

TRƯỜNG .....  
KHOA.....



# BÁO CÁO TỐT NGHIỆP

Đề tài:

**Thiết kế bộ Điều khiển trượt cho tay máy Robot 2  
bậc tự do và mô phỏng trên Matlab – Simulink**

## Mục lục

<b>Lời nói đầu.....</b>	<b>6</b>
<b>CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ ROBOT CÔNG NGHIỆP .....</b>	<b>7</b>
I.1.Robot công nghiệp: .....	7
I.1.1. Sự ra đời của Robot công nghiệp :.....	7
I.1.2.Phân loại tay máy Robot công nghiệp: .....	8
I.2. Ứng dụng của Robot công nghiệp :.....	10
I.2.1.Mục tiêu ứng dụng Robot công nghiệp :.....	10
I.2.2.Các lĩnh vực ứng dụng Robot công nghiệp :.....	11
I.2.3. Các xu thế ứng dụng Robot trong tương lai :.....	11
I.2.4. Tình hình tiếp cận và ứng dụng Robot công nghiệp ở Việt Nam : .....	11
I.3.Cấu trúc của Robot công nghiệp:.....	12
I.3.1.Các bộ phận cấu thành Robot công nghiệp :.....	12
I.3.2.Bậc tự do và các tọa độ suy rộng :.....	13
I.3.2.1.Bậc tự do : .....	13
I.3.2.2. Tọa độ suy rộng :.....	14
I.3.3.Nhiệm vụ lập trình điều khiển Robot:.....	15
I.3.3.1. Định vị và định hướng tại “điểm tác động cuối” :.....	15
I.3.3.2. Lập trình điều khiển Robot công nghiệp : .....	15

I.4. Các phép biến đổi toán học cho Robot : .....	16
I.4.1. Biến đổi toạ độ dùng Ma trận: .....	16
I.4.1.1. Vector điểm và toạ độ thuần nhất : .....	16
I.4.1.3. Biến đổi Ma trận dùng toạ độ thuần nhất: .....	19
I.4.1.4. Ý nghĩa hình học của Ma trận thuần nhất:.....	20
I.4.2. Các phép biến đổi cơ bản: .....	23
I.4.2.1. Phép biến đổi tịnh tiến: .....	23
I.4.2.2. Phép quay quanh các trục toạ độ :.....	23
<b>CHƯƠNG II: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG HỌC VÀ ĐỘNG LỰC HỌC CỦA ROBOT CÔNG NGHIỆP:</b> .....	<b>25</b>
II.1. Hệ phương trình động học Robot :.....	25
II.1.1. Đặt vấn đề :.....	25
II.1.2. Xác định trạng thái của Robot tại điểm tác động cuối : .....	25
II.1.3. Mô hình động học : .....	26
II.1.3.1. Ma trận quan hệ :.....	26
II.1.3.2. Bộ thông số DH :.....	27
II.1.3.3. Thiết lập hệ toạ độ :.....	28
II.1.3.4. Mô hình biến đổi : .....	29
II.1.3.5. Phương trình động học : .....	30
II.2. Tổng hợp chuyên động Robot : .....	31
II.2.1. Nhiệm vụ : .....	31
II.2.2. Bài toán động học ngược :.....	31
II.2.3. Các phương pháp giải bài toán động học ngược :.....	32
II.3. Động lực học Robot: .....	32
II.3.1.Nhiệm vụ và phương pháp phân tích Động lực học Robot: .....	32

II.3.2.Vận tốc và gia tốc: .....	34
II.3.3. Động năng tay máy: .....	37
II.3.4 .Thé năng tay máy:.....	39
II.3.5.Mô hình động lực học tay máy:.....	39
II.3.6. Động lực học của cơ cấu tay máy 2 khâu: .....	41
<b>CHƯƠNG III : THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT CHO TAY MÁY ROBOT 2 BẬC TỰ DO .....</b>	<b>46</b>
III.1.Hệ phi tuyến : .....	46
III.1.1.Hệ phi tuyến là gì ? .....	46
III.1.2.Mô hình trạng thái và quỹ đạo trạng thái của Hệ phi tuyến: ...	48
III.1.2.1.Mô hình trạng thái:.....	48
III.1.2.2.Quỹ đạo trạng thái :.....	50
III.1.3. Điểm cân bằng và điểm dừng của hệ thống:.....	51
III.1.3.1. Điểm cân bằng: .....	51
III.1.3.2.Điểm dừng của hệ : .....	51
III.1.3.3 Tính ổn định tại một điểm cân bằng: .....	52
III.1.4 Tiêu chuẩn ổn định Lyapunov :	53
III.1.4.1.Tiêu chuẩn Lyapunov: .....	54
III.1.4.2.Tiêu chuẩn Lyapunov phục vụ thiết kế bộ điều khiển: ....	57
III.2.Bậc tương đối của hệ phi tuyến:.....	57
III.3.Tính động học không:.....	60
III.4.Thiết kế bộ Điều khiển trượt cho tay máy:.....	63
III.4.1.Điều khiển trượt:.....	63
III.4.1.1.Trường hợp bậc tương đối của hệ bằng bậc của hệ p=n:..	64
III.4.1.2. Trường hợp bậc tương đối của hệ p<n.....	65

III.4.2. Thiết kế bộ điều khiển trượt cho tay máy n bậc tự do:..... 66

III.4.3. Ứng dụng Điều khiển trượt cho tay máy Robot 2 bậc tự do: . 70

III.4.3.1. Phương trình động lực học tay máy hai bậc tự do toàn  
khớp quay:..... 70

III.4.3.2. Mô hình động lực học tay máy hai bậc tự do:..... 71

III.4.3.3. Thiết kế bộ điều khiển trượt cho tay máy 2 bậc tự do:.... 72

III.4.3.4. Tính toán giá trị đặt  $\theta_i$  cho tay máy hai bậc tự do:..... 74

**CHƯƠNG IV: MÔ PHỎNG QUÁ TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA  
ROBOT DÙNG BỘ ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT TRÊN NỀN MATLAB  
AND SIMULINK: .....** 76

IV.1. Tổng quan về Matlab-Simulink: ..... 76

IV.2. Các thao tác thực hiện mô phỏng:..... 77

Kết luận..... 86

Tài liệu tham khảo :..... 86

### Lời nói đầu

Trong sự nghiệp công nghiệp hoá, hiện đại hoá đất nước vấn đề tự động hoá sản xuất có vai trò đặc biệt quan trọng.

Mục tiêu ứng dụng kỹ thuật Robot trong công nghiệp nhằm nâng cao năng suất dây chuyền công nghệ, nâng cao chất lượng và khả năng cạnh tranh của sản phẩm, đồng thời cải thiện điều kiện lao động. Sự cạnh tranh hàng hoá đặt ra một vấn đề thời sự là làm sao để hệ thống tự động hoá sản xuất phải có tính linh hoạt nhằm đáp ứng với sự biến động thường xuyên của thị trường hàng hoá. Robot công nghiệp là bộ phận cấu thành không thể thiếu trong hệ thống sản xuất tự động linh hoạt đó.

Gần nửa thế kỉ có mặt trong sản xuất. Robot công nghiệp đã có một lịch sử phát triển hấp dẫn. Ngày nay, Robot công nghiệp được dùng rộng rãi ở nhiều lĩnh vực sản xuất. Điều đó xuất phát từ những ưu điểm cơ bản của các loại Robot đã được lựa chọn và đúc kết qua bao nhiêu năm ứng dụng ở nhiều nước.

Ở nước ta, trước những năm 1990 hầu như chưa du nhập về kỹ thuật Robot. Từ năm 1990 nhiều cơ sở công nghiệp đã bắt đầu nhập ngoại nhiều loại Robot phục vụ các việc như tháo lắp dụng cụ cho các trung tâm CNC, lắp ráp các linh kiện điện tử, hàn vỏ xe ô tô, xe máy và phun phủ bề mặt ... Có những nơi đã bắt đầu thiết kế chế tạo và lắp ráp Robot. Có thể nói, Robot đã và đang góp phần rất lớn vào sự nghiệp công nghiệp hoá, hiện đại hoá đất nước. Với những ý nghĩa to lớn đó của Robot công nghiệp, chắc chắn ngành công nghiệp chế tạo và ứng dụng Robot sẽ phát triển rất mạnh trong tương lai.

Trong lĩnh vực Robot hiện nay, phần Cơ khí (Robot Mechanics), hệ thống Điều khiển (Robot control) và hệ thống Lập trình (Programming system) được coi là các thành phần độc lập và được các nhà sản xuất chào bán độc lập. Vì vậy, với những kiến thức đã học và được sự hướng dẫn của thầy giáo Th.S Lê Huy Tùng, chúng tôi đã nghiên cứu đề tài: "**Thiết kế bộ Điều khiển trượt cho tay máy Robot 2 bậc tự do và mô phỏng trên Matlab – Simulink**".

## CHƯƠNG I: TỔNG QUAN VỀ ROBOT CÔNG NGHIỆP

**I.1.Robot công nghiệp:****I.1.1. Sự ra đời của Robot công nghiệp :**

Thuật ngữ “Robot” lần đầu tiên xuất hiện năm 1922 trong tác phẩm “Rossum’s Universal Robot” của Karel Capek. Theo tiếng Séc thì Robot là người làm tạp dịch. Trong tác phẩm này nhân vật Rossum và con trai ông đã tạo ra những chiếc máy gần giống như con người để hầu hạ con người.

Hơn 20 năm sau, ước mơ viễn tưởng của Karel Capek đã bắt đầu hiện thực. Ngay sau chiến tranh thế giới lần thứ 2, ở Mỹ đã xuất hiện những tay máy chép hình điều khiển từ xa, trong các phòng thí nghiệm phóng xạ. Năm 1959, Devol và Engelber đã chế tạo Robot công nghiệp đầu tiên tại công ty Unimation.

Năm 1967 Nhật Bản mới nhập chiếc Robot công nghiệp đầu tiên từ công ty AMF của Mỹ. Đến năm 1990 có hơn 40 công ty của Nhật, trong đó có những công ty không lồ như Hitachi, Mitsubishi và Honda đã đưa ra thị trường nhiều loại Robot nổi tiếng.

Từ những năm 70, việc nghiên cứu nâng cao tính năng của robot đã chú ý nhiều đến sự lắp đặt thêm các cảm biến ngoại tín hiệu để nhận biết môi trường làm việc. Tại trường đại học tổng hợp Stanford, người ta đã tạo ra loại Robot lắp ráp tự động điều khiển bằng vi tính trên cơ sở xử lý thông tin từ các cảm biến lực và thị giác. Vào thời gian này công ty IBM đã chế tạo Robot có các cảm biến xúc giác và cảm biến lực điều khiển bằng máy vi tính để lắp ráp các máy in gồm 20 cụm chi tiết .

Những năm 90 do áp dụng rộng rãi các tiến bộ khoa học về vi xử lý và công nghệ thông tin, số lượng Robot công nghiệp đã tăng nhanh, giá thành giảm đi rõ rệt, tính năng đã có nhiều bước tiến vượt bậc. Nhờ vậy Robot công nghiệp đã có vị trí quan trọng trong các dây truyền sản xuất hiện đại. Ngày nay, chuyên ngành khoa học nghiên cứu về Robot “Robotics” đã trở thành một lĩnh vực rộng trong khoa học, bao gồm các

vẫn đề cấu trúc cơ cấu động học, động lực học, lập trình quỹ đạo, cảm biến tín hiệu, điều khiển chuyển động v.v...

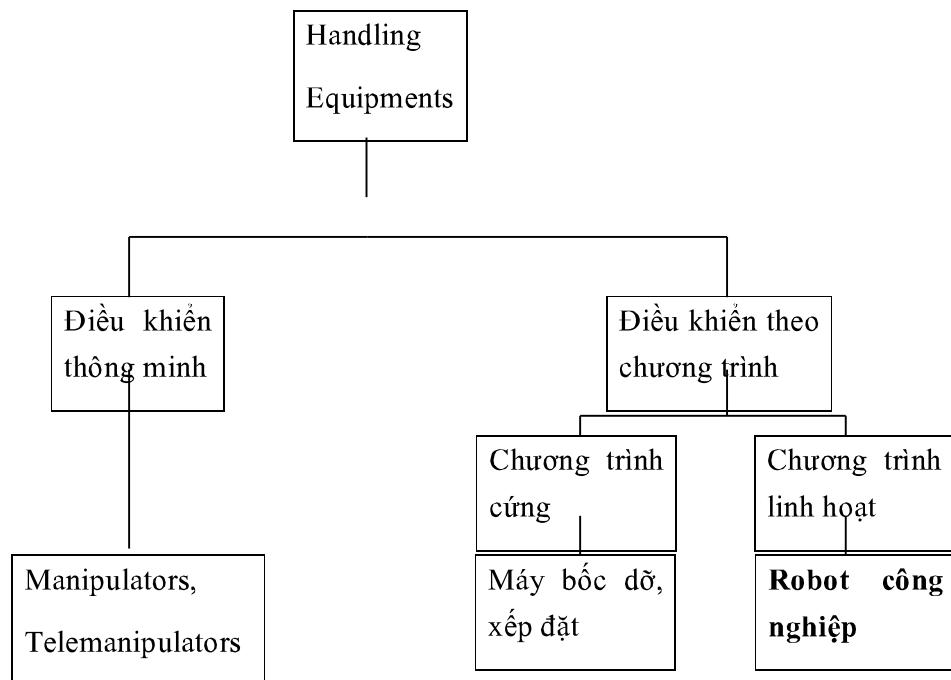
### **I.1.2.Phân loại tay máy Robot công nghiệp:**

Ngày nay, khi nói đến Robot thường ta hay hình dung ra một cơ chế máy móc tương tự con người, có khả năng sử dụng công cụ lao động để thực hiện các công việc thay cho con người, thậm chí có thể tính toán hay có khả năng hành động theo ý chí.

Trong thực tiễn kỹ thuật, khái niệm Robot hiện đại được hiểu khá rộng, mà theo đó Robot là “*tất cả các hệ thống kỹ thuật có khả năng cảm nhận và xử lý thông tin cảm nhận được, để sau đó đưa ra hành xử thích hợp*”. Theo cách hiểu này, các hệ thống xe tự hành, hay thậm chí một thiết bị xây dựng có trang bị cảm biến thích hợp như Camera, cũng được gọi là Robot. Các khái niệm như Hexapod, Parallel Robot, Tripod, Gait Biped, Manipulator Robocar hay Mobile Robot nhằm chỉ vào các hệ thống Robot không còn gắn liền với các hình dung ban đầu của con người.

Trong nội dung đồ án chỉ nhắm vào đối tượng Robot công nghiệp (RBCN), thực chất là một thiết bị tay máy (Handling Equipment). Công nghệ tay máy (Handling Technology) là công nghệ của *dạng thiết bị kỹ thuật có khả năng thực hiện các chuyển động theo nhiều trực trong không gian*, tương tự như ở con người.

Về cơ bản có thể phân thiết bị tay máy (hình 1.1) thành 2 loại chính : Điều khiển (ĐK) theo chương trình hay ĐK thông minh :

**Hình 1.1 : Phân loại thiết bị tay máy**

+ Loại ĐK theo chương trình gồm 2 họ:

- *Chương trình cứng* : Các thiết bị bốc dỡ, xếp đặt có chương trình hoạt động cố định. Ta hay gặp họ này trong các hệ thống kho hiện đại. Chúng có rất ít trực chuyển động và chỉ thu thập thông tin về quãng đường qua các tiếp điểm hành trình. Ta không thể ĐK chúng theo một quỹ đạo mong muốn.

- *Chương trình linh hoạt* : Là họ Robot mà người sử dụng có khả năng thay đổi chương trình ĐK chúng tùy theo đối tượng công tác. Ta hay gặp chúng trong các công đoạn như hàn, sơn hay lắp ráp của công nghiệp Ôtô. Trong hình 1.1 ta gọi là **Robot công nghiệp**.

+ Loại ĐK thông minh có 2 kiểu chính :

- *Manipulator*: Là loại tay máy được ĐK trực tiếp bởi con người, có khả năng lặp lại các chuyển động của tay người. Bản chất là dạng thiết bị hỗ trợ cho sự khéo léo, cho trí tuệ, cho hệ thống giác quan (Complex Sensorics) và kinh nghiệm của người sử dụng. Hay được sử dụng trong các nhiệm vụ cần chuyển động phức hợp có tính chính xác cao, hay môi trường nguy hiểm cho sức khoẻ, môi trường khó tiếp cận v.v...

- *Telemanipulator*: Là loại Manipulator được điều khiển từ xa và người ĐK phải sử dụng hệ thống Camera để quan sát môi trường sử dụng.

Theo tiêu chuẩn châu Âu EN775 và VDI 2860 của Đức có thể hiểu “*Robot công nghiệp là một Automat sử dụng vạn năng để tạo chuyển động nhiều trực, có khả năng lập trình linh hoạt các chuỗi chuyển động và quãng đường (góc) để tạo nên chuyển động theo quy đạo. Chúng có thể được trang bị thêm các ngón (Grippe), dụng cụ hay các công cụ gia công và có thể thực hiện các nhiệm vụ của đôi tay (Handling) hay các nhiệm vụ gia công khác*”

Như vậy, RBCN khác các loại tay máy còn lại ở 2 điểm chính là “*sử dụng vạn năng*” và “*khả năng lập trình linh hoạt*”.

