2zL \sin \theta_3 + x^2 + y^2 + z^2 + b^2 \\ &\quad + c^2 + L^2 - 2xb + 2yc - l^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dưới dạng véctơ:

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f}(q, x) = 0, f \in \mathbb{R}^3, q \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.29)$$

Đạo hàm theo thời gian, ta được:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.30)$$

Trong đó,  $\mathbf{J}_q$  và  $\mathbf{J}_x$  là các **ma trận Jacobi**.

$$\mathbf{J}_q = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{q11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{q22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{q33} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Với:

$$J_{q11} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} = 2L[z \cos \theta_1 - (y + a) \sin \theta_1]$$

$$J_{q22} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = 2L[z \cos \theta_2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c) \sin \theta_2]$$

$$J_{q33} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} = 2L[z \cos \theta_3 + (\frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c) \sin \theta_3]$$

$$\mathbf{J}_x(s) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = [J_{x1} \quad J_{x2} \quad J_{x3}] \quad (2.32)$$

Với:

$$J_{x1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}L \cos \theta_2 + b\right) \\ 2\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}L \cos \theta_3 - b\right) \end{bmatrix}$$

$$J_{x2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(y + L \cos \theta_1 + a) \\ 2(y - \frac{L}{2} \cos \theta_2 + c) \\ 2(y - \frac{L}{2} \cos \theta_3 + c) \end{bmatrix}$$

$$J_{x3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(z + L \sin \theta_1) \\ 2(z + L \sin \theta_2) \\ 2(z + L \sin \theta_3) \end{bmatrix}$$

Tiếp tục lấy đạo hàm bậc hai, ta được:

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_x \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_x \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.33)$$

Trong đó:

$$\dot{\mathbf{J}}_q = \begin{bmatrix} \dot{J}_{q11} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{J}_{q22} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{J}_{q33} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Với:

$$\dot{J}_{q11} = -2L[z \sin \theta_1 - (y + a) \cos \theta_1] \dot{\theta}_1 - 2L \sin \theta_1 \dot{y} + 2L \cos \theta_1 \dot{z}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{J}}_{q22} &= 2L \left[ -z \sin \theta_2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c \right) \cos \theta_2 \right] \dot{\theta}_2 \\
&\quad + \sqrt{3}L \sin \theta_2 \dot{x} + L \sin \theta_2 \dot{y} + 2L \cos \theta_2 \dot{z} \\
\dot{\mathbf{J}}_{q33} &= 2L \left[ -z \sin \theta_3 + \left( \frac{-\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{1}{2}c \right) \cos \theta_3 \right] \dot{\theta}_3 \\
&\quad - \sqrt{3}L \sin \theta_3 \dot{x} + L \sin \theta_3 \dot{y} + 2L \cos \theta_3 \dot{z} \\
\dot{\mathbf{J}}_x &= \begin{bmatrix} 2\dot{x} & 2\dot{y} - L \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & 2\dot{z} + L \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 2\dot{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}L \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & 2\dot{y} + \frac{L}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & 2\dot{z} + L \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ 2\dot{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}L \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 & 2\dot{y} + \frac{L}{2} \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 & 2\dot{z} + L \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

## 2.2.2. Nghiệm bài toán động học ngược

### 2.2.2.1. Phương pháp giải tích

Bài toán động học ngược của robot delta kiểu ba khớp quay được phát biểu: Biết tọa độ của khâu chấp hành cuối  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \ y \ z]^T$ , xác định giá trị của các biến khớp  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$ . Nghiệm bài toán động học ngược robot song song không phức tạp, là các nghiệm không tầm thường (khác 0) nhưng có thể giải được bằng phương pháp giải tích. Nhìn vào sơ đồ động học ở Hình 2.1, bài toán động học ngược có thể được giải một cách độc lập cho mỗi cánh tay RUU. Về mặt hình học, nghiệm bài toán động học ngược của mỗi cánh tay RUU là giao điểm giữa đường tròn ( $B_i, L$ ) và mặt cầu ( $P_i, l$ ). Ta cũng có thể giải bài toán này bằng phương pháp lượng giác.

Tuy nhiên, trước mắt ta cần tìm nghiệm giải tích của nó. Bằng một số biến đổi đơn giản, các phương trình động học (2.20), (2.21), (2.22) có thể được viết lại dưới dạng:

$$E_i \cos \theta_i + F_i \sin \theta_i + G_i = 0 \quad (2.36)$$

Với:

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2L(y + a) \\
F_1 &= 2zL \\
G_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + L^2 + 2ya - l^2 \\
E_2 &= -L(\sqrt{3}(x + b) + y + c) \\
F_2 &= 2zL \\
G_2 &= x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2(xb + yc) - l^2 \\
E_3 &= L(\sqrt{3}(x - b) - y - c) \\
F_3 &= 2zL
\end{aligned} \quad (2.37)$$

$$G_3 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 + L^2 + 2(-xb + yc) - l^2$$

Phương trình (2.36) là phương trình động học thường thấy trong các loại robot và cơ cấu, được giải bằng cách dùng **công thức tang góc chia đôi** (*tangent half-angle substitution*).

Nếu ta đặt  $t_i = \tan \frac{\theta_i}{2}$ , khi đó:  $\cos \theta_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$  và  $\sin \theta_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2}$ . Thay vào phương trình (2.36), sau một vài phép biến đổi đơn giản, ta có:

$$(G_i - E_i)t_i^2 + (2F_i)t_i + (G_i + E_i) = 0 \quad (2.38)$$

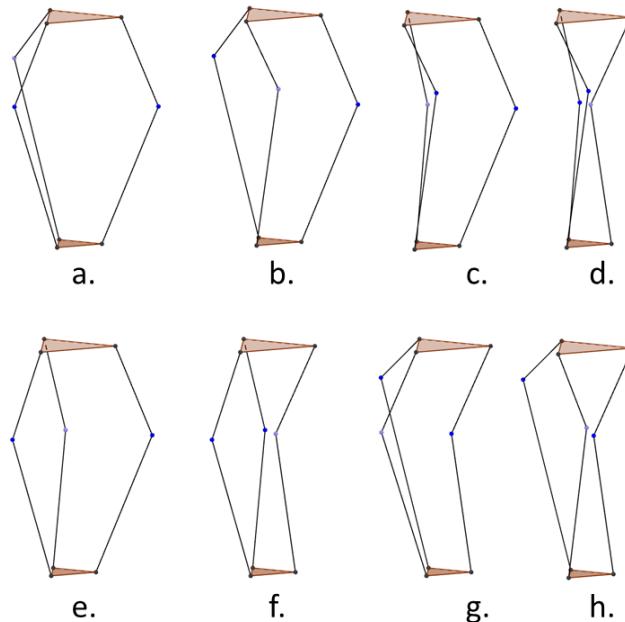
Nghiệm của phương trình bậc hai trên là:

$$t_{i_{1,2}} = \frac{-F_i \pm \sqrt{E_i^2 + F_i^2 - G_i^2}}{G_i - E_i} \quad (2.39)$$

Để tìm  $\theta_i$ , ta nghịch đảo công thức tang chia đôi:

$$\theta_i = 2 \tan^{-1}(t_i) \quad (2.40)$$

Hai nghiệm  $\theta_i$  tương ứng với dấu  $\pm$  trong biểu thức (2.39). Cả hai nghiệm đều đúng bởi vì hai vị trí của mỗi cánh tay RUU tương ứng với giá trị của góc  $\theta_i$  đều hợp lệ. Như vậy, ta có tổng cộng tám nghiệm khả dĩ ( $C_2^1 \times C_2^1 \times C_2^1$ ). Thông thường, chỉ một nghiệm mà ở đó tất cả các khớp các-đăng  $A_i$  của robot delta quay ra thay vì quay vào trong sẽ được chọn (Hình 2.3a).



Hình 2.3. Tám nghiệm khả dĩ của phương trình động học ngược

### 2.2.2.2. Phương pháp số Newton-Raphson

Việc giải bài toán động học ngược bằng phép giải tích cho ta kết quả nhanh, tuy nhiên ta cần phải chọn nghiệm trong bộ tám nghiệm khả dĩ bởi hệ phương trình động học liên quan đến các hàm lượng giác. Để tránh vấn đề này ta có thể dùng các phương pháp số [TLTK Nguyễn Văn Khang về 3 phương pháp số]:

- Phương pháp Newton-Raphson cải tiến (hiệu chỉnh gia lượng)
- Phương pháp chiếu tọa độ và chiếu vận tốc
- Phương pháp giải nhờ hàm “fsolve” của phần mềm MATLAB

Trong khuôn khổ **tài liệu** này, ta chỉ xem xét đến phương pháp số Newton-Raphson nhờ hai ưu điểm của nó: độ chính xác của kết quả, thời gian tính toán nhanh.

Từ phương trình (2.29) tính được vận tốc khớp suy rộng:

$$\boxed{\dot{q} = -J_q^{-1} J_x \dot{x}} \quad (2.41)$$

Từ phương trình (2.30) tính được gia tốc khớp suy rộng:

$$\ddot{q} = -J_q^{-1} (J_q \dot{q} + J_x \dot{x} + J_x \ddot{x}) \quad (2.42)$$

Giả sử, ta đã biết được quy luật chuyển động của **khâu thao tác  $x(t)$** , ta sẽ xác định được  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ ,  $\ddot{q}(t)$  tại thời điểm khảo sát.

Xét khoảng thời gian làm việc từ  $t = 0[s]$  đến  $t = T[s]$ . Chia khoảng thời gian  $[0, T]$  làm  $N$  khoảng bằng nhau. Vậy thời gian mỗi khoảng là:

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (2.43)$$

Hai thời điểm khảo sát liên tiếp nhau có quan hệ:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \text{ với } k = 0 \dots N - 1 \quad (2.44)$$

Áp dụng khai triển Taylor hàm véctơ  $q(t)$  ở lân cận giá trị  $t = t_k$ , ta được:

$$q(t_{k+1}) = q(t_k + \Delta t) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t_k)(\Delta t)^2 + \dots \quad (2.45)$$

Thay biểu thức và bỏ qua các vô cùng bé bậc lớn hơn hoặc bằng 2, ta được:

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \dot{q}(t_k)\Delta t \approx q(t_k) - J_q^{-1}(q(t_k))J_x(q(t_k))\dot{x}(t_k)\Delta t \quad (2.46)$$

Để thuận tiện, ta dùng các ký hiệu rút gọn:

$$q_k = q(t_k), \dot{q}_k = \dot{q}(t_k), \ddot{q}_k = \ddot{q}(t_k)$$

$$x_k = x(t_k), \dot{x}_k = \dot{x}(t_k), \ddot{x}_k = \ddot{x}(t_k)$$

Việc xác định  $\mathbf{q}(t)$  tại thời điểm  $t = t_{k+1}$  được thực hiện qua hai bước:

- **Bước 1:** Hiệu chỉnh giá lượng các tọa độ khớp tại thời điểm  $t_0$

Đầu tiên ta xác định véctơ gần đúng ban đầu  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  của véctơ  $\mathbf{q}_0$  bằng **phương pháp vẽ hoặc bằng thực nghiệm**. Ta có:

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0 \quad (2.47)$$

Áp dụng khai triển Taylor đến bậc 1 ta được:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0, \mathbf{x}_0) \approx \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{q}_0 \quad (2.48)$$

Suy ra:

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0) + \mathbf{J}_q(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\Delta\mathbf{q}_0 \approx 0 \quad (2.49)$$

Từ đó:

$$\Delta\mathbf{q}_0 = -\mathbf{J}_q^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0)\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_0, \mathbf{x}_0) \quad (2.50)$$

Sau đó lấy:

$$\mathbf{q}_0 = (-\Delta\mathbf{q}_0) + \text{delta}(\mathbf{q}_0) \quad \tilde{\mathbf{q}}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}_0 \quad (2.51)$$

Nếu  $\|\Delta\mathbf{q}_0\| \geq \varepsilon$  (với  $\varepsilon$  là tham số dương bé cho trước) thì ta lại thế (2.51) vào (2.50) cho đến khi  $\|\Delta\mathbf{q}_0\| < \varepsilon$ . Kết quả ta được:

$$\mathbf{q}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0 \quad (2.52)$$

Sau khi tìm được xấp xỉ của  $\mathbf{q}_0$  với sai số  $\varepsilon$  cho trước, ta thay vào các công thức (2.41) và (2.42) để tìm  $\dot{\mathbf{q}}_0$  và  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ .

- **Bước 2:** Hiệu chỉnh giá lượng véctơ tọa độ suy rộng tại thời điểm  $t_{k+1}$

Giả sử đã biết  $\mathbf{q}_k$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_k$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_k$ , ta cần tìm giá trị  $\mathbf{q}(t)$  tại thời điểm  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ . Trước hết, ta lấy gần đúng  $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}$  bằng xấp xỉ theo (2.46):

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k \Delta t \quad (2.53)$$

Sau đó xác định véctơ chính xác hơn của  $\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}$  theo công thức hiệu chỉnh:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta\mathbf{q}_{k+1} \quad (2.54)$$

Tương tự Bước 1 ta cũng có xấp xỉ:

$$\Delta\mathbf{q}_{k+1} = -\mathbf{J}_q^{-1}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1})\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}) \quad (2.55)$$

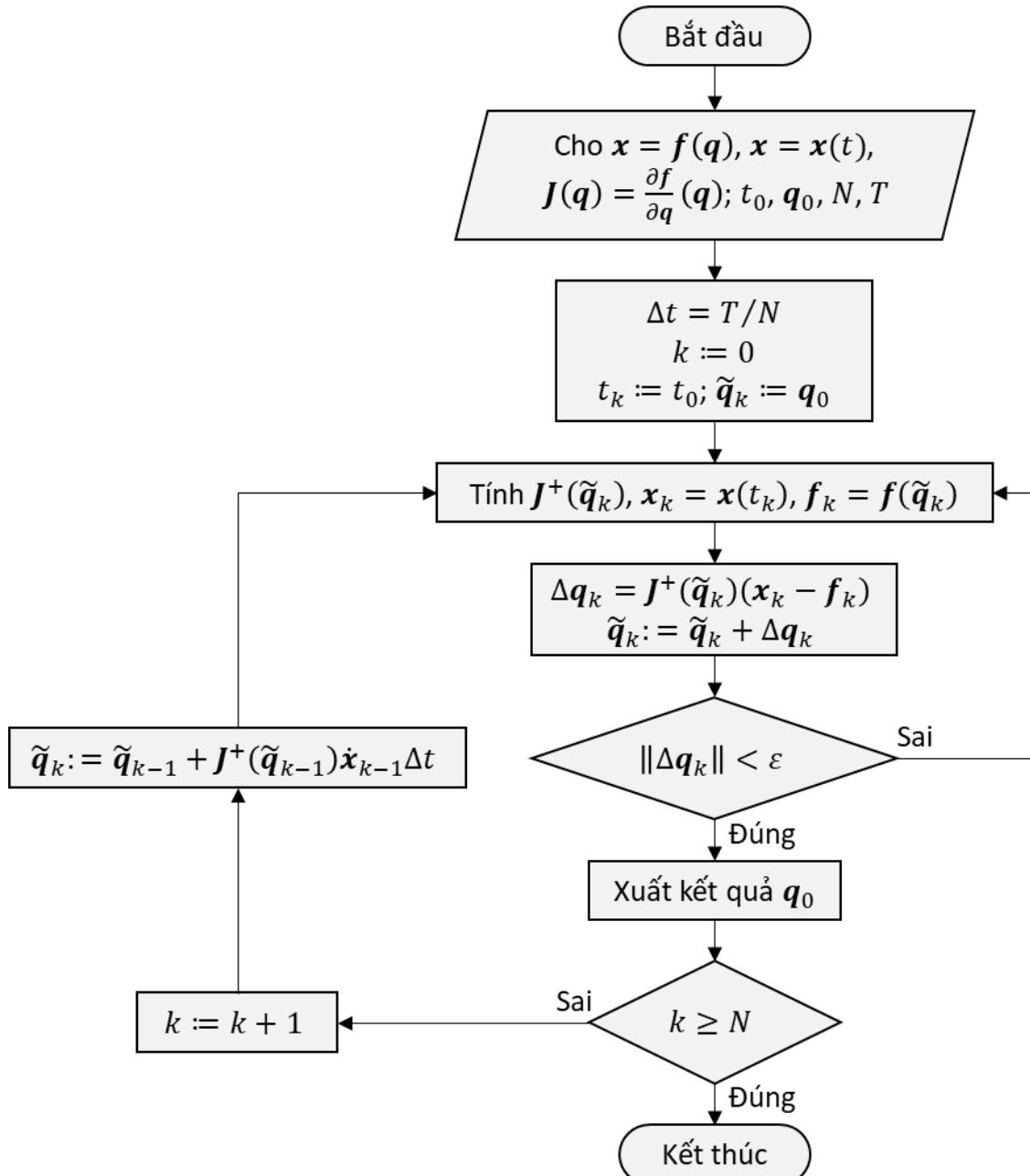
Sau đó lấy:

$$\tilde{\mathbf{q}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} + \Delta \mathbf{q}_{k+1} \quad (2.56)$$

Nếu  $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| \geq \varepsilon$  thì thay (2.56) vào (2.55) cho đến khi  $\|\Delta \mathbf{q}_{k+1}\| < \varepsilon$ . Kết quả ta được:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \tilde{\mathbf{q}}_{k+1} \quad (2.57)$$

Sau khi tìm được  $\mathbf{q}_{k+1}$ , thay vào công thức (2.41) và (2.42) tìm được  $\dot{\mathbf{q}}_{k+1}$  và  $\ddot{\mathbf{q}}_{k+1}$ .



Hình 2.4. Sơ đồ khối thuật toán giải bài toán động học ngược

Ta có sơ đồ khối thuật toán giải bài toán động học ngược bằng phương pháp số Newton-Raphson cải tiến như [Hình 2.4](#).

- **Đánh giá sai số:**

Độ chính xác của phương pháp số Newton-Raphson đã được trình bày khá chi tiết trong các giáo trình về phương pháp số. Ngoài ra, do ý nghĩa cơ học các tọa độ suy rộng xác định vị trí của robot song song phải thỏa mãn các phương trình liên kết...

**Phần này còn đang viết**

### 2.2.3. Nghiệm bài toán động học thuận

Bài toán động học thuận của robot delta kiểu ba khớp quay được phát biểu: Biết giá trị của các biến khớp khớp  $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ , xác định tọa độ của khâu chấp hành cuối  ${}^B P_P = \{x, y, z\}^T$ .  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \quad y \quad z]^T$ . Bài toán động học thuận cho robot song song nói chung rất khó để giải, vì chúng ta cần phải tìm nghiệm của hệ ba phương trình đại số phi tuyến (2.20), (2.21), (2.22). Hệ này cho ta nhiều nghiệm hợp lệ.

#### 2.2.3.1. Phương pháp hình học

Với  $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$  đã biết, ta có thể xác định được tọa độ ba khớp các-đăng  $A_i$  trong hệ tọa độ  $\{B\}$  theo công thức:  $\overrightarrow{OA}_{i/B} = \overrightarrow{OB}_{i/B} + \overrightarrow{BA}_{i/B}$  với  $i = 1, 2, 3$ :

$$\overrightarrow{OA}_{1/B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_B - L \cos \theta_1 \\ -L \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\overrightarrow{OA}_{2/B} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} (w_B + L \cos \theta_2) \\ \frac{1}{2} (w_B + L \cos \theta_2) \\ -L \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\overrightarrow{OA}_{3/B} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} (w_B + L \cos \theta_3) \\ \frac{1}{2} (w_B + L \cos \theta_3) \\ -L \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

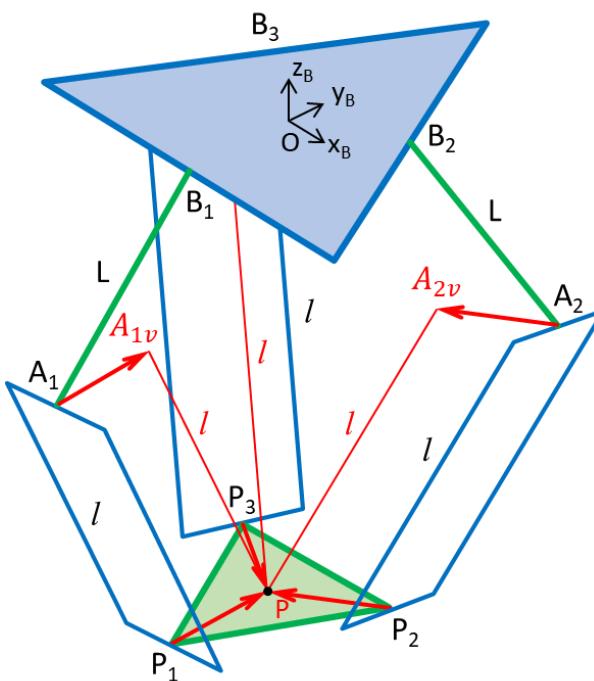
Từ giản đồ động học thuận robot ở [Hình 2.5](#) và biết rằng hướng của tám đế di động là không đổi (luôn luôn nằm ngang) với  $[{}_P R] = I_3$ , ta có thể định nghĩa ba tâm mặt cầu ảo  $\overrightarrow{OA}_{iv/B} = \overrightarrow{OA}_{i/B} - \overrightarrow{PP}_{i/P}$  với  $i = 1, 2, 3$ :

$$\overrightarrow{OA}_{1v/B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_B - L \cos \theta_1 + u_p \\ -L \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\overrightarrow{OA_{2v/B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(w_B + L \cos \theta_2) - \frac{s_p}{2} \\ \frac{1}{2}(w_B + L \cos \theta_2) - w_p \\ -L \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\overrightarrow{OA_{3v/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(w_B + L \cos \theta_3) + \frac{s_p}{2} \\ \frac{1}{2}(w_B + L \cos \theta_3) - w_p \\ -L \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Nghiệm bài toán động học thuận (điểm P) là giao điểm của ba mặt cầu  $(A_{1v}, l)$ ,  $(A_{1v}, l)$  và  $(A_{1v}, l)$ .



Hình 2.5. Sơ đồ động học thuận của robot delta kiểu ba khớp quay

[Phụ lục A](#) trình bày nghiệm giải tích của giao điểm ba mặt cầu định nghĩa ở trên [WILLIAMS et al, ...]. Để có được nghiệm này ta cần giải hệ các phương trình siêu việt liên kết với nhau. Phụ lục trình bày các phương trình và phương pháp giải tích, sau đó bàn luận đến các nghiệm ảo, suy biến và đa nghiệm gây cản trở thuật toán.

Đặc biệt, với thuật toán tìm giao điểm của ba mặt cầu trình bày ở [Phụ lục A](#), nếu tâm  $A_{iv}$  của tất cả các mặt cầu có cùng độ cao z (trường hợp thường gặp đối với robot delta) thì sẽ có một suy biến (*algorithmic singularity*) cản trở cách giải này (chia cho 0). Để giải quyết vấn đề này, ta chỉ cần xoay hệ trục tọa độ để các giá trị z của các tâm  $A_{iv}$  không còn bằng nhau nữa. Sau khi giải được nghiệm của bài toán, ta lại xoay ngược hệ trục tọa độ này về vị trí ban đầu.

Có một cách giải khác (được trình bày ở [Phụ lục B](#)) với giả thiết là độ cao tâm  $A_{iv}$  của tất cả các mặt cầu là bằng nhau, thay cho cách giải đầu tiên khi cần thiết.

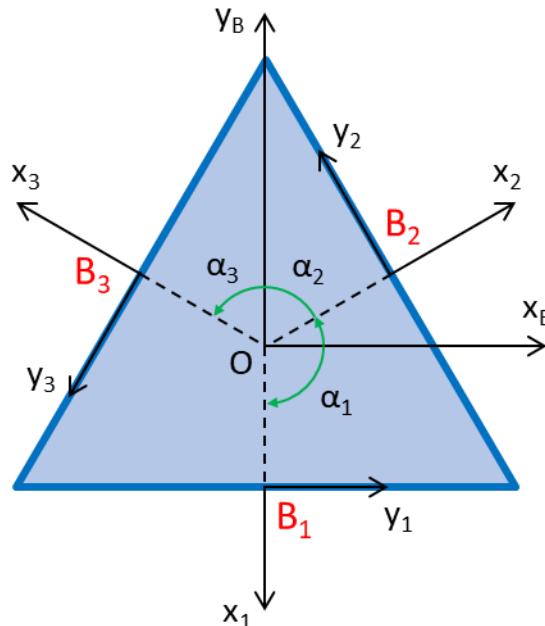
Một vấn đề khác có thể gặp phải là giao điểm của ba mặt cầu sẽ cho hai nghiệm – một nghiệm nằm trên và một nghiệm nằm dưới tám để cố định (ngoài ra, chỉ có một nghiệm nếu các mặt cầu tiếp xúc với nhau, và không có nghiệm nếu khoảng cách giữa tâm các mặt cầu lớn hơn bán kính  $l$  – trong trường hợp sau tương ứng với nghiệm ảo và các giá trị đầu vào  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  không hợp lý với cách lắp ráp robot delta). Thuật toán tìm giao điểm sẽ tính toán ra cả hai nghiệm và ta có thể cho máy tính tự chọn luôn nghiệm đúng bằng cách ràng buộc thêm một điều kiện: nghiệm đó luôn nằm dưới tám để cố định.

## 2.3. Phân tích động lực học

### 2.3.1. Xác định vận tốc khối tâm và vận tốc góc các khâu

Ngoài hệ tọa độ cố định  $\{B\}$  gắn với tấm đế cố định, ta cần thiết lập thêm các hệ tọa độ địa phương gắn cứng vào các khâu chủ động và bị động để xác định vị trí các khâu so với hệ  $\{B\}$ .

Đầu tiên, ta cần xác định vị trí các khớp chủ động so với hệ tọa độ gốc. Ta gắn ba hệ tọa độ cố định  $\{B_i\} = B_i x_i y_i z_i$  với  $i = 1, 2, 3$  bằng cách biến đổi hệ tọa độ gốc qua hai phép: **tịnh tiến gốc  $O$  về  $B_i$  và xoay quanh trục  $z_B$  một góc  $\alpha_i$**  (với  $\alpha_1 = -90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $\alpha_3 = 150^\circ$ ).



Hình 2.6. Các hệ tọa độ địa phương gắn cứng vào các khâu chủ động

Ma trận cosin chỉ hướng của hệ  $\{B_i\}$  so với  $\{B\}$ :

$$A_Z(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gọi  $C_{1i}$  là khối tâm của khâu  $B_i A_i$ . Ta gắn cứng hệ tọa độ động  $\{C_{1i}\} = C_{1i} X_{1i} Y_{1i} Z_{1i}$  vào khâu  $B_i A_i$  sao cho  $B_i A_i$  luôn nằm trên trục  $X_{1i}$ .  $\{C_{1i}\}$  được xác định bằng cách biến đổi hệ  $\{B_i\}$  bằng 2 phép: **tịnh tiến về gốc  $C_{1i}$  và quay quanh trục  $Y_{1i}$  một góc  $\theta_i$** . Ta có:

$${}^{B^i}C_{1i} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \cos\theta_i \\ 0 \\ -\frac{L}{2} \sin\theta_i \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{1i} = A_Z(\alpha_i) {}^{Bi}\mathbf{C}_{1i}$$

$${}^B\mathbf{C}_{11} = A_Z(\alpha_1) {}^{B1}\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\cos\theta_1 \\ 0 \\ -\frac{L}{2}\sin\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L}{2}\cos\theta_1 \\ -\frac{L}{2}\sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

Tương tự cho các chân 2, 3:

$${}^B\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}L}{4}\cos\theta_2 \\ \frac{L}{4}\cos\theta_2 \\ -\frac{L}{2}\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} \frac{L}{4}\cos\theta_2 \\ \frac{\sqrt{3}L}{4}\cos\theta_2 \\ -\frac{L}{2}\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Vì khối lượng các thanh hình bình hành thường nhỏ hơn các khâu còn lại nên để đơn giản hóa quá trình tính toán, ta quy khối lượng khâu bị động  $A_i P_i$  về hai đầu khớp, khối lượng sẽ tập trung tại  $C_{2ai} \equiv A_i$ ,  $C_{2bi} \equiv P_i$ . Với việc quy khối lượng về hai đầu khớp, ta bỏ qua vận tốc góc và tenxơ quán tính của khâu bị động khiến bài toán đơn giản hơn rất nhiều.

$${}^B\mathbf{C}_{2a1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -w_B - L \cos \theta_1 \\ -L \sin \theta_1 \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{2a2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(w_B + L \cos \theta_2) \\ \frac{1}{2}(w_B + L \cos \theta_2) \\ -L \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{2a3} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(w_B + L \cos \theta_3) \\ \frac{1}{2}(w_B + L \cos \theta_3) \\ -L \sin \theta_3 \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{2b1} = {}^B\mathbf{P} + {}^P\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y - u_p \\ z \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{2b2} = {}^B\mathbf{P} + {}^P\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} x + \frac{s_p}{2} \\ y + w_p \\ z \end{bmatrix}$$

$${}^B\mathbf{C}_{2b3} = {}^B\mathbf{P} + {}^P\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} x - \frac{s_p}{2} \\ y + w_p \\ z \end{bmatrix}$$

Vận tốc góc khâu  $B_i A_i$  trong hệ  $\{C_{1i}\}$ :

$$c_{11}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_{12}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_{13}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.1.1 Xác định phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ p vật rắn

Nhắc lại hệ gồm p=7 vật rắn, số bậc tự do f=3, số tọa độ suy rộng dư m=6, r=3 phương trình liên kết.

$$f_j = f(s, t) = f(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0, \quad (j = 1, \dots, r)$$

Xét phân tố có khối lượng  $dm$ , vector định vị  $\vec{r}$  chịu lực tác dụng  $d\vec{F}^a$ . Nguyên lý d'Alembert- Lagrange đối với hệ p vật rắn:

$$\int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (0.1)$$

Ta có:

$$\delta\vec{r} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (0.2)$$

Thay (0.2) vào (0.1) ta được:

$$\sum_{i=1}^m \left( \int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_{i=1}^m \left( \int_{(S)} dm \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (0.3)$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có

$$Q_i = \int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (0.4)$$

Biến đổi biểu thức

$$K_i = \int_{(S)} dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} - \int_{(S)} dm \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Hay:

$$K_i = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} - \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$$

Ta lại có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}$$

Do đó:

$$K_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (0.5)$$

Thay (0.4) và (0.5) vào (0.3) ta được

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0 \quad (0.6)$$

Vì có m tọa độ suy rộng dư nên các biến phân  $\delta q_i$  không độc lập với nhau. Chúng liên hệ nhau bởi phương trình:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (0.7)$$

Nếu đưa vào các kí hiệu:

$$b_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i$$

$$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_m]^T; \quad \mathbf{a} = [\delta q_1, \dots, \delta q_m]^T$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_s(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial q_m} \end{bmatrix}$$

Thì biểu thức (0.6) và (0.7) có thể viết lại dưới dạng:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = 0$$

Theo định lý nhân tử Lagrange, ta có:

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = 0$$

Trong đó:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_r]^T$$

Ta suy ra:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (0.8)$$

Nếu vị trí của khâu thứ k trong hệ quy chiếu cố định {B} được xác định bởi vector xác định vị trí khối tâm  $\mathbf{r}_{ck}(\mathbf{s})$  và ma trận cosin chỉ hướng  $\mathbf{A}_k(\mathbf{s})$  thì vận tốc khối tâm và vận tốc góc của nó có thể được xác định:

$$\mathbf{v}_{ck} = \frac{d\mathbf{r}_{ck}}{dt}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k = \dot{\mathbf{A}}_k \mathbf{A}_k^T$$

Sử dụng các ma trận Jacobian tịnh tiến và Jacobian xoay:

$$\mathbf{J}_{T_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ck}}{\partial \mathbf{s}}, \quad \mathbf{J}_{R_k} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_k}{\partial \dot{\mathbf{s}}}$$

Khi đó ta có:

$$\mathbf{v}_{ck} = \mathbf{J}_{T_k}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}}, \quad \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{J}_{R_k}(\mathbf{s})\dot{\mathbf{s}} \quad (0.9)$$

Biểu thức động năng có thể được tính:

$$T = \sum_{k=1}^p T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{v}_{ck}^T \mathbf{v}_{ck} + \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_k \boldsymbol{\omega}_k) \quad (0.10)$$

Với  $\mathbf{I}_k$  là ma trận của tenxơ quán tính của vật rắn thứ k đối với khối tâm  $C_k$  của nó trong hệ qui chiếu cõi định {B}. Có thể thay việc tính biểu thức  $\omega_k^T \mathbf{I}_k \omega_k$  bằng  $\omega_k^{(k)T} \mathbf{I}_k^{(k)} \omega_k^{(k)}$ . Trong đó  $\mathbf{I}_k^{(k)}$  là ma trận của quán tính vật rắn đối với khối tâm  $C_k$  của nó trong hệ qui chiếu động  $C_k x_k y_k z_k$  gắn liền với khâu thứ k, còn  $\omega_k^{(k)}$  là vector đại số vận tốc góc khâu thứ k trong hệ  $C_k x_k y_k z_k$ .

Thay (0.9) vào (0.10) ta được:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^p T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (m_k (\mathbf{J}_{T_k} \dot{\mathbf{s}})^T \mathbf{J}_{T_k} \dot{\mathbf{s}} + (\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{s}})^T \mathbf{I}_k \mathbf{J}_{R_k} \dot{\mathbf{s}}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}^T \left[ \sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{J}_{T_k}^T \mathbf{J}_{T_k} + \mathbf{J}_{R_k}^T \mathbf{I}_k \mathbf{J}_{R_k}) \right] \dot{\mathbf{s}} \end{aligned}$$

Sử dụng ma trận khối lượng suy rộng  $\mathbf{M}(\mathbf{s})$ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{J}_{T_k}^T \mathbf{J}_{T_k} + \mathbf{J}_{R_k}^T \mathbf{I}_k \mathbf{J}_{R_k})$$

Biểu thức động năng có thể được viết lại:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{M}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}} \quad (0.11)$$

Nếu phân các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thể và không có thể thì lực suy rộng  $Q_i$  được tính theo công thức:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \quad (0.12)$$

Với  $\Pi$  là hàm thế năng của hệ,  $Q_i^{np}$  là lực suy rộng của các lực không thể.

Nếu thu gọn các lực không thể tác dụng lên khâu thứ k về khối tâm  $C_k$  ta được một lực  $\overrightarrow{F_k^{np}}$  và một ngẫu lực  $\overrightarrow{M_k^{np}}$ . Khi đó lực suy rộng của lực không thể ứng với tọa độ suy rộng  $q_i$  sẽ là:

$$Q_i^{np} = \sum_{k=1}^p \left( \overrightarrow{F_k^{np}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{ck}}{\partial q_i} + \overrightarrow{M_k^{np}} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Viết dưới dạng vector:

$$\mathbf{Q}^{np} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}_{c1}}{\partial \mathbf{s}} & \dots & \frac{\partial \vec{r}_{ck}}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{F}_1^{np} \\ \vdots \\ \vec{F}_k^{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{q}_m} & \dots & \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{M}_1^{np} \\ \vdots \\ \vec{M}_k^{np} \end{bmatrix} \quad (0.13)$$

Thay (0.11), (0.12) vào (0.8) ta được:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left( m_{ij,k} - \frac{1}{2} m_{jk,i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = Q_i^{np}$$

Trong đó:

$m_{ij}$  là phần tử của ma trận khối lượng  $\mathbf{M}(\mathbf{s})$

$$m_{ij,k} = \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{s})}{\partial q_k}, \quad m_{jk,i} = \frac{\partial m_{jk}(\mathbf{s})}{\partial q_i}$$

Nếu viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \mathbf{J}_s^T(\mathbf{s}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^{np} \quad (0.14)$$

Trong đó:  $\mathbf{M}(\mathbf{s})$  là ma trận khối lượng suy rộng  $6 \times 6$

$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}})$  là ma trận quán tính và Coriolis  $6 \times 6$

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \frac{d\mathbf{M}(\mathbf{s})}{dt} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}})}{\partial \mathbf{s}} \right)^T$$

$\mathbf{g}(\mathbf{s})$  là ma trận do trọng trường gây ra  $6 \times 1$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{s}} \right)^T$$

$\mathbf{J}_s$  là ma trận jacobian của tọa độ suy rộng đầy đủ  $3 \times 6$

$\boldsymbol{\lambda}$  là vector các nhân tử Lagrange  $3 \times 1$

$\mathbf{Q}^{np}$  vector chứa lực suy rộng của các lực không thể  $6 \times 1$

### 2.1.2 Tính toán các ma trận

\*Ma trận khối lượng  $\mathbf{M}(\mathbf{s})$

Coi khối lượng khâu chủ động và khâu bị động ở cả ba chân bằng nhau. Gọi khối lượng của khâu chủ động và bị động lần lượt là  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ . Gọi khối lượng tẩm để di động là  $\mathbf{m}_p$ . Các khâu chủ động xét đến tenxơ quán tính đối với khối tâm  $\mathbf{C}_{1i}$  trong hệ  $\{\mathbf{C}_{1i}\}$ , để đơn giản ta đã bỏ qua tenxơ quán tính khâu bị động.

$$m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_1$$

$$m_{2a1} = m_{2a2} = m_{2a3} = m_{2b1} = m_{2b2} = m_{2b3} = \frac{1}{2}m_2$$

$$c_{11}\mathbf{I}_{11} = c_{12}\mathbf{I}_{12} = c_{13}\mathbf{I}_{13} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

 
$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{s}) &= \sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{J}_{T_k}^T \mathbf{J}_{T_k} + \mathbf{J}_{R_k}^T \mathbf{I}_k \mathbf{J}_{R_k}) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( m_1 \mathbf{J}_{T_{1i}}^T \mathbf{J}_{T_{C1i}} + \frac{1}{2} m_2 (\mathbf{J}_{T_{2ai}}^T \mathbf{J}_{T_{C2ai}} + \mathbf{J}_{T_{2bi}}^T \mathbf{J}_{T_{2bi}}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{J}_{R_{1i}}^{(1i)T} \mathbf{I}_{1i}^{(1i)} \mathbf{J}_{R_{1i}}^{(1i)} \right) + m_P \mathbf{J}_{T_P}^T \mathbf{J}_{T_P} \end{aligned} \quad (0.15)$$

Các ma trận Jacobian tịnh tiến và xoay:

$$\mathbf{J}_{T_{11}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{11}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}L\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}L\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{12}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{12}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4}L\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}L\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}L\cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{13}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{13}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}L\sin\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}L\sin\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}L\cos\theta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{2a1}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{2a1}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L\sin\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{2a2}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{2a2}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} L \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} L \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{2a3}} = \frac{\partial \mathbf{C}_{2a3}}{\partial \mathbf{s}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} L \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} L \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{T_{2b1}} = \mathbf{J}_{T_{2b2}} = \mathbf{J}_{T_{2b3}} = \mathbf{J}_{T_P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{R_{11}}^{11} = \frac{c_{11} \partial \mathbf{\omega}_{11}}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{R_{12}}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{R_{12}}^{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thay các ma trận vào biểu thức (0.15) ta tìm được ma trận khối lượng. Ma trận gồm các phần tử trên đường chéo, các phần tử còn lại bằng 0.

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = I_y + \frac{L^2}{4}(m_1 + 2m_2)$$

$$m_{44} = m_{55} = m_{66} = \frac{3}{2}m_2 + m_p$$

\*Ma trận quán tính và Coriolis

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \frac{d\mathbf{M}(\mathbf{s})}{dt} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\mathbf{M}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{s}})}{\partial \mathbf{s}} \right)^T$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}$$

\*Ma trận  $\mathbf{g}(\mathbf{s})$

Thể năng của Robot Delta:

$$\Pi = - \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} m_1 g L \sin \theta_i + \frac{1}{2} m_2 g L \sin \theta_i \right] + (m_p + \frac{3}{2} m_2) g z$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}) = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{s}} \right)^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(m_1gL + m_2gL)\cos\theta_1 \\ -\frac{1}{2}(m_1gL + m_2gL)\cos\theta_2 \\ -\frac{1}{2}(m_1gL + m_2gL)\cos\theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ \left( \frac{3}{2}m_2 + m_p \right)g \end{bmatrix}$$

\*Ma trận Jacobian các tọa độ suy rộng đầy đủ

$$\mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = [\mathbf{J}_q \quad \mathbf{J}_x]$$

Trong đó  $\mathbf{J}_q, \mathbf{J}_x$  được xác định ở phần động học.

\*Ma trận các lực không thể suy rộng  $\mathbf{Q}^{np}$

Các moment dẫn động đặt tại các khớp chủ động  $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3$ .

$$\begin{aligned} {}^{B_1}\boldsymbol{\tau}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{B_2}\boldsymbol{\tau}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{B_3}\boldsymbol{\tau}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^{B_1}\boldsymbol{\omega}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{B_2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{B_3}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Áp dụng công thức (0.13) ta được:

$$\mathbf{Q}^{np} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

### 2.1.3 Giải bài toán động lực học ngược

Nếu cho trước quy luật chuyển động, ta có thể hoàn toàn xác định được vận tốc, gia tốc của tâm bàn máy động P. Thông qua bài toán động lực học ngược, có thể xác định được các vector  $s, \dot{s}, \ddot{s}$ , từ đó xác định được các ma trận  $\mathbf{M}(\mathbf{s}), \mathbf{J}_s^T(\mathbf{s}), \mathbf{g}(\mathbf{s})$ . Phương trình (0.14) được viết lại:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \mathbf{J}_s^T(\mathbf{s})\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\tau} \quad (0.16)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$$

Nghiệm của phương trình động lực học ngược cho ta lực hoặc moment dẫn động. Ở đây, ta cần tìm moment dẫn động  $\boldsymbol{\tau}$  và các nhân tử  $\boldsymbol{\lambda}$ .

a) Giải trực tiếp phương trình Lagrange dạng nhân tử

Từ (0.16), ta có:

$$\tau - J_s^T(s)\lambda = M(s)\ddot{s} + g(s)$$

Đưa vào kí hiệu:

$$C = M(s)\ddot{s} + g(s)$$

$$p = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]$$

Thêm vào ma trận E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có quan hệ:

$$\tau - J_s^T(s)\lambda = [E, -J_s^T]p$$

Hay:

$$C = [E, -J_s^T]p$$

Đặt  $J_E = [E, -J_s^T]$ . Vector p chứa moment dẫn động và các nhân tử Lagrange được xác định:

$$p = J_E^{-1}C$$

b) Phương pháp biến đổi về các tọa độ suy rộng độc lập

Ta tiến hành bằng cách khử các tọa độ suy rộng phụ thuộc và các nhân tử Lagrange, sau đó biến đổi hệ phương trình vi phân đại số về hệ phương trình vi phân thường với số phương trình bằng số bậc tự do của hệ.

Nhắc lại các phương trình liên kết:

$$f(s) = f(q, x) = 0, f \in \mathbb{R}^3, q \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^3$$

Đạo hàm ta được:

$$\dot{f}(s) = J_s(s)\dot{s} = J_q(q, x)\dot{q} + J_x(q, x)\dot{x} = 0 \quad (0.17)$$

Trong đó  $J_q, J_x$  đều là các ma trận vuông  $3 \times 3$  đã xác định ở phần động học.

Giả sử  $J_x$  là ma trận không suy biến,  $\det J_x \neq 0$ . Từ (0.17), ta suy ra:

$$\dot{x} = -J_x^{-1}J_q\dot{q} \quad (0.18)$$

Nếu ta đưa vào phương trình đồng nhất:

$$\dot{q} = E\dot{q} \quad (0.19)$$

với E là ma trận vuông cấp 3.

Thì các phương trình (0.18),(0.19) có thể viết gộp lại:

$$\ddot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{J}_x^{-1}\mathbf{J}_{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (0.20)$$

Nếu ta đưa vào kí hiệu:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{J}_x^{-1}\mathbf{J}_{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

thì phương trình (0.20) được viết lại:

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} \quad (0.21)$$

Thay vào phương trình (0.17) ta được:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Do  $\dot{\mathbf{q}}$  gồm các biến độc lập tuyến tính, nên:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Hay:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{J}_s^T(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (0.22)$$

Từ phương trình Lagrange dạng nhân tử:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s})\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{g}(\mathbf{s}) + \mathbf{J}_s^T(\mathbf{s})\lambda = \boldsymbol{\tau} \quad (0.23)$$

Nhân hai vế với ma trận  $\mathbf{R}^T$  ta được:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T\mathbf{g} + \mathbf{R}^T\mathbf{J}_s^T(\mathbf{s})\lambda = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\tau} \quad (0.24)$$

Thay (0.22) vào (0.24) ta được:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T\mathbf{g} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\tau} \quad (0.25)$$

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (0.21) ta có:

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}} \quad (0.26)$$

Thay (0.26) vào (0.25) ta được:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T\mathbf{g} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\tau} \quad (0.27)$$

Nếu ta đưa về các ký hiệu:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}_a \\ \mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R} &= \mathbf{M}_a \\ \mathbf{R}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{C}_a \\ \mathbf{R}^T\mathbf{g} &= \mathbf{g}_a \end{aligned}$$

Khi đó, phương trình (0.27) được viết lại:

$$\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_a\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_a = \boldsymbol{\tau}_a \quad (0.28)$$

Vector  $\boldsymbol{\tau}_a$  chính là nghiệm của bài toán động lực học ngược

## 2.4. Vùng làm việc

Một trong những nhược điểm của robot delta là vùng làm việc tương đối nhỏ. Thêm vào đó, robot delta còn có nhiều điểm suy biến [LIU et al, 2003]. Để dễ dàng cho việc thiết kế, ở phần này ta đề cập đến khái niệm **vùng làm việc nội tiếp lớn nhất** (*maximum inscribed workspace*) và bán kính nội tiếp của nó. **Một ví dụ về hình dạng**

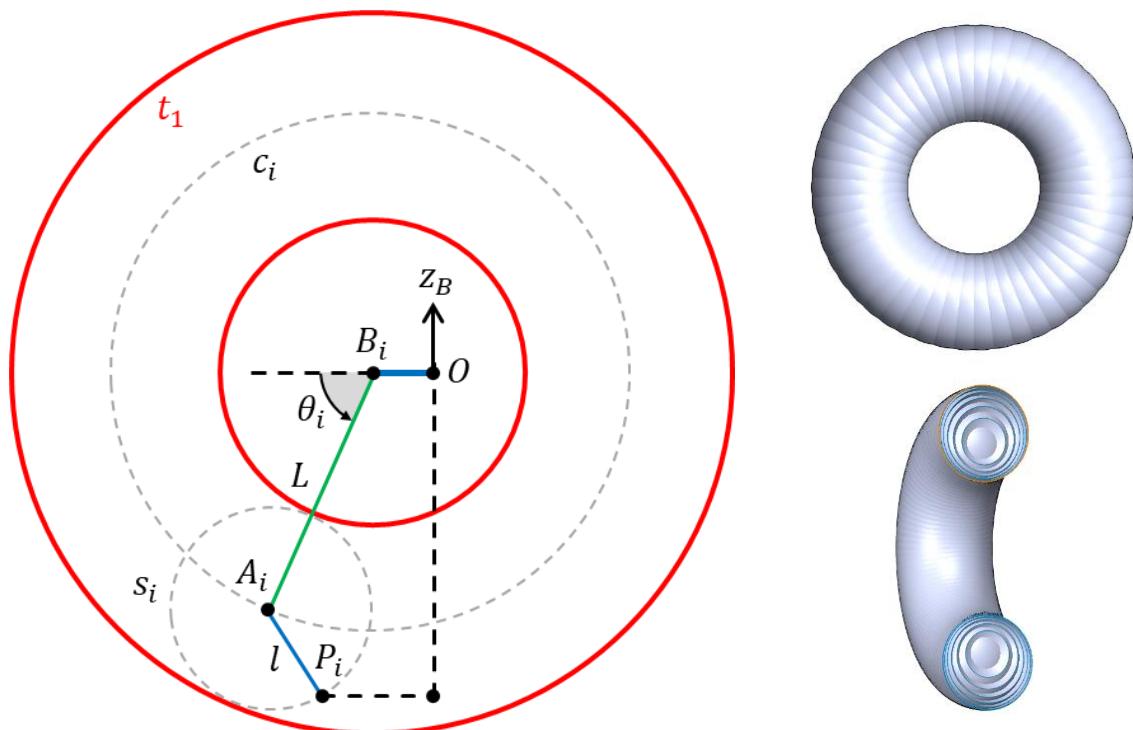
của vùng làm việc nội tiếp lớn nhất của robot delta cũng sẽ được minh họa (phần 2.4.4).

### 2.4.1. Vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU

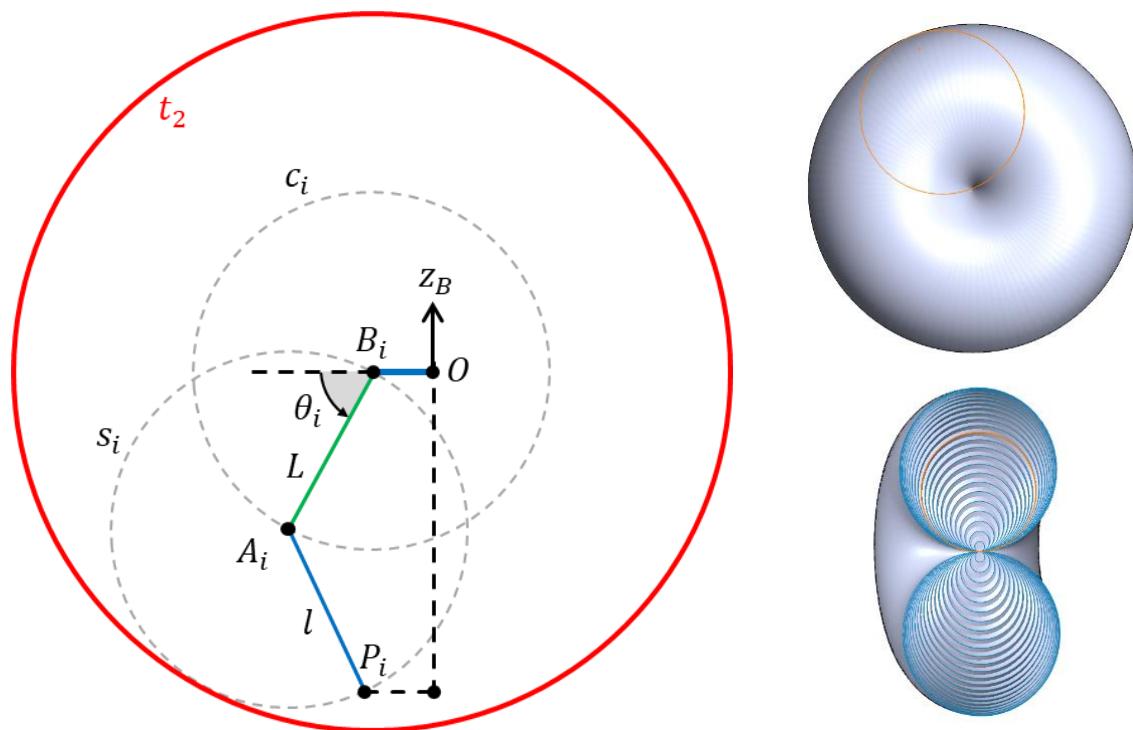
Ta thấy rằng vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU là **vùng bao** của một mặt cầu  $s_i(A_i, l)$  có tâm  $A_i$  trượt trên một đường tròn  $c_i(B_i, L)$ . Tọa độ các điểm  $A_i$  đã được xác định tại các phương trình (2.61), (2.62) và (2.63) với  $\theta_i \in [\theta_{imin}, \theta_{imax}]$ , trong đó  $[\theta_{imin}, \theta_{imax}]$  là khoảng hoạt động thực tế của mỗi khớp quay  $B_i$ .

Vùng bao này được mô tả như sau:

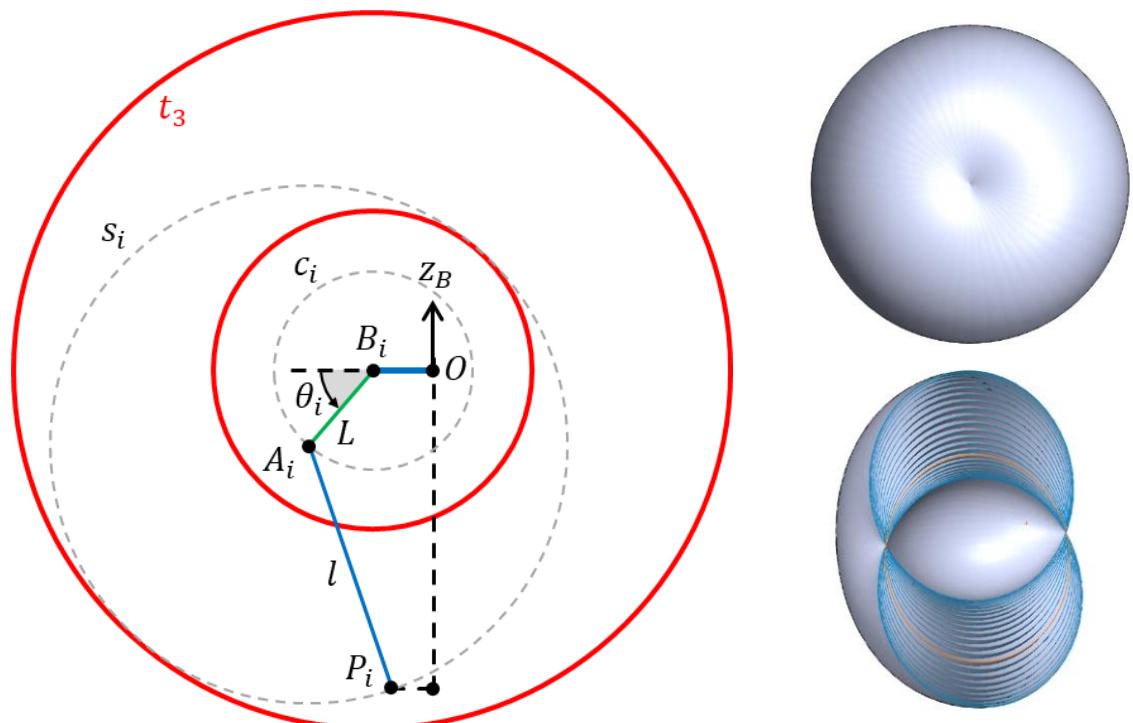
- Nếu  $L > l$ : Vùng bao  $t_1$  là hình xuyến có dạng *ring torus* (Hình 2.7);
- Nếu  $L = l$ : Vùng bao  $t_2$  là hình xuyến có dạng *horn torus* (Hình 2.8);
- Nếu  $L < l$ : Vùng bao  $t_3$  là hình xuyến có dạng *spindle torus*, bao gồm một vùng lõi trống bên trong (Hình 2.9).



Hình 2.7. Vùng làm việc có dạng *ring torus* (với  $L = 1244\text{mm}$ ,  $l = 5244\text{mm}$ )



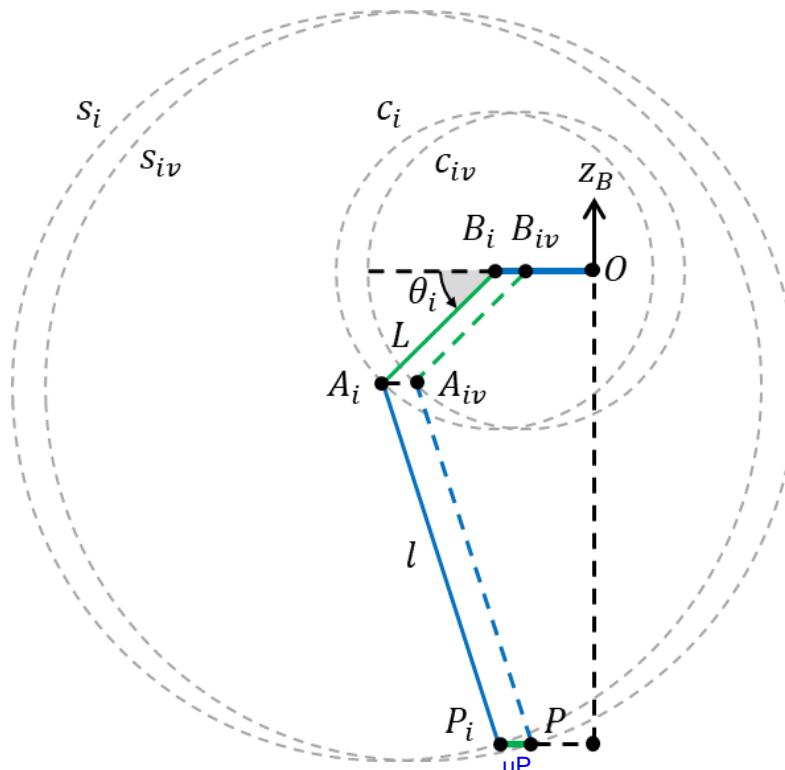
Hình 2.8. Vùng làm việc có dạng *horn torus* (với  $L = l = 884\text{mm}$ )



Hình 2.9. Vùng làm việc có dạng *spindle torus* (với  $L = 524\text{mm}$ ,  $l = 1244\text{mm}$ )

Ta chỉ mới tìm được vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU (tức là vùng bao của các điểm  $P_i$ ). Điều ta cần tìm là vùng làm việc của khâu chấp hành cuối thể hiện bởi điểm  $P$ .

Tấm đế di động được xem là một vật rắn, chỉ có các chuyển động tịnh tiến theo các trục  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Véc-tơ  $\overrightarrow{P_i P}$  có phương và độ lớn không đổi trong hệ tọa độ  $\{B\}$ . Do đó, vùng làm việc của điểm  $P$  (kí hiệu là  $t_{iv}$ ) chính là vùng làm việc  $t_i$  của các điểm  $P_i$  tịnh tiến theo véc-tơ  $\overrightarrow{P_i P}$  (Hình 2.10).



Hình 2.10. Vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU

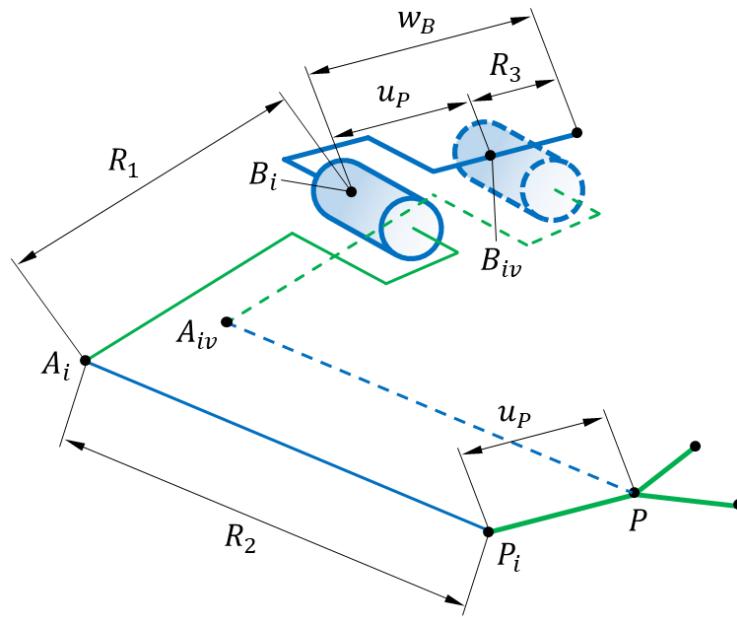
Vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay là giao điểm của ba vùng bao hình xuyến  $t_{iv}$  (với  $i = 1, 2, 3$ ). Vùng làm việc này cũng chính là vùng bao tập nghiệm của hệ phương trình động học thuận. Do cấu trúc của robot delta mà chỉ có phần giao nhau tương ứng với  $z$  âm (hay nói cách khác, nằm dưới tấm đế cố định) sẽ được chọn.

#### 2.4.2. Vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay

Ở phần này, ta sẽ phân tích hình dạng vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay. Việc tịnh tiến điểm  $P_i$  đến điểm  $P$  trình bày ở phần trước tương tự với lập luận ở phần 2.2.3 (định nghĩa tâm mặt cầu ảo  $A_{iv}$ ). Lúc đó, ta có thể xem tấm đế di động thu gọn lại thành một điểm  $P$  duy nhất và ta chỉ cần xem xét kích thước  $R_3 = w_B - u_P$  để hiện rõ quan hệ giữa hai tam giác đều  $B_1B_2B_3$  và  $P_1P_2P_3$  với  $R_3$  có thể âm khi  $w_B < u_P$  (tương ứng với  $B_1B_2B_3$  nhỏ hơn  $P_1P_2P_3$ ).

Trên lý thuyết, các thông số hình học của robot delta có thể lớn đến vô cùng, gây khó khăn cho việc phân tích. Để đơn giản, bằng cách sử dụng các tỉ lệ thay cho các kích thước thật, ta có thể đưa bài toán thiết kế robot delta về một bài toán tổng quát không phụ thuộc vào thứ nguyên. Ta tạm thời đặt  $R_1 = L$ ,  $R_2 = l$  (Hình 2.11) và giả sử:

$$D = \frac{R_1 + R_2 + |R_3|}{3} \quad (2.64)$$



Hình 2.11. Thông số hình học khi tịnh tiến điểm  $P_i$  đến điểm  $P$

Ta có ba thông số hình học không thay đổi nguyên khi chia chiều dài các khâu  $R_1$ ,  $R_2$  và  $|R_3|$  của robot delta cho  $D$ :

$$r_1 = \frac{R_1}{D} \quad r_2 = \frac{R_2}{D} \quad |r_3| = \frac{|R_3|}{D} \quad (2.65)$$

Như vậy:

$$r_1 + r_2 + |r_3| = 3 \quad (2.66)$$

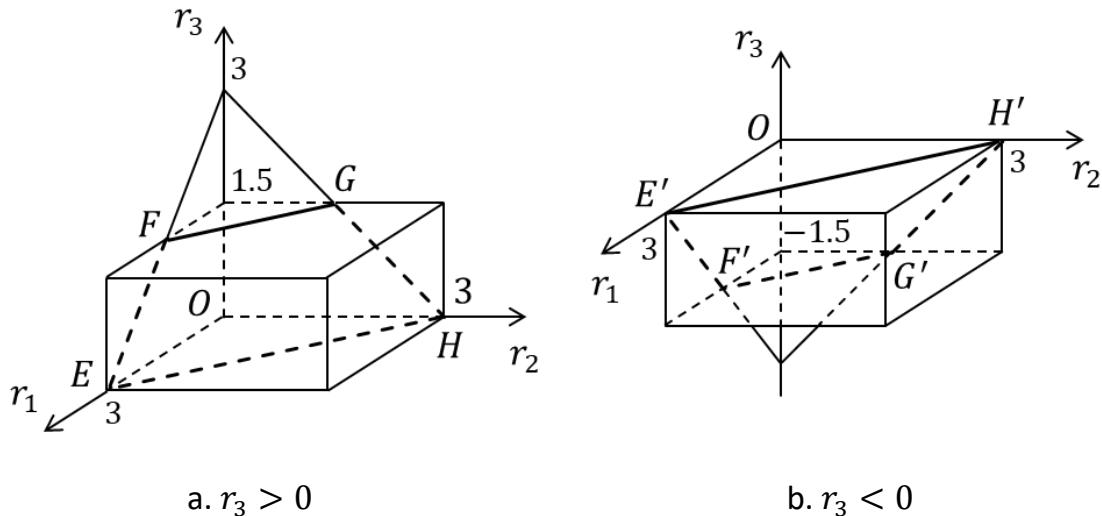
Nếu  $3 > |r_3| \geq 1,5$  thì  $|r_3| \geq (r_1 + r_2)$ . Từ Hình 2.11, ta có thể thấy không tồn tại vùng giao nhau giữa ba vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU, đồng nghĩa ta không thể lắp ráp được robot. Do vậy, ta có các điều kiện:

$$0 \leq |r_3| < 1,5 \quad 0 < r_1, r_2 < 3 \quad (2.67)$$

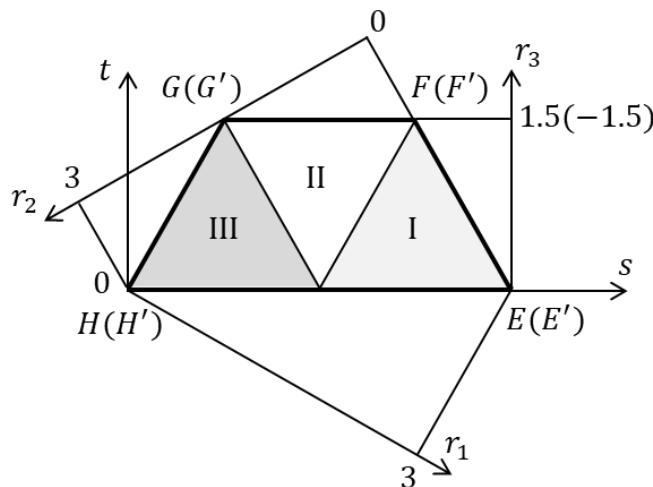
Hai hình thang  $EFGH$  và  $E'F'G'H'$  ở Hình 2.12 chứa toàn bộ các bộ ba nghiệm  $(r_1, r_2, |r_3|)$  thỏa mãn hệ (2.66), (2.67) tương ứng với hai trường hợp  $r_3 > 0$  (Hình 2.12a) và  $r_3 < 0$  (Hình 2.12b).