## I.2. Ứng dụng của Robot công nghiệp :

### I.2.1. Mục tiêu ứng dụng Robot công nghiệp :

Mục tiêu ứng dụng Robot công nghiệp nhằm nâng cao năng suất dây truyền công nghệ, giảm giá thành, nâng cao chất lượng và khả năng cạnh tranh của sản phẩm, đồng thời cải thiện điều kiện lao động. Điều đó xuất phát từ những ưu điểm cơ bản của Robot đó là :

- Robot có thể thực hiện một quy trình thao tác hợp lý bằng hoặc hơn người thợ lành nghề một cách ổn định trong suốt thời gian dài làm việc. Do đó Robot giúp nâng cao chất lượng và khả năng cạnh tranh của sản phẩm.
- Khả năng giảm giá thành sản phẩm do ứng dụng Robot là vì giảm được đáng kể chi phí cho người lao động.
- Robot giúp tăng năng suất dây chuyền công nghệ.

- Robot giúp cải thiện điều kiện lao động. Đó là ưu điểm nổi bật nhất mà chúng ta cần quan tâm. Trong thực tế sản xuất có rất nhiều nơi người lao động phải làm việc trong môi trường ô nhiễm, ẩm ướt, nóng nực. Thậm chí rất độc hại đến sức khoẻ và tính mạng như môi trường hoá chất, điện tử, phóng xạ ...

#### **I.2.2. Các lĩnh vực ứng dụng Robot công nghiệp :**

Robot công nghiệp được ứng dụng rất rộng rãi trong sản xuất, xin được nêu ra một số lĩnh vực chủ yếu :

- Kỹ nghệ đúc
- Gia công áp lực
- Các quá trình hàn và nhiệt luyện
- Công nghệ gia công lắp ráp
- Phun sơn, vận chuyển hàng hoá (Robocar)...

#### **I.2.3. Các xu thế ứng dụng Robot trong tương lai :**

- Robot ngày càng thay thế nhiều lao động
- Robot ngày càng trở lên chuyên dụng
- Robot ngày càng đảm nhận được nhiều loại công việc lắp ráp
- Robot di động ngày càng trở lên phổ biến
- Robot ngày càng trở lên tinh khôn

#### **I.2.4. Tình hình tiếp cận và ứng dụng Robot công nghiệp ở Việt Nam :**

Trong giai đoạn trước năm 1990, hầu như trong nước hoàn toàn chưa du nhập về kỹ thuật Robot, thậm chí chưa nhận được nhiều thông tin kỹ thuật về lĩnh vực này. Tuy vậy, với mục tiêu chủ yếu là tiếp cận lĩnh vực mới mẻ này trong nước đã có triển khai các đề tài nghiên cứu khoa học cấp nhà nước: Đề tài 58.01.03 và 52B.03.01.

Giai đoạn tiếp theo từ năm 1990 các ngành công nghiệp trong nước bắt đầu đổi mới. Nhiều cơ sở đã nhập ngoại nhiều loại Robot công nghiệp

phục vụ các công việc như: tháo lắp dụng cụ, lắp ráp linh kiện điện tử, hàn vỏ Ôtô xe máy, phun phủ các bề mặt ...

Một sự kiện đáng chú ý là tháng 4 năm 1998, nhà máy Rorze/Robotech đã bước vào hoạt động ở khu công nghiệp Nomura Hải Phòng. Đây là nhà máy đầu tiên ở Việt Nam chế tạo và lắp ráp Robot.

Những năm gần đây, Trung tâm nghiên cứu kỹ thuật Tự động hóa, Trường đại học Bách Khoa Hà Nội, đã nghiên cứu thiết kế một kiểu Robot mới là Robot RP. Robot RP thuộc loại Robot phòng sinh (bắt chước cơ cấu tay người). Hiện nay đã chế tạo 2 mẫu: Robot RPS-406 dùng để phun men và Robot RPS-4102 dùng trong công nghệ bê mặt.

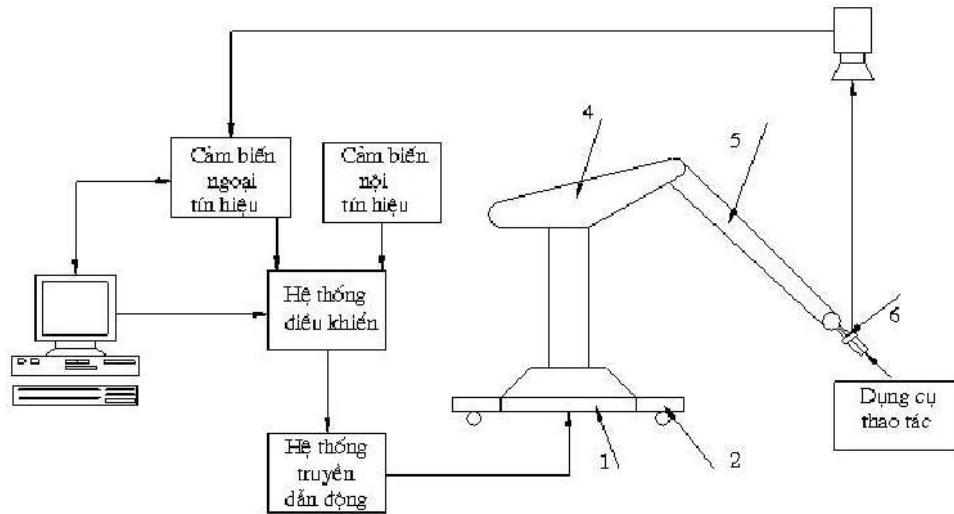
Ngoài ra Trung tâm còn chế tạo các loại Robot khác như: Robot SCA mini dùng để dạy học, Robocar công nghiệp phục vụ phân xưởng, Robocar chở thập đồ cho người tàn tật ... Bên cạnh đó còn xây dựng các thuật toán mới để điều khiển Robot, xây dựng “thư viện” các mô hình của Robot trên máy tính ...

### **I.3.Cấu trúc của Robot công nghiệp:**

#### **I.3.1.Các bộ phận cấu thành Robot công nghiệp :**

Trên hình 1.2 giới thiệu các bộ phận chủ yếu của Robot công nghiệp:

*Tay máy* gồm các bộ phận: Đầu 1 đặt cố định hoặc gắn liền với xe di động 2, thân 3, cánh tay trên 4, cánh tay dưới 5, bàn kẹp 6.



Hình 1.2: Các bộ phận cấu thành Robot công nghiệp

*Hệ thống truyền dẫn động* có thể là cơ khí, thuỷ khí hoặc điện khí: là bộ phận chủ yếu tạo nên sự chuyển dịch các khớp động.

*Hệ thống điều khiển* đảm bảo sự hoạt động của Robot theo các thông tin đặt trước hoặc nhận biết trong quá trình làm việc.

*Hệ thống cảm biến tín hiệu* thực hiện việc nhận biết và biến đổi thông tin về hoạt động của bản thân Robot (cảm biến nội tín hiệu) và của môi trường, đối tượng mà Robot phục vụ (cảm biến ngoại tín hiệu).

### I.3.2.Bậc tự do và các tọa độ suy rộng :

#### I.3.2.1.Bậc tự do :

Robot công nghiệp là loại thiết bị tự động nhiều công dụng. Cơ cấu tay máy của chúng phải được cấu tạo sao cho bàn kẹp giữ vật kẹp theo một hướng nhất định nào đó và di chuyển dễ dàng trong vùng làm việc. Muốn vậy cơ cấu tay máy phải đạt được một số *bậc tự do* chuyển động.

Thông thường các khâu của cơ cấu tay máy được nối ghép với nhau bằng các khớp quay hoặc khớp tịnh tiến. Gọi chung chúng là *khớp động*. Các khớp quay hoặc khớp tịnh tiến đều thuộc khớp động học loại 5.

Công thức tính số bậc tự do :

$$W = 6n - \sum_i^5 i p_i \quad (1.1)$$

với     n : số khâu động

$p_i$ : số khớp loại i

Ví dụ: Tay máy có 2 khớp quay như hình vẽ 1.3 :



Số khâu động n = 2

Khớp quay là khớp loại 5 .

$$\text{Do đó } W = 6.2 - (5.1 + 5.1) = 2 \\ \text{bậc tự do}$$

Hình 1.3: Tay máy 2 khớp quay

### I.3.2.2. Toa độ suy rộng :

Các cấu hình khác nhau của cơ cấu tay máy trong từng thời điểm xác định bằng các độ dịch chuyển góc hoặc độ dịch chuyển dài của các khớp quay hoặc khớp tĩnh tiến.

Các độ dịch chuyển tức thời đó, so với giá trị ban đầu nào đó lấy làm mốc tính toán, được gọi là các toạ độ suy rộng (generalized joint coordinates). Ở đây ta gọi chúng là các biến khớp (toạ độ suy rộng) của cơ cấu tay máy và biểu thị bằng :

$$q_i = \delta_i \theta_i + (1 - \delta_i) S_i$$

(1.2)

với               $\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{đối với khớp quay} \\ 0, & \text{đối với khớp tĩnh tiến} \end{cases}$

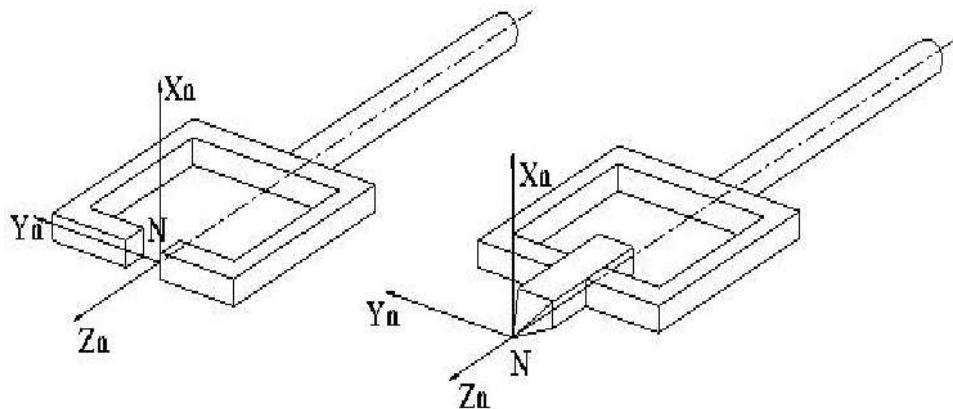
$\theta_i$  - Độ dịch chuyển góc của các khớp quay

$S_i$  - Độ dịch chuyển tịnh tiến của các khớp tịnh tiến

### **I.3.3. Nhiệm vụ lập trình điều khiển Robot:**

#### **I.3.3.1. Định vị và định hướng tại “điểm tác động cuối” :**

Khâu cuối cùng của tay máy thường là bàn kẹp (gripper) hoặc là khâu gắn liền với dụng cụ thao tác (tool). Điểm mút của khâu cuối cùng là điểm đáng quan tâm nhất vì đó là điểm tác động của Robot lên đối tác và được gọi là “điểm tác động cuối” (end-effector). Trên hình 1.4 điểm E là “điểm tác động cuối”.



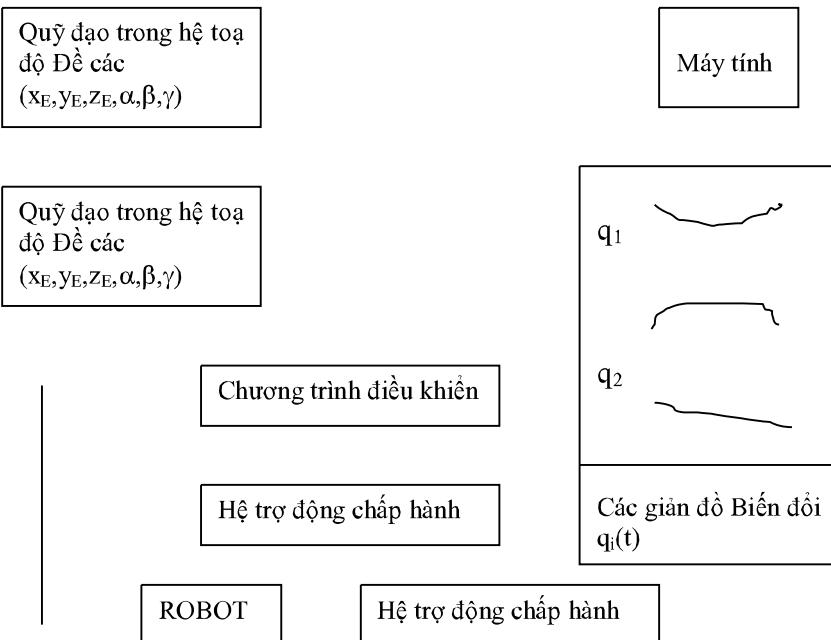
**Hình 1.4: Định vị và định hướng tại “điểm tác động cuối”**

Chính tại “điểm tác động cuối” E này cần quan tâm không những vị trí nó chiếm trong không gian làm việc mà cả hướng tác động của khâu cuối đó. Vị trí của điểm E được xác định bằng 3 tọa độ  $x_E$ ,  $y_E$ ,  $z_E$  trong hệ trục tọa độ cố định. Còn hướng tác động của khâu cuối có thể xác định bằng 3 trục  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  gắn liền với khâu cuối tại điểm E, hoặc bằng 3 thông số góc  $\alpha, \beta, \gamma$  nào đó.

#### **I.3.3.2. Lập trình điều khiển Robot công nghiệp :**

Trên hình 1.5 mô tả 1 sơ đồ lập trình điều khiển Robot công nghiệp. Khi robot nhận nhiệm vụ thực hiện một quy trình công nghệ nào đó, ví dụ

“điểm tác động cuối” E phải bám theo một hành trình cho trước. Quỹ đạo hành trình này thường cho biết trong hệ toạ độ Đề các  $x_0, y_0, z_0$  cố định. Ở mỗi vị trí mà điểm E đi qua xác định bằng 3 toạ độ cố định  $x_E, y_E, z_E$  và 3 thông số góc định hướng  $\alpha, \beta, \gamma$ . Từ các thông số trong hệ toạ độ Đề các đó tính toán các giá trị biến khớp  $q_i$  tương ứng với mỗi thời điểm t. Đó là nội dung của bài toán Động học ngược sẽ trình bày trong chương II.



Hình 1.5: Sơ đồ lập trình điều khiển

#### **I.4. Các phép biến đổi toán học cho Robot :**

##### **I.4.1. Biến đổi toa độ dùng Ma trận:**

###### **I.4.1.1. Vector điểm và toa độ thuần nhất :**

Vector điểm (point vector) dùng để mô tả vị trí của điểm trong không gian 3 chiều.

Trong không gian 3 chiều, một điểm M có thể được biểu diễn bằng nhiều vector trong các hệ toạ độ (coordinate frame) khác nhau:

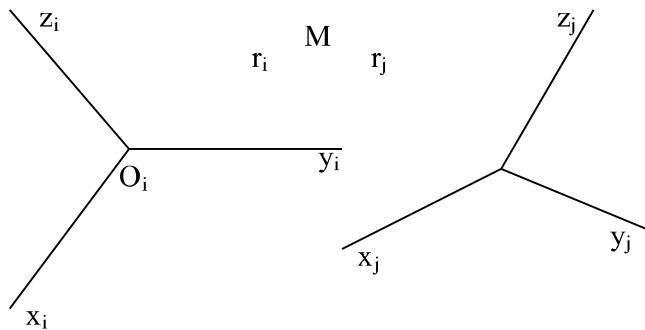
Trong hệ toạ độ  $O_i x_i y_i z_i$  điểm M xác định bằng vector  $r_i$ :

$$\mathbf{r}_i = (r_{xi}, r_{yi}, r_{zi})^T \quad (1.3)$$

và cùng điểm M đó trong hệ toạ độ  $O_j x_j y_j z_j$  được mô tả bởi vector  $r_j$ :

$$\mathbf{r}_j = (r_{xj}, r_{yj}, r_{zj})^T \quad (1.4)$$

Ký hiệu  $(\ )^T$  là biểu thị phép chuyển vị (Transportation) vector hàng thành vector cột.



Hình 1.6: Biểu diễn 1 điểm trong không gian

Vector  $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$  trong không gian 3 chiều, nếu được bổ sung thêm một thành phần thứ 4 và thể hiện bằng 1 vector mở rộng :

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\omega r_x, \omega r_y, \omega r_z, \omega) \quad (1.5)$$

thì đó là cách biểu diễn vector điểm trong không gian toạ độ thuần nhất (homogeneous coordinate).

Để đơn giản có thể bỏ qua ký hiệu  $(\ )^T$  đối với vector mở rộng (1.5)

Các toạ độ thực của vector mở rộng này vẫn là:

$$r_x = \frac{\omega r_x}{\omega} \quad r_y = \frac{\omega r_y}{\omega} \quad r_z = \frac{\omega r_z}{\omega} \quad (1.6)$$

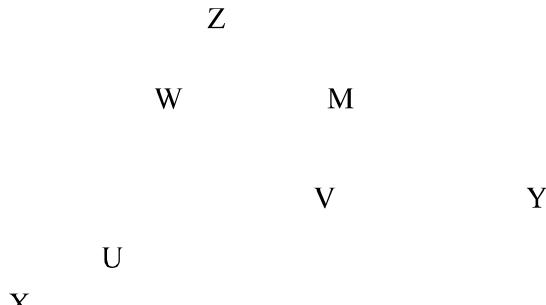
Không phải duy nhất có một cách biểu diễn vector trong không gian tọa độ thuần nhất, mà nó phụ thuộc vào giá trị của  $\omega$ . Nếu lấy  $\omega = 1$  thì các tọa độ biểu diễn bằng tọa độ có thực. Trong trường hợp này vector mở rộng được viết là:

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T \quad (1.7)$$

Nếu lấy  $\omega \neq 1$  thì các tọa độ biểu diễn gấp  $\omega$  lần tọa độ thực, nên có thể gọi  $\omega$  là *hệ số tỷ lệ*. Khi cần biểu diễn sự thay đổi tọa độ kèm theo thì có sự biến dạng tỷ lệ thì dùng  $\omega \neq 1$ .