Ta nhận thấy, mỗi đỉnh của hai hình thang trên có thể được xác định dựa vào bộ hai thông số  $(r_1, |r_3|)$  thay vì cần đủ ba thông số  $(r_1, r_2, |r_3|)$ . Điều này có nghĩa bài toán ba chiều có thể được rút gọn thành bài toán hai chiều (Hình 2.13). Để thuận tiện, ta dùng hệ tọa độ trực giao  $Ost$  để thể hiện  $r_1, r_2, |r_3|$  thông qua phép biến đổi:

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}}r_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}|r_3| \quad t = |r_3| \quad (2.68)$$



Hình 2.12. Không gian nghiệm của hệ (2.66), (2.67)



Hình 2.13. Rút gọn bài toán ba chiều thành hai chiều

Ngược lại, từ bộ hai thông số  $(s, t)$ , ta có thể xác định được bộ ba thông số  $(r_1, r_2, |r_3|)$ :

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}s - t}{2} \quad r_2 = 3 - (r_1 + |r_3|) \quad |r_3| = t \quad (2.69)$$

#### 2.4.2.1. Khảo sát vùng làm việc

Ta thấy các mặt phẳng  $r_1 + |r_3| = r_2$  (tương ứng với  $r_2 = 1,5$ ) và  $r_2 + |r_3| = r_1$  (tương ứng với  $r_1 = 1,5$ ) sẽ chia vùng bên trong đường bao hình thang  $EFGH$  ( $E'F'G'H'$ ) ở Hình 2.13 thành ba vùng I, II, III.

Các mặt phẳng  $r_1 = r_2$ ,  $r_1 = |r_3|$  và  $|r_3| = r_2$  sẽ tiếp tục chia ba vùng trên thành mươi vùng con Ia, Ib, IIa, IIb, IIc, IId, IIe, IIf, IIIa, IIIb (Hình 2.14). Mỗi vùng tương ứng sẽ có các đặc trưng hình học khác nhau.

- Vùng Ia và Ib tương ứng với các điều kiện:

$$\text{Ia} \begin{cases} 1.5 < r_1 < 3 \\ 0 < r_2 < 0.75 \\ 0 < |r_3| < 1.5 \\ r_1 > |r_3| > r_2 \end{cases} \quad \text{Ib} \begin{cases} 1.5 < r_1 < 3 \\ 0 < r_2 < 1.5 \\ 0 < |r_3| < 0.75 \\ r_1 > r_2 > |r_3| \end{cases} \quad (2.70)$$

Vì  $r_1 > r_2$ , vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU là hình xuyến  $t_1$  có dạng ring torus như ở Hình 2.7. Vùng làm việc của robot sẽ là giao điểm của ba hình xuyến  $t_1$ .

- Các vùng IIa, IIb, IIc, IId, IIe, IIIf tương ứng với các điều kiện:

$$\begin{array}{ll} \text{IIa} \begin{cases} 0 < r_1 < 1 \\ 0.75 < r_2 < 1.5 \\ 1 < |r_3| < 1.5 \\ |r_3| > r_2 > r_1 \end{cases} & \text{IIb} \begin{cases} 0.75 < r_1 < 1.5 \\ 0 < r_2 < 1 \\ 1 < |r_3| < 1.5 \\ |r_3| > r_1 > r_2 \end{cases} \\ \text{IIc} \begin{cases} 0 < r_1 < 1 \\ 1 < r_2 < 1.5 \\ 0.75 < |r_3| < 1.5 \\ r_2 > |r_3| > r_1 \end{cases} & \text{IId} \begin{cases} 1 < r_1 < 1.5 \\ 0 < r_2 < 1 \\ 0.75 < |r_3| < 1.5 \\ r_1 > |r_3| > r_2 \end{cases} \\ \text{IIe} \begin{cases} 0.75 < r_1 < 1.5 \\ 1 < r_2 < 1.5 \\ 0 < |r_3| < 1 \\ r_2 > r_1 > |r_3| \end{cases} & \text{IIIf} \begin{cases} 1 < r_1 < 1.5 \\ 0.75 < r_2 < 1.5 \\ 0 < |r_3| < 1 \\ r_1 > r_2 > |r_3| \end{cases} \end{array} \quad (2.71)$$

Trường hợp  $r_1 < r_2$  (ứng với các vùng con IIa, IIc, IIe), vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU là hình xuyến  $t_3$  có dạng spindle torus như ở Hình 2.9. Ngược lại, nếu  $r_1 > r_2$  (ứng với các vùng con IIb, IId, IIIf), vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU là hình xuyến  $t_1$  có dạng ring torus như ở Hình 2.7. Vùng làm việc của robot sẽ là giao điểm của ba hình xuyến  $t_1$  hoặc ba hình xuyến  $t_3$ .

- Vùng III tương ứng với các điều kiện:

$$\text{IIIa} \begin{cases} 0 < r_1 < 0.75 \\ 1.5 < r_2 < 3 \\ 0 < |r_3| < 1.5 \\ r_2 > |r_3| > r_1 \end{cases} \quad \text{IIIb} \begin{cases} 0 < r_1 < 1.5 \\ 1.5 < r_2 < 3 \\ 0 < |r_3| < 0.75 \\ r_2 > r_1 > |r_3| \end{cases} \quad (2.72)$$

Vì  $r_2 > r_1$ , vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU có dạng spindle torus như ở Hình 2.9. Vùng làm việc của robot sẽ là giao điểm của ba hình xuyến  $t_3$ .

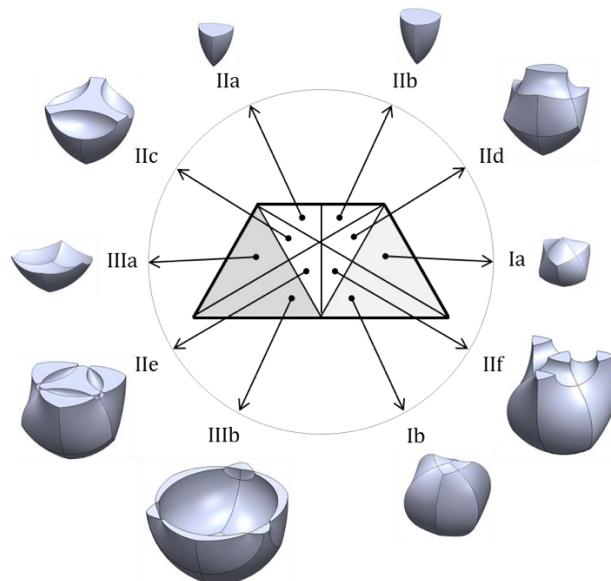
Các đường biên là các đường giao nhau giữa các vùng phân loại ở trên:

- Đường biên  $r_1 = r_2$ : Vùng làm việc của mỗi cánh tay RUU là hình xuyến  $t_2$  có dạng horn torus như ở Hình 2.8.

- Đường biên  $r_1 = |r_3|$
- Đường biên  $r_2 = |r_3|$
- Đường biên  $r_1 = 1.5$
- Đường biên  $r_2 = 1.5$
- Đường biên  $r_3 = 0$

Các điểm đặc biệt là các điểm giao nhau của các đường biên:

- Điểm  $r_1 = r_2 = |r_3| = 1$
- Điểm  $r_1 = 1.5, r_2 = |r_3| = 0.75$
- Điểm  $r_1 = |r_3| = 0.75, r_2 = 1.5$
- Điểm  $r_1 = r_2 = 1.5, |r_3| = 0$

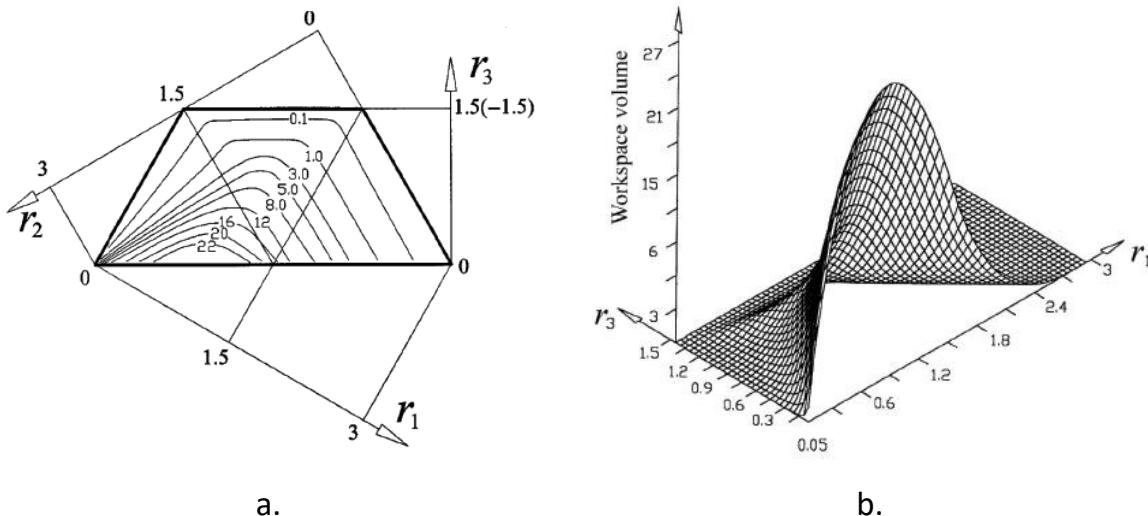


Hình 2.14. Sự phân bố hình dạng vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay

Việc khảo sát sẽ được trình bày chi tiết hơn ở [Phụ lục C](#). Qua việc khảo sát vùng làm việc và phân tích các số liệu thể tích không thứ nguyên, ta có thể khẳng định luật phân bố thể tích mà [\[LIU et al, 2003\]](#) đã công bố trước đó (Hình 2.15). Ta có một số kết luận như sau:

- Hình 2.14 biểu diễn sự phân bố hình dạng vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay. Mỗi vùng làm việc có hình dạng đặc trưng cho một vùng con tương ứng. Mỗi vùng con này thể hiện mối quan hệ giữa kích thước hình học của các khâu ( $R_1$  và  $R_2$ ), kích thước tương quan giữa tầm đế di động và tầm đế cố định ( $R_3$ ).
- Hình dạng vùng làm việc của robot trong các vùng con Ia, IIa, IIb, IIc, IId và IIIa nhỏ hơn các vùng con khác. Các vùng này hầu như không được sử dụng trong thực tiễn thiết kế.
- Đối với các vùng con IIe và IIIb, vùng làm việc tương ứng có các vùng trống (cavity).
- Khi đối chiếu Hình 2.14 và Hình 2.15, ta thấy rằng mặc dù thể tích vùng làm việc tương ứng với IIIb lớn hơn nhưng cũng có nhiều vùng hổng nhất. Để có được

vùng làm việc thực lớn nhất, ta nên chọn các vùng con IIe, IIIf và vùng Ib (gần với IIIf).



Hình 2.15. Phân bố thể tích không thứ nguyên theo  $r_1$  và  $|r_3|$  [LIU et al, 2003]

Các kết luận trên rất hữu ích cho việc thiết kế kích thước của robot delta kiểu ba khớp quay dựa vào vùng làm việc mong muốn. **Một ví dụ minh họa sẽ được trình bày ở phần sau.**

#### 2.4.2.2. Ảnh hưởng của vị trí cơ cấu hình bình hành đến hình dạng vùng làm việc IIe, IIIb

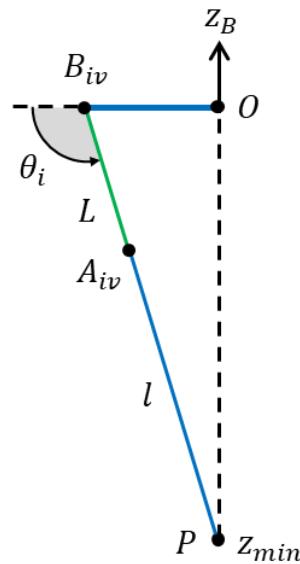
Độ cao z thấp nhất  $z_{min}$  của vùng làm việc tương ứng với vị trí của khâu chấp hành cuối P sao cho ba điểm  $B_{iv}, A_{iv}, P$  với  $i = 1, 2, 3$  ở cả ba chân robot đều nằm trên các đường thẳng (Hình 2.16). Khi đó  $z_P = z_{min}$  và  $x_P = y_P = 0$ . Ta có thể tính được  $z_{min}$  nhờ định lý Pythagore trong tam giác vuông  $OB_{iv}P$ :

$$z_{min} = -\sqrt{(L + l)^2 - (w_B - u_P)^2} \quad (2.73)$$

Độ cao  $z_{nc}$  ( $nc = \text{non cavity}$ ) để vùng làm việc tương ứng với  $z \leq z_{nc}$  không chứa vùng trống:

$$z_{nc} = -|L - l| = \begin{cases} l - L & \text{Nếu vùng làm việc có dạng ring torus} \\ 0 & \text{Nếu vùng làm việc có dạng horn torus} \\ L - l & \text{Nếu vùng làm việc có dạng spindle torus} \end{cases} \quad (2.74)$$

Độ lớn của  $z_{nc}$  cũng chính là bán kính đường tròn lớn nhất của phần lõm (nếu có) ở mỗi hình xuyên.



Hình 2.16. Điểm làm việc thấp nhất

Độ cao  $z = z_{max}$  mà tại đó tồn tại điểm làm việc cao nhất  $P(0,0,z_{max})$ ,  $z_{max}$  được xác định:

$$z_{max} = \begin{cases} 0 & \text{Nếu } |z_h| \leq |R_3| \\ -\sqrt{z_{nc}^2 - R_3^2} & \text{Nếu } |z_h| > |R_3| \end{cases} \quad (2.75)$$

### 2.4.3. Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất

Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất bao gồm các đường tròn nội tiếp lớn nhất của tiết diện vùng làm việc tại các mặt cắt ngang  $z = z_p$ , với  $z_p \in [z_{min}, z_{max}]$ . Tâm đường tròn nội tiếp sẽ nằm trên trục  $z_B$  và tiếp xúc với đường biên gần nhất của tiết diện vùng làm việc.

Tiết diện các hình xuyến:

Các phương trình (2.20), (2.21), (2.22) có thể được viết lại dưới dạng:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = l^2 \text{ với } i = 1, 2, 3 \quad (2.76)$$

$(x_i, y_i, z_i)$  là tọa độ các tâm ảo  $A_{iv}$ , tiếp tục biến đổi phương trình trên:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = l^2 - (z - z_i)^2 \quad (0.29)$$

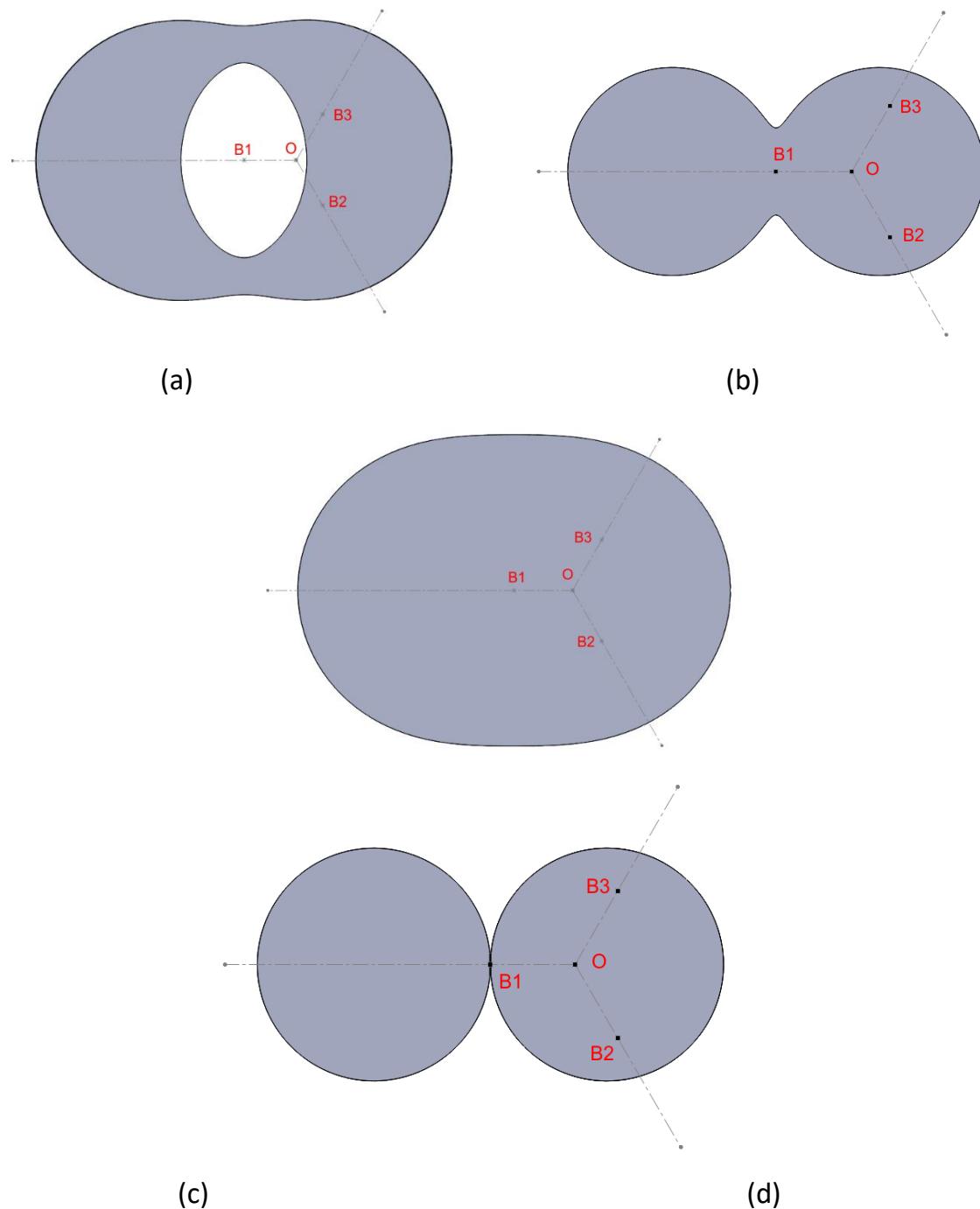
Ta nhận thấy tại vị trí mà tâm ảo  $A_{iv}$  có tọa độ  $z_i$ , ta được một mặt cầu  $s'_i$ . Nếu có một mặt cắt ngang  $z = z_p$  cắt mặt cầu  $s'_i$  ta được một đường tròn  $c_{si}$  có tâm là  $(x_i, y_i, z_p)$  và bán kính:

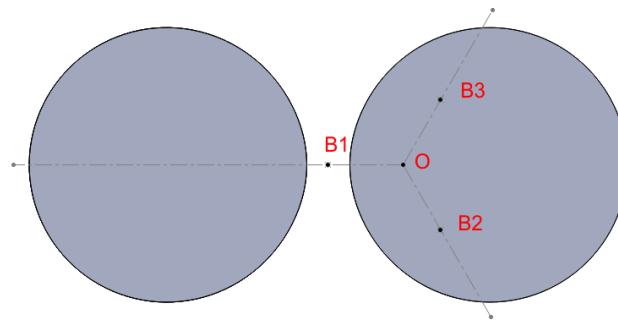
$$r_{csi} = \sqrt{l^2 - (z_p - z_i)^2}$$

Nếu cho trước mặt cắt ngang  $z = z_p$ , với  $z_p \in [z_{min}, z_{max}]$  và cho tâm ảo  $A_{ijv}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  chạy trên đường tròn  $c'_i$ , ta sẽ xác định được tiết diện của vùng làm

việc qua mặt cắt ngang ở mỗi chân. Như đã lí luận ở trên tiết diện này sẽ bao gồm các đường tròn  $c_{sij}$  có tâm  $C_{sij}(x_{ij}, y_{ij}, z_P)$  và bán kính  $r_{csij}$ . Tiết diện vùng làm việc qua mặt cắt ngang  $z = z_P$  của robot sẽ là vùng giao nhau giữa ba tiết diện trên.

Các hình xuyến có dạng spindle torus, ring torus, horn torus nên tiết diện tại mặt cắt các hình xuyến có các hình dạng:





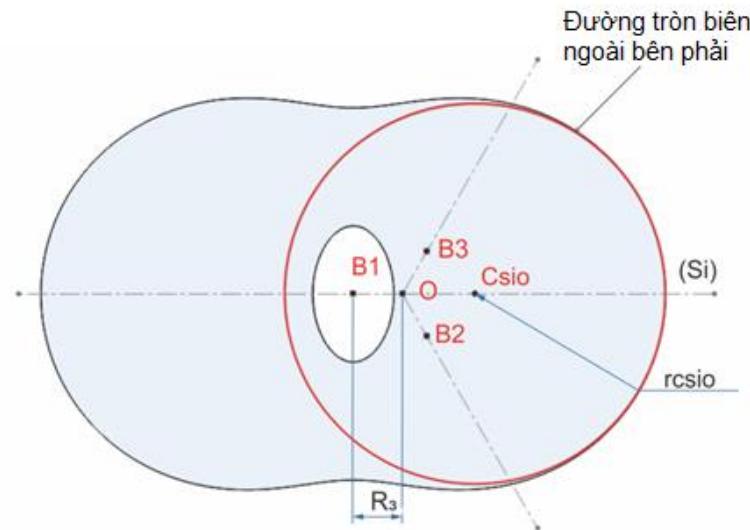
(e)

Hình. Các dạng tiết diện hình xuyến.

**Định nghĩa đường tròn biên ngoài:** là đường tròn ngoài cùng tiếp xúc với đường biên của **tiết diện các hình xuyến tại mặt cắt ngang  $z_P$** . Như vậy, ở mỗi tiết diện sẽ tồn tại hai đường tròn biên: đường tròn chứa biên bên trái và đường tròn chứa biên bên phải. Tuy vậy ta chỉ xét đường tròn biên ngoài bên phải, gọi đường tròn này là  $c_{si0}$  với tâm là  $C_{si0}(x_{i0}, y_{i0}, z_P)$  và bán kính:

$$r_{csio} = \sqrt{l^2 - (z_P - z_{i0})^2}$$

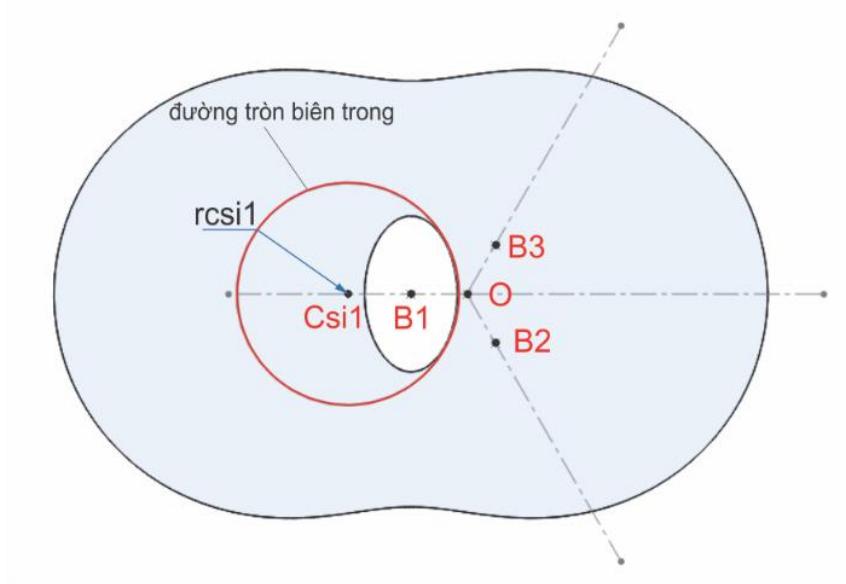
Vị trí xác định đường tròn biên  $c_{si0}$  tại mặt cắt ngang  $z_P$  tương ứng với tâm ảo có tọa độ  $A_{i0v}(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$ . Với mỗi mặt cắt ngang  $z_P$  sẽ xác định được một điểm  $c_{si0}$  và một điểm  $A_{i0v}$ .



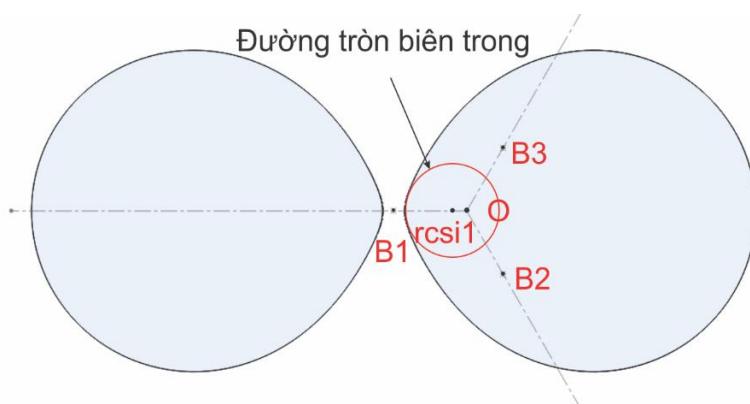
Hình. Đường tròn biên phải của tiết diện hình xuyến dạng spindle torus tại mặt cắt ngang  $z_P$ .

**Định nghĩa đường tròn biên trong:** là đường tròn trong cùng tiếp xúc với đường biên vùng trống ở giữa của tiết diện hình xuyên. Với hình xuyên dạng spindle torus, sẽ xuất hiện một vùng trống hình elip bên trong tiết diện, còn với hình xuyên dạng ring torus, vùng trống sẽ chia tiết diện thành hai vùng. Với các tiết diện không chứa vùng trống ở giữa, sẽ không tồn tại đường tròn biên trong. Tương tự cũng tồn tại hai đường tròn như vậy và ta chỉ xét **đường tròn tiếp xúc biên trống bên phải**, gọi đường tròn này là  $c_{si1}$  với tâm  $C_{si1}$  và bán kính:

$$r_{csi1} = \sqrt{l^2 - (z_p - z_{i1})^2}$$



(a)



(b)

Hình. Đường tròn biên trong.

(a) Dạng spindle torus. (b) Dạng horn torus.

Ta sẽ chứng minh ba hình xuyến luôn giao nhau tại một mặt cầu nội tiếp nếu thỏa mãn một điều kiện cho trước. Vì tâm mặt cầu nội tiếp nằm trên  $Z_B$  nên phương trình 2.76 **Error! Reference source not found.** có thể được viết lại:

$$(x)^2 + (y)^2 + (z - z_i)^2 = l^2, i = 1, 2, 3$$

Nếu có một điểm mà tại đó  $z_1 = z_2 = z_3 = z_{int}$  thì ba hình xuyến giao nhau tại một mặt cầu  $s'_{int}$  tâm là  $A'_{int}(0, 0, z_{int})$  và bán kính là  $r_{int} = l$ . Ta sẽ xác định mặt cầu này.

Thay  $x_i = y_i = 0$  vào biểu thức xác định tọa độ các tâm ảo  $A_{iv}$ , đã xác định ở phần động lực học. Ta thu được các phương trình:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-R_3}{L} \\ \cos\theta_2 = \frac{-R_3}{L} \\ \cos\theta_3 = \frac{-R_3}{L} \end{cases}$$

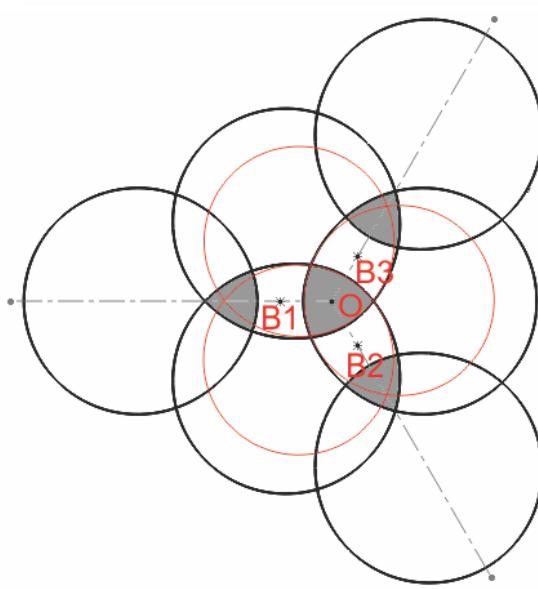
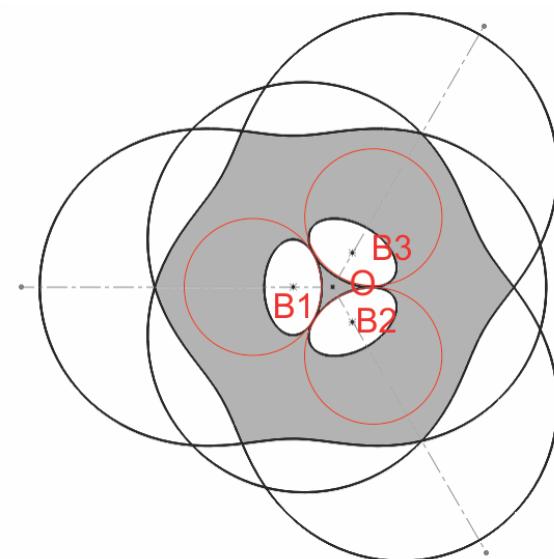
Các phương trình này có nghiệm với điều kiện  $R_1 = L \geq |R_3|$

Suy ra  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ , khi đó  $z_1 = z_2 = z_3 = -L\sin\theta_i = z_{int}$ . Như vậy ba hình xuyến luôn giao nhau tại một mặt cầu nội tiếp nếu các hình xuyến thỏa mãn điều kiện  $R_1 = L \geq |R_3|$ . Mặt cầu nội tiếp  $s'_{int}$  sẽ bao gồm các đường tròn nội tiếp  $c_{sint}$  có bán kính  $r_{csint} = \sqrt{l^2 - (z_p - z_{int})^2}$  tại mặt cắt ngang  $z_p$ .

Qua quá trình phân tích hình học, tiết diện vùng làm việc được chia làm 3 dạng:

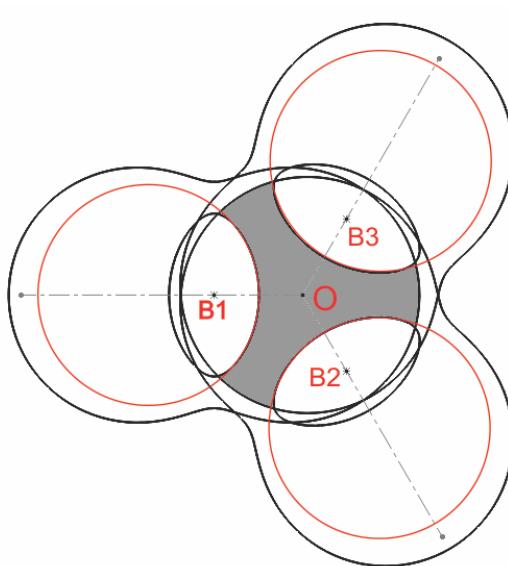
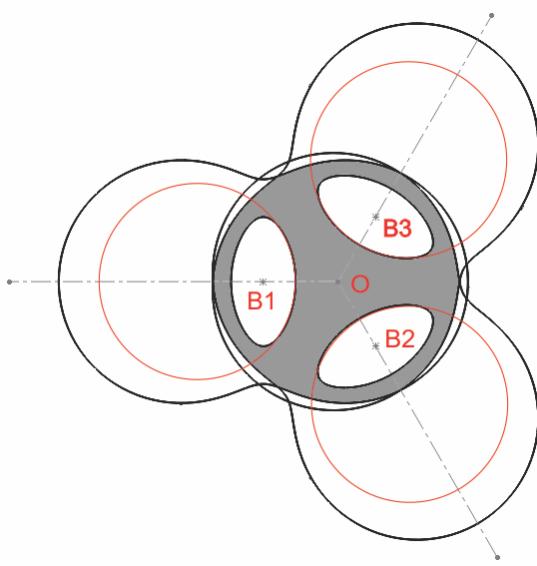
+Dạng 1: Đường biên tiết diện vùng làm việc tiếp xúc với 3 đường tròn biên trong  $c_{si1}$ . Khi đó tiết diện vùng làm việc có dạng 6 cạnh cong ở biên ngoài, có 3 cạnh cong tiếp xúc với vùng trống sao cho 3 cạnh này sẽ tiếp xúc với 3 đường tròn biên trong  $c_{si1}$ .