#### I.4.1.2. Quay hệ tọa độ dùng Ma trận 3x3:

Trước hết thiết lập quan hệ giữa 2 hệ tọa độ XYZ và UVW chuyển động quay tương đối với nhau khi gốc O của 2 hệ vẫn trùng nhau (hình 1.7)



Hình 1.7: Các hệ tọa độ

Gọi  $(i_x, j_y, k_z)$  và  $(i_u, j_v, k_w)$  là các vector đơn vị chỉ phương các trục OXYZ và OUVW tương ứng.

Một điểm M nào đó được biểu diễn trong hệ tọa độ OXYZ bằng vector:

$$\mathbf{r}_{xyz} = (r_x, r_y, r_z)^T \quad (1.8)$$

còn trong hệ tọa độ OUVW bằng vector:

$$\mathbf{r}_{uvw} = (r_u, r_v, r_w)^T \quad (1.9)$$

Như vậy :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{uvw} = r_u \mathbf{i}_u + r_v \mathbf{j}_v + r_w \mathbf{k}_w \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{xyz} = r_x \mathbf{i}_x + r_y \mathbf{j}_y + r_z \mathbf{k}_z \end{aligned} \quad (1.10)$$

Từ đó ta có

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_x &= i_x \mathbf{r} = i_x i_u \mathbf{r}_u + i_x j_v \mathbf{r}_v + i_x k_w \mathbf{r}_w \\ \mathbf{r}_y &= j_y \mathbf{r} = j_y i_u \mathbf{r}_u + j_y j_v \mathbf{r}_v + j_y k_w \mathbf{r}_w \\ \mathbf{r}_z &= k_z \mathbf{r} = k_z i_u \mathbf{r}_u + k_z j_v \mathbf{r}_v + k_z k_w \mathbf{r}_w \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Hay viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_x \\ \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_x i_u & i_x j_v & i_x k_w \\ j_y i_u & j_y j_v & j_y k_w \\ k_z i_u & k_z j_v & k_z k_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_w \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Gọi  $\mathbf{R}$  là Ma trận quay (rotation)  $3 \times 3$  với các phần tử là tích vô hướng 2 vector chỉ phương các trục tương ứng của 2 hệ toạ độ OXYZ và OUVW.

Vậy (1.12) được viết lại là:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{xyz} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_{uvw} \\ \mathbf{r}_{uvw} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{xyz} \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

#### **I.4.1.3. Biến đổi Ma trận dùng tọa độ thuận nhất:**

Bây giờ thiết lập quan hệ giữa 2 hệ toạ độ: hệ toạ độ  $o_j x_j y_j z_j$  sang hệ toạ độ mới  $o_i x_i y_i z_i$ . Chúng không những quay tương đối với nhau mà tịnh tiến cả gốc toạ độ: gốc  $o_j$  xác định trong hệ  $x_i y_i z_i$  bằng vector  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = (a, -b, -c, 1)^T \quad (1.14)$$

Giả sử vị trí của điểm M trong hệ toạ độ  $x_j y_j z_j$  được xác định bằng vector  $\mathbf{r}_j$ :

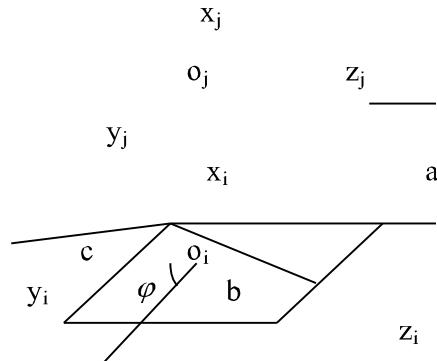
$$\mathbf{r}_j = (x_j y_j z_j, 1)^T \quad (1.15)$$

và trong hệ toạ độ  $x_i y_i z_i$  điểm M được xác định bằng vector  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{r}_i = (x_i y_i z_i, 1)^T \quad (1.16)$$

Từ hình (1.8) có thể dễ dàng thiết lập mối quan hệ giữa các toạ độ:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = x_j + at_j \\ y_i = y_j \cos \varphi - z_j \sin \varphi - bt_j \\ z_i = y_j \sin \varphi + z_j \cos \varphi - ct_j \\ t_i = t_j = 1 \end{array} \right\} \quad (1.17)$$



Hình 1.8: Các hệ toạ độ

Sắp xếp các hệ số ứng với x<sub>j</sub>, y<sub>j</sub>, z<sub>j</sub> và t<sub>j</sub> thành một ma trận:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & -b \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

và viết phương trình biến đổi toạ độ như sau:

$$r_i = T_{ij} r_j \quad (1.19)$$

Ma trận T<sub>ij</sub> biểu thị bằng ma trận 4x4 như phương trình (1.18) và gọi là ma trận thuần nhất. Nó dùng để biến đổi vector mở rộng từ hệ toạ độ thuần nhất này sang hệ toạ độ thuần nhất kia.

#### I.4.1.4. Ý nghĩa hình học của Ma trận thuần nhất:

Từ (3.19) nhận thấy ma trận thuần nhất  $4 \times 4$  là một ma trận gồm 4 khối :

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & -b \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Hoặc viết rút gọn là:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} R_{ij} & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Trong đó:

$R_{ij}$  - ma trận quay  $3 \times 3$

$p$  - ma trận  $3 \times 1$  biểu thị 3 tọa độ của điểm gốc hệ tọa độ  $0_j$  trong hệ tọa độ  $o_i, x_i, y_i, z_i$

$1 \times 3$  - ma trận không

$1 \times 1$  - ma trận đơn vị

Như vậy ma trận thuần nhất  $4 \times 4$  là ma trận  $3 \times 3$  mở rộng, thêm ma trận  $3 \times 1$  biểu thị sự chuyển dịch gốc tọa độ và phần tử  $a_{44}$  biểu thị hệ số tỷ lệ.

Dễ dàng nhận thấy ma trận  $R_{ij}$  chính là ma trận quay  $3 \times 3$ , nếu suy từ ma trận quay trong (1.12) sang trường hợp hình 1.8 ta có:

$$R_{ij} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} \cos(x_i, x_j) & \cos(x_i, y_j) & \cos(x_i, z_j) \\ \cos(y_i, x_j) & \cos(y_i, y_j) & \cos(y_i, z_j) \\ \cos(z_i, x_j) & \cos(z_i, y_j) & \cos(z_i, z_j) \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

và các góc cosin chỉ phương này đều liên hệ đến góc  $\varphi$  (hình 1.8).

Nếu chú ý về quan hệ giữa 2 cặp trực, ví dụ,  $\cos(x_i, y_j) = \cos(y_i, x_j) \dots$

ở đây dễ dàng nhận được biểu thức:

$$R_{ij} = R_{ij}^{-1} = R_{ij}^T \quad (1.23)$$

Mô tả tổng quát hơn nếu một điểm M nào đó được xác định trong hệ toạ độ thuần nhất UVW bằng vectơ mờ rộng  $r_{uvw}$ , thì trong hệ toạ độ thuần nhất XYZ điểm đó xác định bằng vector mờ rộng  $r_{xyz}$ :

$$R_{xyz} = T \cdot r_{uvw} \quad (1.24)$$

Trong đó T là ma trận thuần nhất  $4 \times 4$ , có thể viết khai triển ở dạng sau:

$$T = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\text{hoặc } T = \begin{pmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Ta tìm hiểu ý nghĩa hình học của ma trận T. Như đã trình bày khi phân tích các khối của ma trận  $4 \times 4$ , ma trận  $3 \times 1$  tương ứng với toạ độ điểm gốc của hệ toạ độ UVW biểu diễn trong hệ XYZ.

Nếu 2 gốc toạ độ trùng nhau thì các thành phần của ma trận  $3 \times 1$  này đều là 0. Khi đó xét trường hợp:

$$r_{uvw} = (1, 0, 0, 1)^T$$

$$\text{tức là } r_{xyz} = i_u$$

thì dễ dàng nhận thấy cột thứ nhất hoặc vectơ  $n$  của ma trận (1.25) chính là các toạ độ của vectơ chỉ phương trục OU biểu diễn trong hệ toạ độ XYZ.

Tương tự khi xét các trường hợp

$$r_{uvw} = (0, 1, 0, 1)^T$$

$$\text{và } r_{uvw} = (0, 0, 1, 1)^T$$

cũng đi đến nhận xét cột thứ 2 (hoặc vectơ  $s$ ) ứng với các toạ độ của vectơ chỉ phương trực OV và cột thứ 3 (hoặc vectơ  $a$ ) ứng với các toạ độ vector chỉ phương trực OW.

Như vậy, ma trận thuận nhất  $T$   $4x4$  hoàn toàn xác định vị trí và định hướng của hệ toạ độ  $UVW$  so với hệ toạ độ  $XYZ$ . Đó là ý nghĩa hình học của ma trận thuận nhất  $4x4$ .

#### I.4.2.Các phép biến đổi cơ bản:

##### I.4.2.1.Phép biến đổi tịnh tiến:

Từ (1.18) hoặc (1.25), biểu thị ma trận thuận nhất khi chỉ có biến đổi tịnh tiến mà không có quay ( $\varphi = 0$ ), ta có:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_p(p_x, p_y, p_z) \quad (1.27)$$

Đó là ma trận biến đổi tịnh tiến (Tranlation)

Gọi  $\mathbf{u}$  là vector biểu diễn một điểm trong không gian cần dịch chuyển tịnh tiến:

$$\mathbf{u} = (x, y, z)^T$$

và  $\mathbf{p}$  là vector chỉ hướng và độ dài cần dịch chuyển

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$$

thì  $\mathbf{v}$  là vector biểu diễn điểm toạ độ trong không gian đã được tịnh tiến tới:

$$\mathbf{v} = T_p(\mathbf{v}) = T_p(p_x, p_y, p_z)^T \mathbf{u} \quad (1.28)$$

##### I.4.2.2. Phép quay quanh các trục toạ độ :

Từ ma trận quay  $3 \times 3$  trong biểu thức (1.12) ta xây dựng ma trận  $R(x, \alpha)$  cho trường hợp hệ toạ độ UVW quay quanh trục OX một góc  $\alpha$  nào đó. Trong trường hợp này  $i_x = i_u$ :

$$R(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Tương ứng cho trường hợp quay quanh trục OY một góc  $\varphi$ :

$$R(y, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

và trường hợp quay quanh trục OZ một góc  $\theta$ :

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Cột thứ 4 của các ma trận  $4 \times 4$  trên có 3 phần tử đều bằng 0 vì ở đây không có sự tịnh tiến. Các ma trận này được gọi là các ma trận quay (rotation) cơ bản. Các ma trận quay khác có thể xây dựng từ các ma trận cơ bản này.

**CHƯƠNG II: HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG HỌC VÀ ĐỘNG LỰC HỌC  
CỦA ROBOT CÔNG NGHIỆP:**

**II.1. Hệ phương trình động học Robot :**

**II.1.1. Đặt vấn đề :**

Cơ cấu chấp hành của Robot thường là một cơ cấu hở gồm một chuỗi các khâu (link) nối với nhau bằng các khớp (joints). Các khớp động này là khớp quay (R) hoặc khớp tịnh tiến (T). Để Robot có thể thao tác linh hoạt cơ cấu chấp hành của nó phải có cấu tạo sao cho điểm mút của khâu cuối cùng đảm bảo dễ dàng di chuyển theo một quỹ đạo nào đó, đồng thời khâu này có một hướng nhất định theo yêu cầu. Khâu cuối cùng này thường là bàn kẹp (gripper), điểm mút của nó chính là “điểm tác động cuối” E (end-effector).

Để xét vị trí và hướng của E trong không gian ta gắn vào nó một hệ toạ độ động thứ n và gắn với mỗi khâu động một hệ toạ độ khác, còn gắn liền với giá đỡ một hệ toạ độ cố định. Dánh số ký hiệu các hệ này từ 0 đến n bắt đầu từ giá cố định. Khi khảo sát chuyển động của Robot cần biết “định vị và định hướng” tại điểm tác động cuối trong mọi thời điểm. Các lời giải của bài toán này được xác định từ những phương trình Động học của Robot. Các phương trình này là mô hình Động học của Robot. Chúng được xây dựng trên cơ sở thiết lập các mối quan hệ giữa các hệ toạ độ động nói trên so với hệ toạ độ cố định.

**II.1.2. Xác định trạng thái của Robot tại điểm tác động cuối :**

Trạng thái của Robot tại “điểm tác động cuối” hoàn toàn xác định bằng sự định vị và định hướng tại điểm tác động cuối đó.

Như đã đề cập ở phần I.4.1.4 biểu thị sự định vị và định hướng đó bằng ma trận trạng thái cuối  $T_E$ :

$$T_E = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & n_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Trong đó các phần tử của ma trận  $3 \times 1$  là tọa độ  $p_x, p_y, p_z$  của “điểm tác động cuối” E. Mỗi cột của ma trận quay  $3 \times 3$  là một vectơ đơn vị chỉ phương một trục của hệ tọa độ động NSA (chính là UVW) biểu diễn trong tọa độ cố định XYZ.

Hệ tọa độ gắn liền với bàn kẹp của Robot có các vectơ đơn vị chỉ phương các trục như sau :

a - vector có hướng tiếp cận (approach) với đối tác .

s - vector có hướng đường trượt (sliding) đóng mở bàn kẹp .

n - vector pháp tuyến (normal).

### **II.1.3. Mô hình động học :**

#### **II.1.3.1. Ma trận quan hệ :**

Chọn hệ tọa độ cố định gắn liền với giá đỡ và các hệ tọa độ gắn với từng khâu động. Ký hiệu các hệ tọa độ này từ 0 đến n, kể từ giá cố định trở đi.

Một điểm bất kì nào đó trong không gian được xác định trong hệ tọa độ thứ i bằng bán kính  $r_i$  và trong hệ tọa độ cố định  $x_0, y_0, z_0$  được xác định bằng bán kính vector  $r_0$ :

$$r_0 = A_1 A_2 \dots A_i r_i \quad (2.2)$$

$$\text{hoặc} \quad r_0 = T_i r_i \quad (2.3)$$

$$\text{với} \quad T_i = A_1 A_2 \dots A_i, i=1, 2, \dots n \quad (2.4)$$

Trong đó ma trận  $A_1$  mô tả vị trí hướng của khâu đầu tiên; ma trận  $A_2$  mô tả vị trí và hướng của khâu thứ 2 so với khâu đầu; ma trận  $A_i$  mô tả vị trí và hướng của khâu thứ i so với khâu thứ i-1.

Như vậy, tích của các ma trận  $A_i$  là ma trận  $T_i$  mô tả vị trí và hướng của khâu thứ  $i$  so với giá trị cố định. Thường kí hiệu ma trận  $T$  với 2 chỉ số: trên và dưới. Chỉ số dưới chỉ khâu đang xét còn chỉ số trên để chỉ toạ độ được dùng để đổi chiều. Ví dụ, biểu thức (2.4) có thể viết lại là :

$$T_i = {}^0T_i = A_i {}^1T_i \quad (2.5)$$

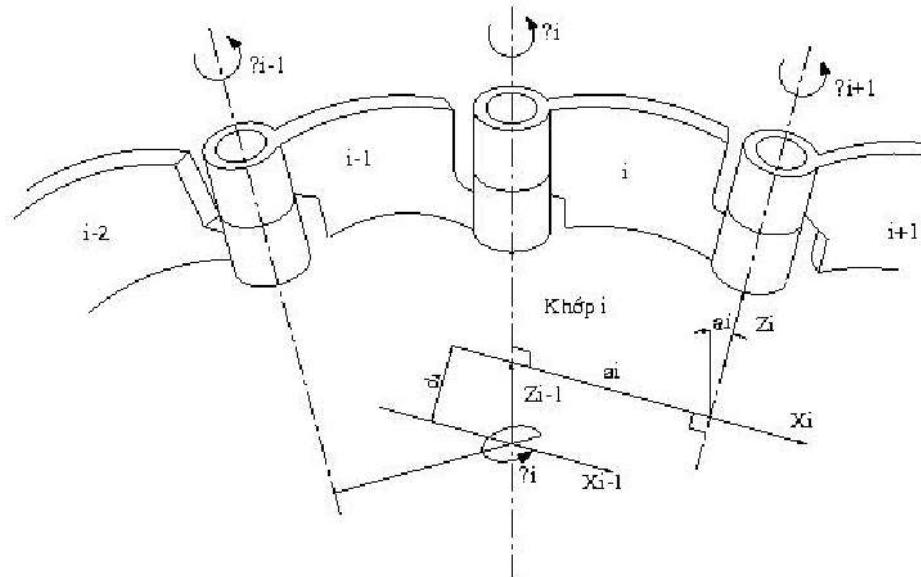
với  ${}^1T_i = A_2 A_3 \dots A_i$  (2.6)

là ma trận mô tả vị trí và hướng của khâu thứ  $i$  so với khâu thứ nhất. Trong kí hiệu thường bỏ qua chỉ số trên nếu chỉ số đó bằng 0.

Denavit & Hartenberg đã đề xuất dùng ma trận thuần nhất  $4 \times 4$  mô tả quan hệ giữa 2 khâu liên tiếp trong cơ cấu không gian .

#### **II.1.3.2. Bộ thông số DH :**

Dưới đây trình bày cách xây dựng các hệ toạ độ đối với 2 khâu động liên tiếp  $i$  và  $i+1$ . Hình dưới đây là trường hợp 2 khớp động liên tiếp là 2 khớp quay.



Hình 2.1: Các hệ toạ độ đối với 2 khâu động liên tiếp

Trước hết xác định bộ thông số cơ bản giữa 2 trục quay của khớp động i+1 và i :

$a_i$  là độ dài đường vuông góc chung giữa 2 trục khớp động i+1 và i .

$\alpha_i$  là góc chéo giữa 2 trục khớp động i+1 và i .

$d_i$  là khoảng cách đo dọc trục khớp động i từ đường vuông góc chung giữa trục khớp động i+1 và trục khớp động i tới đường vuông góc chung giữa khớp động i và trục khớp động i -1.

$\theta_i$  là góc giữa 2 đường vuông góc chung nói trên.

Bộ thông số này được gọi là bộ thông số Denavit – Hartenberg (DH).

*Biến khớp* (joint variable):

Nếu khớp động i là khớp quay thì biến khớp là  $\theta_i$

Nếu khớp động i là khớp tịnh tiến thì biến khớp là  $d_i$

Để kí hiệu thêm biến khớp dùng thêm dấu \* và trong trường hợp khớp tịnh tiến thì  $a_i$  được xem là bằng 0.

### II.1.3.3. Thiết lập hệ toạ độ :

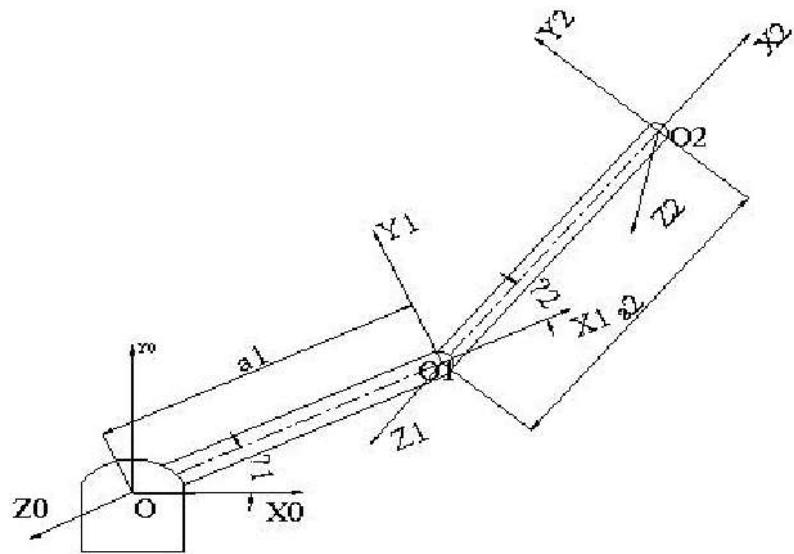
Gốc của hệ toạ độ gắn liền với khâu thứ i (gọi là hệ toạ độ thứ i) đặt tại giao điểm giữa đường vuông góc chung ( $a_i$ ) và trục khớp động i+1.

Trường hợp 2 trục giao nhau thì gốc hệ toạ độ lấy trùng với giao điểm đó. Nếu 2 trục song song với nhau thì chọn gốc toạ độ là điểm bất kì trên trục khớp động i+1.

Trục  $z_i$  của hệ toạ độ thứ i nằm dọc theo trục khớp động i+1.

Trục  $x_i$  của hệ toạ độ thứ i nằm dọc theo đường vuông góc chung hướng từ khớp động i đến khớp động i+1. Trường hợp 2 trục giao nhau, hướng trục  $x_i$  trùng với hướng vector tích  $z_i \times z_{i-1}$ , tức là vuông góc với mặt phẳng chứa  $z_i, z_{i-1}$ .

Ví dụ : Xét tay máy có 2 khâu phẳng như hình 2.2.

**Hình 2.2: Tay máy 2 khớp phẳng (vị trí bất kỳ)**

Gắn các hệ toạ độ với các khâu như hình vẽ :

- Trục  $z_0, z_1$  và  $z_2$  vuông góc với mặt tờ giấy.
- Hệ toạ độ cố định là  $o_0x_0y_0z_0$  chiều  $x_0$  hướng từ  $o_0$  đến  $o_1$ .
- Hệ toạ độ  $o_1x_1y_1z_1$  có gốc  $o_1$  đặt tại tâm trực khớp động 2.
- Hệ toạ độ  $o_2x_2y_2z_2$  có gốc  $o_2$  đặt tại tâm trực khớp động cuối khâu 2.

**Bảng thông số DH của tay máy này như sau :**

Khâu	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$\theta_1^*$	0	$a_1$	0
2	$\theta_2^*$	0	$a_2$	0

#### II.1.3.4. Mô hình biến đổi :

Trên cơ sở đã xây dựng các hệ toạ độ với 2 khâu động liên tiếp như trên đã trình bày. Có thể thiết lập mối quan hệ giữa 2 hệ toạ độ liên tiếp theo 4 phép biến đổi :

- + Quay quanh trục  $z_{i-1}$  góc  $\theta_i$ .
- + Tịnh tiến dọc trục  $z_{i-1}$  một đoạn  $d_i$ .
- + Tịnh tiến dọc trục  $x_{i-1}$  (đã trùng với  $x_i$ ) một đoạn  $a_i$ .
- + Quay quanh trục  $x_i$  một góc  $\alpha_i$ .

Bốn phép biến đổi này được biểu thị bằng tích các ma trận thuần nhất sau

$$A_i = R(z, \theta_i) \cdot T_p(0, 0, d_i) \cdot T_p(a_i, 0, 0) \cdot R(x, \alpha_i) \quad (2.7)$$

Các ma trận ở vé phải phương trình (2.7) tính theo các công thức (1.27),(1.29),(1.31). Sau khi thực hiện phép nhân các ma trận nói trên, ta có:

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i C_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_i S_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Trong khớp tịnh tiến :  $a = 0$  .

#### **II.1.3.5. Phương trình động học :**

Với Robot có n khâu, ma trận mô tả vị trí và hướng điểm cuối E của tay máy được miêu tả :

$$T_n = A_1 A_2 \dots A_n \quad (2.9)$$

Mặt khác, hệ toạ độ tại “điểm tác động cuối” này được mô tả bằng ma trận  $T_E$ . Vì vậy hiển nhiên là:

$$T_E = T_n \quad (2.10)$$

Tức là ta có :

$$T_n = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & n_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Phương trình (2.11) là phương trình động học cơ bản của Robot.

## II.2. Tổng hợp chuyển động Robot :

### II.2.1. Nhiệm vụ :

Nhiệm vụ tổng hợp chuyển động bao gồm việc xác định các bộ lời giải  $q_i(t)$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), với  $q_i$  là tọa độ suy rộng hoặc là biến khớp.

Biết quy luật chuyển động của bàn kẹp, cần xác định quy luật thay đổi các biến khớp tương ứng. Đó là nội dung chính của việc tổng hợp quỹ đạo chuyển động Robot.

Có thể xem quỹ đạo chuyển động là tập hợp liên tiếp các vị trí khác nhau của bàn kẹp. Tại mỗi vị trí trên quỹ đạo cần xác định bộ thông số các biến khớp  $q_i$ . Đó là nội dung của bài toán động học ngược (inverse kinematics problem) của Robot.

### II.2.2. Bài toán động học ngược :

Bài toán động học ngược được đặc biệt quan tâm vì lời giải của nó là cơ sở chủ yếu để xây dựng chương trình điều khiển chuyển động của Robot bám theo quỹ đạo cho trước.

Xuất phát từ phương trình động học cơ bản (2.11) ta có :

$$T_n = A_1 A_2 \dots A_n = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & n_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Các ma trận  $A_i$  là hàm của các biến khớp  $q_i$ . Vector định vị bàn kẹp  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$  cũng là hàm của  $q_i$ . Các vector  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{a}$  là các vector đơn vị chỉ phương các trục của hệ tọa độ gắn liền với bàn kẹp biểu diễn trong hệ tọa độ cố định XYZ. Các vector này vuông góc với nhau từng đôi một nên

trong 9 thành phần của chúng chỉ tồn tại độc lập chỉ có 3 thành phần. Hai ma trận ở về phải và về trái của phương trình (2.12) đều là các ma trận thuần nhất  $4 \times 4$ . So sánh các phần tử tương ứng của 2 ma trận trên ta có 6 phương trình độc lập với các ẩn  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

### **II.2.3. Các phương pháp giải bài toán động học ngược :**

Trường hợp tổng quát ta xét hệ phương trình động học của Robot có  $n$  bậc tự do.

Về trái của phương trình (2.12) theo các kí hiệu như (2.4)-(2.6) có thể viết lại như sau:

$$T_n = T_{i'}^i T_n \quad (2.13)$$

Nhân 2 vế của (2.13) với  $T_i^{-1}$  ta có:

$$A_i^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1} T_n = {}^i T_n \quad (2.14)$$

Kết hợp (2.12) ta có:

$${}^i T_n = A_i^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

với  $i=1, \dots, n-1$

Úng với mỗi giá trị của  $i$ , khi so sánh các phần tử tương ứng của 2 ma trận ở biểu thức (2.15) ta có 6 phương trình tồn tại độc lập để xác định biến khớp  $q_i$ .

## **II.3. Động lực học Robot:**

### **II.3.1.Nhiệm vụ và phương pháp phân tích Động lực học Robot:**

Nghiên cứu Động lực học Robot là giai đoạn cần thiết trong việc phân tích cũng như tổng hợp quá trình điều khiển chuyển động. Trong nghiên cứu Động lực học Robot thường giải quyết 2 nhiệm vụ sau đây :

+ Nhiệm vụ thứ nhất là xác định momen và lực động xuất hiện trong quá trình chuyển động. Khi đó quy luật biến đổi của biến khớp  $q_i(t)$  xem như đã biết.

+ Nhiệm vụ thứ hai là xác định các sai số động. Lúc này phải khảo sát các phương trình chuyển động của cơ cấu tay máy đồng thời xem xét các đặc tính động lực của động cơ truyền động.

Có nhiều phương pháp nghiên cứu Động lực học Robot nhưng thường dùng hơn cả là phương pháp Lagrange bậc 2 vì khi kết hợp với mô hình Động lực học kiểu DH (Denavit-Hartenberg) ta sẽ được các phương trình Động lực học ở dạng vector ma trận, rất gọn nhẹ và thuận tiện cho việc nghiên cứu giải tích và tính toán trên máy tính.

Các phương trình Động lực học Robot được thiết lập dựa trên cơ sở phương trình Lagrange bậc 2:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{Mi} \quad , i=1,\dots,n \quad (2.16)$$

Trong đó :

$$L - \text{hàm Lagrange} \quad L = K - P \quad (2.17)$$

K, P - động năng và thế năng của cơ hệ.

$F_{Mi}$  - động lực, hình thành trong khớp động thứ i khi thực hiện chuyển động.

$q_i$  - biến khớp (tọa độ suy rộng)

$\dot{q}_i$  - đạo hàm bậc nhất của biến khớp theo thời gian.

Đồng thời khi mô tả vị trí giữa 2 hệ tọa độ thứ i và i-1 dùng ma trận thuần nhất  $A_i$  hoặc viết đầy đủ hơn là  ${}^{i-1}A_i$ . Dùng ma trận này có thể mô tả vị trí trạng thái trong hệ tọa độ thứ i-1 của một điểm bất kì thuộc hệ tọa độ thứ i.

Các biến khớp  $q_i$  là bộ các thông số dịch chuyển của các khớp động của Robot. Vị trí trạng thái của điểm tác động cuối của Robot hoàn toàn được xác định bởi bộ biến khớp  $q_i$  này.

### II.3.2. Vận tốc và gia tốc:

Để xây dựng mô hình Động lực học Robot dùng phương trình Lagrange bậc 2, cần biết vận tốc của điểm bất kì trên tay máy.

Điểm M nào đó trong hệ toạ độ i, xác định bằng véc tơ mở rộng  ${}^i r_i$ :

$${}^i r_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T, \quad (2.18)$$

Kí hiệu  ${}^i r_i$  có nghĩa là điểm M cho biết trong hệ toạ độ i và được biểu thị cũng trong hệ toạ độ i. Còn khi dùng kí hiệu  ${}^0 r_i$  thì có nghĩa là điểm M cho biết trong hệ toạ độ i, nhưng được biểu thị trong hệ toạ độ  $x_0, y_0, z_0$ , tức là trong hệ toạ độ cơ bản.

Như trước đây, dùng ma trận  ${}^{i-1} A_i$  để mô tả vị trí tương đối giữa hệ toạ độ thứ i đối với hệ toạ độ i-1 và ma trận  ${}^0 A_i$  để mô tả quan hệ giữa hệ toạ độ thứ i và hệ toạ độ cơ bản.

Vậy quan hệ giữa  ${}^0 r_i$  và  ${}^{i-1} r_i$  có thể biểu thị như sau :

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i \quad (2.19)$$

$$\text{với } {}^0 A_i = {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i \quad (2.20)$$

Ma trận  ${}^{i-1} A_i$  đã có từ biểu thức (2.8):

$${}^{i-1} A_i = \begin{bmatrix} C_{\alpha} & -C_{\alpha} S_{\alpha} & S_{\alpha} S_{\alpha} & a_i C_{\alpha} \\ S_{\alpha} & C_{\alpha} C_{\alpha} & -S_{\alpha} C_{\alpha} & a_i S_{\alpha} \\ 0 & S_{\alpha} & C_{\alpha} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Biểu thức (2.21) là viết cho trường hợp khớp quay i, còn nếu khớp động là khớp tịnh tiến thì  $a_i = 0$  và từ (2.21) ta có :

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C_{\alpha} & -C_{\alpha i}S_{\alpha i} & S_{\alpha i}S_{\alpha} & 0 \\ S_{\alpha i} & C_{\alpha i}C_{\alpha i} & -S_{\alpha i}C_{\alpha i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha i} & C_{\alpha i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Đối với khớp quay thì  $\theta_i$  là biến khớp và đối với khớp tịnh tiến thì  $d_i$  là biến khớp.

Các phần tử khác không của ma trận  ${}^0A_i$  đều là hàm của  $\theta_j$ ,  $d_j$ ,  $\alpha_j$  và  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, i$ ). Trong đó  $\alpha_i$ ,  $\alpha_j$  lại là thông số xác định bằng cấu trúc cụ thể của tay máy. Do vậy các phần tử này là hàm của biến khớp  $q_i$  nói chung ( $q_i \equiv \theta_j$  đối với khớp quay và  $q_i \equiv d_i$  đối với khớp tịnh tiến).

Vì phân biểu thức (2.19) với lưu ý rằng các vectơ  ${}^i r_i$  là không đổi với hệ toạ độ thứ  $i$  vì giả thiết rằng các khâu của tay máy là vật rắn tuyệt đối, ta có:

$$\begin{aligned} {}^0V_i \equiv V_i &= \frac{d}{dt}({}^0r_i) = \frac{d}{dt}({}^0A_i {}^i r_i) = \\ &= {}^0\dot{A}_i {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i {}^i r_i + {}^0A_i {}^1\dot{A}_2 \dots {}^{i-1}A_i {}^i r_i + \dots + {}^0A_i \dots {}^{i-1}\dot{A}_i {}^i r_i + {}^0A_i {}^i \dot{r}_i \\ {}^0V_i &= \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0A_i}{\partial q_j} \right] {}^i r_i \end{aligned} \quad (2.23)$$

Đạo hàm của ma trận  ${}^{i-1}A_i$  đối với biến khớp  $q_i$  có thể dễ dàng xác định theo công thức sau :

$$\frac{d^{i-1}A_i}{dq_i} = D_i^{i-1}A_i \quad (2.24)$$

Trong đó đối với khớp quay :

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

và đối với khớp tịnh tiến :

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Trong trường hợp  $i = 1, 2, \dots, n$  ta có :

$$\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} (A_1 A_2 \dots A_{j-1} A_j \dots A_{i-1} A_i) \quad (2.27)$$

Trong các ma trận bên vế phải chỉ có  $A_j$  phụ thuộc vào  $q_j$ , do đó theo (2.24) ta có :

$$\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j} = A_1 A_2 \dots A_{j-1} \frac{dA_j}{dq_j} \dots A_{i-1} A_i \quad (2.28)$$

với  $D_j$  tính theo (2.25) hoặc (2.26) :

$$\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j} = A_1 A_2 \dots A_{j-1} D_j \dots A_{i-1} A_i \quad (2.29a)$$

Phương trình (2.29a) mô tả sự thay đổi vị trí các điểm của khâu thứ  $i$  gây nên bởi sự dịch chuyển của khớp động thứ  $j$ .