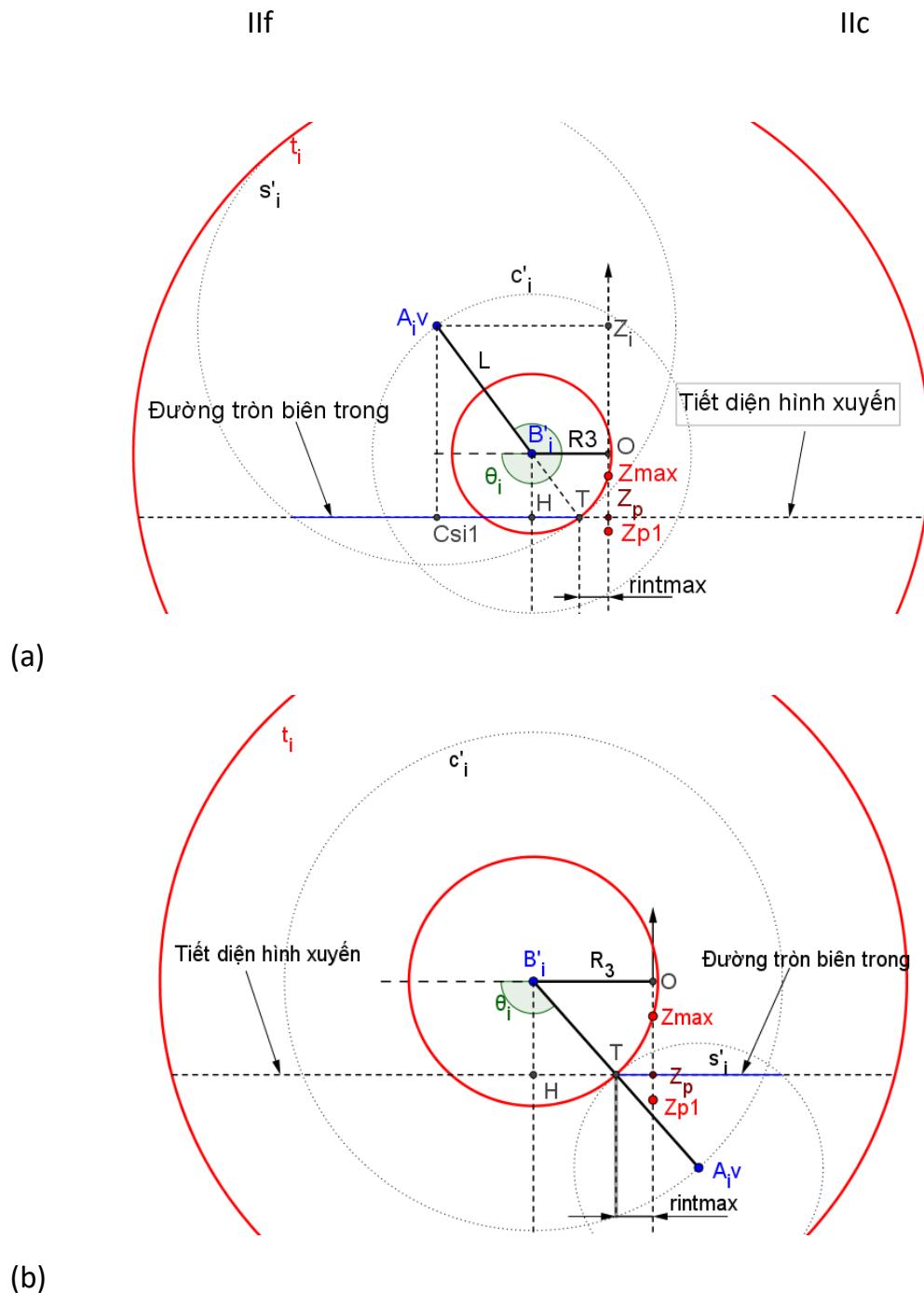
**Điều kiện để xuất hiện dạng này đó là tồn tại một mặt cắt ngang  $z_{p1}$  sao cho  $z_p \in (z_{p1}, z_{max}]$  thỏa mãn điều kiện tiếp xúc.** Đường tròn nội tiếp lớn nhất sẽ là đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn biên trong  $c_{si1}$ .



IIIb

IIId





Hình. Hai dạng tiếp xúc giữa biên trong và đường tròn biên trong.

(a) Tiếp xúc biên lõm(spindle torus) (b) Tiếp xúc biên lồi(ring torus)

Gọi T là điểm tiếp xúc giữa đường tròn biên trong và biên trong

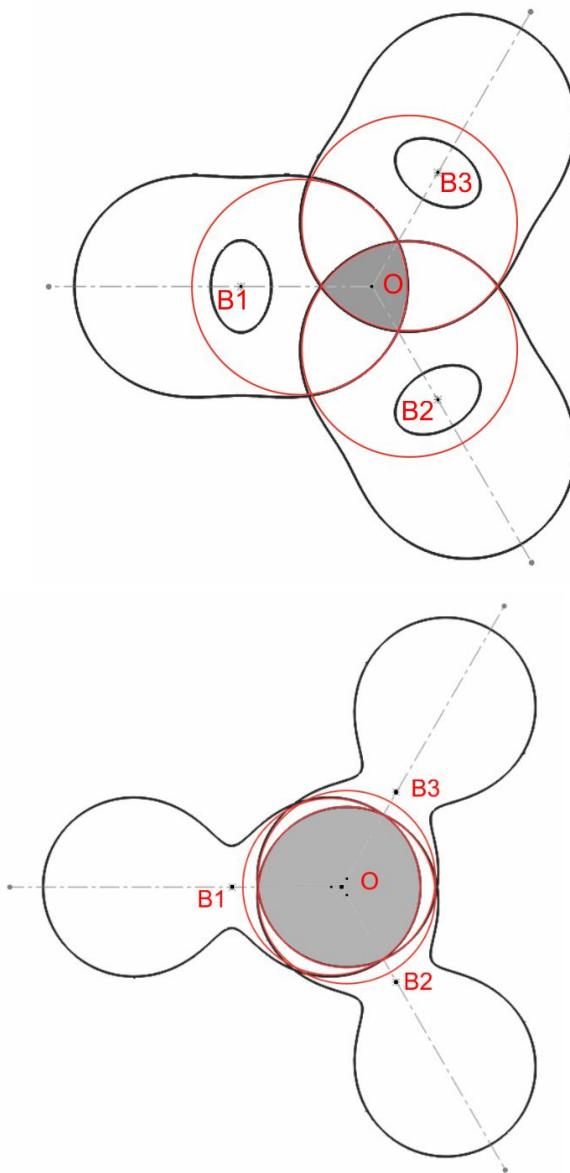
Gọi H là hình chiếu của  $B'_i$  theo phương  $Z_B$  lên  $Z_P$

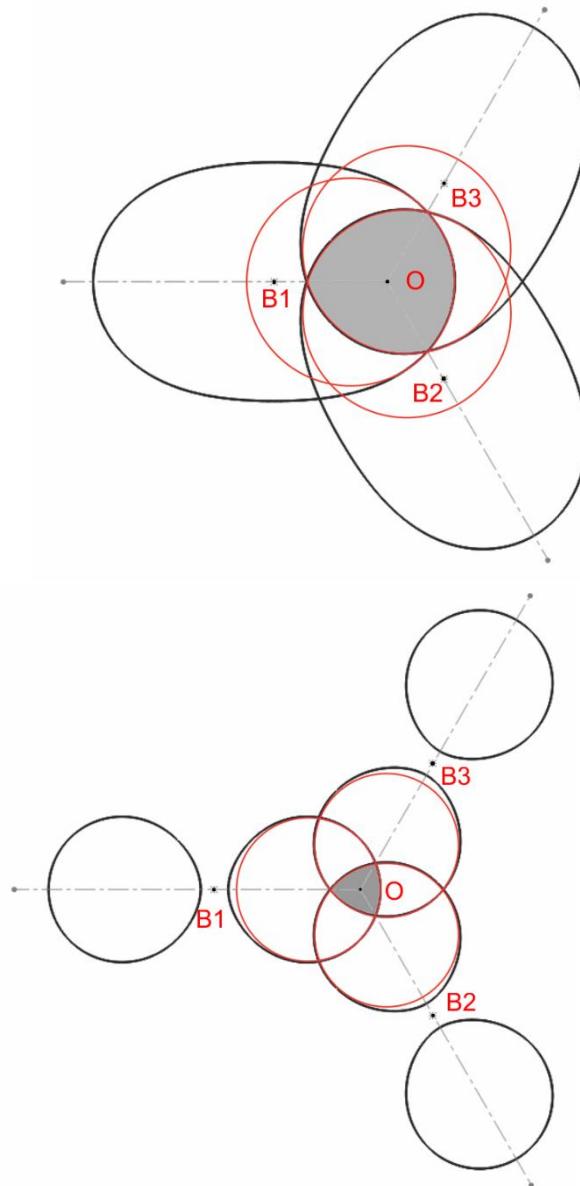
Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất:

$$r_{intmax} = |R_3| - HT$$

$$r_{intmax} = |R_3| - \sqrt{z_h^2 - z_p^2}, z_p \in (z_{P1}, z_{max}] \quad (0.30)$$

+Dạng 2: Đường biên tiết diện vùng làm việc tiếp xúc với 3 đường tròn biên ngoài  $c_{si0}$ . Khi đó tiết diện vùng làm việc có dạng 3 cạnh cong, sao cho 3 cạnh này sẽ tiếp xúc với 3 đường tròn biên ngoài, tiết diện không chứa vùng trống bên trong. Điều kiện để xuất hiện dạng này là tồn tại một mặt cắt ngang  $z_{P0}$  sao cho  $z_p \in [z_{min}, z_{P0})$  thỏa mãn điều kiện tiếp xúc. Đường tròn nội tiếp lớn nhất sẽ là đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn biên ngoài  $c_{si0}$ .





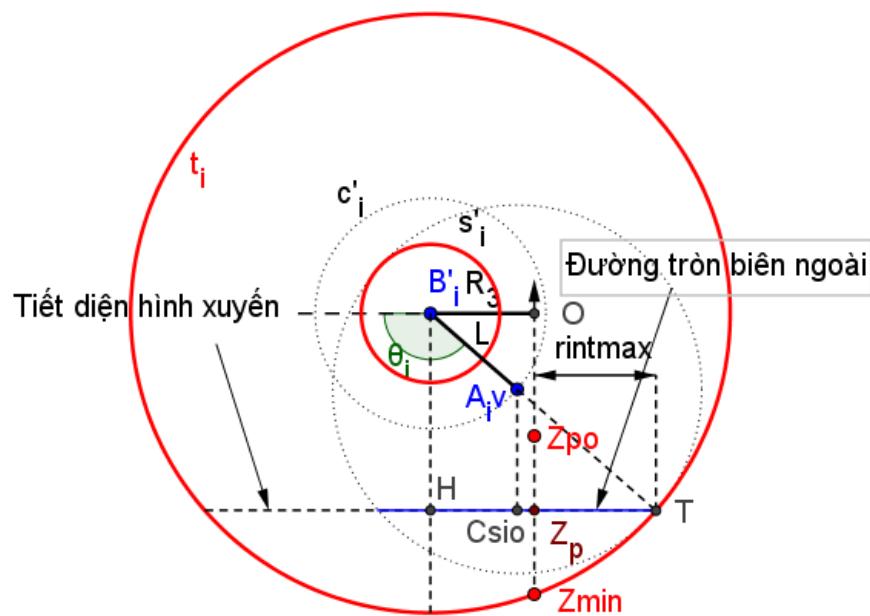
Gọi T là điểm tiếp xúc giữa biên của vùng làm việc và đường tròn biên ngoài  $c_{sio}$ .

H là hình chiếu của  $B'_i$  theo phương  $Z_B$  lên  $z_P$

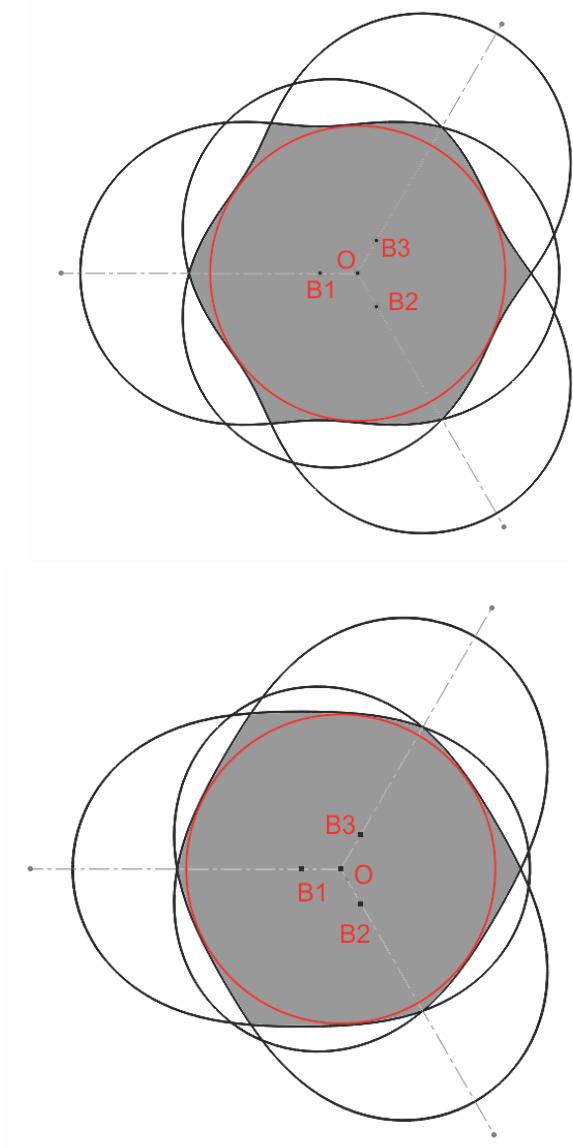
Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất:

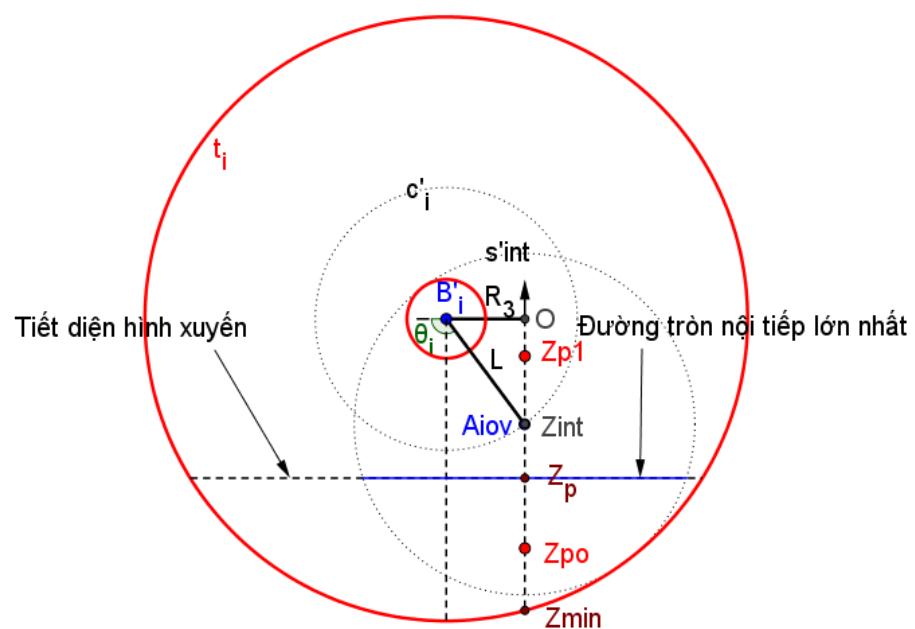
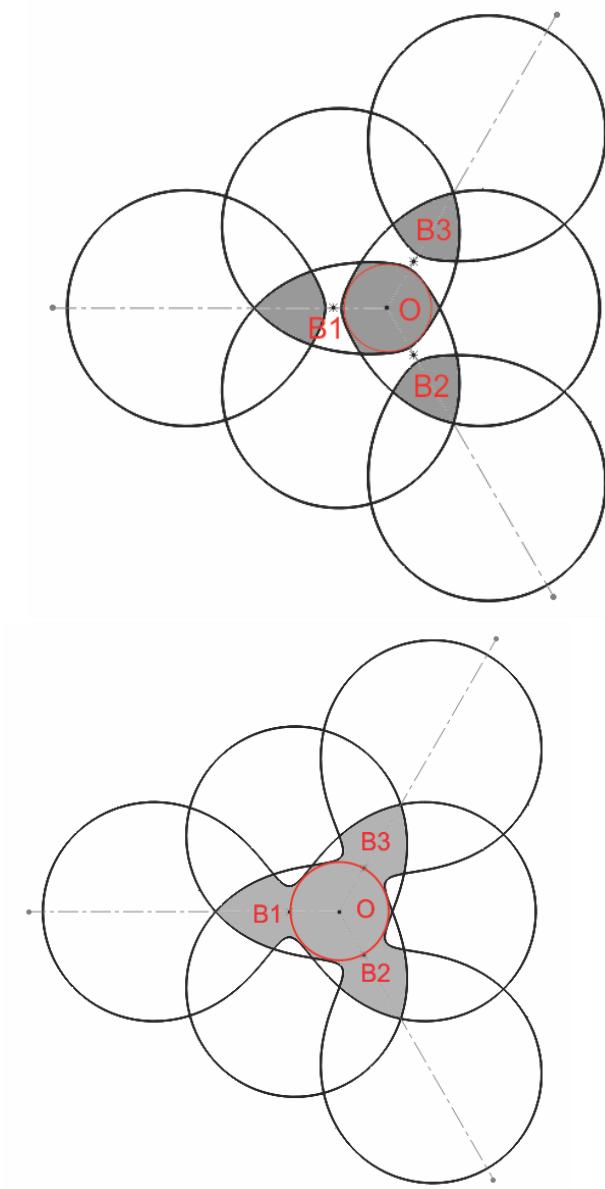
$$r_{intmax} = HT - |R_3|$$

$$r_{intmax} = \sqrt{(L + l)^2 - z_P^2} - |R_3|, z_P \in [z_{min}, z_{P0}] \quad (0.31)$$



+Dạng 3: Đường biên tiết diện vùng làm việc không tiếp xúc với các đường tròn biên trong và các đường tròn biên ngoài mà sẽ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp bên trong  $c_{sint}$ . Khi đó tiết diện có dạng 6 cạnh cong, chứa hoặc không chứa vùng trống bên trong. Điều kiện để xuất hiện dạng này là  $z_p \in [z_0, z_{p1}]$ . Vì tồn tại đường tròn nội tiếp  $c_{sint}$  luôn tiếp xúc với 6 cạnh trên nên đường tròn nội tiếp này chính là đường tròn nội tiếp lớn nhất.





Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất:

$$r_{intmax} = \sqrt{l^2 - (z_P - z_{int})^2}, z_P \in [z_0, z_{P1}] \quad (0.32)$$

Với:

$$z_{int} = \sqrt{L^2 - R_3^2}, z_{int} \leq 0 \quad (0.33)$$

Ta đã có các dạng của tiết diện vùng làm việc và các công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp. Bây giờ ta cần xác định các điều kiện  $z_{P1}, z_{P0}$  tại mươi vùng phân loại trước đó. Ta có:

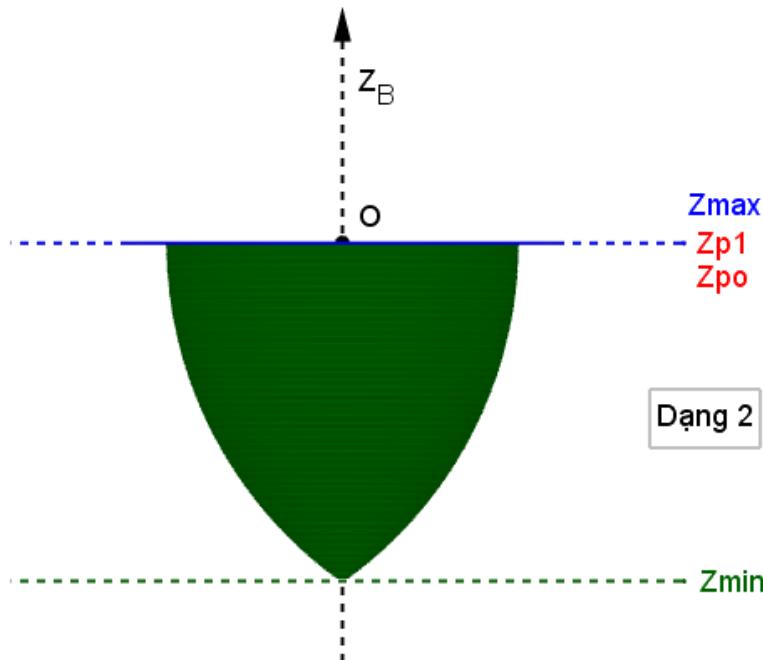
 Vùng IIa, IIb: không chứa mặt cầu nội tiếp ( $R_1 < |R_3|$ ), phần trống không ảnh hưởng đến tiết diện vùng làm việc nên tiết diện chỉ chứa dạng 2.

  $z_{P1}$  trùng với  $z_{P0}$  mà tại đó tồn tại đường tròn nội tiếp lớn nhất tiếp xúc với đường tròn biên ngoài  $c_{si0}$  tại mặt phẳng  $X_B OY_B$ . Khi đó:

$$z_{P1} = z_{P0} = z_{max} = 0$$

Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất được tính theo công thức (0.31)

$$r_{intmax} = \sqrt{(L + l)^2 - z_P^2 - |R_3|}, z_P \in [z_{min}, 0]$$

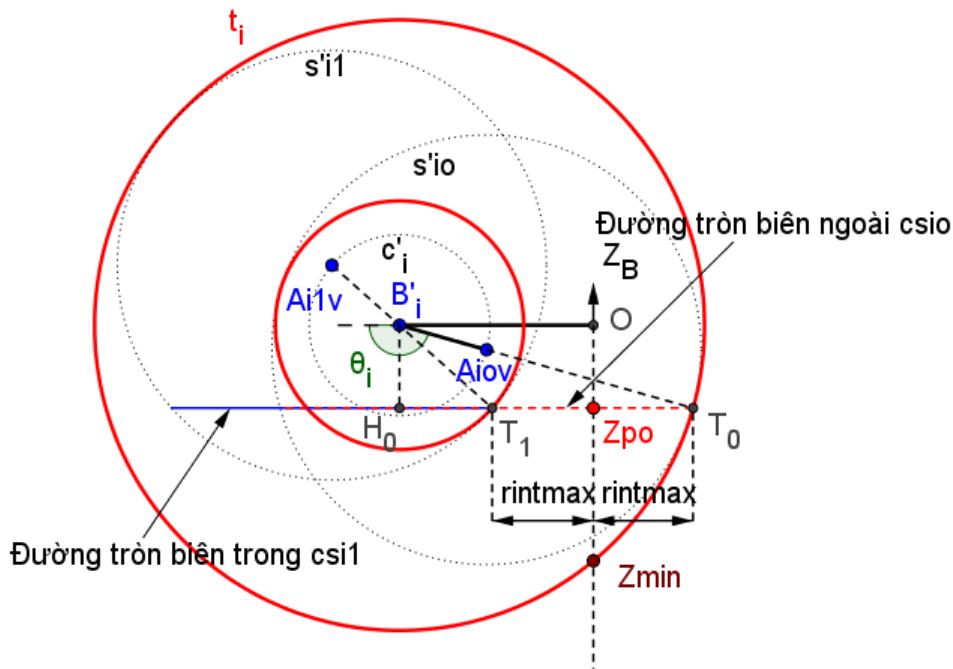


Hình. Vùng làm việc nội tiếp của một điểm thuộc vùng IIa( $r_1 = 0.9, r_2 = 1, r_3 = 1.1$ ), vẽ bằng phần mềm GeoGebra.

+Vùng IIc, IIIa: không chứa mặt cầu nội tiếp ( $R_1 < |R_3|$ ), phần trống ảnh hưởng đến tiết diện vùng làm việc nên tiết diện bao gồm cả dạng 1 và dạng 2.

$Z_{P1}, Z_{P0}$  trùng nhau mà tại đó tồn tại đường tròn nội tiếp lớn nhất tiếp xúc với cả đường tròn biên ngoài  $c_{si0}$  và đường tròn biên trong  $c_{si1}$ . Khi đó:

$$z_{max} > z_{P1} = z_{P0} > z_{min}$$



Do bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất tiếp xúc đường tròn biên ngoài bằng bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất tiếp xúc đường tròn biên trong nên ta có:

$$|R_3| - \sqrt{z_h^2 - z_{P1}^2} = \sqrt{(L + l)^2 - z_{P1}^2} - |R_3|$$

Hay:

$$\sqrt{(L + l)^2 - z_{P1}^2} + \sqrt{z_h^2 - z_{P1}^2} - 2|R_3| = 0 \quad (0.34)$$

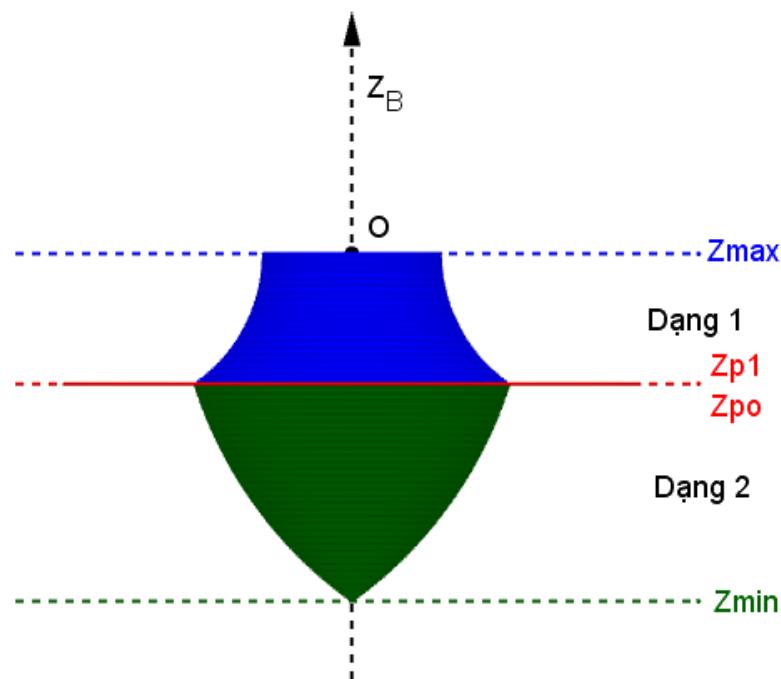
$$z_{P0} = z_{P1}$$

Có thể giải phương trình (0.34) bằng phương pháp số.

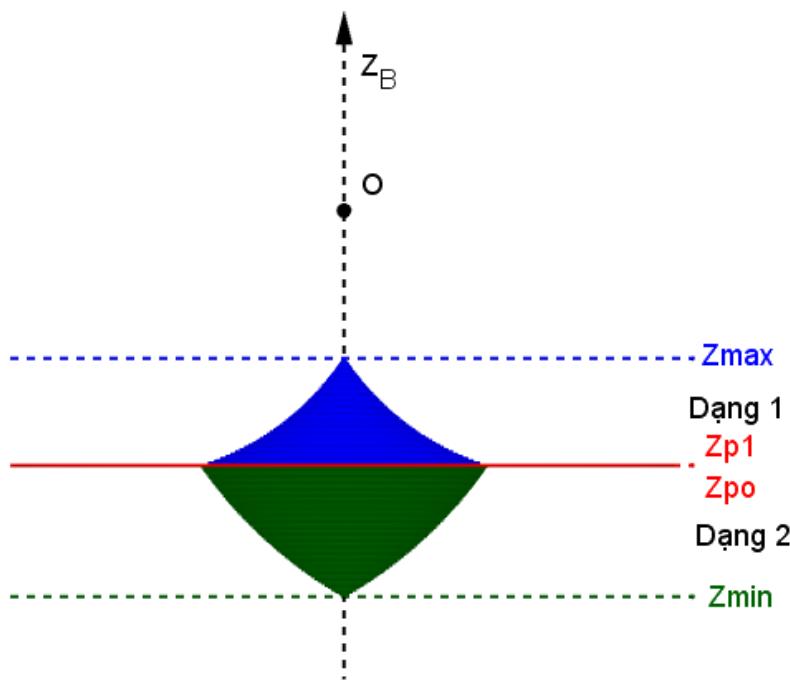
Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất gồm hai dạng:

-Dạng 1:  $r_{intmax}$  được tính theo công thức (0.30) với  $z_p \in (z_{P1}, z_{max}]$  theo các phương trình **Error! Reference source not found.**, (0.34).

-Dạng 2:  $r_{intmax}$  được tính theo công thức (0.30) với  $z_p \in [z_{min}, z_{P0})$  theo các phương trình **Error! Reference source not found.**, (0.34).



Hình. Vùng làm việc của một điểm thuộc vùng IIc( $r_1 = 0.6, r_2 = 1.3, r_3 = 1.1$ )



Hình. Vùng làm việc nội tiếp của một điểm thuộc vùng IIIa( $r_1 = 0.4, r_2 = 1.6, r_3 = 1$ )

+ Các vùng còn lại: IIIb, IIe, IIf, Ia, Ib chứa mặt cầu nội tiếp ( $R_1 \geq |R_3|$ ) cho nên bao gồm cả 3 dạng 1,2 và 3. Khi đó:

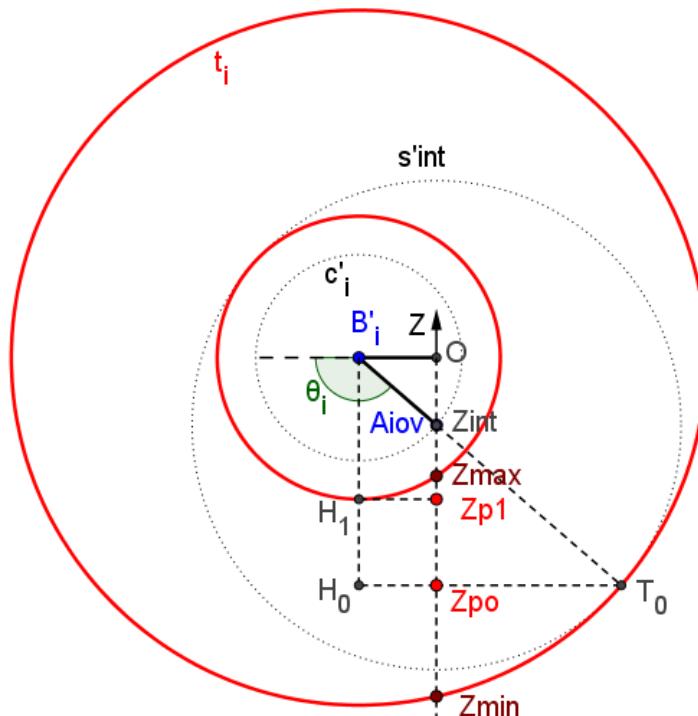
$$z_{max} > z_{P1} > z_{P0} > z_{min}$$

Có một ngoại lệ tại điểm đặc biệt  $(r_1, r_2, r_3) = (1.5, 1.5, 0)$  thuộc vùng IIIf, với điểm này vùng làm việc chỉ có dạng 3 với  $z_{P1} = z_{max} = 0, z_{P0} = z_{min}$ .

Tính  $z_{P1}$ :

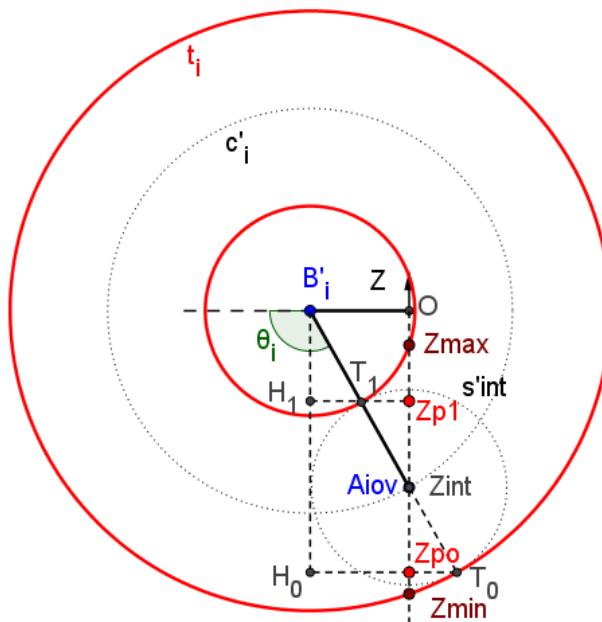
\_ Đối với hình xuyên dạng spindle torus, đó là các vùng: IIIb, IIe.

$$z_{P1} = z_h = L - l \quad (0.35)$$



\_ Đối với hình xuyên dạng horn, ring torus, đó là các vùng: IIIf, IIId, Ia, Ib.