Kí hiệu về trái của (2.29a) là  $U_{ij}$  và đơn giản hóa cách viết (2.29a) như sau :

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} D_j^{j-i} A_i, & j \leq i \\ 0, & j > i \end{cases} \quad (2.29b)$$

vậy công thức (2.23) có thể viết lại là:

$$V_i = \left[ \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right] r_i \quad (2.30)$$

Tiếp theo, từ biểu thức (2.23) xác định gia tốc:

$$a = \frac{dV_i}{dt} = \left[ \sum_{s=1}^i \frac{\partial^0 A_s}{\partial q_s} \ddot{q}_s + \sum_{s=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^2 A_s}{\partial q_s \partial q_k} \dot{q}_s \dot{q}_k \right] r_i \quad (2.31)$$

### **II.3.3. Động năng tay máy:**

Kí hiệu  $K_i$  là động năng của khâu  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) và  $dK_i$  là động năng của một chất điểm khói lượng  $dm$  thuộc khâu  $i$ :

$$dK_i = \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)dm = \frac{1}{2}Tr(V_i V_i^T)dm \quad (2.32)$$

Trong đó Tr là vết của ma trận :

$$\text{Tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i U_{ip} \dot{q}_p^T r_i \left[ \sum_{r=1}^i U_{ir} \dot{q}_r^T r_i \right]^T \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip}^T r_i^T r_i^T U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip}^T (\dot{r}_i^T dm) r_i^T U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Như đã nói ở trên ma trận  $U_{ij}$  biểu thị sự thay đổi vị trí của các điểm thuộc khâu  $i$  gây nên bởi sự dịch chuyển của khớp động  $j$ . Ma trận này đều như nhau tại mọi thời điểm thuộc khâu  $i$  và không phụ thuộc vào sự phân bố khói lượng trên khâu  $i$ , tức là không phụ thuộc vào  $dm$ . Cũng vậy, đạo hàm của biến khớp  $q_i$  theo thời gian không phụ thuộc vào  $dm$ . Do vậy ta có:

$$K_i \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left( \int \dot{r}_i^T dm \right) r_i^T U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.34)$$

Phần trong ngoặc đơn là ma trận quán tính  $J_i$  của khâu  $i$ :

$$J_i = \int \dot{r}_i^T r_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int z_i y_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Nếu dùng Tenso quán tính  $I_{ij}$ :

$$I_{ij} = \int \left[ \delta_{ij} \left[ \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right] \right] dm, \quad (2.36)$$

Với các chỉ số  $i, j, k$  lấy lần lượt bằng các giá trị  $x_i, y_i, z_i$ , đó là các trục của hệ toạ độ  $i$ , và  $\delta_{ij}$  là kí hiệu Cronecke, thì ma trận  $J_i$  có thể biểu thị ở dạng sau:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Ở đây  $\bar{r}_i^T = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  - bán kính vector biểu diễn trọng tâm

của khâu thứ  $i$  trong hệ toạ độ  $i$ . Công thức (2.37) viết thành :

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-k_{i11}^2 + k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i12}^2 & k_{i13}^2 & \bar{x}_i \\ k_{i12}^2 & \frac{k_{i11}^2 - k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i23}^2 & \bar{y}_i \\ k_{i13}^2 & k_{i23}^2 & \frac{k_{i11}^2 + k_{i22}^2 - k_{i33}^2}{2} & \bar{z}_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Ở đây  $K_{ijk} = \frac{I_{jk}}{m_i}$  và  $j = 1, 2, 3 ; k = 1, 2, 3$

$r_i^T = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  - bán kính véc tơ biểu diễn trọng tâm của

khâu thứ  $i$  trong hệ toạ độ  $i$ .

Vậy, động năng của toàn cơ cấu tay máy bằng tổng đại số động năng của các khâu động :

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} J_i U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[ \text{Tr} (U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.39)$$

Lưu ý rằng, các ma trận  $J_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) chỉ phụ thuộc vào sự phân bố khối lượng của khâu  $i$  trong hệ toạ độ  $i$  mà không phụ thuộc vào vị trí và vận tốc. Vì thế cần tính ma trận  $J_i$  chỉ 1 lần.

#### II.3.4 .Thé năng tay máy:

Thé năng  $P_i$  của khâu  $i$ :

$$P_i = -m_i \cdot g \cdot {}^0 r_i = -m_i \cdot g \cdot ({}^0 A_i^{-1} r_i) \quad (2.40)$$

$i=1,2,\dots,n$

Trong đó

${}^i r_i$  ,  ${}^0 r_i$  - bán kính vec tơ biểu diễn trọng tâm của khâu  $i$  trong hệ toạ độ cơ bản .

$g$  - vector gia tốc trọng trường,  $g = (0, 0, -g, 0)$

( gia tốc trọng trường  $g = 9,8062 \text{ m/s}^2$  )

Thé năng của toàn cơ cấu  $n$  khâu động :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = -\sum_{i=1}^n m_i g ({}^0 A_i^{-1} r_i) \quad (2.41)$$

#### II.3.5.Mô hình động lực học tay máy:

Để xây dựng mô hình động lực học tay máy dùng phương trình Lagrange bậc 2 (phương trình 2.16):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_M, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Phương trình trên cho biểu thức tính động lực  $F_M$ . Đó là lực hoặc mô men tạo nên bởi nguồn động lực ở khớp động  $i$  để thực hiện chuyển động khâu  $i$ .

Thay (2.39), (2.41) vào (2.16), cuối cùng ta có :

$$F_{Mi} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j T_r(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j Tr(U_{ikm} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=1}^n m_j g U_{ji}^{-1} r_j \quad i=1,2, \dots, n \quad (2.42)$$

Biểu thức (2.42) có thể viết gọn lại như sau :

$$F_{Mi} = \sum_{j=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i \quad (2.43)$$

Hoặc là dưới dạng ma trận :

$$F_M = D(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) + c(q) \quad (2.44)$$

Trong đó :

$F_M(t)$  – vector ( $n \times 1$ ) lực động, tạo nên ở  $n$  khớp động :

$$F_M(t) = [F_{M1}(t), F_{M2}(t), \dots, F_{Mn}(t)]^T \quad (2.45)$$

$q(t)$  – vector ( $n \times 1$ ) biến khớp :

$$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \quad (2.46)$$

$\dot{q}(t)$  - vec tơ ( $n \times 1$ ) tốc độ thay đổi biến khớp :

$$\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T \quad (2.47)$$

$\ddot{q}(t)$  - vectơ ( $n \times 1$ ) gia tốc biến khớp :

$$\ddot{q}(t) = [\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t)]^T \quad (2.48)$$

$D(q)$  – Ma trận ( $n \times n$ ), có các phần tử  $D_{ik}$  sau đây :

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n Tr(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.49)$$

$H(q, \dot{q})$  – vectơ ( $n \times 1$ ) lực ly tâm và Coriolis

$$h(q, \dot{q}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$$

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(U_{ikm} J_j U_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n \quad (2.51)$$

$C(q)$  – vec tơ ( $n \times 1$ ) lực trọng trường.

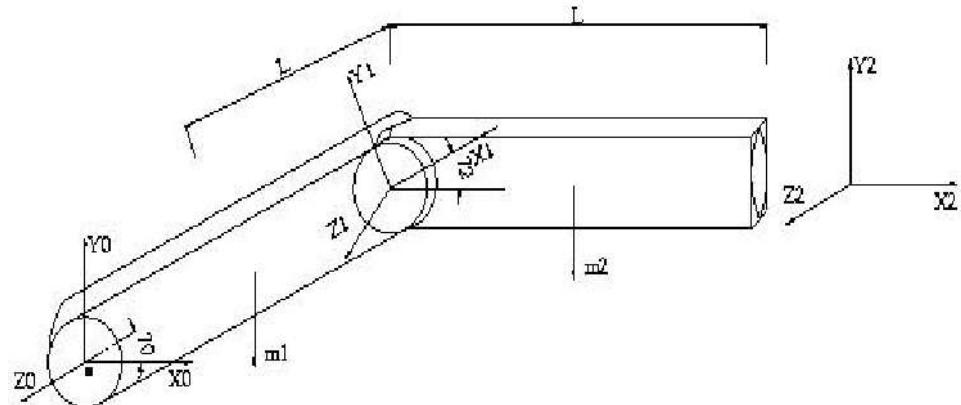
$$c(q) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \quad c_i = \sum_{j=1}^n \left( -m_i g U_{ji}^T \bar{r}_j \right) \quad (2.52)$$

### II.3.6. Động lực học của cơ cấu tay máy 2 khâu:

Trong phần này dẫn ra ví dụ minh họa xây dựng mô hình động lực học của cơ cấu tay máy 2 khâu toàn khớp (hình 2.3).

Như đã chỉ trên hình 2.3 các trục  $Z_i$  đều trùng phương với các trục khớp quay động. Khối lượng của các khâu tương ứng là  $m_1, m_2$ ; Bộ thông số DH của tay máy ghi trong bảng sau :

Khâu	$\theta_i$	$\alpha_i$	$A_i$	$d_i$	Khớp
1	$\theta_i^*$	0	1	0	R
2	$\theta_i^*$	0	1	0	R



Hình 2.3: Cơ cấu tay máy 2 khâu

Các ma trận  ${}^{i-1}A_i$  ( $i = 1, 2$ ) sẽ là :

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vẫn như trước đây dùng các kí hiệu sau :

$$C_i = \cos \theta_i; S_i = \sin \theta_i; C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j); S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j).$$

Theo (2.30), ta có :

$$U_{11} = \frac{\partial {}^0A_1}{\partial \theta_1} = D_1 {}^0A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & +lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tương tự, đối với  $U_{12}$ , và  $U_{22}$  :

$$U_{21} = \frac{\partial {}^0A_2}{\partial \theta_1} = D_2 {}^0A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial {}^0A_2}{\partial \theta_2} = {}^0A_1 D_2 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Theo (2.37) và giả thiết cả các thành phần mômen ly tâm quán tính đều bằng 0, ta có :

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 & 0 & 0 & -1/2m_1l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_1l^2 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l^2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

Trên cơ sở (2.49), ta có :

$$D_{11} = T_2 \left( U_{11} J_1 U_{11}^T \right) + T_2 \left( U_{21} J_2 U_{21}^T \right) = T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 & 0 & 0 & -1/2m_1l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_1l^2 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} U_{11}^T \right\} +$$

$$+ T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + C_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l^2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{21}^T \right\} = 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l^2 + m_2C_2l^2$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22} J_2 U_{21}^T) = T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l^2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{21}^T \right\}$$

$$= m_2l^2(-1/6 + 1/2 + 1/2C_2) = 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2 .$$

$$D_{22} = Tr(U_{22} J_2 U_{22}^T) = T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l^2 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{22}^T \right\}$$

$$= 1/3m_2l^2 S_{12}^2 + 1/3m_2l^2 C_{12}^2 = 1/3m_2l^2 .$$

Tính các số hạng trong biểu thức (2.50) đối với i = 1, ta có :

$$h_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{ikm} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{111} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{122} \dot{\theta}_2^2 + h_{122} \dot{\theta}_2^2$$

Và theo (2.51) tính các hệ số  $h_{ikm}$ , rồi thay vào phương trình trên, ta được:

$$h_1 = -1/2m_2S_2l^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 .$$

Tương tự đối với i = 2

$$h_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{211} \dot{\theta}_1^2 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{222} \dot{\theta}_2^2 = 1/2 m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_1^2$$

Như vậy :

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 1/2 m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ 1/2 m_2 S_2 l^2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Trên cơ sở (2.52), ta có :

$$c_1 = - \left( m_1 g U_{11}^1 \bar{r}_1 + m_2 g U_{21}^2 \bar{r}_2 \right) =$$

$$= -m(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & -lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1/2 m_1 g l C_1 + 1/2 m_2 g l C_{12} + 1/2 m_2 g l C_1 ;$$

$$c_2 = -m_2(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & -lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -m_2(1/2 g l C_{12} - g l C_1)$$

Vậy vector trọng trường sẽ là:

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 m_1 g l C_1 + 1/2 m_2 g l C_{12} + m_2 g l C_1 \\ 1/2 m_2 g l C_{12} \end{bmatrix} .$$

Cuối cùng ta có phương trình động lực học của cơ cấu tay máy 2 khâu ở dạng sau :

$$F_m(t) = D(\theta)(\dot{\theta})(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} F_{M1} \\ F_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l + m_2C_2l & 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2C_2 \\ 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2C_2 & 1/3m_2l^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2m_2glC_1 - 1/2m_2glC_{12} + m_2glC_1 \\ 1/2m_2gl^2C_{12} \end{bmatrix} .$$

**CHƯƠNG III : THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT CHO TAY MÁY  
ROBOT 2 BẬC TỰ DO**

**III.1. Hệ phi tuyến :**

**III.1.1. Hệ phi tuyến là gì ?**

Để định nghĩa được rõ ràng một đối tượng hay hệ thống như thế nào được gọi là phi tuyến trước tiên ta nên định nghĩa lại hệ tuyến tính.

Xét một hệ thống MIMO, viết tắt của nhiều vào / nhiều ra (Multi Inputs – Multi Outputs) với r tín hiệu vào  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  và s tín hiệu ra  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$ . Nếu viết chung r tín hiệu đầu vào thành vectơ

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{pmatrix}$$

và s tín hiệu đầu ra thành  $\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_s(t) \end{pmatrix}$  thì mô hình hệ thống được

quan tâm ở đây là mô hình toán học mô tả quan hệ giữa vectơ tín hiệu vào  $\underline{u}(t)$  và tín hiệu ra  $\underline{y}(t)$ , tức là mô tả ánh xạ  $T : \underline{u}(t) \mapsto \underline{y}(t)$ .

Ánh xạ này (Thường còn gọi là toán tử - operator) viết lại như sau :

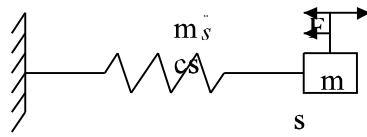
$$\underline{y}(t) = T(\underline{u}(t)).$$

nếu ánh xạ  $T$  thoả mãn :

$$T(a_1 \underline{u}_1(t)) + T(a_2 \underline{u}_2(t)) = a_1 T(\underline{u}_1(t)) + a_2 T(\underline{u}_2(t)), \quad (3.1)$$

trong đó  $a_1$  và  $a_2 \in \mathbb{R}$ , thì hệ đó được nói là tuyến tính. Tính chất (3.1) của hệ tuyến tính, trong điều khiển, còn được gọi là nguyên lý xếp chồng.

Ví dụ : Xét 1 hệ gồm 1 lò xo c và 1 vật khối lượng m làm 1 ví dụ. Vật sẽ chuyển động trên trực nằm ngang dưới tác động của lực F (hình 3.1).



Hình 3.1: Ví dụ về một đối tượng tuyến tính

Nếu  $F$  được xem như là tín hiệu vào và quãng đường  $s$  mà vật đi được là tín hiệu ra (đáp ứng của hệ) thì theo các tiên đề cơ học của Newton, tác động vào vật và ngược hướng với  $F$  có hai lực cân bằng: Lực cản của lò xo  $F_1 = cs$

trong trường hợp  $|s|$  tương đối nhỏ và  $F_2 = m\ddot{s}$  của chuyển động. Với nguyên lý cân bằng lực ta có ánh xạ  $T : F(t) \mapsto s(t)$  mô tả quan hệ vào / ra của hệ :

$$m\ddot{s} + cs = F. \quad (3.2a)$$

Giả sử rằng dưới tác động của lực  $F_1$  hệ có đáp ứng  $s_1$  và của  $F_2$  thì từ :

$$m\ddot{s}_1 + cs_1 = F_1$$

$$m\ddot{s}_2 + cs_2 = F_2$$

có ngay được

$$m(a_1\ddot{s}_1 + a_2\ddot{s}_2) + c(a_1s_1 + a_2s_2) = a_1F_1 + a_2F_2 ,$$

trong đó  $a_1, a_2$  là những số thực tùy ý. Nói cách khác dưới tác động của lực  $a_1F_1 + a_2F_2$

vật sẽ đi được một quãng đường là  $a_1s_1 + a_2s_2$ . Bởi vậy T thoả mãn (3.1) và do đó trong trường hợp  $|s|$  tương đối nhỏ và lực cản của lò xo được xác định gần đúng bằng công thức  $F_1 = cs$  thì hệ thống là xo + vật là một hệ tuyến tính.

Ngược lại, nếu lực cản lò xo lại được tính theo  $F_1 = cs + \varepsilon s^3$ , với  $c$  và  $\varepsilon$  là 2 hằng số, mà trong thực tế người ta vẫn sử dụng, thì quan hệ vào / ra của hệ sẽ là :

$$m\ddot{s} + cs + \varepsilon s^3 = F \quad (3.2b)$$

và khi đó (3.2b) không còn thoả mãn nguyên lý xếp chồng (3.1)

$$\begin{aligned} m(a_1 \ddot{s}_1 + a_2 \ddot{s}_2) + c(a_1 s_1 + a_2 s_2) + \varepsilon(a_1 s_1^3 + a_2 s_2^3) &\neq a_1 F_1 + a_2 F_2 \\ m(a_1 \ddot{s}_1 + a_2 \ddot{s}_2) + c(a_1 s_1 + a_2 s_2) + \varepsilon(a_1 s_1^3 + a_2 s_2^3) &\neq a_1 F_1 + a_2 F_2 \end{aligned}$$

Nói cách khác, dưới tác động của lực  $a_1 F_1 + a_2 F_2$  thì quãng đường của vật đi được không phải là  $a_1 s_1 + a_2 s_2$ . Vậy ở trường hợp này hệ có tính phi tuyến.

### III.1.2. Mô hình trạng thái và quỹ đạo trạng thái của Hệ phi tuyến:

#### III.1.2.1. Mô hình trạng thái:

Mô hình động của đối tượng, hệ thống phi tuyến được xây dựng từ quan hệ vào – ra qua việc thêm các biến  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  gọi là biến trạng thái, sao cho quan hệ giữa vector tín hiệu ra  $y(t)$  với n biến này và tín hiệu vào  $u(t)$  chỉ còn lại thuần tuý là một quan hệ đại số. Những biến trạng thái này, về mặt ý nghĩa vật lý, là những đại lượng mà sự thay đổi của nó sẽ quyết định tính chất động học của đối tượng.

Ví dụ 1 : Từ mô hình (3.1) của đối tượng lò xo + vật, nếu thêm biến trạng thái  $x_1 = s$ ,  $x_2 = \dot{s}$  sẽ có:

$$s = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \cdot \underline{x} + 0 \cdot F$$

và đây là một phương trình đại số. Ngoài ra còn có phần các phương trình vi phân bao gồm :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Suy ra từ định nghĩa về  $x_1, x_2$  và :

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_1 + \frac{1}{m}F$$

thu được bằng cách thay trực tiếp  $x_1, x_2$  vào phương trình (3.1).

Viết chung hai phương trình vi phân trên lại với nhau sẽ được :

$$\begin{matrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ \vdots \\ x_2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F$$

Nói chung, một hệ phi tuyến SISO có quan hệ vào – ra giữa tín hiệu vào  $u(t)$  và ra  $y(t)$  dạng:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u)$$

Trong đó ký hiệu  $y^{(k)}$  chỉ đạo hàm bậc k của  $y(t)$ , tức là

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k},$$

thì với các biến trạng thái được định nghĩa như sau :

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

hệ sẽ có mô hình hai phần: phần các phương trình vi phân bậc nhất

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x_n, \dots, x_2, x_1, u) \end{aligned}$$

và phương trình đại số :  $Y=x_1$

Tổng quát lên thì một hệ phi tuyến, sau khi định nghĩa các biến trạng thái  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , sẽ mô tả bởi :

- Mô hình trạng thái tường minh autonom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \underline{y} &= g(x, u) \end{aligned} \quad \text{trong đó } \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

- Mô hình trạng thái tường minh không autonom

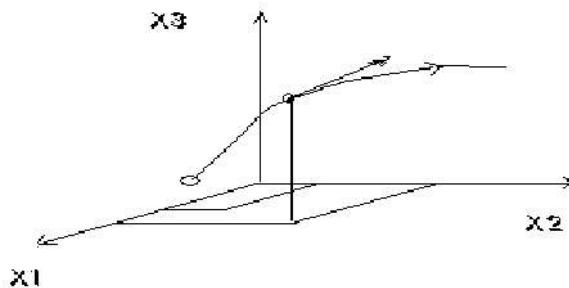
$$\begin{aligned}\underline{x} &= f(\underline{x}, \underline{u}, t), \\ \underline{y} &= g(\underline{x}, \underline{u}, t)\end{aligned}$$

- hoặc mô hình trạng thái không tường minh

$$\begin{aligned}\underline{f}(\underline{x}, \underline{x}, \underline{u}, t) &= 0 \\ \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{y}, t) &= 0\end{aligned}$$

### III.1.2.2. Quỹ đạo trạng thái :

Từ phương trình trạng thái mô tả hệ thống với một tín hiệu đầu vào  $\underline{u}(t)$  xác định cho trước và với một điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$  cũng cho trước ta sẽ có được nghiệm  $\underline{x}(t)$  mô tả sự thay đổi trạng thái hệ thống theo thời gian dưới tác động của kích thích  $\underline{u}(t)$  đã cho. Biểu diễn  $\underline{x}(t)$  trong không gian n chiều  $R^n$  (còn gọi là không gian trạng thái) như một đồ thị phụ thuộc tham số t có mũi tên chỉ chiều tăng của t ta được một quỹ đạo trạng thái (hình 3.2a). Tập tất cả các quỹ đạo trạng thái ứng với một tín hiệu đầu vào  $\underline{u}(t)$  cố định nhưng với những điểm trạng thái ban đầu  $\underline{x}_0$  khác nhau được gọi là *họ các quỹ đạo trạng thái* (hình 3.2b).



Hình 3.2a. Quỹ đạo trạng thái của hệ có 3 biến trạng thái

$x_1$

$x_2$ 

Hình 3.2b. Họ các quỹ đạo trạng thái của hệ có 2 biến trạng thái

### **III.1.3. Điểm cân bằng và điểm dừng của hệ thống:**

#### **III.1.3.1. Điểm cân bằng:**

Định nghĩa 1: Một điểm trạng thái  $\underline{x}_e$  được gọi là điểm cân bằng (*equilibrium point*) nếu như khi đang ở điểm trạng thái  $\underline{x}_e$  và không có một tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó.

Căn cứ theo định nghĩa như vậy thì điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  của hệ thống phải là nghiệm của phương trình:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \Big|_{\underline{u}=0} = \underline{0}$$

Như vậy điểm cân bằng là điểm mà hệ thống sẽ nằm yên tại đó, tức là trạng thái của nó sẽ không bị thay đổi ( $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{0}$ ) khi không có sự tác động từ bên ngoài ( $\underline{u} = \underline{0}$ ).

#### **III.1.3.2. Điểm dừng của hệ :**

Định nghĩa 2: Một điểm trạng thái  $\underline{x}_d$  được gọi là điểm dừng của hệ thống nếu như hệ đang ở điểm trạng thái  $\underline{x}_d$  và với tác động  $\underline{u}(t) = \underline{u}_d$  cố định, không đổi cho trước, thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó.

Rõ ràng là điểm dừng theo định nghĩa vừa nêu sẽ là nghiệm của :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_d, t) \Big|_{\underline{u}=\underline{u}_d} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}_d, t) = \underline{0}$$

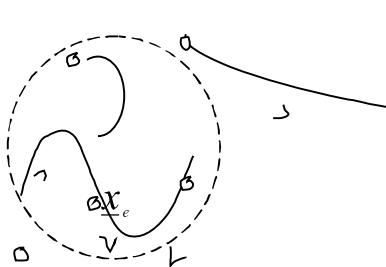
trong đó  $\underline{u}_d$  là đã cho trước.

### **III.1.3.3 Tính ổn định tại một điểm cân bằng:**

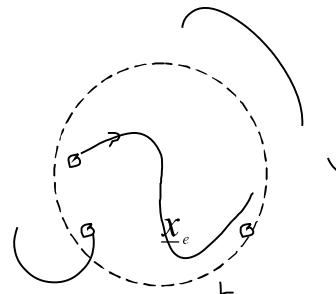
Định nghĩa 3 : Một hệ thống được gọi là ổn định (tiệm cận) tại điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  nếu như có một tác động tức thời (chẳng hạn như nhiễu tức thời) đánh bật hệ ra khỏi  $\underline{x}_e$  và đưa tới điểm  $\underline{x}_0$  thuộc một lân cận nào đó của  $\underline{x}_e$  thì sau đó hệ có khả năng tự quay về được điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  ban đầu.

Theo định nghĩa trên thì ta có thể nhận biết được hệ có ổn định hay không tại một điểm cân bằng thông qua dạng họ các đường quỹ đạo trạng thái của nó. Nếu hệ ổn định tại một điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  nào đó thì mọi đường quỹ đạo trạng thái  $\underline{x}(t)$  xuất phát từ một điểm  $\underline{x}_0$  thuộc lân cận của  $\underline{x}_e$  đều phải kết thúc tại  $\underline{x}_e$ .

a) Miền ổn định O



b)



**Hình 3.3. a) Điểm cân bằng ổn định**

**b) Điểm cân bằng không ổn định**

Chú ý rằng tính ổn định của hệ phi tuyến chỉ có ý nghĩa khi đi cùng với điểm cân bằng  $\underline{x}_e$ . Có thể hệ sẽ ổn định tại điểm cân bằng này, song lại không ổn định ở điểm cân bằng khác. Điều này cũng khác so với khái niệm ổn định ở hệ tuyến tính. Vì hệ tuyến tính thường chỉ có một điểm cân bằng là gốc toạ độ ( $\underline{x}_e = \underline{0}$ ) nên khi hệ ổn định tại  $\underline{0}$ , người ta cũng nói thêm luôn một cách ngắn gọn là hệ ổn định .

Ngoài ra, do khái niệm ổn định ở hệ phi tuyến bị gắn với lân cận điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  nên cũng có thể mặc dù hệ ổn định tại điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  song với một lân cận quá nhỏ thì sẽ không có định nghĩa sử dụng. Nói cách khác, về mặt ứng dụng, nó được xem như không ổn định. Bởi vậy, đối với hệ phi tuyến, việc xác định xem hệ có ổn định tại điểm cân bằng  $\underline{x}_e$  hay không là chưa đủ mà còn phải chỉ ra miền ổn định của nó tại  $\underline{x}_e$ , tức là phải chỉ ra được lân cận O của  $\underline{x}_e$  sao cho hệ có khả năng tự quay về được  $\underline{x}_e$  từ bất kì một điểm  $\underline{x}_0$  nào đó thuộc O (hình 3.3). Miền ổn định O càng lớn thì tính ổn định của hệ tại  $\underline{x}_e$  càng tốt.

Nhiệm vụ đầu tiên của bộ điều khiển là phải giữ cho hệ thống ổn định. Nếu như ban đầu đối tượng không ổn định, tức là khi có nhiều từ bên ngoài tác động đưa nó ra khỏi điểm làm việc và nó không có khả năng tự quay về thì bộ điều khiển phải tạo ra tín hiệu điều khiển dẫn đối tượng quay trở về điểm làm việc ban đầu.

#### **III.1.4 Tiêu chuẩn ổn định Lyapunov :**

Một trong những điều kiện, hay tiêu chuẩn chất lượng đầu tiên mà bộ điều khiển cần phải mang đến được cho hệ thống là tính ổn định. Tại sao lại như vậy ? Từ khái niệm về tính ổn định của hệ thống tại một điểm cân bằng đã được nêu trong định nghĩa 3 ta thấy rõ nếu một hệ quá nhạy cảm với tác động nhiều đến nỗi chỉ một tác động tức thời không mong muốn rất nhỏ đã làm cho hệ bị bật ra khỏi điểm cân bằng (hoặc điểm làm việc) mà sau đó hệ không có khả năng tự tìm về điểm cân bằng ban đầu thì chất lượng của hệ không thể gọi là tốt được.

Bởi vậy, kiểm tra tính ổn định của hệ (tại một điểm cân bằng) cũng như miền ổn định O tương ứng phải là công việc đầu tiên ta phải tiến hành khi phân tích hệ thống. Tiêu chuẩn Lyapunov là một công cụ hữu ích giúp ta thực hiện được điều đó.

Định nghĩa 4 : Một hệ thống có mô hình không kích thích :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \Big|_{\underline{u}=0} = \tilde{\underline{f}}(\underline{x}, t)$$

(3.3)

với một điểm cân bằng là gốc toạ độ  $\underline{0}$ , được gọi là :

a) Ôn định Lyapunov tại điểm cân bằng  $\underline{0}$  nếu với  $\varepsilon > 0$  bất kì bao giờ cũng tồn tại  $\delta$  phụ thuộc  $\varepsilon$  sao cho nghiệm  $\underline{x}(t)$  của (3.3) với  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  thoả mãn :  $\|\underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

b) Ôn định tiệm cận Lyapunov tại điểm cân bằng  $\underline{0}$  nếu với  $\varepsilon > 0$  bất kì bao giờ cũng tồn tại  $\delta$  phụ thuộc  $\varepsilon$  sao cho nghiệm  $\underline{x}(t)$  của (3.3) với

$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  thoả mãn :

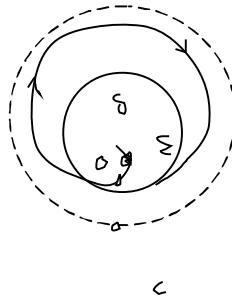
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{0} .$$

#### **III.1.4.1. Tiêu chuẩn Lyapunov:**

Để làm quen và tiếp cận tiêu chuẩn Lyapunov ta hãy bắt đầu từ hệ bậc 2 có mô hình trạng thái autonom khi không bị kích thích :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(x_1, x_2) \quad \text{với } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Hệ trên được giả thiết là cân bằng tại gốc toạ độ  $\underline{0}$ .



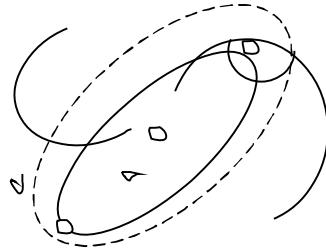
**Hình 3.4 : Minh họa khái niệm ôn định Lyapunov:**

Hình 3.4 minh họa cho định nghĩa 4 về tính ôn định Lyapunov tại  $\underline{0}$  đã gợi ý cho ta một hướng khá đơn giản để xét tính ôn định cho hệ (3.4) tại  $\underline{0}$ . Chẳng hạn bằng cách nào đó ta đã có được họ các đường cong khép kín v bao quanh gốc toạ độ  $\underline{0}$ . Vậy thì để kiểm tra hệ có ôn định tại  $\underline{0}$  hay không ta chỉ cần kiểm tra xem quỹ đạo pha  $\underline{x}(t)$ , tức là nghiệm của (3.4) đi

từ điểm trạng thái đầu  $\underline{x}_0$  cho trước nhưng tùy ý nằm trong miền bao bởi một trong các đường cong khép kín đó, có cắt các đường cong v này theo hướng từ ngoài vào trong hay không (hình 3.5).

- Nếu  $\underline{x}(t)$  không cắt bất cứ một đường cong họ v nào theo chiều từ trong ra ngoài thì hệ sẽ ổn định tại  $\underline{0}$ .

- Nếu  $\underline{x}(t)$  cắt mọi đường cong họ v theo chiều từ ngoài vào trong thì hệ sẽ ổn định tiệm cận tại  $\underline{0}$ .



Hình 3.5: Một gợi ý về việc kiểm tra tính ổn định của hệ tại  $O$

Rõ ràng là cần và đủ để quỹ đạo pha  $\underline{x}(t)$  của hệ không cắt bất cứ một đường cong khép kín thuộc họ v theo chiều từ trong ra ngoài là tại điểm cắt đó, tiếp tuyến của  $\underline{x}(t)$  phải tạo với vector  $\Delta_v$ , được định nghĩa là vector vuông góc với đường cong đó theo hướng từ trong ra ngoài, một góc  $\varphi$  không nhỏ hơn  $90^\circ$ . Nói cách khác, hệ sẽ ổn định tại  $\underline{0}$  nếu như có được điều kiện:

$$0 \geq |\Delta_v| \cdot \left| \frac{dx}{dt} \right| \cdot \cos \varphi = \Delta_v^\top \frac{dx}{dt} \quad (3.5)$$

tại mọi giao điểm của  $\underline{x}(t)$  với các đường cong thuộc họ v.

Vấn đề còn lại là làm thế nào có được các đường cong v sao cho việc kiểm tra điều kiện (1.48) được thuận tiện. Câu trả lời là sử dụng hàm xác định dương  $V(\underline{x})$  được định nghĩa như sau :

Định nghĩa 5 : Một hàm thực nhiều biến, có thể không dừng  $V(\underline{0}, t)$ , được gọi là hàm xác định dương nếu :

a)  $V(\underline{0}, t) = 0$

b) Tồn tại hai hàm một biến, dừng  $\gamma_1(a)$  và  $\gamma_2(b)$  liên tục, đơn điệu tăng với  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$  sao cho :

$$0 < \gamma_1(\|\underline{x}\|) \leq V(\underline{x}, t) \leq \gamma_2(\|\underline{x}\|) \quad \text{với mọi } \underline{x} \neq 0 \quad (3.6)$$

Hàm  $V(\underline{x}, t)$  sẽ xác định dương trong toàn bộ không gian trạng thái nếu còn có :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \gamma_1(a) = \infty \Rightarrow \lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} V(\underline{x}, t) = \infty .$$

Định lý 1 : Hệ phi tuyến (có thể không autonom) cân bằng tại gốc toạ độ và khi không bị kích thích thì được mô tả bởi hình :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, t) \quad (3.7)$$

sẽ ổn định Lyapunov tại  $\underline{0}$  với miền ổn định  $O$  nếu :

a) Trong  $O$  tồn tại một hàm xác định dương  $V(\underline{0}, t)$  .

b) Đạo hàm của nó tính theo mô hình (1.51) có giá trị không dương trong  $O$ , tức là :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} f(\underline{x}, t) \leq 0 \quad \text{với mọi } \underline{x} \in O . \quad (3.8)$$

Định lý 2: Hệ phi tuyến (có thể không autonom) cân bằng tại gốc toạ độ và khi không bị kích thích thì được mô tả bởi mô hình.

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, t) \quad (3.9)$$

sẽ ổn định tiệm cận Lyapunov tại  $\underline{0}$  với miền ổn định  $O$  nếu :

a) Trong  $O$  tồn tại một hàm xác định dương  $V(\underline{x}, t)$ .

b) Đạo hàm của nó tính theo mô hình (1.51) có giá trị âm trong O với  $\underline{x} \neq \underline{0}$ , tức là :

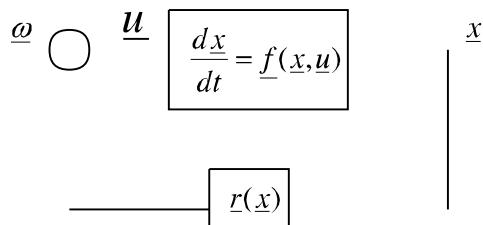
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} f(\underline{x}, t) < 0 \text{ với mọi } \underline{x} \in O \text{ và } \underline{x} \neq \underline{0}. \quad (3.10)$$

### **III.1.4.2.Tiêu chuẩn Lyapunov phục vụ thiết kế bộ điều khiển:**

Ngoài việc kiểm tra tính ổn định, tiêu chuẩn Lyapunov còn được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển ổn định đối tượng phi tuyến. Chẳng hạn đối tượng có mô hình :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

và được điều khiển bằng bộ điều khiển phản hồi trạng thái  $\underline{r}(\underline{x})$



**Hình 3.6: Ứng dụng tiêu chuẩn Lyapunov để thiết kế bộ điều khiển**

Vậy hệ kín khi không bị kích thích ( $\omega = 0$ ) sẽ có mô hình :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}(\underline{x}))$$

Gọi  $V(\underline{x})$  là hàm xác định dương thích hợp, khi đó để hệ kín ổn định tiệm cận với miền ổn định là O thì bộ điều khiển cần tìm  $\underline{r}(\underline{x})$  phải thoả mãn :

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}(\underline{x})) < 0 \text{ với mọi } \underline{x} \neq \underline{0}, \underline{x} \in O \quad (3.11a)$$

$$\text{Và } \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{r}(\underline{x})) = 0 \text{ chỉ khi } \underline{x} = \underline{0} \quad (3.11b)$$

### **III.2.Bậc tương đối của hệ phi tuyến:**

**Bậc tương đối của hệ SISO:**

Để dễ tiếp cận tới khái niệm bậc tương đối ta xét trường hợp đặc biệt với đối tượng tuyến tính, mô tả bằng hàm truyền đạt hợp thức chặt (strickly proper):

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \quad (3.12)$$

Khi đó bậc tương đối được hiểu là hiệu  $r = (n-m) \geq 1$

Giả sử rằng đối tượng trên, bên cạnh hàm truyền đạt (3.12) còn có mô hình tương đương trong không gian trạng thái :

$$\begin{cases} \frac{d \underline{x}}{dt} = A \underline{x} + b \underline{u} \\ y = c^T \underline{x} \end{cases} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, c \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (3.13)$$

Vậy thì do

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Ta có :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^r G(s) = \frac{b_m}{a_n} \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s^r [c^T (sI - A)^{-1} b] = \frac{b_m}{a_n}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^T A^k b}{s^{k+r}} = \frac{b_m}{a_n}$$

Hơn nữa

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{k+r}} = 0 \text{ khi } k > r-1$$

nên chuỗi trên trở thành tổng của hữu hạn  $r$  phần tử đầu tiên

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c^T A^k b}{s^{k+r}} = \frac{b_m}{a_n}$$

Từ đây, để về trái bằng giá trị hữu hạn thì cần và đủ là :

$$\underline{c}^T \underline{A}^k \underline{b} = \begin{cases} = 0 & \text{khi } 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{khi } k = r-1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Nói cách khác, bậc tương đối  $r = n-m$  còn có thể được xác định trực tiếp từ mô hình trạng thái (3.13) của hệ theo công thức (3.14).