$z_{P1}$  là vị trí mà tại đó đường tròn biên trong  $c_{si1}$  tiếp xúc với đường tròn nội tiếp  $c_{sint}$ .



Gọi  $T_1$  là điểm tiếp xúc giữa đường tròn biên trong với đường tròn nội tiếp  $c_{sint}$

Gọi  $H_1$  là hình chiếu điểm  $B'_i$  theo phương  $Z_B$  lên mặt cắt ngang  $z_{P1}$ .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác đồng dạng để tìm  $z_{P1}$

$$\frac{z_{int} - z_{P1}}{z_{P1}} = \frac{l}{L - l}$$

Suy ra:

$$z_{P1} = z_{int} \frac{L - l}{L} \quad (0.36)$$

$z_{int}$  được tính theo công thức (0.33)

Tính  $z_{P0}$ :

$z_{P0}$  là mặt cắt ngang mà tại đó đường tròn ngoài  $c_{sio}$  tiếp xúc với đường tròn nội tiếp  $c_{sint}$ .

Gọi  $T_0$  là điểm tiếp xúc giữa đường tròn biên ngoài với biên của tiết diện hình xuyến.

Gọi  $H_0$  là hình chiếu điểm  $B'_i$  theo phương  $Z_B$  lên mặt cắt ngang  $z_{P0}$ .

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác đồng dạng để tính  $z_{P0}$

$$\frac{z_{P0} - z_{int}}{z_{P0}} = \frac{l}{l + L}$$

Suy ra:

$$z_{P0} = z_{int} \frac{L + l}{L} \quad (0.37)$$

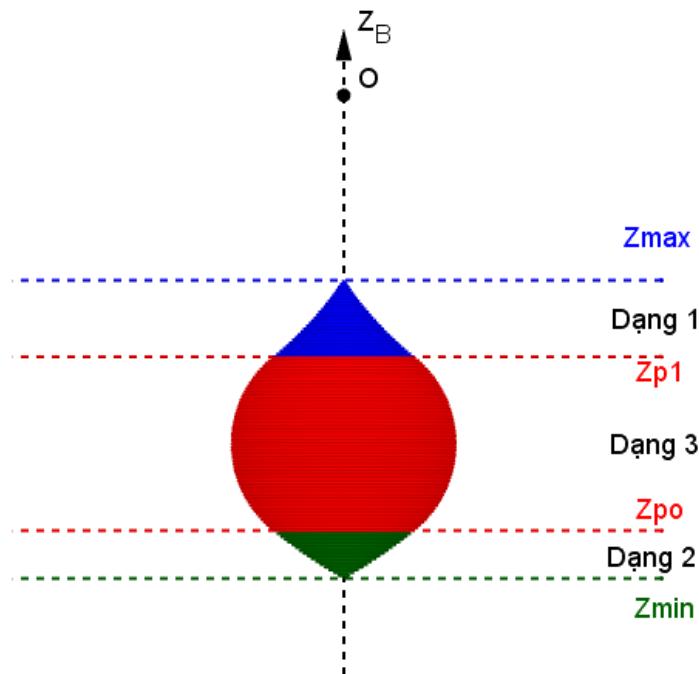
Tính  $r_{intmax}$ :

Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất chứa 3 dạng:

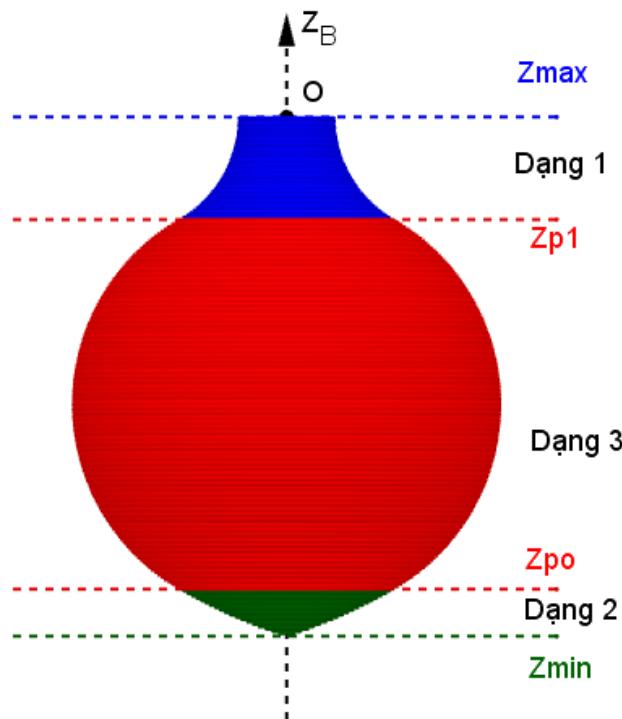
Dạng 1:  $r_{intmax}$  được tính theo công thức (0.30) với các điều kiện được xác định dựa theo **Error! Reference source not found.**, (0.35), (0.36).

Dạng 2:  $r_{intmax}$  được tính dựa theo công thức (0.31) với các điều kiện được xác định dựa theo (0.35), (0.36), (0.37).

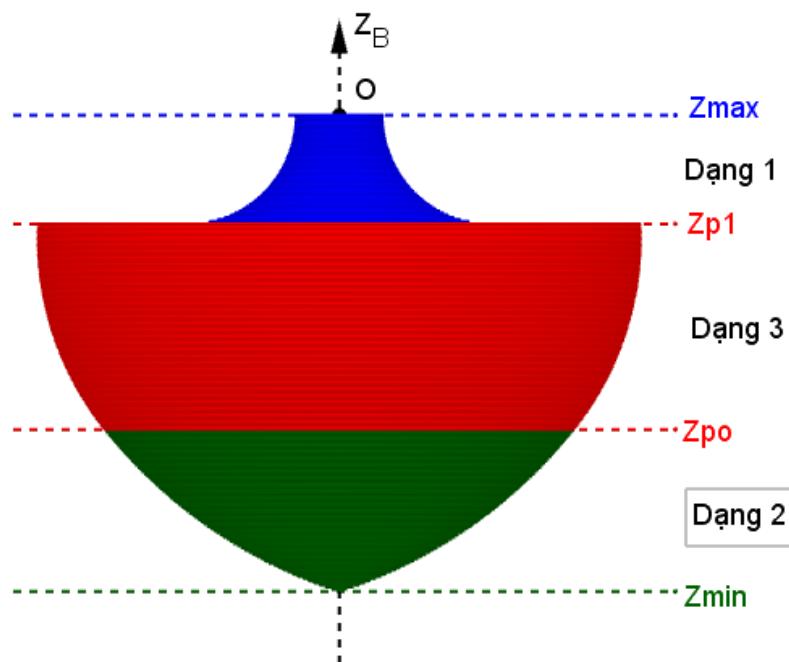
Dạng 3:  $r_{intmax}$  được tính dựa theo công thức (0.32) với các điều kiện được xác định dựa theo **Error! Reference source not found.**, (0.37).



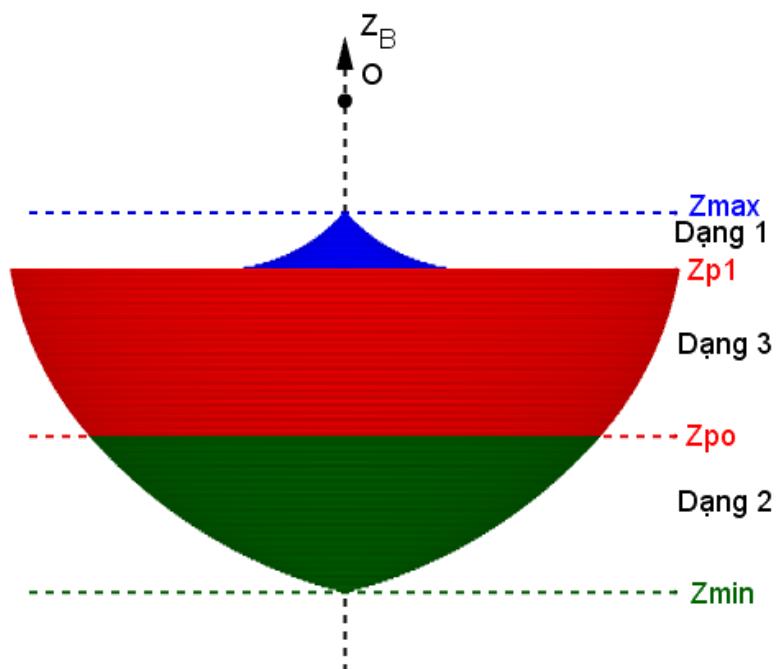
Hình , Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất của một điểm thuộc vùng la( $r_1 = 1.6, r_2 = 0.4, r_3 = 1$ ).



Hình . Vùng làm việc nội tiếp của một điểm thuộc vùng II $f(r_1 = 1.4, r_2 = 0.9, r_3 = 0.7)$ .



Hình . Vùng làm việc nội tiếp của một điểm thuộc vùng II $e(r_1 = 0.9, r_2 = 1.4, r_3 = 0.7)$ .

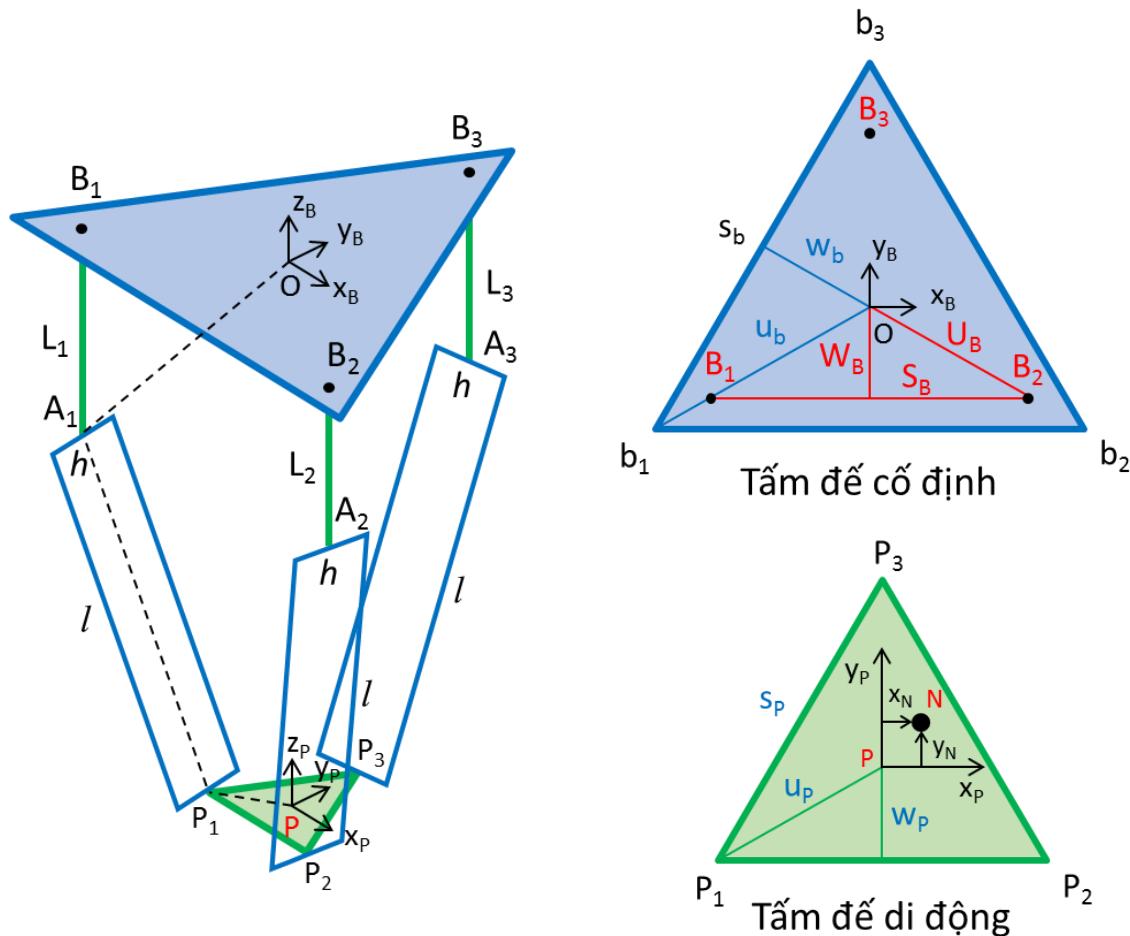


Hình. Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất của một điểm thuộc vùng IIIb( $r_1 = 0.8, r_2 = 1.6, r_3 = 0.6$ )

### 3. Robot delta kiểu ba khớp trượt

#### 3.1. Cấu trúc robot

Robot delta kiểu ba khớp trượt (tịnh tiến) về cơ bản tương tự robot delta kiểu ba khớp quay. Điểm khác nhau cơ bản là ba đầu vào lúc này được điều khiển bằng ba khớp trượt thay vì ba khớp quay. Sự thay đổi trong thiết kế này khiến cho việc tính toán động học của robot delta kiểu ba khớp trượt trở nên khá đơn giản bởi các khớp trượt  $A_i$  trượt theo đường thẳng cùng phương với trục z của hệ toạ độ  $\{B\}$ , ta không phải sử dụng các hàm lượng giác như trường hợp robot delta kiểu ba khớp quay. Do đó chuyển động theo phương nằm ngang của tấm để di động có quan hệ với chuyển động theo phương thẳng đứng của khớp trượt  $A_i$  thông qua định lý Pythagore. Đường chéo của tam giác vuông chính là chiều dài của cánh tay (kí hiệu  $l$ ), cạnh vuông thẳng đứng là vị trí tương đối theo phương thẳng đứng của tấm để di động và khớp trượt  $A_i$ , cạnh vuông nằm ngang là vị trí tương đối theo phương nằm ngang của tấm để di động và khớp trượt  $A_i$ .



Hình 3.1. Sơ đồ động học và thông số hình học của robot delta kiểu ba khớp trượt

Như trong Hình 3.1, robot delta kiểu ba khớp trượt ba bậc tự do bao gồm ba cánh tay giống nhau PUU song song liên kết tấm đế trên cố định và khâu chấp hành cuối ở dưới. Kí hiệu P chỉ ra khớp tịnh tiến được điều khiển bởi cơ cấu chấp hành. Các biến điều khiển là  $L_i$  với  $i = 1, 2, 3$ . Trong trường hợp đang xem xét, chuyển động dương của  $L_i$  ứng với chiều đi xuống (tức là phương  $-Z_B$ ). Các biến khớp là  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ , và biến thể hiện vị trí của khâu chấp hành cuối  $P$  trong hệ tọa độ  $\{B\}$  đang xem xét là  $\overrightarrow{OP}_B = [x \ y \ z]^T$ .

Các thông số hình học của tấm đế cố định và tấm đế di động (chứa khâu chấp hành cuối) được thể hiện trong Hình 3.1 với các kí hiệu và ý nghĩa được tóm tắt bằng Bảng 3.1.

Ký hiệu	Ý nghĩa
$B_i$	$i = 1, 2, 3$ hình chiếu của tâm khớp trượt $A_i$ lên tấm đế cố định, hay là điểm nối giữa thanh trượt và tấm đế cố định
$P_i$	$i = 1, 2, 3$ điểm nối giữa cánh tay hình bình hành và tấm đế di động
$s_b$	chiều dài cạnh tam giác đều tấm đế cố định

$w_b$	khoảng cách từ tâm O đến cạnh của tấm đế cố định
$u_b$	khoảng cách từ tâm O đến đỉnh $b_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) của tấm đế cố định
$H$	chiều cao của robot delta
$S_B$	cạnh của tam giác đều $B_1B_2B_3$
$W_B$	khoảng cách từ tâm đến cạnh của tam giác đều $B_1B_2B_3$
$U_B$	khoảng cách từ tâm đến đỉnh $B_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) của tam giác đều $B_1B_2B_3$
$s_P$	chiều dài cạnh tam giác đều tấm đế di động
$w_P$	khoảng cách từ tâm $P$ đến cạnh của tấm đế di động
$u_P$	khoảng cách từ tâm $P$ đến đỉnh $P_i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) của tấm đế di động
$x_N$	tọa độ theo trục x của cơ cấu chấp hành cuối $N$
$y_N$	tọa độ theo trục y của cơ cấu chấp hành cuối $N$
$L_{imin}$	$i = 1, 2, 3$ chiều dài cực tiểu của biến điều khiển $L_i$
$L_{imax}$	$i = 1, 2, 3$ chiều dài cực đại của biến điều khiển $L_i$
$l$	chiều dài của mỗi cánh tay hình bình hành
$h$	chiều rộng của mỗi cánh tay hình bình hành

Bảng 3.1. Giải thích các thông số hình học của robot delta kiểu ba khớp trượt

Ta nhận thấy rằng các điểm  $B_i$  cố định trong hệ tọa độ  $\{B\}$  và các khớp các-đăng  $P_i$  cố định trong hệ tọa độ  $\{P\}$ . Cả  $B_i$  và  $P_i$  đều là đỉnh của các tam giác đều có chiều dài cạnh lần lượt là  $S_B$  và  $s_P$ . Ta có:

$$\overrightarrow{OB_{1/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{S_B}{2} \\ 2 \\ -W_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\overrightarrow{OB_{2/B}} = \begin{bmatrix} \frac{S_B}{2} \\ 2 \\ -W_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\overrightarrow{OB_{3/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{PP_{1/P}} = \begin{bmatrix} -\frac{s_p}{2} \\ -w_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\overrightarrow{PP_{2/P}} = \begin{bmatrix} \frac{s_p}{2} \\ -w_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\overrightarrow{PP_{3/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Với:

$$W_B = \frac{\sqrt{3}}{6} S_B \quad U_B = \frac{\sqrt{3}}{3} S_B \quad w_p = \frac{\sqrt{3}}{6} s_p \quad u_p = \frac{\sqrt{3}}{3} s_p$$

Các đỉnh của tam giác đều tấm đế cố định không được sử dụng trực tiếp trong các phương trình động học. Chúng được dùng để biểu diễn kích thước hình học của phần khung robot:

$$\overrightarrow{Ob_{1/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{s_b}{2} \\ -w_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\overrightarrow{Ob_{2/B}} = \begin{bmatrix} \frac{s_b}{2} \\ -w_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\overrightarrow{Ob_{3/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Với:

$$w_b = \frac{\sqrt{3}}{6} s_b \quad u_b = \frac{\sqrt{3}}{3} s_b$$

## 3.2. Phân tích động học

Từ sơ đồ động học ở Hình 3.1, ta có thể biểu diễn tọa độ của khâu chấp hành cuối (điểm  $P$ ) trong hệ tọa độ  $\{B\}$  gắn với tấm đế cố định như sau:

$$\overrightarrow{OB_{l/B}} + \overrightarrow{B_l A_{l/B}} + \overrightarrow{A_l P_{l/B}} = \overrightarrow{OP_{/B}} + [{}^B_P R] \cdot \overrightarrow{PP_{l/P}} = \overrightarrow{OP_{/B}} + \overrightarrow{PP_{l/P}} \quad (3.10)$$

Vì hướng của hệ tọa độ  $\{B\}$  và  $\{P\}$  là đồng nhất nên ma trận xoay  $[{}_P^B] = I_3$ . Ngoài ra, cấu trúc của robot là đối xứng với độ dài cạnh các hình bình hành  $l$ , ta có thể viết lại:

$$l = \left\| \overrightarrow{A_l P_{l/B}} \right\| = \left\| \overrightarrow{OP_{l/B}} + \overrightarrow{PP_{l/P}} - \overrightarrow{OB_{l/B}} - \overrightarrow{B_l A_{l/B}} \right\| \quad (3.11)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán, ta bình phương hai vế của phương trình (3.11). Việc này giúp ta tránh được phép tính căn bậc hai khi tính độ dài của véctơ  $\overrightarrow{A_l P_{l/B}}$ :

$$l^2 = \left\| \overrightarrow{A_l P_{l/B}} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{OP_{l/B}} + \overrightarrow{PP_{l/P}} - \overrightarrow{OB_{l/B}} - \overrightarrow{B_l A_{l/B}} \right\|^2 \quad (3.12)$$

Nhắc lại, biến thể hiện vị trí của khâu chấp hành cuối P trong hệ tọa độ Descartes  $\{B\}$  đang xem xét là  $\overrightarrow{OP_{l/B}} = [x \ y \ z]^T$ . Các véctơ vị trí của các điểm  $B_i$  và  $P_i$  được cho ở các phương trình từ (3.1) đến (3.6). Véctơ  $\overrightarrow{B_l A_{l/B}}$  phụ thuộc vào các biến khớp  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ , tức là:

$$\overrightarrow{B_l A_{l/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Thay các phương trình từ (3.1) đến (3.6), (3.13) vào phương trình (3.10) ta có:

$$\overrightarrow{A_1 P_{1/B}} = \begin{bmatrix} x - \frac{s_p}{2} + \frac{s_b}{2} - 0 \\ y - w_p + W_b - 0 \\ z + 0 - 0 + L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + L_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\overrightarrow{A_2 P_{2/B}} = \begin{bmatrix} x + \frac{s_p}{2} - \frac{s_b}{2} - 0 \\ y - w_p + W_b - 0 \\ z + 0 - 0 + L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - a \\ y + b \\ z + L_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\overrightarrow{A_3 P_{3/B}} = \begin{bmatrix} x + 0 - 0 - 0 \\ y + u_p - U_b - 0 \\ z + 0 - 0 + L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + c \\ z + L_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Với:

$$a = -\frac{s_p}{2} + \frac{s_b}{2} \quad b = -w_p + W_b \quad c = u_p - U_b$$

Từ các phương trình (3.12), (3.14), (3.15), (3.16), ta có:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + L_1)^2 = l^2 \quad (3.17)$$

$$(x - a)^2 + (y + b)^2 + (z + L_2)^2 = l^2 \quad (3.18)$$

$$x^2 + (y + c)^2 + (z + L_3)^2 = l^2 \quad (3.19)$$

Ta có **hệ phương trình động học robot delta kiểu ba khớp trượt**:

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by + 2zL_1 + L_1^2 - l^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by + 2zL_2 + L_2^2 - l^2 = 0 \quad (3.21)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy + 2zL_3 + L_3^2 - l^2 = 0 \quad (3.22)$$

### 3.2.1. Nghiệm bài toán động học ngược

Bài toán động học ngược của robot delta kiểu ba khớp trượt được phát biểu: Biết tọa độ của khâu chấp hành cuối  $\overrightarrow{OP_{/B}} = [x \ y \ z]^T$ , xác định giá trị của các biến khớp  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ . Nghiệm bài toán động học ngược của robot delta kiểu ba khớp trượt đơn giản hơn nhiều so với của robot delta kiểu quay và có thể giải được bằng phương pháp giải tích. Nhìn vào sơ đồ động học ở Hình 3.1, bài toán động học ngược có thể được giải một cách độc lập cho mỗi cánh tay PUU. Ta có thể tìm được biến khớp  $L_i$  cho từng khớp trượt  $A_i$  một cách riêng rẽ. Về mặt hình học, mỗi biến khớp của mỗi khớp trượt có thể xem (*một cách gần đúng*) là giao điểm của thanh trượt và một mặt cầu  $(P_i, l)$ . Ta cũng có thể giải bài toán động học ngược bằng phương pháp lượng giác.

Tuy nhiên, trước mắt ta cần tìm nghiệm giải tích của nó. Các phương trình động học (3.20), (3.21), (3.22) có thể được viết lại dưới dạng:

$$L_i^2 + 2zL_i + C_i = 0 \quad (3.23)$$

Với:

$$\begin{aligned} C_1 &= x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + 2ax + 2by - l^2 \\ C_2 &= x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2ax + 2by - l^2 \\ C_3 &= x^2 + y^2 + z^2 + c^2 + 2cy - l^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Như vậy chúng ta có 3 phương trình bậc hai (dạng  $A_iL_i^2 + B_iL_i + C_i = 0$ ) để xác định giá trị của biến khớp  $L_i$  cho mỗi cánh tay một cách độc lập, với  $A_i = 1$ ,  $B_i = 2z$  và  $C_i$  được cho ở trên. Nói một cách đơn giản, vì mỗi phương trình có thể có tối đa hai nghiệm (tương ứng với mỗi cánh tay ở trên hay ở dưới so với mặt phẳng chứa tấm đế di động):

$$L_i = -z \pm \sqrt{z^2 - C_i} \quad (3.25)$$

Điều này dẫn đến bài toán động học ngược có thể có tối đa tám nghiệm khả dĩ. Tuy vậy, trên thực tế, các nghiệm tương ứng với tất cả các cánh tay PUU ở phía trên so với mặt phẳng chứa tấm đế di động sẽ được chọn.

Khi  $z^2 < C_i$ , nghiệm  $L_i$  là nghiệm ảo. Trường hợp này không bao giờ xảy ra bởi vì trên lý thuyết thì thanh trượt có thể dài vô hạn, tuy nhiên, trên thực tế thì mỗi thanh trượt đều có giới hạn của nó. Khi  $z^2 = C_i$ , hai nhánh nghiệm (tương ứng với hai trường hợp các cánh tay ở trên và các cánh tay ở dưới) là giống nhau.

Trong bài toán động ngược này, khâu chấp hành cuối đặt ở tâm của tấm để di động. Tuy vậy, trong rất nhiều máy in 3D, khâu chấp hành cuối (đầu in – Nozzle) vẫn nằm ở trong mặt phẳng tấm để di động, nhưng không phải là tâm. Lúc đó ta phải thêm một ma trận thể hiện sự tịnh tiến từ tâm đến điểm đặt đầu in (kí hiệu là  $N$ ):

$$[{}^B_P T] = [{}^B_N T][{}^P_N T^{-1}] \quad (3.26)$$

Với:

$$[{}^P_N T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_N \\ 0 & 1 & 0 & y_N \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [{}^P_N T^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_N \\ 0 & 1 & 0 & -y_N \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Đây là một phép tịnh tiến đơn giản bởi vì robot delta kiểu ba khớp trượt chỉ có các chuyển động tịnh tiến, với  $[{}^B_P R] = [{}^B_N R] = [I_3]$ . Để tiết kiệm thời gian tính toán, ta chỉ cần các tọa độ  $x_N$  và  $y_N$  một cách lần lượt vào các thành phần x và y của tọa độ khâu chấp hành cuối để tìm nghiệm bài toán động học ngược. Thành phần theo trục z là không đổi.

### 3.2.2. Nghiệm bài toán động học thuận

Bài toán động học thuận của robot delta kiểu ba khớp trượt được phát biểu: Biết giá trị của các biến khớp  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ , xác định tọa độ của khâu chấp hành cuối  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \ y \ z]^T$ . Bài toán động học thuận cho robot song song nói chung rất khó để giải, vì chúng ta cần phải tìm nghiệm của hệ ba phương trình đại số phi tuyến (3.20), (3.21), (3.22). Hệ này cho ta nhiều nghiệm hợp lệ.

- **Phương pháp hình học:**

Với  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$  đã biết, ta có thể xác định được tọa độ của ba khớp trượt  $A_i$  trong hệ tọa độ  $\{B\}$  theo công thức  $\overrightarrow{OA_{i/B}} = \overrightarrow{OB_{i/B}} + \overrightarrow{BA_{i/B}}$  với  $i = 1, 2, 3$ :

$$\overrightarrow{OA_{1/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{S_B}{2} \\ -W_B \\ -L_1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\overrightarrow{OA_{2/B}} = \begin{bmatrix} \frac{S_B}{2} \\ -W_B \\ -L_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\overrightarrow{OA_{3/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_B \\ -L_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

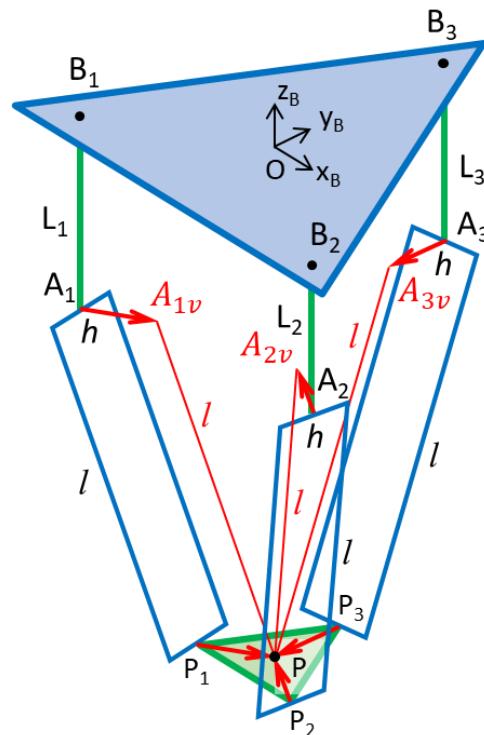
Từ giản đồ động học thuận robot ở Hình 3.2 và biết rằng hướng của tám đế di động là không đổi (luôn luôn nằm ngang) với  $[{}_P^B R] = I_3$ , ta có thể định nghĩa ba tâm mặt cầu ảo  $\overrightarrow{OA_{iv/B}} = \overrightarrow{OA_{i/B}} - \overrightarrow{PP_{i/P}}$  với  $i = 1, 2, 3$ :

$$\overrightarrow{OA_{1v/B}} = \begin{bmatrix} -\frac{S_B}{2} + \frac{s_P}{2} \\ -W_B + w_P \\ -L_1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\overrightarrow{OA_{2v/B}} = \begin{bmatrix} \frac{S_B}{2} - \frac{s_P}{2} \\ -W_B + w_P \\ -L_2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\overrightarrow{OA_{3v/B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_B - u_P \\ -L_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Do đó, nghiệm của bài toán động học thuận (điểm  $P$ ) là giao điểm của ba mặt cầu  $(A_{1v}, l)$ ,  $(A_{2v}, l)$  và  $(A_{3v}, l)$ .



Hình 3.2. Sơ đồ động học thuận của robot delta kiểu ba khớp trượt

[Phụ lục A](#) trình bày nghiệm giải tích của giao điểm ba mặt cầu định nghĩa ở trên. Để có được nghiệm này ta cần giải hệ các phương trình siêu việt liên kết với nhau. Phụ lục trình bày các phương trình và phương pháp giải tích, sau đó bàn luận đến các nghiệm ảo, suy biến và đa nghiệm gây cản trở thuật toán.

Đặc biệt, với thuật toán tìm giao điểm của ba mặt cầu trình bày ở [Phụ lục A](#), nếu tâm  $A_{iv}$  của tất cả các mặt cầu có cùng độ cao z (trường hợp thường gặp đối với robot delta) thì sẽ có một suy biến cản trở cách giải này (chia cho 0). Để giải quyết vấn đề này, ta chỉ cần xoay hệ trục tọa độ để các giá trị z của các tâm  $A_{iv}$  không còn bằng nhau nữa. Sau khi giải được nghiệm của bài toán, ta lại xoay ngược hệ trục tọa độ này về vị trí ban đầu.

Có một cách giải khác (được trình bày ở [Phụ lục B](#)) với giả thiết là độ cao tâm  $A_{iv}$  của tất cả các mặt cầu là bằng nhau, thay cho cách giải đầu tiên khi cần thiết.

Một vấn đề khác có thể gặp phải là giao điểm của ba mặt cầu sẽ cho hai nghiệm – một nghiệm nằm trên và một nghiệm nằm dưới tấm đế cố định (ngoài ra, chỉ có một nghiệm nếu các mặt cầu tiếp xúc với nhau, và không có nghiệm nếu khoảng cách giữa tâm các mặt cầu lớn hơn bán kính  $l$  – trong trường hợp sau tương ứng với nghiệm ảo và các giá trị đầu vào  $L_1, L_2, L_3$  không hợp lý với cách lắp ráp robot delta). Thuật toán tìm giao điểm sẽ tính toán ra cả hai nghiệm và ta có thể cho máy tính tự chọn luôn nghiệm đúng bằng cách ràng buộc thêm một điều kiện: nghiệm đó luôn nằm dưới tấm đế cố định.

Nghiệm của bài toán động học thuận là tọa độ của tâm tấm đế di động. Khi điểm cần điều khiển (khâu chấp hành cuối) vẫn nằm trên tấm đế di động nhưng không đặt ở tâm (trong rất nhiều máy in 3D), ta phải thêm một ma trận thể hiện sự tịnh tiến từ tâm đến điểm đặt khâu chấp hành cuối sau khi có nghiệm của bài toán động học thuận:

$$[\begin{smallmatrix} B \\ N \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} B \\ P \end{smallmatrix}][\begin{smallmatrix} P \\ N \end{smallmatrix}] \quad (3.33)$$

Trong đó  $[\begin{smallmatrix} P \\ N \end{smallmatrix}]$  được cho ở bài toán động học ngược. Đây là một phép tịnh tiến đơn giản bởi vì robot delta kiểu ba khớp trượt chỉ có các chuyển động tịnh tiến, với  $[\begin{smallmatrix} B \\ P \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} B \\ N \end{smallmatrix}] = [I_3]$ . Để tiết kiệm thời gian tính toán, ta chỉ cần các tọa độ  $x_N$  và  $y_N$  một cách lần lượt vào các thành phần x và y của nghiệm bài toán động học thuận với khâu chấp hành cuối đặt ở tâm tấm đế di động. Thành phần theo trục z là không đổi.