Chuyển sang hệ phi tuyến và với sự gợi ý của công thức tính (3.14), khái niệm bậc tương đối của hệ ALI có 1 tín hiệu vào, một tín hiệu ra, được định nghĩa như sau :

Định nghĩa 6: Cho hệ SISO với cấu trúc ALI :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \quad (3.15)$$

Bậc tương đối tại điểm trạng thái  $\underline{x}$  của hệ là số tự nhiên  $r$  mà trong lân cận  $\underline{x}$  thoả mãn :

$$L_h L_f^h g(\underline{x}) = \begin{cases} = 0 & \text{khi } 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{khi } k = r-1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Có thể thấy được ngay rằng với  $f(x) = Ax$ ,  $H(x) = b$ ,  $g(x) = c^T x$ , hai công thức (3.14) và (3.16) sẽ đồng nhất, vì :

$$L_f^h g(x) = c^T A^T x \Rightarrow L_h L_f^h g(x) = c^T A^k b$$

Ví dụ : Xét hệ Val der Pol có mô hình trạng thái như sau :

khi đó thì do :

$$L_h g(x) = \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} h(\underline{x}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_h L_f^h g(x) = \frac{\partial(L_f g)}{\partial \underline{x}} h(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} f \right) h(\underline{x})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ax_2(1 - bx_1^2) - x_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Bậc tương đối của hệ bằng 2 (tại mọi  $\underline{x}$ ).

Tuy nhiên, cũng cần phải để ý rằng hệ phi tuyến (3.15) có thể có bậc tương đối khác nhau ở những điểm trạng thái khác nhau. Ngoài ra, khác với hệ tuyến tính, không phải ở bất cứ điểm trạng thái  $x$  nào trong không gian trạng thái, hệ phi tuyến phẳng có bậc tương đối. Chẳng hạn, hệ sẽ không có bậc tương đối tại điểm trạng thái  $x_0$  mà trong lân cận của nó có :

$$L_h g(\underline{x}) \neq 0, L_h L_{hg}(\underline{x}) \neq 0, \dots, L_h L_f^h g(\underline{x}) \neq 0, \dots$$

### III.3. Tính động học không:

Rất nhiều khái niệm sử dụng trong hệ phi tuyến được chuyển thể từ hệ tuyến tính, chẳng hạn khái niệm bậc tương đối, hệ thụ động, ... cũng như vậy là tính động học không (zero dynamic). Do đó, để dễ tiếp cận tới khái niệm này, ta nên bắt đầu từ hệ tuyến tính.

Xét hệ phi tuyến SISO có mô hình trạng thái :

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{h}(\underline{x})u \\ y = g(\underline{x}) \end{cases} \quad (3.17)$$

Tính động học không (zero dynamic) của hệ (3.17) được định nghĩa như sau :

Định nghĩa 7 : Nếu hệ (3.17) có ít nhất một điểm trạng thái đầu  $x_0 \neq 0$  và ứng với nó là tín hiệu điều khiển  $u_0(t)$  sao cho tín hiệu đầu ra  $y(t)$  đồng nhất bằng không thì hệ được gọi là có tính động học không (zero dynamic).

Ta có thể thấy được là để hệ có tính động học không thì cần thiết phải có  $g(x_0) = 0$ . Giả sử rằng hệ (3.17) có bậc tương đối là  $r$ , tức là :

$$L_h L_f^k g(x) = \begin{cases} = 0 & \text{nếu } 0 \leq k \leq r-2 \\ \neq 0 & \text{nếu } k = r-1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Khi đó, với phép đổi trực toạ độ vi phôi :

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \underline{m}(x) = \begin{bmatrix} g(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-2} g(x) \\ L_f^{r-1} g(x) \\ m_{r+1}(x) \\ \vdots \\ m_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{với } L_h m_k(\underline{x}) = 0, k=r+1, \dots, n$$

hệ (1.18) đã cho sẽ được đưa về dạng chuẩn

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ a(\underline{z}) + b(\underline{z})u \\ c_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ c_{n-r}(\underline{z}) \end{bmatrix}, \quad y = z_1 \quad (3.19)$$

Trong đó

$$A(\underline{z}) = L_f^r g(\underline{m}^{-1}(\underline{z})) \quad , \quad b(\underline{z}) = L_h L_f^{r-1} g(\underline{m}^{-1}(\underline{z})) \quad , \quad c_i(\underline{z}) = L_h m_{r+i}(\underline{m}^{-1}(\underline{z}))$$

sử dụng kí hiệu :

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{\xi} \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} \quad \text{với } \underline{\xi} = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\eta} = \begin{bmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{và } \underline{c}(\underline{z}) = \begin{bmatrix} c_1(\underline{z}) \\ \vdots \\ c_{n-r}(\underline{z}) \end{bmatrix}$$

thì mô hình (3.19) được viết thành

$$\frac{d \underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{r-1} \\ z_r \\ \underline{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ a(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + b(\underline{\xi}, \underline{\eta})u \\ c(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{bmatrix}, \quad y = z_1 \quad (3.20)$$

Giả sử rằng hệ (3.17) có tính động học không ứng với trạng thái đầu  $x_0 \neq 0$  và tín hiệu điều khiển  $u_0(t)$  thích hợp. Vậy thì từ  $y(t) = z_1(t) = 0$  ta suy ra được :

$$z_1(t) = \dots = z_r(t) = 0$$

và do đó là  $\xi = 0$ . Điều này dẫn đến :

$$a(0, \underline{\eta}) + b(0, \underline{\eta})u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0(t) = -\frac{a(0, \underline{\eta})}{b(0, \underline{\eta})} \quad (3.21a)$$

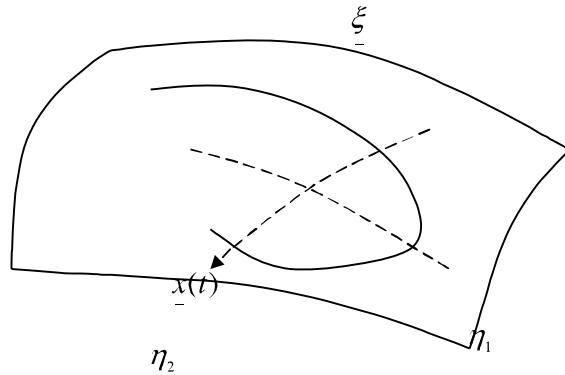
$$\frac{d \underline{\eta}}{dt} = c(0, \underline{\eta}) \quad (3.21b)$$

Đó cũng là hai phương trình phân tích tính động học không của hệ (3.17) thông qua mô hình tương đương (3.20) của nó. Điều kiện để có phương trình (3.21b) là hệ (3.17) phải có bậc tương đối r nhỏ hơn n ( $r < n$ ).

Từ  $\xi=0$  cũng như phép biến đổi trực toạ độ (3.18) và 2 phương trình (3.21) ta thấy, ở chế độ động học không, quỹ đạo trạng thái  $x(t)$  phải thoả mãn :  $g(\underline{x}) = L_f g(\underline{x}) = \dots = L_f^{r-1} g(\underline{x}) = 0$ .

Nói cách khác  $x(t)$  của động học không sẽ chỉ nằm trong đa tạp (hình 3.7)

$$K = \{ \underline{x} \in R^n | g(\underline{x}) = L_f g(\underline{x}) = \dots = L_f^{r-1} g(\underline{x}) = 0 \} \quad (3.22)$$



Hình 3.7: Quỹ đạo trạng thái của Hệ phi tuyến, khi đang ở chế độ động học không, luôn nằm trong đa tạp K.

Tuy rằng nằm trong đa tạp K, song việc quỹ đạo  $x(t)$  ở chế độ động học không (ứng với tín hiệu điều khiển  $u_0(t)$  thích hợp) có tiến về gốc toạ độ 0 hay không thì chưa được đảm bảo và điều này không được quyết định bởi hệ phi tuyến (3.17) có ổn định hay không. Nó chỉ có thể tiến về 0 nếu như hệ (3.21b) là ổn định tiệm cận Lyapunov, tức là phải tồn tại 1 hàm xác định dương  $Q(\underline{\eta})$  sao cho :

$$\frac{\partial Q}{\partial \underline{\eta}} c(0, \underline{\eta}) < 0 \text{ khi } \underline{\eta} \neq 0$$

### III.4.Thiết kế bộ Điều khiển trượt cho tay máy:

#### III.4.1.Điều khiển trượt:

Hệ phi tuyến có mô hình

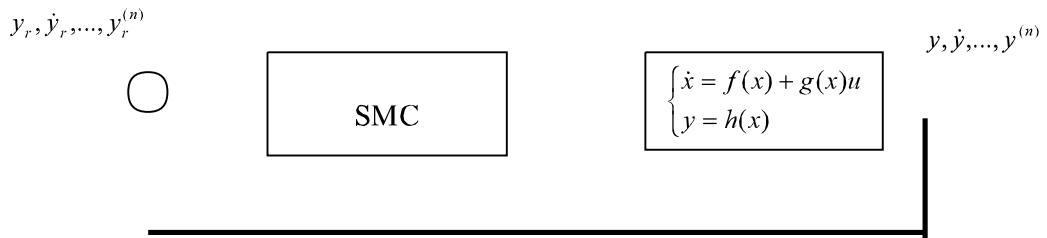
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.23)$$

Trong đó y là tín hiệu đầu ra, u là tín hiệu đầu vào,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  là vector trạng thái của hệ,  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ ,  $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)]^T$

Hệ phi tuyến có bậc tương đối là p nếu:

$$\begin{cases} \frac{d^p h(x)}{dt^p} = L_f^p h(x) + L_g L_f^{p-1} h(x)u \\ L_g L_f^{p-1} h(x) \neq 0; L_g L_f^i h(x) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, p-2 \end{cases} \quad (3.24)$$

Sơ đồ điều khiển:



### III.4.1.1. Trường hợp bậc tương đối của hệ bằng bậc của hệ p=n:

Để có thể thiết kế được bộ điều khiển thì hệ (3.23) phải tồn tại mặt trượt. Hệ (3.23) có mặt trượt S khi thoả mãn:

$$\Rightarrow S = e + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{(i)} \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow A(S) = 1 + \lambda_1 S + \dots + \lambda_{n-1} S^{(n-1)}$$

là đa thức Hurwitz để có:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (3.26)$$

$$\Rightarrow S(0) = 0 \quad (3.27)$$

Điều kiện để (3.23) trượt về điểm cân bằng là phải thoả mãn điều kiện trượt. Điều kiện trượt được xây dựng trên cơ sở đảm bảo hệ kín ổn định tiệm cận, có nghĩa là cho hệ trong hình trên tồn tại 1 hàm Lyapunov. Giả sử hệ có hàm Lyapunov có dạng sau:

$$V(x, t) = \frac{1}{2} S^2 \quad (3.28)$$

là hàm xác định dương. Đạo hàm của nó có dạng sau:

$$\frac{dV}{dt} = S\dot{S} \quad (3.29)$$

Hệ (3.23) ổn định tiệm cận khi (3.29) là hàm có dấu xác định âm:

$$S\dot{S} < 0 \Rightarrow \begin{cases} S > 0, \dot{S} < 0 \\ S < 0, \dot{S} > 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Như vậy  $\dot{S}$  phải trái dấu với  $S$ , do vậy ta có:

$$\dot{S} = -Kh(S) \quad (3.31)$$

$h(S)$  cùng dấu với  $S$  do vậy để thoả mãn điều kiện trượt ta có thể chọn hàm  $h(S)$  có các dạng sau: hàm dấu Sig(S), hàm bão hòa Saturation(S), hàm  $h(S)=\text{Tan}(S)$

Theo (3.25) ta có:

$$\dot{S} = \dot{e} + \sum_{i=2}^n \lambda_{i-1} e^{(i)} = \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_n e^{(n)} = -Kh(S) \quad (3.32)$$

Ta có:

$$e^{(n)} = y_r^{(n)} - (L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u) \quad (3.33)$$

$$\text{Do vậy: } \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_n y_r^{(n)} - \lambda_n (L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x) u) = -Kh(S) \quad (3.34)$$

Tín hiệu điều khiển tìm được:

$$u(t) = \frac{Kh(S) + \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_n y_r^{(n)} - \lambda_n L_f^n h(x)}{\lambda_n L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (3.35)$$

### III.4.1.2. Trường hợp bậc tương đối của hệ $p < n$

Hệ (3.23) phải thoả mãn động học không.

Xây dựng mặt trượt :

$$\Rightarrow S = e + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e^{(i)} \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow A(s) = 1 + \lambda_1 s + \dots + \lambda_{p-1} s^{(p-1)} \text{ là đa thức Hurwitz, để có } \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (3.37)$$

$\Rightarrow S(0) = 0$ , mặt trượt phải đi qua gốc toạ độ và thoả mãn điều kiện trượt.

Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp trên, ta xây dựng hàm Lyapunov có dạng sau:

$$V = \frac{1}{2} S^2 \text{ xác định dương}$$

$$\dot{V} = S \dot{S} \text{ xác định âm}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -Kh(S) \\ \dot{S} &= \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_{p-1} e^{(p)} \\ e &= y_r(t) - y(t) \\ e^{(p)} &= y_r^{(p)}(t) - y^{(p)}(t) \\ y^{(p)}(t) &= L_f^p h(x) + L_g L_f^{(p-1)} h(x) u \\ \dot{S} &= \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_{p-1} e^{(p)}(t) - \lambda_{p-1} (L_f^p h(x) + L_g L_f^{(p-1)} h(x) u) = -Kh(S) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tín hiệu điều khiển:

$$u(t) = \frac{Kh(S) + \dot{e} + \lambda_1 \ddot{e} + \dots + \lambda_{p-1} (y_r^{(p)} - L_f^p h(x))}{\lambda_{p-1} L_g L_f^{(p-1)} h(S)} \quad (3.39)$$

### III.4.2. Thiết kế bộ điều khiển trượt cho tay máy n bậc tự do:

Mô hình động lực học của tay máy:

$$\tau = H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) \quad (3.40)$$

với  $H(q)$  là ma trận quán tính xác định dương, đối xứng.

Chúng ta giả sử rằng các giá trị ước lượng  $\hat{H}(q)$  và  $\hat{h}(q, \dot{q})$  quan hệ với giá trị thực  $H(q)$  và  $h(q, \dot{q})$  bởi bất đẳng thức sau:

$$\|\hat{H}^{-1}(q)H(q)\| \leq \beta(q) \quad (3.41)$$

$$\text{và } \|h(q, \dot{q}) - \hat{h}(q, \dot{q})\| \leq \Delta h_{\max}(q, \dot{q}) \quad (3.42)$$

với  $\beta(q)$  và  $\Delta h_{\max}(q, \dot{q})$  là những hàm đã biết.

Viết lại biểu thức động lực học dưới dạng:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + B(q)\tau \quad (3.43)$$

$$\text{Với } f(q, \dot{q}) = -H^{-1}(q)h(q, \dot{q}) \quad (3.44)$$

$$B(q) = H^{-1}(q) \quad (3.45)$$

Nhiệm vụ của điều khiển là tìm mô men thích hợp  $\tau$  sao cho vector vị trí  $q$  của tay máy bám theo quỹ đạo mong muốn  $q_d$ .

Chúng ta định nghĩa sai lệch trạng thái  $e$  và mặt trượt như sau:

$$e = q_d - q \quad (3.46)$$

$$S = Ce + \dot{e}; C = C^T > 0 \quad (3.47)$$

Rõ ràng rằng  $S=0$  thì  $q(t) \rightarrow q_q(t)$ . Quả thực với  $S=0$  ta có thể viết lại như sau:

$$S = 0 \Rightarrow Ce + \dot{e} = 0 \Rightarrow \dot{e} = -Ce$$

Như vậy hệ thống ổn định tiệm cận nếu có  $e = 0$  và theo đó điều kiện bám  $q(t) \rightarrow q_q(t)$  sẽ được đảm bảo.

Do vậy vấn đề điều khiển là phải tìm mô men  $\tau$  thích hợp sao cho vector trạng thái của hệ thống có thể bám được trên mặt trượt. Hay phải tìm  $\tau$  thỏa mãn điều kiện trượt. Điều kiện trượt có thể xác định theo tiêu chuẩn Lyapunov.