- **Phương pháp giải tích:**

Phương pháp xác định giao điểm của ba mặt cầu của bài toán động học thuận cho robot delta kiểu ba khớp trượt cho ta kết quả giống với nghiệm của hệ ba phương trình của tọa độ của khâu chấp hành cuối  $\overrightarrow{OP}_{/B} = [x \ y \ z]^T$  khi biết giá trị của các biến khớp  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ . Do hệ ba phương trình ràng buộc của robot delta kiểu ba khớp trượt đơn giản hơn nhiều so với robot delta kiểu ba khớp quay nên ta có thể giải phương trình động học thuận bằng phương pháp giải tích.

Lấy phương trình (3.21) trừ đi phương trình (3.20), ta có một phương trình tuyến tính. Ta có thể biểu diễn x theo hàm của z:

$$x = f(z) = dz + e \quad (3.34)$$

Với:

$$d = \frac{L_2 - L_1}{2a} \quad e = \frac{L_2^2 - L_1^2}{4a}$$

Lấy phương trình (3.22) trừ đi phương trình (3.21) và thay  $x = f(z)$  ở (3.34), ta có một phương trình tuyến tính khác. Ta có thể biểu diễn  $y$  theo hàm của  $z$ :

$$y = g(z) = Dz + E \quad (3.35)$$

Với:

$$D = \frac{L_3 - L_1 - ad}{b - c} \quad E = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - 2ae + L_3^2 - L_1^2}{2(b - c)}$$

Thay  $x = f(z)$  và  $y = g(z)$  vào phương trình (3.22), ta có phương trình bậc hai một ẩn  $z$ :

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (3.36)$$

Với:

$$\begin{aligned} A &= d^2 + D^2 + 1 \\ B &= 2(de + DE + cD + L_3) \\ C &= e^2 + E^2 + c^2 + 2cE + L_3^2 - l^2 \end{aligned}$$

Từ đó, ta có nghiệm giải tích của bài toán động học ngược là:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ x_{1,2} &= f(z_{1,2}) = dz_{1,2} + e \\ y_{1,2} &= g(z_{1,2}) = Dz_{1,2} + E \end{aligned} \quad (3.37)$$

Như vậy, ta có hai nghiệm khả dĩ  $(x_1, y_1, z_1)$  và  $(x_2, y_2, z_2)$ . Thông thường, chỉ một nghiệm được chọn, đó là nghiệm nằm dưới tấm đế cố định.

### 3.2.3. Phương trình vận tốc động học

Ta có thể suy ra hệ phương trình vận tốc động học của robot delta kiểu ba khớp trượt bằng cách lấy đạo hàm của hệ phương trình động học được biểu diễn ở (3.20), (3.21) và (3.22):

$$(x + a)\dot{x} + (y + b)\dot{y} + (z + L_1)\dot{z} = -(z + L_1)\dot{L}_1 \quad (3.38)$$

$$(x - a)\dot{x} + (y + b)\dot{y} + (z + L_2)\dot{z} = -(z + L_2)\dot{L}_2$$

$$x\dot{x} + (y + c)\dot{y} + (z + L_3)\dot{z} = -(z + L_2)\dot{L}_3$$

Ta có thể viết lại dưới dạng ma trận:

$$A \cdot \dot{X} = B \cdot \dot{L} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} x + a & y + b & z + L_1 \\ x - a & y + b & z + L_2 \\ x & y + c & z + L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z + L_1 & 0 & 0 \\ 0 & z + L_2 & 0 \\ 0 & 0 & z + L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Ta có nghiệm vận tốc thuận (vận tốc của khâu chấp hành cuối):

$$\dot{X} = A^{-1} \cdot B \cdot \dot{L} \quad (3.41)$$

Và nghiệm vận tốc ngược (vận tốc của các con trượt  $A_i$ ):

$$\dot{L} = B^{-1} \cdot A \cdot \dot{X} \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x + a}{z + L_1} & \frac{y + b}{z + L_1} & 1 \\ \frac{x - a}{z + L_2} & \frac{y + b}{z + L_2} & 1 \\ \frac{x}{z + L_3} & \frac{y + c}{z + L_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Với  $J$  là ma trận Jacobi của robot delta kiểu ba khớp trượt:

$$J = - \begin{bmatrix} \frac{x + a}{z + L_1} & \frac{y + b}{z + L_1} & 1 \\ \frac{x - a}{z + L_2} & \frac{y + b}{z + L_2} & 1 \\ \frac{x}{z + L_3} & \frac{y + c}{z + L_3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

### 3.3. Phân tích động lực học

Fsausniks

### 3.4. Vùng làm việc

Tương tự kiểu ba khớp quay, vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp trượt là giao điểm của ba vùng làm việc của ba cánh tay PUU riêng rẽ. Ở phần này, vùng làm việc nội tiếp lớn nhất và một số ví dụ về hình dạng của nó cũng sẽ được trình bày.

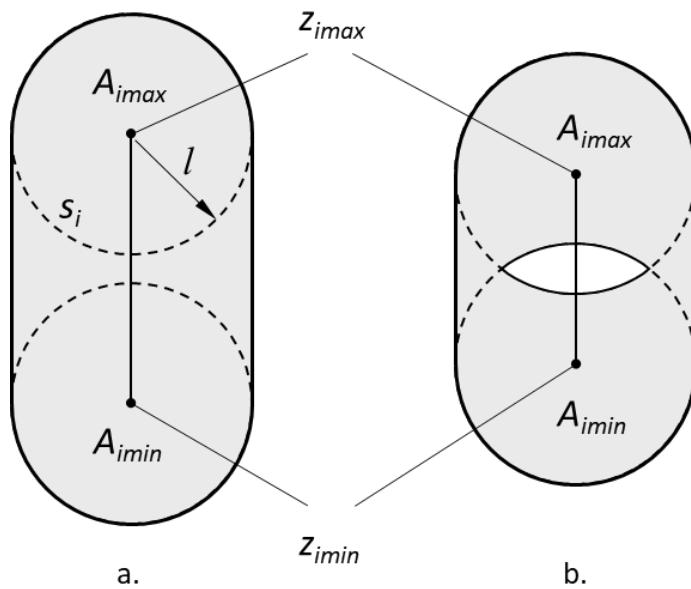
#### 3.4.1. Vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU

Ta dễ dàng thấy rằng, trên lý thuyết, vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU là vùng bao của một mặt cầu  $s_i(A_i, l)$  có tâm  $A_i$  trượt trên một đoạn thẳng giới hạn bởi hai điểm  $A_{imin}$  và  $A_{imax}$  (Hình 3.3). Tọa độ các điểm  $A_i$ :  $\overrightarrow{OA_{i/B}} = [x_i \ y_i \ z_{ij}]^T$  đã được xác định tại các phương trình (3.27), (3.28) và (3.29) với  $z_{ij} \in [z_{imin}, z_{imax}]$ , trong đó  $[z_{imin}, z_{imax}]$  là khoảng hoạt động của mỗi khớp trượt  $A_i$ .

Vùng bao này được mô tả như sau:

- Nếu  $|z_{imin} - z_{imax}| \geq 2l$ , vùng bao gồm có hai mặt cầu  $(A_{imin}, l)$ ,  $(A_{imax}, l)$  và một hình trụ bán kính  $l$  chiều cao  $|z_{imin} - z_{imax}|$  (Hình 3.3a). Không có vùng trống nào bên trong vùng làm việc.
- Nếu  $|z_{imin} - z_{imax}| < 2l$ , có một vùng trống bên trong vùng làm việc (Hình 3.3b). Vùng trống này là giao của hai mặt cầu  $(A_{imin}, l)$ :  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_{imin})^2 = l^2$  và  $(A_{imax}, l)$ :  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_{imax})^2 = l^2$

Như vậy, vùng làm việc của robot delta là giao điểm của ba vùng bao được định nghĩa ở trên.



Hình 3.3. Vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU

#### 3.4.2. Đặc điểm của vùng làm việc của mỗi cánh tay PUU

Phương trình của mỗi mặt cầu  $(A_i, l)$  có thể được viết lại như sau:

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = l^2 - (z - z_i)^2 \quad (3.45)$$

Điều đó có nghĩa rằng, đối với mỗi cánh tay PUU, mặt cắt ngang thứ  $j$  tại  $z$  của vùng làm việc là hình tròn có tâm là điểm  $(x_i, y_i)$  và bán kính:

$$r_{ij} = \sqrt{l^2 - (z - z_{ij})^2} \text{ với } z_{ij} \in [z_{imin}, z_{imax}] \quad (3.46)$$

Để phương trình (3.46) luôn có nghiệm thực thì, đối với một giá trị  $z$  cho trước, có ít nhất một giá trị  $z_{ij} \in [z_{imin}, z_{imax}]$  thỏa mãn điều kiện:

$$|z - z_{ij}| < l \quad (3.47)$$

Điều kiện để bên trong vùng làm việc của mỗi cánh tay không có vùng trống là, đối với một giá trị  $z$  cho trước, có một giá trị  $z_{ij} \in [z_{imin}, z_{imax}]$  thỏa mãn điều kiện:

$$|z - z_{ij}| = l \quad (3.48)$$

Nếu thỏa mãn điều kiện trên thì mặt cắt ngang của vùng làm việc tại điểm  $z$  đó có hình tròn, còn nếu không, thì nó có hình vành khăn. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của bán kính mặt cắt ngang vùng làm việc tại  $z$  có thể được biểu diễn như sau:

$$r_{imax} = \max(r_{ij}) \quad r_{imin} = \min(r_{ij}) \quad (3.49)$$

Đặt  $r_{max} = r_{imax}$  và  $r_{min} = r_{imin}$  với ( $i = 1, 2, 3$ ). Dọc theo trục  $z$ , ta có giới hạn trên và dưới của vùng làm việc của mỗi cánh tay:

$$z_{max} = z_{imax} + l \quad z_{min} = z_{imin} - l \quad (3.50)$$

Từ (3.46) và Hình 3.4, ta có bán kính lớn nhất:

$$r_{max} = \begin{cases} l & \text{nếu } z \in [z_{imin}, z_{imax}] \\ \sqrt{l^2 - (z - z_{imax})^2} & \text{nếu } z > z_{imax} \\ \sqrt{l^2 - (z - z_{imin})^2} & \text{nếu } z < z_{imin} \end{cases} \quad (3.51)$$

Nếu  $|z_{imin} - z_{imax}| \geq 2l$ , ta có bán kính nhỏ nhất:

$$r_{min} = 0 \quad (3.52)$$

Nếu  $|z_{imin} - z_{imax}| < 2l$ , ta có bán kính nhỏ nhất:

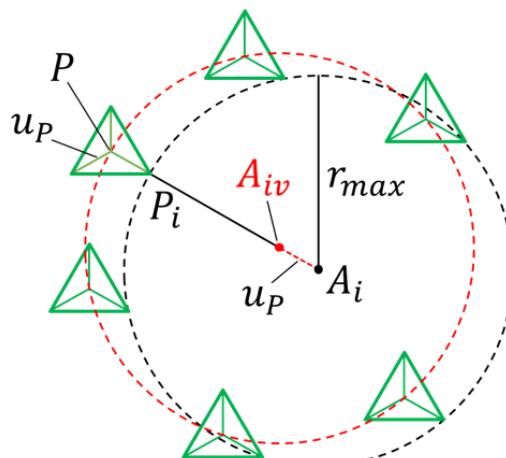
$$r_{min} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z \geq l + z_{imin} \text{ hoặc } z \leq z_{imax} - l \\ \sqrt{l^2 - (z - z_{imin})^2} & \text{nếu } z \in \left[ \frac{z_{imin} + z_{imax}}{2}, z_{imin} + l \right) \\ \sqrt{l^2 - (z - z_{imax})^2} & \text{nếu } z \in \left( z_{imax} - l, \frac{z_{imin} + z_{imax}}{2} \right) \end{cases} \quad (3.53)$$

a. Trường hợp  $z > z_{imax}$ b. Trường hợp  $z < z_{imin}$ 

Hình 3.4. Bán kính lớn nhất

### 3.4.3. Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất

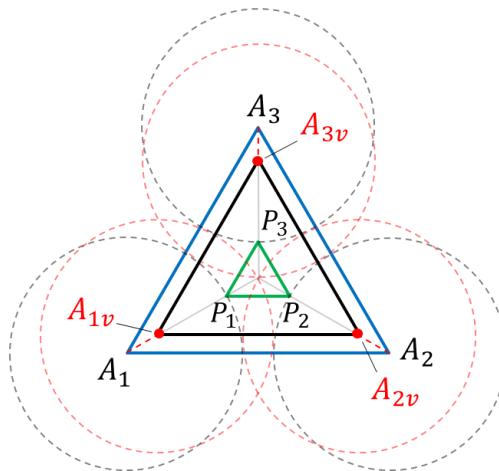
Tấm đế di động được xem là một vật rắn, chỉ có các chuyển động tịnh tiến theo các trục x, y, z. Xét riêng rẽ một khớp trượt  $A_i$ . Tại mặt cắt ngang chứa tấm đế di động, theo lý thuyết, nếu các điểm  $P_i$  chạy trên một hình tròn  $(A_i, r_{max})$  thì tâm  $P$  của tấm đế di động sẽ chạy trên một hình tròn  $(A_{iv}, r_{max})$  với tâm  $A_{iv}$  cách tâm  $A_i$  một khoảng cách  $u_P = P_i P$  theo hướng của véctơ  $\vec{P_i P}$  (xem Hình 3.5).



Hình 3.5. Chuyển động của tấm đế di động

Khi xét cho cả ba khớp trượt  $A_i$ . Tại mặt cắt ngang bất kì vuông góc trục z, tâm  $P$  của tấm đế di động hay nói cách khác tâm  $P$  của mặt cắt vùng làm việc của robot delta sẽ nằm trong vùng giao của ba hình tròn  $(A_{iv}, r_{max})$ . Hình 3.5 và Hình 3.6 cùng mô tả trường hợp đặc biệt - ba hình tròn  $(A_{iv}, r_{max})$  giao nhau tại điểm  $P$  - tâm của tấm đế di động. Trường hợp này tương ứng với véctơ  $\vec{A_i P_i}$  cùng phương với véctơ  $\vec{P_i P}$ . Lúc này,  $r_{max} = U_B - u_P$  với  $U_B = OB_i = A_i P_i + P_i P$ .

Việc lý luận ở trên tương tự như lý luận ở phần 3.2.2 và Hình 3.2. Ở đây ta trình bày rõ hơn để thuận lợi cho việc phân tích ở phần tiếp theo.



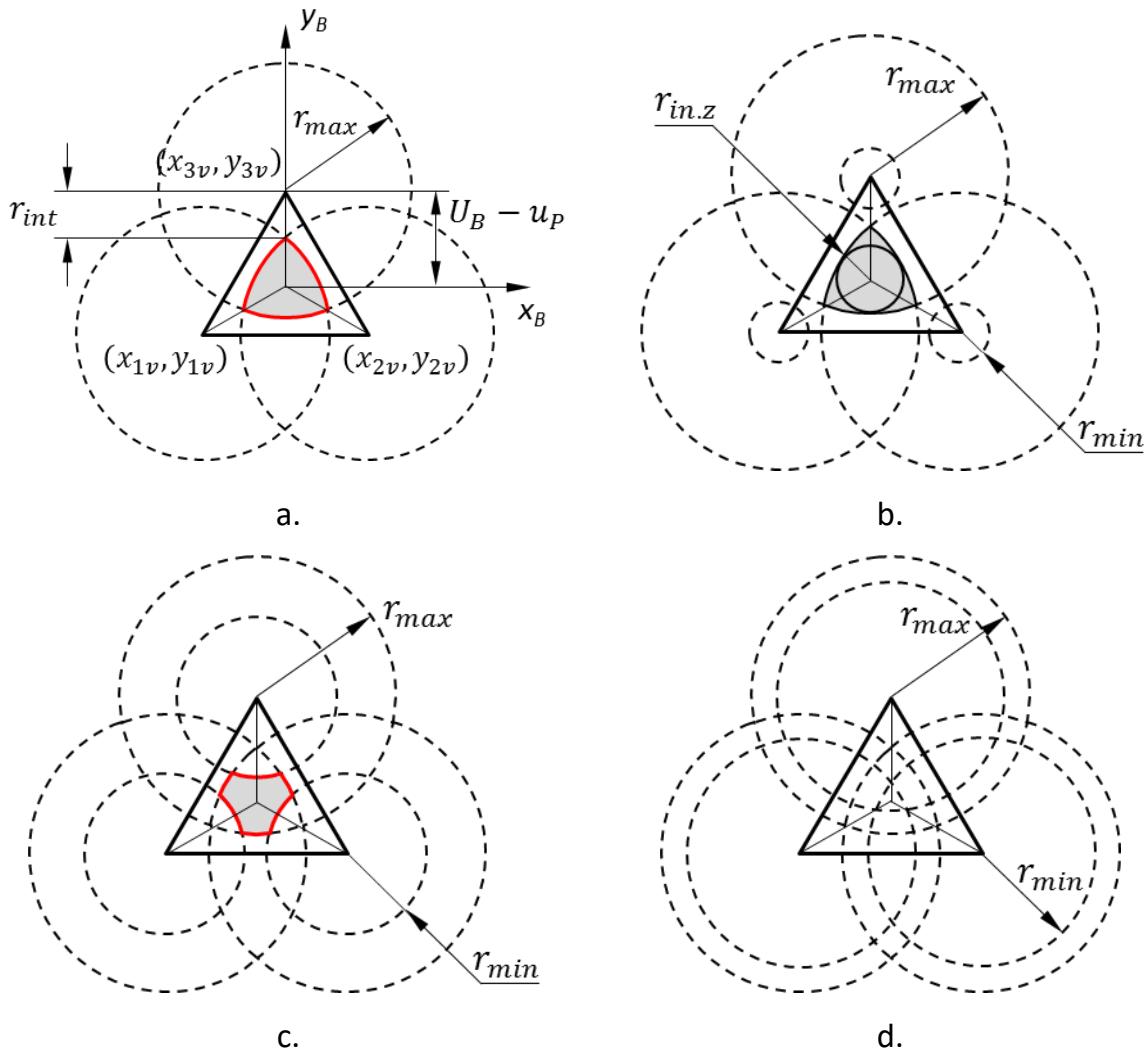
Hình 3.6. Mặt cắt vùng làm việc của robot delta khi  $r_{max} = U_B - u_P$

Khi  $r_{max} \geq U_B - u_P$ , có hai giao điểm giữa hai hình tròn  $(A_{1v}(x_{1v}, y_{1v}), r_{max})$  và  $(A_{2v}(x_{2v}, y_{2v}), r_{max})$ . Khoảng cách bé nhất giữa hai giao điểm này với điểm  $A_{3v}(x_{3v}, y_{3v})$  kí hiệu là  $r_{int}$  như Hình 3.7a, với:

$$r_{int} = y_{3v} - \sqrt{r_{max}^2 - x_{1v}^2 - y_{1v}^2} \quad (3.54)$$

Như đã phân tích ở phần 3.4.2, mặt cắt vùng làm việc của robot delta là giao của ba hình tròn hoặc hình vành khăn giống y hệt nhau. Ta có thể phân loại các trường hợp như sau:

- Khi  $r_{max} \geq U_B - u_P$  và  $r_{min} = 0$ , mặt cắt vùng làm việc là giao của ba hình tròn. Đường bao của mặt cắt vùng làm việc gồm ba cung tròn như ở Hình 3.7a. Nếu mặt cắt vùng làm việc là một điểm (khi này  $r_{max} = U_B - u_P$ ), từ phương trình (3.51), ta có  $z = \pm\sqrt{l^2 - (U_B - u_P)^2} + z_{imax}$  và  $z = \pm\sqrt{l^2 - (U_B - u_P)^2} + z_{imin}$  là giới hạn trên và giới hạn dưới của vùng làm việc của robot theo trục z.
- Khi  $r_{max} \geq U_B - u_P$  và  $r_{min} < r_{int}$ , mặt cắt vùng làm việc là giao của ba hình vành khăn. Đường bao của mặt cắt vùng làm việc gồm ba cung tròn như ở Hình 3.7.
- Khi  $r_{max} \geq U_B - u_P$  và  $r_{int} \leq r_{min} \leq U_B - u_P$ , mặt cắt vùng làm việc vẫn là giao của ba hình vành khăn, tuy nhiên đường bao gồm sáu cung tròn như ở Hình 3.7c.
- Khi  $r_{max} \geq r_{min} \geq U_B - u_P$ , giao của ba hình vành khăn là tập rỗng như ở Hình 3.7d.
- Khi  $0 < r_{max} < U_B - u_P$ , ba hình tròn không có giao điểm.



Hình 3.7. Phân loại mặt cắt vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp trượt

Theo sự phân loại trên, nếu mặt cắt vùng làm việc không rỗng thì đường bao của nó gồm ba hoặc sáu cung tròn. Ta thấy rằng luôn luôn tồn tại một hình tròn nội tiếp lớn nhất trong đường bao của mặt cắt vùng làm việc như ở Hình 3.7b. Ta có bán kính của hình tròn nội tiếp, kí hiệu  $r_{in.z}$ :

- $r_{in.z} = r_{max} - (U_B - u_P)$  nếu đường bao của mặt cắt vùng làm việc gồm ba cung tròn.
- $r_{in.z} = \min[(U_B - u_P) - r_{min}, r_{max} - (U_B - u_P)]$  nếu đường bao của mặt cắt vùng làm việc bao gồm sáu cung tròn, ví dụ khi  $r_{max} \geq U_B - u_P$  và  $r_{int} \leq r_{min} \leq U_B - u_P$ .

Phương trình của hình tròn trong hệ tọa độ  $\{B\}$ :

$$x^2 + y^2 = r_{in.z}^2 \quad (3.55)$$

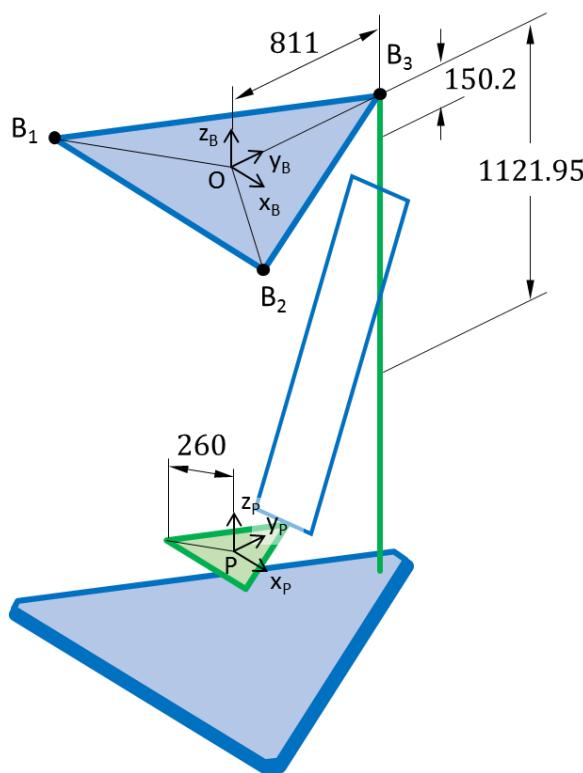
Hình tròn này nằm trong mặt phẳng song song và cách mặt phẳng Oxy một đoạn  $z$ . Bán kính  $r_{in.z}$  sẽ đạt giá trị lớn nhất  $r_{in.z} = l - (U_B - u_P)$  nếu  $z = z_{imax} - l$  hoặc

$z = z_{imin} + l$ . Tập hợp tất cả hình tròn nội tiếp lớn nhất trong mặt cắt vùng làm việc của robot delta được định nghĩa là *vùng làm việc nội tiếp lớn nhất*.

Trong quá trình thiết kế robot delta, nếu giá trị  $r_{in.z}$  thỏa mãn điều kiện của vùng làm việc mong muốn ở mặt cắt tương ứng thì robot đó là hoàn hảo. Khái niệm *vùng làm việc nội tiếp lớn nhất* rất hữu ích trong thiết kế robot nếu biết vùng làm việc mong muốn. Ta sẽ xem xét một ví dụ ở phần sau.

#### 3.4.4. Ví dụ về phân tích vùng làm việc

Dựa vào sự phân tích vùng làm việc đã đề cập ở trên, vùng làm việc và vùng làm việc nội tiếp lớn nhất có thể được vẽ ra dễ dàng bằng phần mềm CAD như AutoCAD hay SolidWorks. Ví dụ, robot delta kiểu ba khớp trượt với các thông số hình học được cho ở Hình 3.8 với  $U_B = 811$ ,  $u_P = 260$ ,  $z_{imax} = -150.2$ ,  $z_{imin} = -1121.95$  và  $l = 1000$ , tất cả đều không có thứ nguyên.



Hình 3.8. Các thông số hình học của ví dụ

$$U_B - u_P = 551 \quad (3.56)$$

Từ Hình 3.7a, ta có:

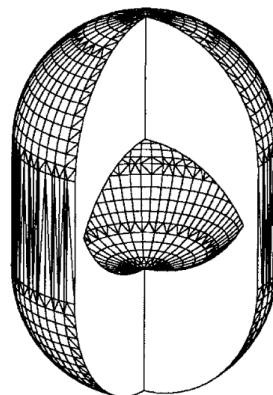
$$x_{1v} = -(U_B - u_P) \times \cos 30^\circ = -551 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.57)$$

$$x_{2v} = (U_B - u_P) \times \cos 30^\circ = 551 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.58)$$

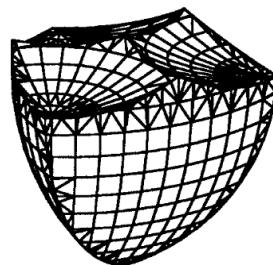
$$x_{3v} = 0 \quad (3.59)$$

$$y_{1v} = y_{2v} = -(U_B - u_P) \times \sin 30^\circ = -275.5 \quad (3.60)$$

$$y_{3v} = U_B - u_P = 551 \quad (3.61)$$



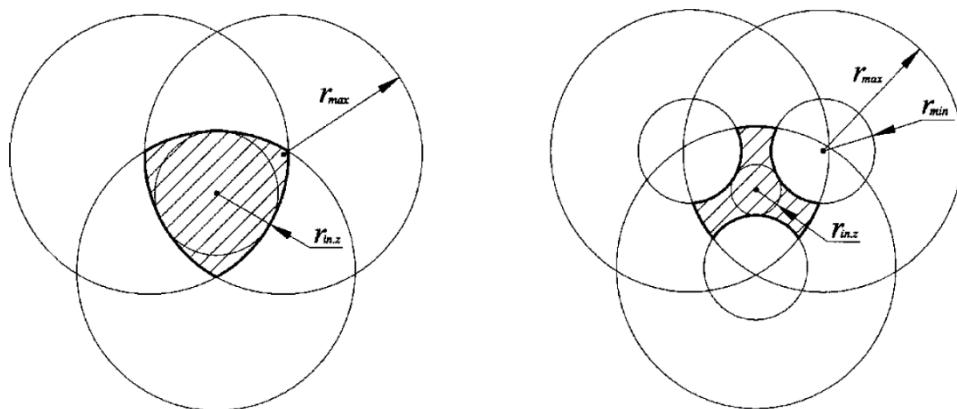
Hình 3.9. Vùng làm việc của một cánh tay



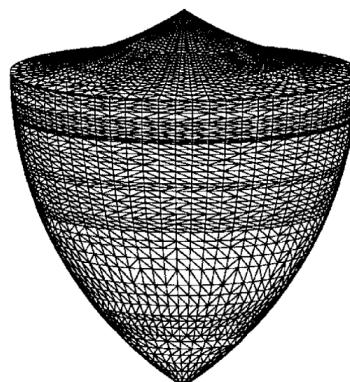
Hình 3.10. Vùng làm việc của robot delta

Vùng làm việc của robot có những đặc điểm sau:

- Ta có  $|z_{imin} - z_{imax}| = 971.75 < 2l$ , có một vùng trống bên trong vùng làm việc của một cánh tay. Vùng trống này là giao của hai mặt cầu ( $A_{imin}$ ,  $l$ ):  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + 150.2)^2 = 1000^2$  và ( $A_{imax}$ ,  $l$ ):  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + 1121.95)^2 = 1000^2$ .
- Vùng làm việc của một trong ba cánh tay được bao bởi  $z_{max} = z_{imax} + l = 849.8$  và  $z_{min} = z_{imin} - l = -2121.95$  dọc theo trục z và mặt cắt của vùng làm việc lý thuyết được biểu diễn ở Hình 3.9.
- Vùng làm việc của robot là giao của các vùng làm việc của ba cánh tay. Nửa dưới vùng làm việc của robot được biểu diễn ở Hình 3.10. Thể tích của vùng làm việc có thể tính toán bằng AutoCAD, 408419044.1447.
- **Xem kỹ phần tiếp theo, thay bằng trường hợp của mình... Phần này chỉ có thể kiểm chứng được nếu vẽ được thể tích bên dưới bằng phần mềm AutoCAD hoặc PTC CREO...**



Hình 3.11. Các mặt cắt vùng làm việc của robot

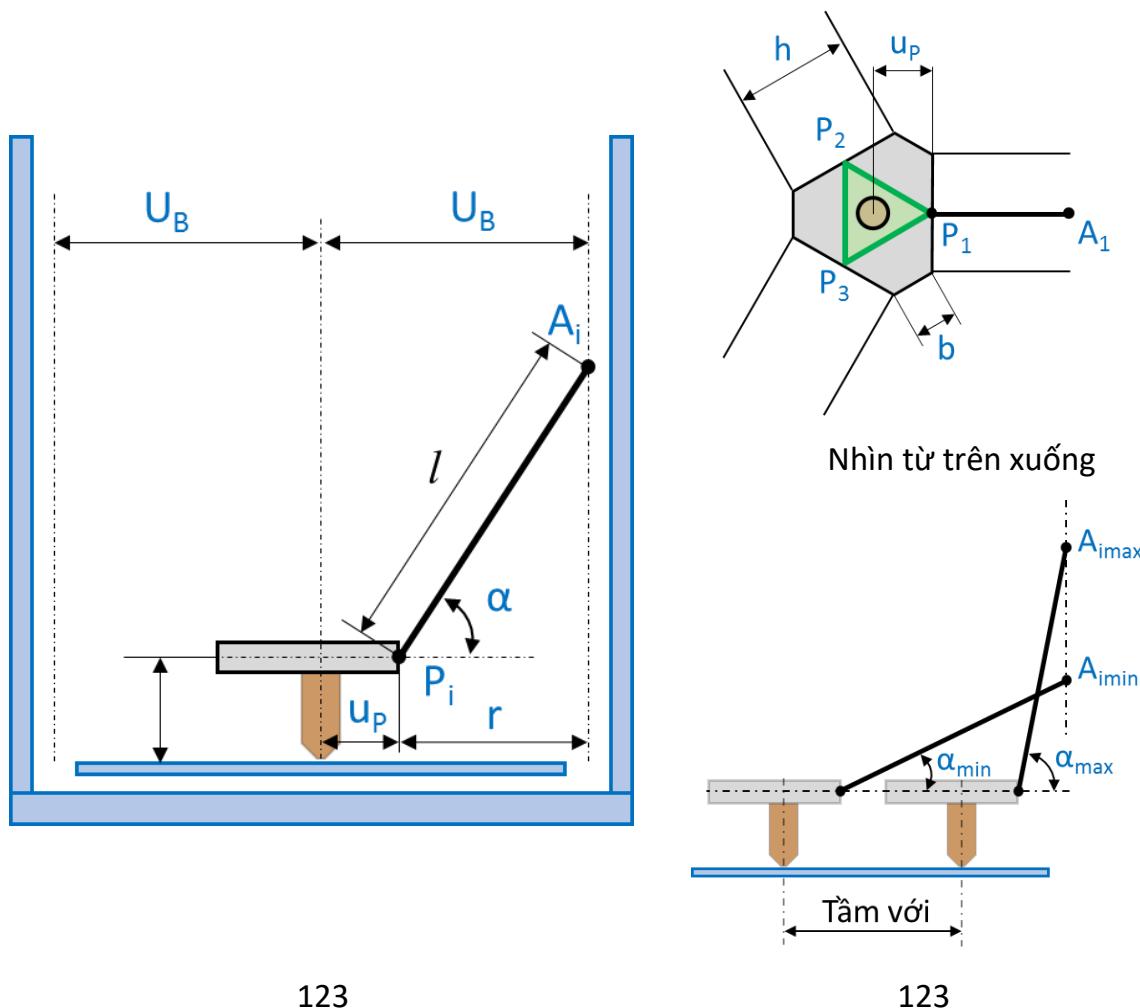


Hình 3.12. Vùng làm việc nội tiếp lớn nhất

### 3.5. Thiết kế robot với vùng làm việc mong muốn

#### 3.5.1. Mô tả phương pháp thiết kế

Thiết kế robot là xác định kích thước các khâu đối với các chỉ số khác nhau. Quá trình này khá phức tạp và phải xem xét nhiều thứ, như là vùng làm việc, **conditioning index**, sự suy biến (*singularity*), ứng dụng,... Phần này chỉ đề cập đến vùng làm việc mong muốn, dựa vào khái niệm vùng làm việc nội tiếp lớn nhất đã trình bày ở phần 3.4.3. Mục đích của quá trình này nhằm xác định các thông số  $U_B - u_p, l, z_{imax}, z_{imin}$ . Trong trường hợp của robot delta, đặc tính/hiệu quả (**performance**) liên quan đến  $U_B - u_p$  nhưng không phải chỉ có  $U_B$  cũng không phải chỉ có  $u_p$ . Điều này là bởi vì robot delta chỉ có các bậc tự do tịnh tiến đơn thuần (

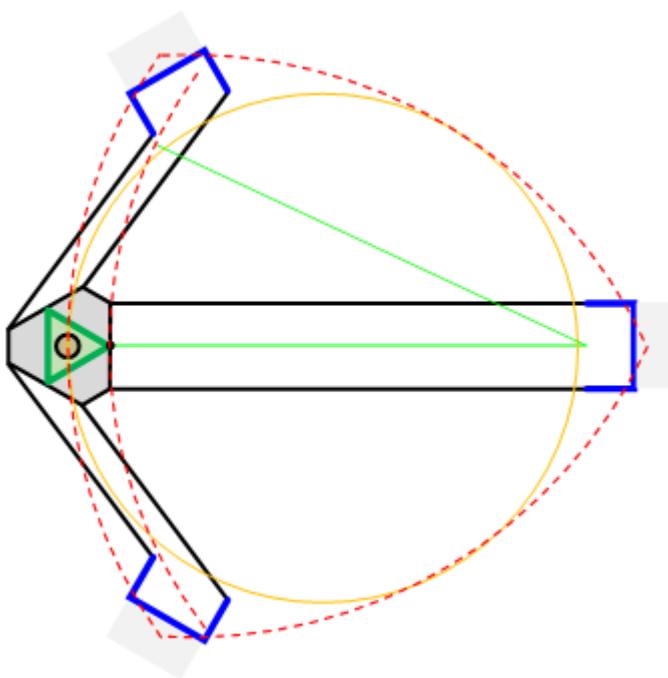


Hình .

Góc alpha cực tiểu tương ứng với bán kính  $r$  cực đại là một trong những thông số thiết kế cơ bản. Nó rất quan trọng cho sự ổn định của khâu chấp hành cuối, độ chính xác và tốc độ của khớp trượt  $A_i$ .

**A low angle induce high carriage speed for a given effector horizontal speed.** Góc alpha nhỏ cũng làm giảm độ ổn định của cơ cấu chấp hành cuối. Giá trị alpha bằng  $20^\circ$  được xem là giá trị cực tiểu thường gặp trong thực tế và nó cho ta tốc độ của khớp trượt  $A_i$  gấp 2.75 lần so với tốc độ theo phương nằm ngang của cơ cấu chấp hành cuối. **Some printers with theoretical minimum angle of  $15^\circ$  may experience lost steps at their maximum diameter.**

Khoảng cách h (**hình vẽ**) không ảnh hưởng đến việc tính toán các chuyển động, nhưng lại ảnh hưởng đến sự ổn định của khâu chấp hành cuối. Ta có được sự ổn định tốt nhất tương ứng với h cực đại, tức là b cực tiểu.



#### Vùng với tới được (Reachable area)

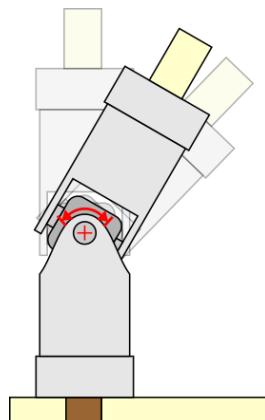
Đối với góc alpha cực tiểu, vùng với tới được là một tam giác với các cạnh lồi ra (màu đỏ) với các đỉnh hướng về phía các thanh trượt. Trên thực tế, cơ cấu chấp hành cuối hiển nhiên là không thể với tới được các đỉnh của tam giác lồi này vì sẽ đụng phải các thanh trượt. Do đó, để đơn giản hóa, vùng với tới được có thể coi như là hình tròn nội tiếp tam giác lồi đó (màu vàng).

**Đối với thiết kế robot delta, ta chọn sơ bộ đường kính vòng tròn màu vàng là  $d_{ra}$  = 50cm (ra : **reachable area**),  $\alpha_{min} = 20^\circ$ ,  $l \approx \frac{d_{ra}-u_p}{\cos \alpha_{min}}$**

## 4. Khớp cầu cho robot delta

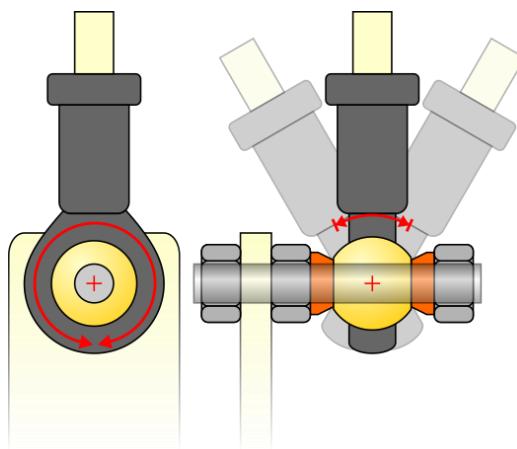
Độ chính xác dịch chuyển của robot delta phụ thuộc rất nhiều vào độ chính xác chế tạo của các khớp tịnh tiến cũng như khớp cầu. [Nguồn ở đâu ?](#)

### Khớp các đằng (Cardan joint)



Industrial Cardan

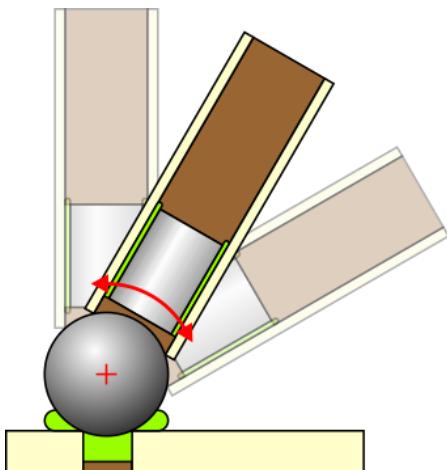
### Ổ cầu (Rod end bearing)



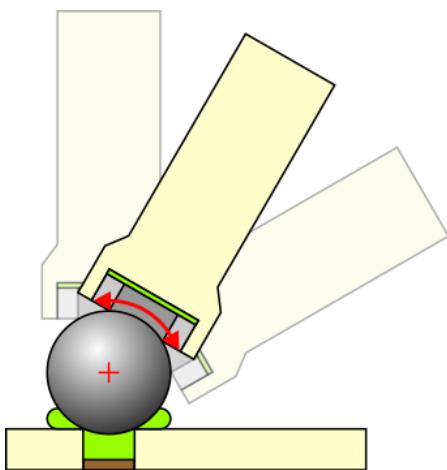
Rod End Bearing

Vấn đề của loại khớp cầu này là At rotation axis the joint is designed for endless rotation. But at the tilt axis the joint is limited by construction. As manufacturer documentation tilt is limited to  $\pm 30^\circ$  (Source: igus.com). To use the maximum (theoretical) reaching area as printing area a tilt angle of  $35\ldots 40^\circ$  is necessary. In result you can use only a limited printing area.

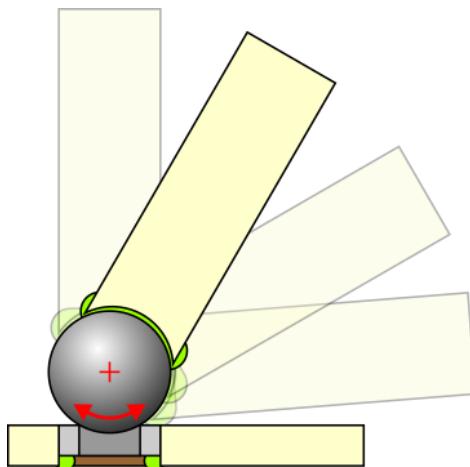
## Khớp cầu nam châm (Magnetic joint)



Magnet in Tube Variant



Moving Ring Magnet Variant



Fixed Ring Magnet Variant

Link khớp cầu

<https://micsolutions.wordpress.com/2015/11/15/upgraded-arms-and-bed-for-the-large-delta-printer/>

<http://www.banggood.com/Metal-Universal-Joint-For-RC-Cars-Boats-p-87379.html>

<https://groups.google.com/forum/#topic/firepick/I0-zFIMXLeM%5B1-25%5D>

<http://blog.lincomatic.com/?p=1540>

## Phụ lục A: Thuật toán tìm giao điểm ba mặt cầu

Bây giờ chúng ta sẽ tìm các nghiệm là giao điểm của ba mặt cầu. Cách giải này được áp dụng cho nhiều loại robot cáp treo (cable-suspended robot) và các loại robot song song khác đã được đăng trước đó. Giả thuyết có ba mặt cầu  $(\mathbf{c}_1, r_1)$ ,  $(\mathbf{c}_2, r_2)$ ,  $(\mathbf{c}_3, r_3)$ . Tâm xác định bằng các vectơ:  $\mathbf{c}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}^T$ ,  $\mathbf{c}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}^T$ , bán kính  $r_1, r_2, r_3$  đã biết (tọa độ vectơ các tâm phải được thể hiện trên cùng một hệ tọa độ, gốc  $\{0\}$ ; kết quả trên cùng một hệ tọa độ). Phương trình ba mặt cầu:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \quad (0.38)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2$$

Các phương trình trên đều là các phương trình phi tuyến với ba biến chưa biết  $x, y, z$ . Nghiệm bài toán sẽ xác định tọa độ của điểm giao nhau  $\mathbf{P} = \{x \ y \ z\}^T$ . Bằng cách khai triển các phương trình (0.38) sau đó kết hợp lại theo dạng  $x = f(y), z = f(y)$ ; sau đó thay thế các hàm này vào một trong những phương trình mặt cầu thuần túy ta được phương trình bậc 2 theo  $y$ , giải phương trình này được hai nghiệm. Sau đó lại sử dụng các phương trình  $x = f(y), z = f(y)$  để xác định các biến  $x, z$ .

Đầu tiên ta khai triển bậc hai về bên trái các phương trình (0.38). Sau đó trừ phương trình ba cho một, và ba cho hai ta được:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad (0.39)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad (0.40)$$

Với:

$$a_{11} = 2(x_3 - x_1) \quad a_{21} = 2(x_3 - x_2)$$

$$a_{12} = 2(y_3 - y_1) \quad a_{22} = 2(y_3 - y_2)$$

$$a_{13} = 2(z_3 - z_1) \quad a_{23} = 2(z_3 - z_2)$$

$$b_1 = r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

$$b_2 = r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

Tìm  $z$  từ (0.39), (0.40):

$$z = \frac{b_1}{a_{13}} - \frac{a_{11}}{a_{13}}x - \frac{a_{12}}{a_{13}}y \quad (0.41)$$

$$z = \frac{b_2}{a_{23}} - \frac{a_{21}}{a_{23}}x - \frac{a_{22}}{a_{23}}y \quad (0.42)$$

Trừ phương trình (0.41) cho (0.42) và đưa về phương trình  $x=f(y)$ :

$$x = f(y) = a_4y + a_5 \quad (0.43)$$

Với:

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_2}{a_1} \\ a_5 &= -\frac{a_3}{a_1} \\ a_1 &= \frac{a_{11}}{a_{13}} - \frac{a_{21}}{a_{23}} \\ a_2 &= \frac{a_{12}}{a_{13}} - \frac{a_{22}}{a_{23}} \\ a_3 &= \frac{b_2}{a_{23}} - \frac{b_1}{a_{13}} \end{aligned}$$

Thay phương trình (0.43) vào phương trình (0.42) đưa về phương trình  $z=f(y)$ :

$$z = f(y) = a_6y + a_7 \quad (0.44)$$

Với:

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{-a_{21}a_4 - a_{22}}{a_{23}} \\ a_7 &= \frac{b_2 - a_{21}a_5}{a_{23}} \end{aligned}$$

Thay phương trình (0.43) và (0.44) vào phương trình đầu tiên của hệ phương trình (0.38) ta được phương trình theo  $y$ :

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (0.45)$$

Với:

$$\begin{aligned} a &= a_4^2 + 1 + a_6^2 \\ b &= 2a_4(a_5 - x_1) - 2y_1 + 2a_6(a_7 - z_1) \\ c &= a_5(a_5 - 2x_1) + a_7(a_7 - 2z_1) + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 \end{aligned}$$

Giải phương trình này được hai nghiệm  $y$ :

$$y_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (0.46)$$

Thay hai giá trị của  $y$  là  $y_+$  và  $y_-$  vào các phương trình (0.43) và (0.44) ta tìm được  $x$  và  $z$ :

$$x_{\pm} = a_4 y_{\pm} + a_5 \quad (0.47)$$

$$z_{\pm} = a_6 y_{\pm} + a_7 \quad (0.48)$$

Thông thường có hai nghiệm, một nghiệm âm và một nghiệm dương. Hiển nhiên, các nghiệm tương ứng + và – không thể bị switched:

$$\{x_+ \quad y_+ \quad z_+\}^T \quad \{x_- \quad y_- \quad z_-\}^T \quad (0.49)$$

Nghiệm ảo:

Thuật toán tìm giao điểm ba mặt cầu có thể cho ra nhiều nghiệm ảo. Xuất hiện nghiệm ảo khi biểu thức  $b^2 - 4ac$  có giá trị âm; khi đó có hai nghiệm ảo  $y_{\pm}$ , điều này có nghĩa là không có giao điểm nào giữa ba mặt cầu. Nếu trường hợp này xuất hiện trong phần lập trình, sẽ có một góc tại khớp gây lỗi hoặc mô hình hóa lỗi, bởi vì phần lập trình nên đảm bảo robot có thể lắp ráp được.

Một trường hợp đặc biệt xuất hiện khi biểu thức  $b^2 - 4ac$  bằng 0. Khi đó, cả hai nghiệm suy biến thành một nghiệm đơn, có 2 mặt cầu sẽ tiếp xúc nhau tại một điểm, và mặt cầu thứ ba sẽ đi qua điểm này.

Điểm kỳ dị:

Trong toán học, các điểm kỳ dị xuất hiện khi chia cho 0, nhưng không gây cản trở cho phần lập trình (không làm mất hoặc tăng số bậc tự do). Mục này phân tích các điểm kỳ dị trong thuật toán tìm giao điểm của ba mặt cầu đã trình bày ở trước. Từ việc phân tích và giải để tìm ra  $y$ , sẽ xuất hiện một tập các điểm kỳ dị.

Xét thuật toán đã được giới thiệu từ các phương trình (0.38) đến (0.49), ta tìm được 4 điều kiện sinh ra các điểm kỳ dị từ các biểu thức chia cho 0:

Điều kiện xác định các điểm kỳ dị:

$$a_{13} = 0$$

$$a_{23} = 0 \quad (0.50)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_4^2 + 1 + a_6^2 = 0$$

Hai điều kiện đầu:

$$a_{13} = 2(z_3 - z_1) = 0 \quad (0.51)$$

$$a_{23} = 2(z_3 - z_2) = 0 \quad (0.52)$$

Trường hợp này tương ứng với tâm của ba mặt cầu có cùng độ cao z:  $z_1 = z_2 = z_3$ . Do đó, thông thường khi giao điểm của ba mặt cầu mà tâm có cùng độ cao z thì thường xuất hiện điểm kỳ dị. Một cách giải khác được giới thiệu ở phụ lục B có thể khắc phục vấn đề này.

Điều kiện thứ ba:

$$a_1 = \frac{a_{11}}{a_{13}} - \frac{a_{21}}{a_{23}} = 0 \quad (0.53)$$

Hay:

$$\frac{x_3 - x_1}{z_3 - z_1} = \frac{x_3 - x_2}{z_3 - z_2} \quad (0.54)$$

Điều kiện này được thỏa mãn khi tâm của ba mặt cầu cùng nằm trên một đường thẳng thuộc mặt phẳng XZ. Thông thường điều kiện thứ ba sinh ra các điểm kỳ dị nằm trên biên của vùng làm việc dùng được và như vậy sẽ không gây ra vấn đề gì đến việc thực thi của phần mềm nếu hệ thống được thiết kế tuân theo các giới hạn của vùng làm việc.

Điều kiện thứ 4:

$$a_4^2 + 1 + a_6^2 = 0$$

Hay:

$$a_4^2 + a_6^2 = -1$$

Điều kiện này không thể thỏa mãn nếu  $a_4$  và  $a_6$  là các số thực, do đó điều kiện thứ tư không ảnh hưởng đến việc thực thi của phần mềm.

Đa nghiệm:

Thuật toán tìm giao điểm của ba mặt cầu thông thường cho ra hai nghiệm đúng riêng biệt (tương ứng dấu  $\pm$ ). Thông thường chỉ một nghiệm phù hợp, được xác định phụ thuộc kết cấu của Robot Delta có thể lắp ráp được.

## Phụ lục B: Thuật toán tìm giao điểm ba mặt cầu

Giả thiết tâm của ba mặt cầu có cùng độ cao z và ba mặt cầu là  $(c_1, r_1), (c_2, r_2), (c_3, r_3)$ . Tọa độ các tâm được xác định bằng các véctơ:  $c_1 =$

$\{x_1, y_1, z_1\}^T$ ,  $\mathbf{c}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}^T$ ,  $\mathbf{c}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}^T$  và bán kính đã biết là  $r_1, r_2, r_3$ . Ba véctơ tâm được xác định trên cùng một hệ tọa độ là {B}, kết quả bài toán cũng thuộc hệ tọa độ này.

Phương trình ba mặt cầu:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \quad (0.55)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_2^2$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_3^2$$

Vì tâm của ba mặt cầu đều có cùng độ cao Z, ta đặt  $z_1 = z_2 = z_3 = z_n$ . Tọa độ điểm giao nhau giữa ba mặt cầu là  $P = \{x \ y \ z\}^T$ . Khai triển các phương trình (0.55)

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 + z^2 - 2z_nz + z_n^2 = r_1^2 \quad (0.56)$$

$$x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 + z^2 - 2z_nz + z_n^2 = r_2^2 \quad (0.57)$$

$$x^2 - 2x_3x + x_3^2 + y^2 - 2y_3y + y_3^2 + z^2 - 2z_nz + z_n^2 = r_3^2 \quad (0.58)$$

Trừ phương trình (0.58) cho (0.56) và (0.58) cho (0.57)

$$2(x_3 - x_1)x + 2(y_3 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 = r_1^2 - r_3^2 \quad (0.59)$$

$$2(x_3 - x_2)x + 2(y_3 - y_2)y + x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 = r_2^2 - r_3^2 \quad (0.60)$$

Nhờ phép trừ các thành phi tuyến tính của các biến x,y được loại bỏ. Các điều kiện liên quan tới z cũng được loại bỏ nhờ phép trừ bởi vì tâm của các mặt cầu đều có cùng độ cao z. Các phương trình (0.59) và (0.60) đều là các phương trình tuyến tính với các biến chưa biết x,y và là nghiệm của phương trình:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c \\ f \end{Bmatrix} \quad (0.61)$$

Với:

$$a = 2(x_3 - x_1)$$

$$b = 2(y_3 - y_1)$$

$$c = r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2$$

$$d = 2(x_3 - x_2)$$

$$e = 2(y_3 - y_2)$$

$$f = r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2$$

Giải phương trình cho ra nghiệm gồm x,y:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad (0.62)$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Thay vào phương trình (0.56) để tìm ra z:

$$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (0.63)$$

Với:

$$A = 1$$

$$B = -2z_n$$

$$C = z_n^2 - r_1^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

Biết rằng các biến x,y đã biết, ta tìm ra được 2 nghiệm z từ công thức:

$$z_{p,m} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (0.64)$$

Với Delta Robot, thông thường ta chọn z sao cho tâm để di chuyển nằm dưới tâm để cố định tức là chọn z âm, bởi vì đó là nghiệm theo nghĩa vật lý có thể chấp nhận được.

Có hai trường dẫn đến không xác định được nghiệm:

- i) Định thức của ma trận hệ số trong phương trình tuyến tính khi giải x,y bằng 0:

$$ae - bd = 2(x_3 - x_1)2(y_3 - y_2) - 2(y_3 - y_1)2(x_3 - x_2) = 0 \quad (0.65)$$

Hay:

$$(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) = (y_3 - y_1)(x_3 - x_2) \quad (0.66)$$

$$\rightarrow \frac{(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_2)} = \frac{(y_3 - y_1)}{(y_3 - y_2)}$$

Điều kiện này có nghĩa các tâm đều nằm trên cùng một đường thẳng.

Nếu thỏa mãn điều kiện này, sẽ xuất hiện một điểm kỳ dị của thuật toán. Chú ý rằng điều kiện xuất hiện điểm kỳ dị chỉ là hàm của các số hạng không đổi. Vì vậy, điểm kỳ dị có thể tránh nhờ việc thiết kế sao cho tâm để nằm trên mặt phẳng XY. Với robot Delta đối xứng, điểm kỳ dị này có thể tránh nhờ việc thiết kế.

- ii) Biểu thức dưới dấu căn ở phương trình (0.64) có giá trị âm, sẽ cho nghiệm ảo z. Điều kiện  $B^2 - 4C < 0$  được viết lại:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 > r_1^2 \quad (0.67)$$

Nếu bất đẳng thức này thỏa mãn, nghiệm z sẽ là nghiệm ảo và robot sẽ không thể lắp ghép hình dạng phù hợp. Chú ý rằng phương trình trên là phương trình của một đường tròn. Điểm kì dị này sẽ không bao giờ xảy ra nếu đầu vào các biến tuân theo bài toán động học thuận, khi đó robot Delta sẽ có thể lắp ráp được.

Phương trình vận tốc động học robot Delta ba khớp quay:

Phương trình vận tốc động học của robot Delta ba khớp quay được xác định bằng cách lấy đạo hàm bậc một của ba phương trình ràng buộc trước đó:

$$\begin{aligned} 2L\dot{y}\cos\theta_1 - 2L(y+a)\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + 2L\dot{z}\sin\theta_1 + 2Lz\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + 2x\dot{x} + 2(y+a)\dot{y} \\ + 2z\dot{z} = 0 \\ -L(\sqrt{3}\dot{x} + \dot{y})\cos\theta_2 + L(\sqrt{3}(x+b) + y+c)\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + 2L\dot{z}\sin\theta_2 + 2Lz\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ + 2(x+b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \\ -L(\sqrt{3}\dot{x} - \dot{y})\cos\theta_3 - L(\sqrt{3}(x-b) - y-c)\dot{\theta}_3\sin\theta_3 + 2L\dot{z}\sin\theta_3 + 2Lz\dot{\theta}_3\cos\theta_3 \\ + 2(x-b)\dot{x} + 2(y+c)\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \end{aligned}$$

Viết lại:

$$\begin{aligned} x\ddot{x} + (y+a + L\cos\theta_1)\dot{y} + (z + L\sin\theta_1)\dot{z} &= L((y+a)\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)\dot{\theta}_1 \\ (2(x+b) - \sqrt{3}L\cos\theta_2)\ddot{x} + (2(y+c) - L\cos\theta_2)\dot{y} + (2z + 2L\sin\theta_2)\dot{z} &= L(-(\sqrt{3}(x+b) + y+c)\sin\theta_2 - 2z\cos\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ (2(x-b) + \sqrt{3}L\cos\theta_3)\ddot{x} + (2(y+c) - L\cos\theta_3)\dot{y} + (2z + 2L\sin\theta_3)\dot{z} &= L((\sqrt{3}(x-b) - y-c)\sin\theta_3 - 2z\cos\theta_3)\dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{aligned} [A]\{\dot{X}\} &= [B]\{\dot{\Theta}\} \\ \begin{bmatrix} x & y + a + L\cos\theta_1 & z + L\sin\theta_1 \\ 2(x+b) - \sqrt{3}L\cos\theta_2 & 2(y+c) - L\cos\theta_2 & 2(z + L\sin\theta_2) \\ 2(x-b) + \sqrt{3}L\cos\theta_3 & 2(y+c) - L\cos\theta_3 & 2(z + L\sin\theta_3) \end{bmatrix} &\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Với:

$$\begin{aligned} b_{11} &= L((y+a)\sin\theta_1 - z\cos\theta_1) \\ b_{22} &= -L((\sqrt{3}(x+b) + y+c)\sin\theta_2 - 2z\cos\theta_2) \end{aligned}$$

$$b_{33} = L((\sqrt{3}(x - b) - y - c) \sin \theta_3 - 2z \cos \theta_3)$$

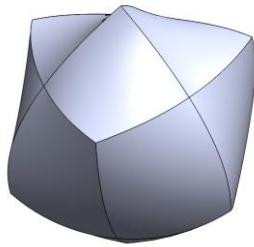
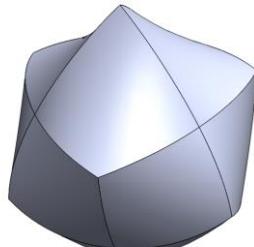
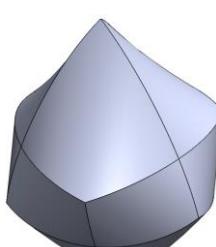
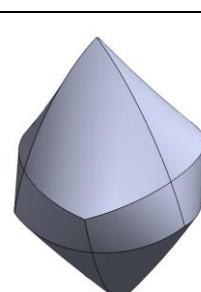
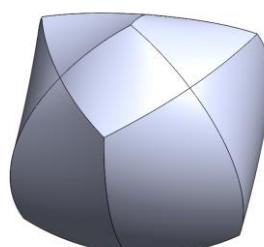
## Phụ lục C: Khảo sát vùng làm việc của robot delta kiểu ba khớp quay

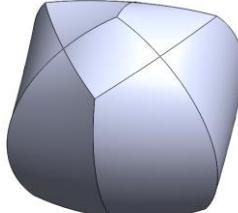
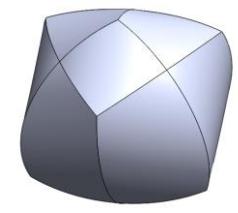
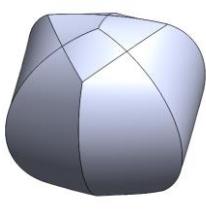
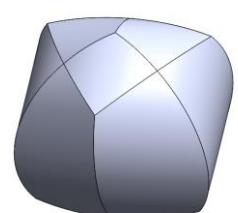
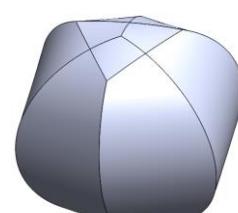
Dùng excel tiến hành lập bảng chứa các điểm khảo xác ở các vùng trên. Sau đó, dùng phần mềm Solid Work vẽ vùng làm việc ứng với các điểm khảo xác này. Ta chỉ vẽ một nửa vùng làm việc bên dưới tấm đế cố định. Tiến hành phân loại hình dạng vùng làm việc ứng với các vùng phân loại nêu trên. Qua quá trình phân loại ta có thể gộp các điểm ở đường biên và các điểm đặc biệt với các vùng như sau:

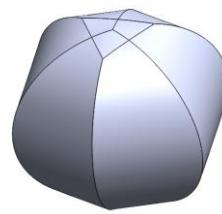
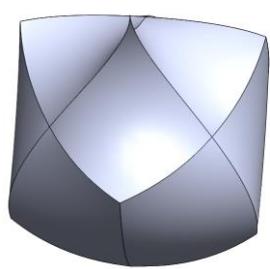
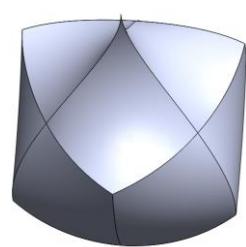
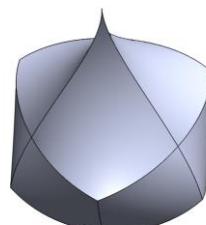
+Vùng Ia: chứa thêm đường biên  $r_1 = 1,5$  (đường giao nhau giữa các vùng Ia và Ib) và điểm đặc biệt  $r_1 = 1,5; r_2 = |r_3| = 0,75$

$$Ia \left\{ \begin{array}{l} 1,5 \leq r_1 < 3 \\ 0 < r_2 < 0,75 \\ 0 < |r_3| < 1,5 \\ r_1 > |r_3| > r_2 \\ r_1 = |r_3| = 0,75; r_2 = 1,5 \end{array} \right.$$

$r_1$	$ r_3 $	$r_2$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thư nguyên)
Vùng bên trong				

1.6	0.8	0.6		2.05
1.6	1	0.4		0.6
1. 6	1.2	0.2		0.0 8
1. 6	1.3	0.1		0.0 1
1. 8	0.7	0.5		1.1 8
1. 8	0.9	0.3		0.2 5

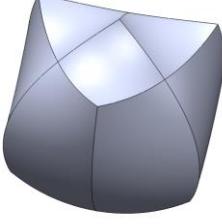
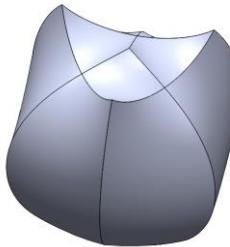
8	1.1	0.1		0.0 1
2	0.6	0.4		0.6 1
2	0.8	0.2		0.0 8
2.	0.5	0.3		0.2 5
2.	0.7	0.1		0.0 1
2.	0.4	0.2		0.0 7

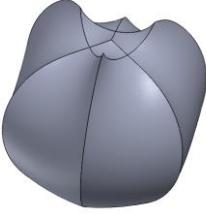
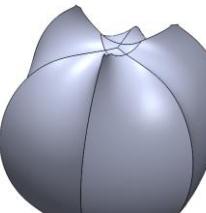
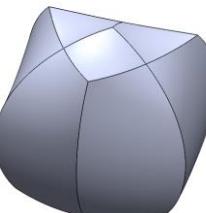
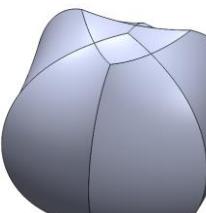
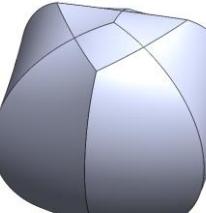
2. 6	0.3	0.1		0.0 1
<b>Điểm đặc biệt</b>				
1. 5	0.7 5	0.7 5		4.0 3
<b>Đường biên <math>r_1 = 1,5</math></b>				
1. 5	0.8	0.7		3.2 7
1. 5	1	0.5		1.2
1. 5	1.2	0.3		0.2 8

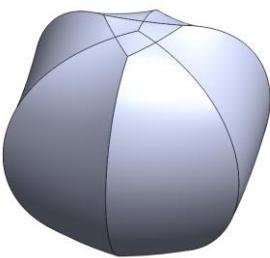
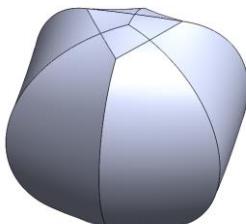
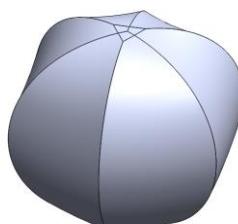
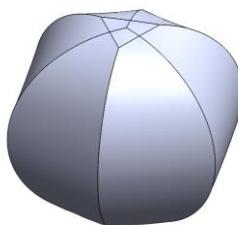
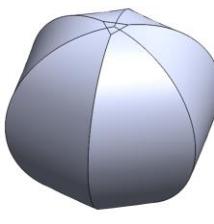
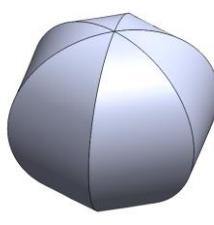
1. 5	1.4	0.1		0.0 1
---------	-----	-----	--	----------

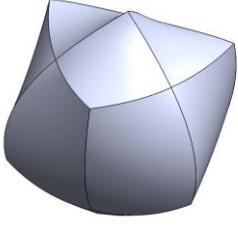
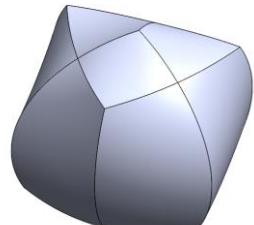
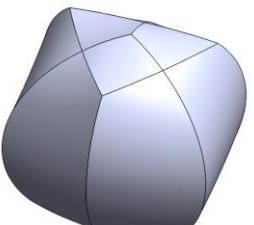
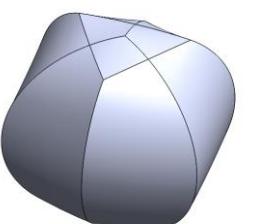
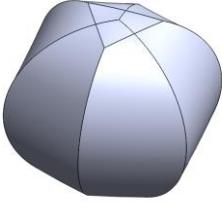
+Vùng Ib: chứa thêm đường biên  $|r_3| = 0$  (đường biên giới hạn phần đáy của vùng Ib) và đường biên  $|r_3| = r_2$  (đường giao nhau giữa các vùng Ia và Ib)

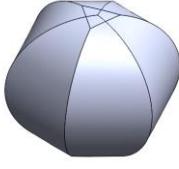
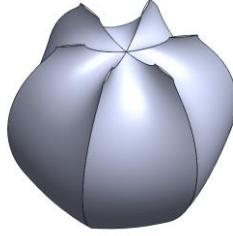
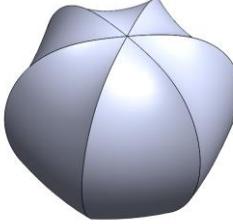
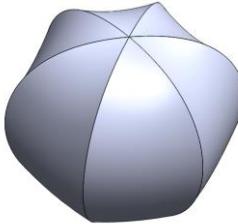
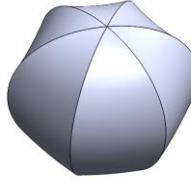
$$Ib \begin{cases} 1,5 < r_1 < 3 \\ 0 < r_2 < 1,5 \\ 0 \leq |r_3| < 0,75 \\ r_1 > r_2 \geq |r_3| \end{cases}$$

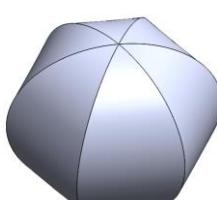
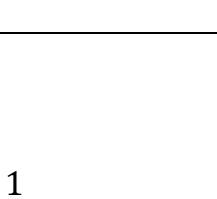
$r_1$	$r_2$	$ r_3 $	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không nguyên)
Vùng bên trong				
1. 6	0. 8	0. 6		2.45
1. 6	1	0. 4		4.81

6 1. 6	2 1. 2	0. 2		8.25
6 1. 6	3 1. 3	0. 1		10.4 6
8 1. 8	7 0. 7	0. 5		1.63
8 1. 8	9 0. 9	0. 3		3.44
8 1. 8	1 1. 1	0. 1		
2	6 0. 6	0. 4		1.02

2	8 0.	2 0.		2.39
2	5 2. 0.	3 0.		0.58
2	7 2. 0.	1 0.		1.59
4	4 2. 0.	2 0.		0.3
6	3 2. 0.	1 0.		0.12
8	2 2. 0.	0		0.04

Đường biên $ r_3  = r_2$				
6 1. 6	7 0. 7	7 0. 7		1.63
8 1. 8	6 0. 6	6 0. 6		1.03
2 2.	5 0. 5	5 0. 5		0.59
2 2.	4 0. 4	4 0. 4		0.3
4 2. 4	3 0. 3	3 0. 3		0.13

2. 6	0. 2	0. 2		0.04
<b>Đường biên <math> r_3  = 0</math></b>				
1. 6	0. 7	0. 7		13.1 2
1. 8	0. 6	0. 6		8.08
2	0. 5	0. 5		4.65
2. 2	0. 4	0. 4		2.37

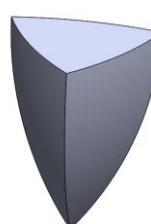
2. 4	0. 3	0. 3		1
2. 6	0. 2	0. 2		0.3
2. 8	0. 1	0. 1		0.04

+Vùng IIa:

$$IIa \begin{cases} 0 < r_1 < 1 \\ 0,75 < r_2 < 1,5 \\ 1 < |r_3| < 1,5 \\ |r_3| > r_2 > r_1 \end{cases}$$

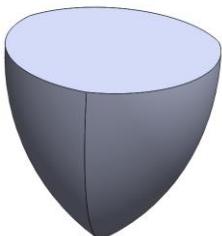
$ r_3 $	$r_2$	$r_1$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thùyên)
Vùng bên trong				

1.	1	0.		1.9 7
1.	9 0.	0.		0.3 9
1.	1 1.	0.		0.4
1.	2 1.	0.		0.4 1
1.	9 0.	0.		0.0 8

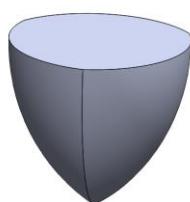
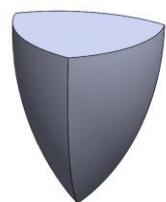
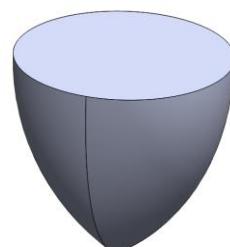
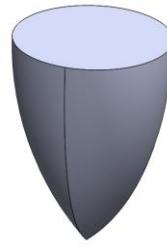
1. 4	1.	0. 5		0.0 8
1. 4	3	0. 3		

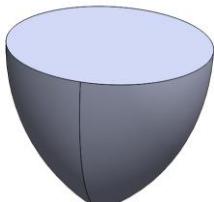
+Vùng IIb: chứa thêm đường biên  $r_1 = r_2$  (đường giao nhau giữa các vùng IIa và IIb), chứa đường biên  $r_1 = |r_3|$  (đường giao nhau giữa các vùng IIb và IId) và điểm đặc biệt  $r_1 = r_2 = |r_3| = 1$

$$IIb \left\{ \begin{array}{l} 0,75 < r_1 < 1,5 \\ 0 < r_2 < 1 \\ 1 < |r_3| < 1,5 \\ |r_3| \geq r_1 \geq r_2 \\ r_1 = r_2 = |r_3| = 1 \end{array} \right.$$

$ r_3 $	$r_1$	$r_2$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thứ nguyên)
Vùng bên trong				
1. 1	1	0. 9		1.9 2

1. 3	0.9	0. 8		0.3 8
1. 3	1.1	0. 6		0.3 6
1. 3	1.2	0. 5		0.3 4
1. 4	0.9	0. 7		0.0 7
1. 4	1.1	0. 5		0.0 7
1. 4	1.3	0. 3		0.0 6

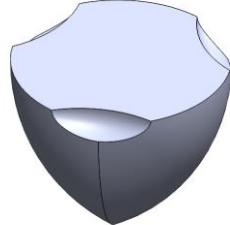
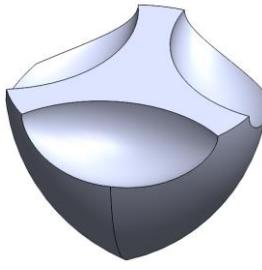
Đường biên $r_1 = r_2$				
1. 1	0.9 5	1. 1		1.9 5
1. 3	0.8 5	1. 3		0.3 8
1. 4	0.8	1. 4		0.0 7
Đường biên $r_1 =  r_3 $				
1. 1	1.1	0. 8		1.8 5
1. 3	1.3	0. 4		0.3 2

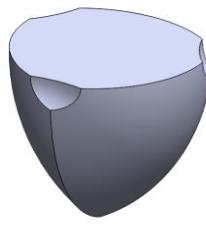
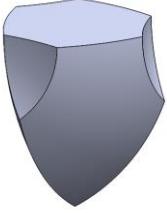
1. 4	1.4	0. 2		0.0 6
Điểm đặc biệt				
1	1	1		3.1 4

+Vùng IIc: chứa thêm đường biên  $|r_3| = r_2$  (đường giao nhau giữa các vùng IIa và IIc)

$$IIc \left\{ \begin{array}{l} 0 < r_1 < 1 \\ 1 < r_2 < 1,5 \\ 0,75 < |r_3| < 1,5 \\ r_2 \geq r_3 > r_1 \end{array} \right.$$

$r_2$	$ r_3 $	$r_1$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thù nguyên)
Vùng bên trong				

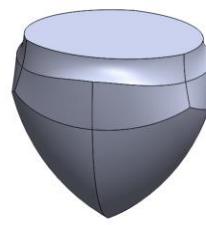
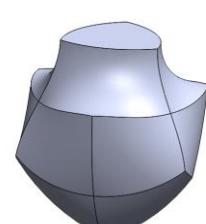
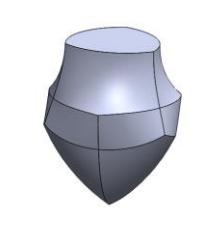
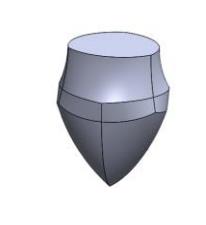
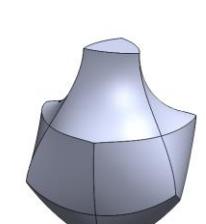
1.	1	0.		3.3
1.	9 0.	0.		4.2
3	1.	1.		1.6
1.	2	0.		0.8
4	1	0.		1.0
4	3	0.		0.2

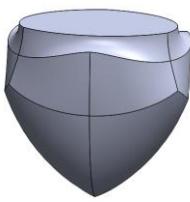
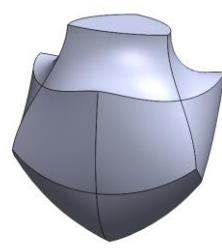
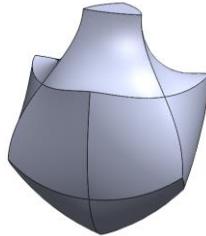
Đường biên $ r_3  = r_2$				
1. 1	1. 1	0. 8		2.0 1
1. 3	1. 3	0. 4		0.3 8
1. 4	1. 4	0. 2		0.0 7

+Vùng IIId: chứa thêm đường biên  $|r_3| = r_2$  (đường giao nhau giữa vùng IIId và IIIf)

$$IIId \begin{cases} 1 < r_1 < 1,5 \\ 0 < r_2 < 1 \\ 0,75 < |r_3| < 1,5 \\ r_1 > |r_3| \geq r_2 \end{cases}$$

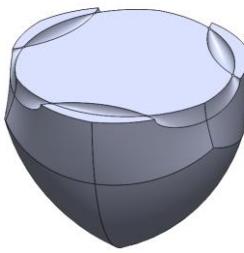
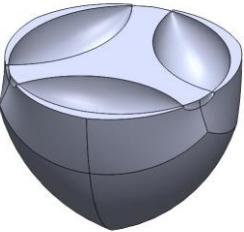
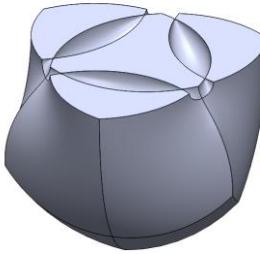
$r_1$	$ r_3 $	$r_2$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thù nguyên)
Vùng bên trong				

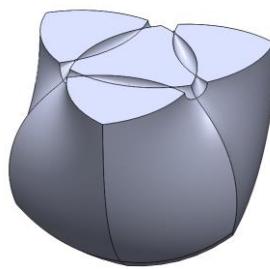
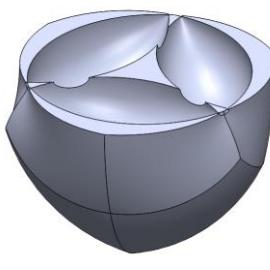
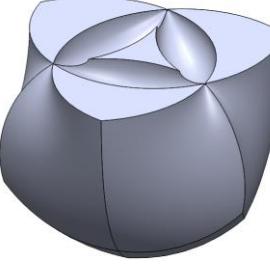
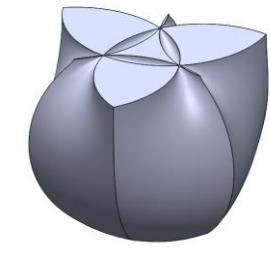
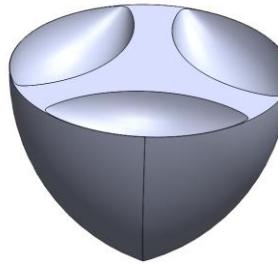
1.	1	0.9		2.9
1.	3	0.9		2.4
1.	3	1.1		1.1
1.	3	1.2		0.6
1.	4	0.9		1.6

1. 4	1.1	0.5		0.6 6
1. 4	1.3	0.3		0.1 8
<b>Đường biên <math> r_3  = r_2</math></b>				
1. 1	0.9 5	0.9 5		3.5
1. 3	0.8 5	0.8 5		2.9 7
1. 4	0.8	0.8		2.4 9

+Vùng IIe: chứa thêm đường biên  $r_1 = |r_3|$  (đường giao nhau giữa các vùng IIc và IIe) và điểm đặc biệt  $r_1 = |r_3| = 0,75; r_2 = 1,5$

$$IIe \left\{ \begin{array}{l} 0,75 < r_1 < 1,5 \\ 1 < r_2 < 1,5 \\ 0 < |r_3| < 1 \\ r_2 > r_1 \geq |r_3| \\ r_1 = |r_3| = 0,75; r_2 = 1,5 \end{array} \right.$$

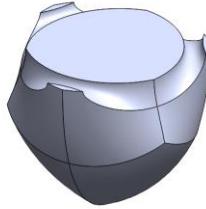
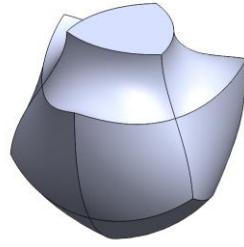
$r_2$	$r_1$	$ r_3 $	Hình dạng vùng làm việc (không thứ nguyên)
Vùng bên trong			
1. 1	1	0.9	
1. 3	0.9	0.8	
1. 3	1.1	0.6	

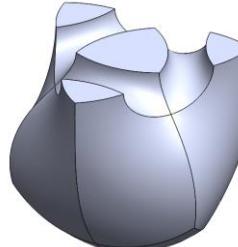
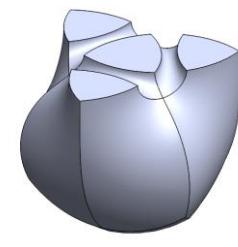
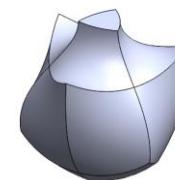
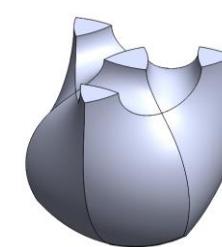
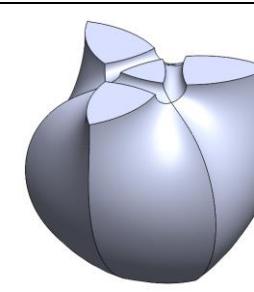
1. 3	1.2	0.5		10.4 2
1. 4	0.9	0.7		8.24
1. 4	1.1	0.5		11.7 4
1. 4	1.3	0.3		13.2 3
Vùng biên $r_1 =  r_3 $				
1. 1	0.9 5	0.9 5	Lõi hình học	
1. 3	0.8 5	0.8 5		5.26
1. 4	0.8	0.8	Lõi hình học	

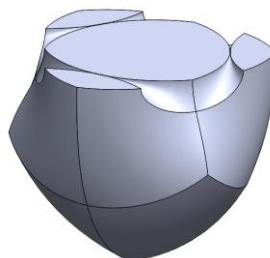
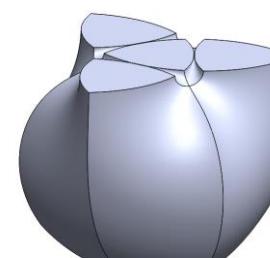
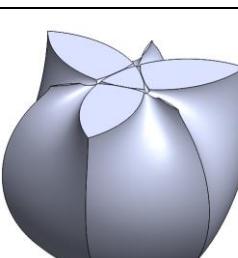
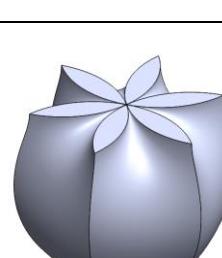
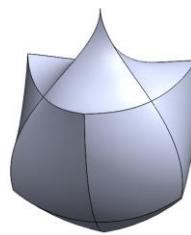
1. 5	0.7 5	0.7 5	Lỗi hình học	
---------	----------	----------	--------------	--

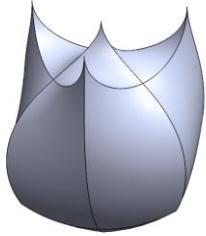
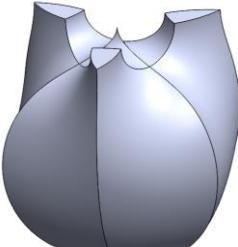
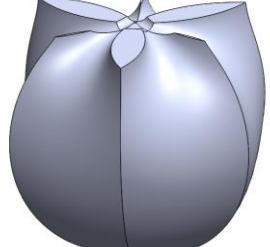
+Vùng IIIf: chứa thêm đường biên  $r_1 = r_2$  (đường giao nhau giữa các vùng IIle và IIIf), chứa đường biên  $r_1 = 1,5$  (đường giao nhau giữa các vùng IIIf và Ib) và điểm đặc biệt  $r_1 = r_2 = 1,5; |r_3| = 0$

$$IIIf \begin{cases} 1 < r_1 \leq 1,5 \\ 0,75 < r_2 < 1,5 \\ 0 < |r_3| < 1 \\ r_1 \geq r_2 > |r_3| \\ r_1 = r_2 = 1,5; |r_3| = 0 \end{cases}$$

$r_1$	$r_2$	$ r_3 $	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thứ nguyên)
Vùng bên trong				
1. 1	1	0. 9		4.18
1. 3	0. 9	0. 8		3.53

3	1.	1.	0.		6.64
3	1.	2	0.		8.63
4	1.	0.	0.		3.55
4	1.	1.	0.		6.67
4	1.	3	0.		10.8 9
<b>Đường biên <math>r_1 = r_2</math></b>					

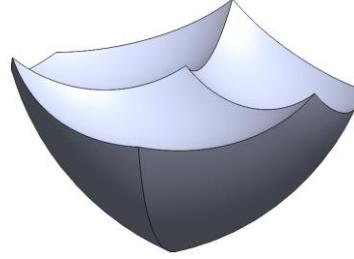
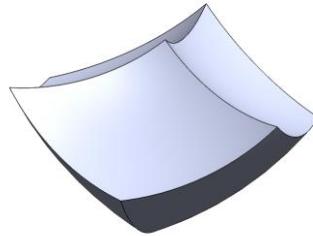
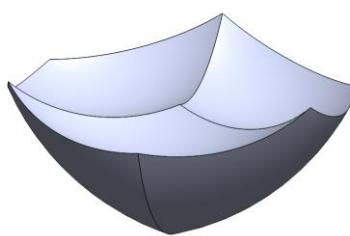
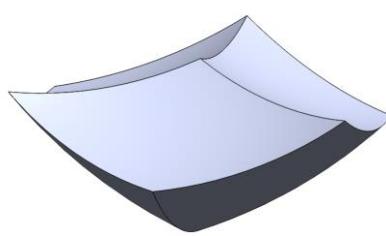
1.	1.	0.		5.78
3	1.	0.		10.8 2
4	1.	0.		13.4 1
5	1.	0.		16.4 5
<b>Đường biên <math>r_1 = 1,5</math></b>				
5	1.	0.		2.46

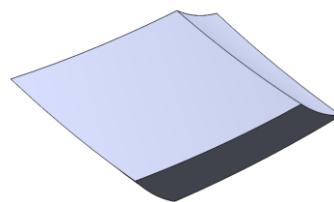
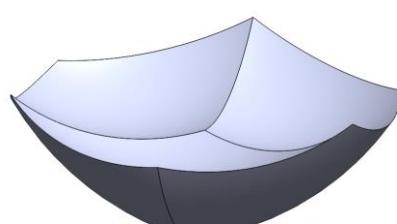
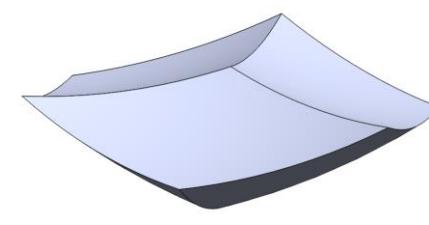
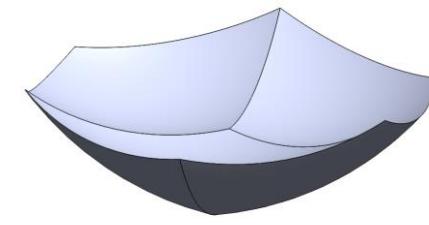
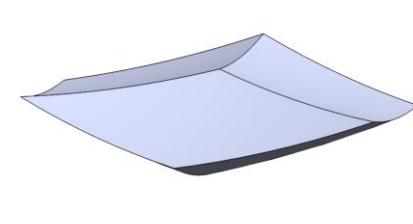
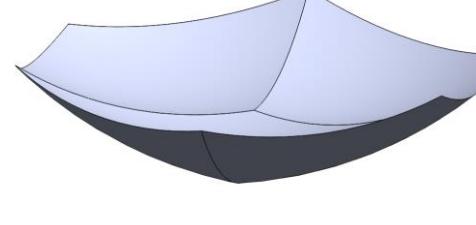
1. 5	1	0. 5		4.87
1. 5	1. 2	0. 3		8.49
1. 5	1. 4	0. 1		13.2 9

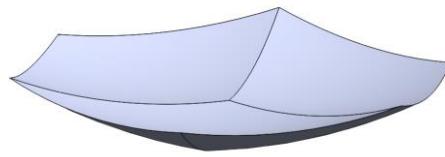
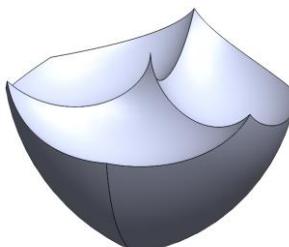
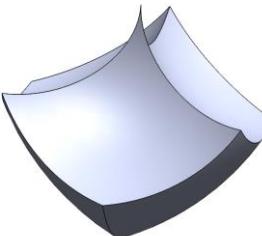
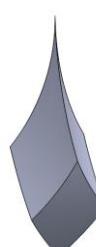
+Vùng IIIa: chứa thêm đường biên  $r_2 = 1,5$  (đường giao nhau giữa các vùng IIIa và IIc)

$$IIIa \begin{cases} 0 < r_1 < 0,75 \\ 1,5 \leq r_2 < 3 \\ 0 < |r_3| < 1,5 \\ r_2 > |r_3| > r_1 \end{cases}$$

$r_2$	$ r_3 $	$r_1$	Hình dạng vùng làm việc	Thể tích vùng làm việc (không thực)
Vùng bên trong				

1. 6	0. 8	0. 6		2.8 9
1. 6	1. 1	0. 4		0.6 4
1. 6	1. 2	0. 2		0.0 7
1. 6	1. 3	0. 1		0.0 1
1. 8	0. 7	0. 5		2.6 2
1. 8	0. 9	0. 3		0.3 8

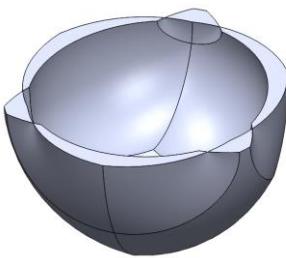
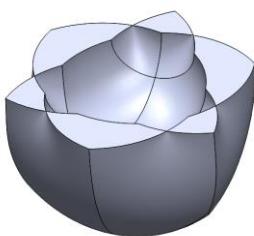
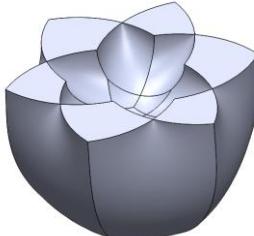
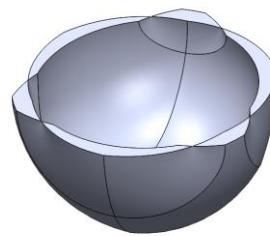
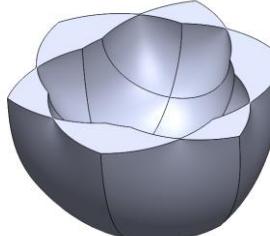
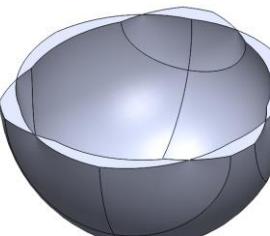
1. 8	1. 1	0. 1		0.0 1
2	0. 6	0. 4		2.2
2	0. 8	0. 2		0.1 7
2.	0. 5	0. 3		1.6
2.	0. 7	0. 1		0.0 3
2. 4	0. 4	0. 2		0.8 8

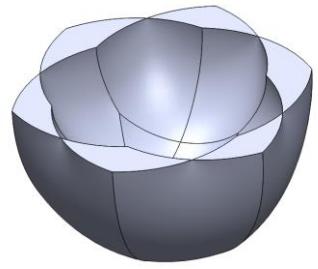
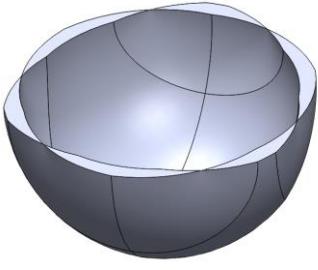
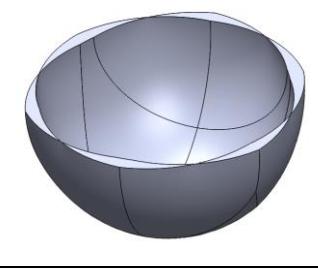
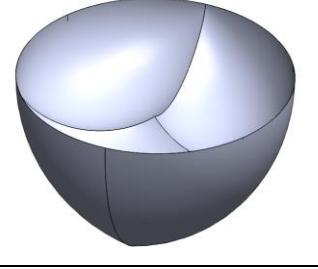
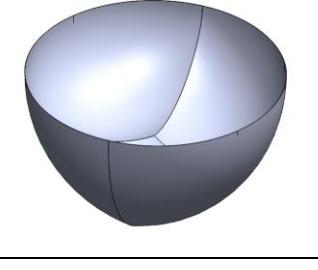
2. 6	0. 3	0. 1		0.2 3
<b>Đường biên <math>r_2 = 1,5</math></b>				
1. 5	0. 8	0. 7		4.0 9
1. 5	1.	0. 5		1.1 4
1. 5	2	0. 3		0.2 2
1. 5	4	0. 1		0.0 1

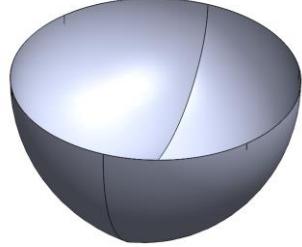
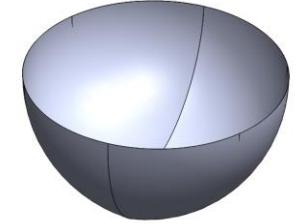
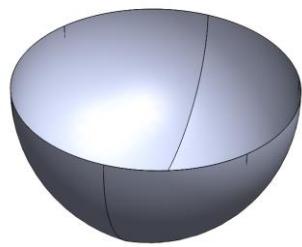
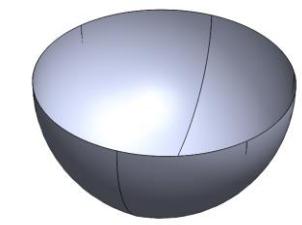
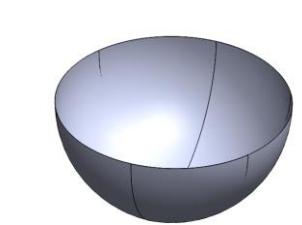
+Vùng IIIb: chứa thêm đường biên  $r_1 = |r_3|$  (đường giao nhau giữa các vùng IIIa và IIIb), chứa đường biên  $r_2 = 1,5$  (đường biên giao nhau giữa các vùng IIIb và IIe) và đường biên  $|r_3| = 0$  (đường giới hạn phần đáy của vùng IIIb)

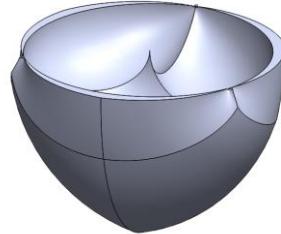
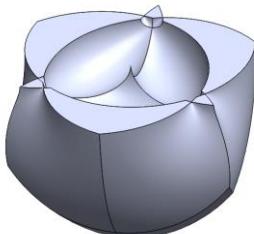
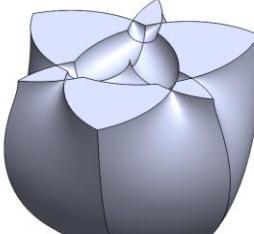
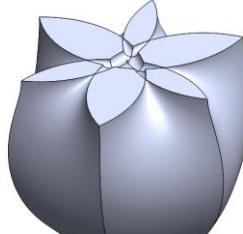
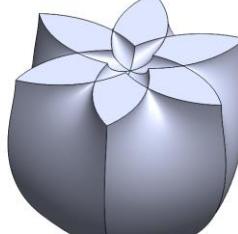
$$IIIb \begin{cases} 0 < r_1 < 1,5 \\ 1,5 \leq r_2 < 3 \\ 0 \leq |r_3| < 0,75 \\ r_2 > |r_3| \geq r_1 \end{cases}$$

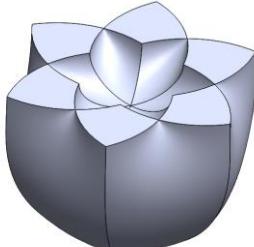
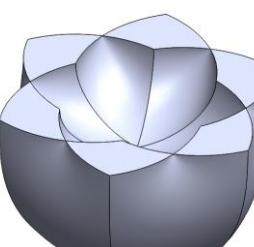
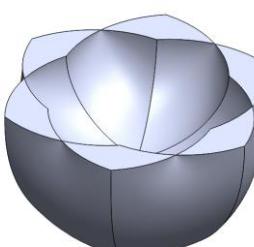
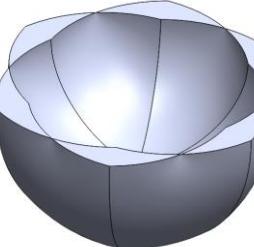
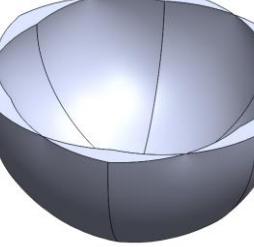
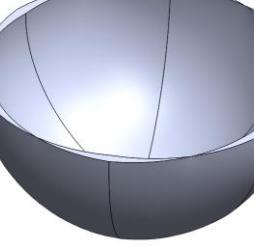
$r_2$	$r_1$	$ r_3 $	Hình dạng vùng làm việc (không thùy nguyên)	Thể tích vùng làm việc
Vùng bên trong				
1. 6	0. 8	0. 6		9.71
1. 6	1	0. 4		15.1 9
1. 6	2	0. 2		18.1 1
1. 6	3	0. 1		18.9 3

1. 8	0. 7	0. 5		11.3 6
1. 8	0. 9	0. 3		18.6 9
1. 8	1. 1	0. 1		22.7 1
2	0. 6	0. 4		12.8 4
2	0. 8	0. 2		21.5 8
2. 2	0. 5	0. 3		14.0 2

2.	0.	0.		23.7 6
2.	0.	0.		14.6 7
2.	0.	0.		14.2 4
$\text{Đường biên } r_1 =  r_3 $				
1.	0.	0.		5.76
1.	0.	0.		6.06

2	0. 5	0. 5		6.13
2. 2	0. 4	0. 4		5.89
2. 4	0. 3	0. 3		5.23
2. 6	0. 2	0. 2		4.08
2. 8	0. 1	0. 1		2.36
<b>Đường biên <math>r_2 = 1,5</math></b>				

5 1. 5	8 0. 8	7 0. 7		7.37
5 1. 5	1 0. 5			12.5 3
5 1. 5	2 1. 2	3 0. 3		15.2 6
5 1. 5	4 1. 4	1 0. 1		16.3 3
<b>Đường biên <math> r_3  = 0</math></b>				
6 1. 6	4 1. 4	0 0. 0		19.4 9

8	1.	0		24.1 3
2	1	0		26.6 9
2	0.	0		26.9 2
4	0.	0		24.5 9
6	0.	0		19.4 9
8	0.	0		11.3 7