Chúng ta định nghĩa hàm Lyapunov như sau:

$$V = \frac{1}{2} S^T S > 0 \quad (3.48)$$

Đạo hàm của (3.48) có dạng:

$$\dot{V} = S^T \dot{S} \quad (3.49)$$

Như vậy, nếu  $\dot{V} < 0$  thì với  $V \rightarrow 0$  dẫn tới  $S \rightarrow 0$  và  $e \rightarrow 0$

Do vậy, điều kiện đủ của điều kiện trượt là:

$$S^T \dot{S} < 0 \quad (3.50)$$

Khi đó điều kiện trượt đảm bảo cho hệ kín ổn định toàn cục, tiệm cận và điều kiện bám được thực hiện mặc dù mô hình không chính xác, nhiều,...

Nếu điều kiện trượt có thể thỏa mãn theo đó:

$$S^T \dot{S} \leq -\alpha \|S\| \leq 0; \alpha > 0; \|S\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2} \quad (3.51)$$

Tiếp đó, mặt phẳng trượt  $S=0$  sẽ đạt được với thời gian giới hạn nhỏ hơn  $T_0$  ở đó:

$$T_0 = \frac{1}{2\alpha} \|S(q(0))\| \quad (3.52)$$

Biểu thức trên được chứng minh như sau:

Từ (29) ta có:

$$\frac{S^T \dot{S}}{\|S\|} \leq -\alpha \quad (3.53)$$

Thay  $\dot{V} = S^T \dot{S}$  và  $\|S\| = (2V)^{\frac{1}{2}}$  vào (3.53) sau đó tích phân hai vế với  $t=0 \rightarrow t_{reach}$ ,  $S(q(t_{reach}))=0$  ta có:

$$\int_0^{t_{reach}} \frac{\dot{V}}{(2V)^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ V^{\frac{1}{2}} \right]_0^{t_{reach}} = \frac{\|S(q(0))\|}{2} \leq -\alpha t_{reach} \rightarrow t_{reach} \leq \frac{\|S(q(0))\|}{2\alpha} = T_0 \quad (3.54)$$

Bây giờ chúng ta tìm đầu vào bộ điều khiển  $\tau$  thỏa mãn điều kiện trượt.

Lấy đạo hàm biểu thức (3.47) ta có:

$$\dot{S} = C\dot{e} + \ddot{q} - \ddot{q}_d \quad (3.55)$$

Thay biểu thức (3.39) vào ta có:

$$\dot{S} = C\dot{e} + f(q, \dot{q}) + B(q)\tau - \ddot{q}_d \quad (3.56)$$

Do đó tín hiệu điều khiển có dạng

$$\tau = \hat{B}^{-1} [\tau_{eq} - K Sgn(s)] \quad (3.57)$$

với:

$$\begin{aligned}\tau_{eq} &= \ddot{q} - C\dot{e} - \hat{f}(q, \dot{q}) \\ Sgn(s) &= [Sgn(s_1), Sgn(s_2), \dots, Sgn(s_n)]^T\end{aligned}\quad (3.58)$$

$K > 0$ ,  $K$  là ma trận khuyếch đại nxn.

Ma trận khuyếch đại  $K$  phải chọn đủ lớn để điều kiện trượt được thỏa mãn mặc dù có tham số không rõ, nhiều,...

Trong trường hợp ước lượng chính xác  $\hat{B} = B$ ,  $\hat{f} = f$  thì điều kiện trượt được viết lại như sau:

$$S^T \dot{S} = -S^T K Sgn(s) \leq -\alpha \|S\| \quad (3.59)$$

$$\text{Nếu chọn } K \geq \beta I; \beta > \alpha \quad (3.60)$$

$$\text{và } S^T \dot{S} = -\beta |S| = -\beta \sum_{i=1}^m |S_i| \leq -\beta \sqrt{\sum_{i=1}^m S_i^2} = -\beta \|S\| \leq -\alpha \|S\| \quad (3.61)$$

thì chế độ trượt xảy ra.

Ta nhận thấy rằng, đầu vào điều khiển được gián đoạn qua  $s(t)$  như cho ở biểu thức (3.57). Hiện tượng chattering xảy ra. Bởi vì trong thực tế, sự chuyển đổi là không lý tưởng. Trong trường hợp sai số ước lượng là không đủ nhỏ thì việc chọn  $K$  là không đơn giản như biểu thức trên.

Trong trường hợp đó  $\dot{S}$  cho dưới dạng:

$$\dot{S} = -\ddot{q}_d + C\dot{e} + f(q, \dot{q}) + B(q)\hat{B}^{-1}\tau_{eq} - B(q)\hat{B}^{-1}K Sgn(s) \quad (3.62)$$

đặt  $f = \hat{f} + (f - \hat{f})$ ;  $R = B(q)\hat{B}^{-1}$  dẫn tới:

$$\dot{S} = (R - I)\tau_{eq} + (f - \hat{f}) - R K Sgn(s) \quad (3.63)$$

Từ đây, điều kiện trượt là:

$$S^T \dot{S} = S^T \{(R - I)\tau_{eq} + (f - \hat{f}) - R K Sgn(s)\} \leq -\alpha S^T Sgn(s) \quad (3.64)$$

Do vậy, nếu chọn  $K$  để:

$$S^T R K Sgn(s) \geq S^T \{(R - I)\tau_{eq} + (f - \hat{f})\} + \alpha S^T Sgn(s) \quad (3.65)$$

thì điều kiện trượt như ở trên  $S\dot{S} < 0$  được thỏa mãn và điều kiện trượt đạt được.

$$\|R^{-1}\| = \|\hat{B}B^{-1}\| \leq \beta(q) \quad (3.66)$$

Từ biểu thức (3.41) và (3.42) ta có bất đẳng thức:

$$\|R^{-1}\| = \|\hat{B}B^{-1}\| \leq \beta(q) \quad (3.67)$$

$$\|R^{-1}(f - \hat{f})\| = \|\hat{B}(\hat{h} - h)\| \leq \|\hat{B}\| \Delta h_{\max} \quad (3.68)$$

Từ đây, ta có thể chọn ma trận K thỏa mãn điều kiện trượt như sau:

$$\|K\| \geq \|(1-\beta)I\| \|\tau_{eq}\| + \|\hat{B}\| \Delta h_{\max} + \alpha \|\beta I\| \quad (3.69)$$

### III.4.3. Ứng dụng Điều khiển trượt cho tay máy Robot 2 bậc tự do:

#### III.4.3.1. Phương trình động lực học tay máy hai bậc tự do toàn khớp quay:

Bộ thông số tay máy:  $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$

$$l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$$

Phương trình động lực học:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Trong đó  $F_1, F_2$  là lực được tạo ra ở các khớp động, ma trận H là ma trận xác định dương và đối xứng, ma trận C là ma trận lực ly tâm, G là ma trận lực trọng trường.

Giá trị của các ma trận khi thay giá trị được xác định như sau:

- Ma trận H:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 5 + 3 \cos \theta_2 \\ h_{12} &= h_{21} = 1 + 3/2 \cos \theta_2 \\ h_{22} &= 1 \end{aligned} \quad (3.71)$$

- Ma trận C:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -3\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ c_{12} &= -3/2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ c_{21} &= -3\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ c_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

- Ma trận G:

$$\begin{aligned} g_1 &= 15 \cos \theta_1 - 15 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ g_2 &= 15 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.73)$$

### **III.4.3.2. Mô hình động lực học tay máy hai bậc tự do:**

Chúng ta đặt các biến trạng thái là tín hiệu góc quay và vận tốc của các khớp tay máy:

Khớp 1:

$$\begin{cases} x_{11} = \theta_1 \\ x_{12} = \dot{x}_{11} = \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_{12} = \ddot{\theta}_1 \end{cases} \quad (3.74)$$

Khớp 2:

$$\begin{cases} x_{21} = \theta_2 \\ x_{22} = \dot{x}_{21} = \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_{22} = \ddot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.75)$$

Tín hiệu vào u:

$$\begin{cases} u_1 = F_1 \\ u_2 = F_2 \end{cases} \quad (3.76)$$

Từ biểu thức (3.70) ta có:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - H^{-1} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - H^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

trong đó  $H^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của ma trận H.

Tính  $H^{-1}$  và kết hợp tất cả các phương trình trên và thay vào (3.77) để tính được:

## Khớp 1

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{1}{4 - 9/4 \cos^2 x_{21}} (u_1 + \frac{3}{2} x_{22} (2x_{12} + x_{22}) \sin x_{21} - 15(\cos x_{11} - \cos x_{21})) - \\ -(1 + \frac{3}{2} \cos x_{21}) (u_2 - \frac{3}{2} x_{12}^2 \sin x_{21} - 15 \cos(x_{11} + x_{21})) \end{cases} \quad (3.78)$$

## Khớp 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = \frac{1}{4 - 9/4 \cos^2 x_{21}} (-1 + \frac{3}{2} \cos x_{21}) (u_1 + \frac{3}{2} x_{22} (2x_{12} + x_{22}) \sin x_{21} - 15(\cos x_{11} - \cos x_{21})) + \\ +(5 + 3 \cos x_{21}) (u_2 - \frac{3}{2} x_{12}^2 \sin x_{21} - 15 \cos(x_{11} + x_{21})) \end{cases} \quad (3.79)$$

**III.4.3.3. Thiết kế bộ điều khiển trượt cho tay máy 2 bậc tự do:****Xác định bậc tương đối cho khớp 1 và khớp 2:**

Từ phương trình trạng thái của các khớp (3.78), (3.79) và biểu thức (3.24) ta có được ngay là trong trường hợp này là p=n hay bậc tương đối của từng khớp p=2.

Xây dựng mặt trượt cho từng khớp:

$$\begin{aligned} S_1 &= e_1 + \lambda_1 \dot{e}_1 \\ S_2 &= e_2 + \lambda_2 \dot{e}_2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} e_1 &= x_{d1} - x_{r1} \\ e_2 &= x_{d2} - x_{r2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$\lambda_1, \lambda_2$  là những số thực dương.

Điều kiện để xảy ra ché độ trượt cho hệ trên:

$$\dot{V} = S \dot{S} < 0 \quad (3.82)$$

**Xây dựng bộ điều khiển:**

Từ (3.78) và (3.79) nếu đặt:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = f_1(x) + g_1(x, u) \end{cases} \quad (3.83)$$

và:

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = f_2(x) + g_2(x, u) \end{cases} \quad (3.84)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{e}_1 = \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \ddot{x}_{11} = \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 (f_1(x) + g_1(x, u)) \\ &= (\dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 f_1(x)) - \lambda_1 g_1(x, u) = -K_1 h(S_1) \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow g_1(x, u) = \frac{K_1 h(S_1) + (\dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 f_1(x))}{\lambda_1}$$

Tương tự ta cũng có:

$$\Rightarrow g_2(x, u) = \frac{K_2 h(S_2) + (\dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d} - \lambda_2 f_2(x))}{\lambda_2} \quad (3.86)$$

Theo (3.77) ta có:

$$\begin{bmatrix} g_1(x, u) \\ g_2(x, u) \end{bmatrix} = H^{-1} u \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = -H^{-1} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} - H^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Chú ý:  $g_1 \neq g_1(x, u)$

Từ (3.58) ta có được:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d} - f_1(x)}{\lambda_1} \\ \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d} - f_2(x)}{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Thay (3.88) vào (3.89) ta có được bộ điều khiển:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d}}{\lambda_1} \\ \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d}}{\lambda_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

**III.4.3.4. Tính toán giá trị đặt  $\theta_i$  cho tay máy hai bậc tự do:**

Để tính toán giá trị đặt cho tay máy hai bậc tự do chúng ta cần giải bài toán động học ngược, từ đó tính toán giá trị đặt cho các khớp:

$${}^0 A_2 = {}^0 A_1^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

theo cách biến đổi toạ độ ta có được:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0 A_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Tuy nhiên, trong bài toán này có  $x_2, y_2, z_2=0$  vì ta chỉ quan tâm tới chuyển động của tâm bàn kẹp do vậy từ (3.91) và (3.92) ta có:

$$\begin{cases} x_0 = l(C_{12} + C_1) \\ y_0 = l(S_{12} + S_1) \end{cases} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{x_0^2 + y_0^2}{l^2} = 2 + 2 \cos(\theta_2) \\ &\Rightarrow \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2l^2}{2l^2} = \cos(\theta_2) \\ &\Rightarrow \theta_2 = \arccos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - 2l^2}{2l^2}\right) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Từ (3.93) ta có:

$$\begin{cases} x_0 - lC_1 = lC_{12} \\ y_0 - lS_1 = lS_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - lC_1)^2 = (lC_{12})^2 \\ (y_0 - lS_1)^2 = (lS_{12})^2 \end{cases} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2l(x_0 C_1 + y_0 S_1) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2l} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} C_1 + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} S_1 \end{aligned} \quad (3.96)$$

Đặt

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ \sin(\alpha) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{cases} \quad (3.97)$$

Chọn  $\theta_1 > \alpha$  ta có:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2l}\right) + \alpha \quad (3.98)$$

Như vậy, nếu yêu cầu của bài toán là điều khiển tâm bàn kẹp đi theo một quỹ đạo đã được định trước và được xác định bởi:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) = 0 \end{cases}$$

thì giá trị đặt cho các khớp phải là:

$$\begin{cases} \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2l}\right) + \alpha \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - 2l^2}{2l^2}\right) \end{cases} \quad (3.99)$$

**CHƯƠNG IV: MÔ PHỎNG QUÁ TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA ROBOT  
DÙNG BỘ ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT TRÊN NỀN MATLAB AND SIMULINK:**

**IV.1. Tổng quan về Matlab-Simulink:**

Matlab là một bộ chương trình phần mềm lớn của lĩnh vực toán số. Tên của bộ chương trình chính là từ viết tắt của từ Matrix Laboratory, thể hiện định hướng chính của chương trình là các phép tính vector và ma trận. Phần cốt lõi của chương trình bao gồm một số hàm toán, các chức năng xuất nhập cũng như các khả năng điều khiển chương trình mà nhờ đó ta có thể dựng nên các Scripts.

Thêm vào phần cốt lõi, có thể dùng các bộ công cụ Toolbox với phạm vi chức năng chuyên dụng mà người sử dụng cần. Simulink là một Toolbox có vai trò đặc biệt quan trọng: vai trò của một bộ công cụ mạnh phục vụ mô hình hóa và mô phỏng các hệ thống kỹ thuật - Vật lý, trên cơ sở sơ đồ cấu trúc dạng khôi.

Giao diện đồ họa trên màn hình của Simulink cho phép thể hiện hệ thống dưới dạng sơ đồ tín hiệu với các khôi chức năng quen thuộc. Simulink cung cấp cho người dùng một thư viện rất phong phú, có sẵn với số lượng lớn các khôi chức năng cho các hệ tuyến tính, phi tuyến và gián đoạn. Hơn thế người sử dụng có thể tạo nên các khôi riêng cho mình.

Sau khi đã xây dựng mô hình của hệ thống cần nghiên cứu, bằng cách ghép các khôi cần thiết, thành sơ đồ cấu trúc của hệ, ta có thể khởi động quá trình mô phỏng. Trong các quá trình mô phỏng ta có thể trích tín hiệu hiện tại vị trí bất kì của sơ đồ cấu trúc và hiển thị đặc tính của tín hiệu đó trên màn hình. Hơn thế nữa, nếu có nhu cầu ta còn có thể cất giữ các đặc tính đó vào môi trường nhớ. Việc nhập hoặc thay đổi tham số của tất cả các khôi cũng có thể thực hiện được rất đơn giản bằng cách nhập trực tiếp hay thông qua matlab. Để khảo sát hệ thống, ta có thể sử dụng thêm các Toolbox như Signal Processing (xử lý tín hiệu), Optimization (tối ưu) hay Control System (hệ thống điều khiển).

**IV.2. Các thao tác thực hiện mô phỏng:**

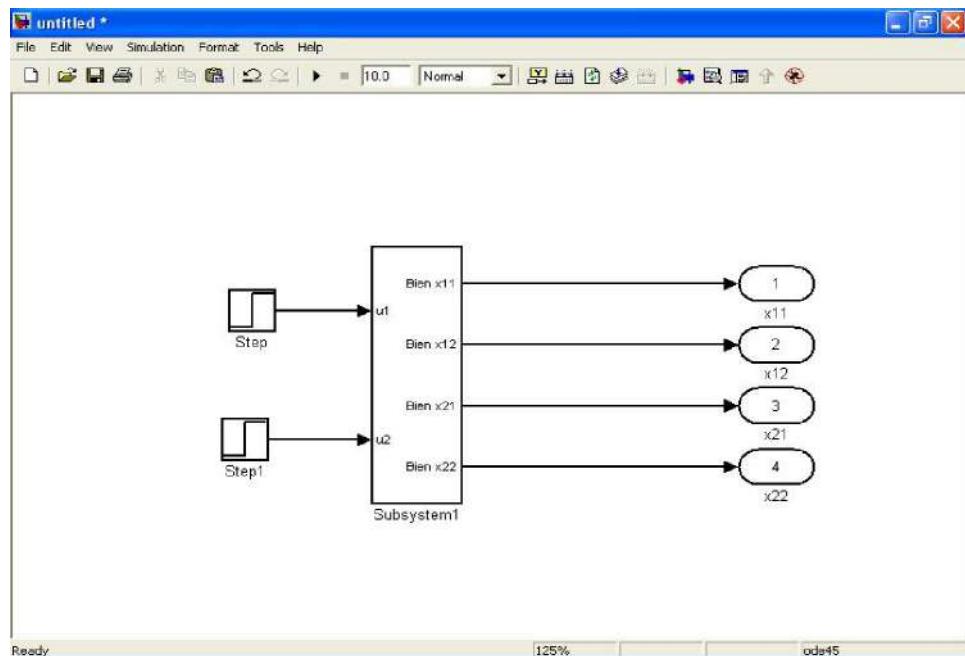
Khớp 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \frac{1}{4 - 9/4 \cos^2 x_{21}} (u_1 + \frac{3}{2} x_{22} (2x_{12} + x_{22}) \sin x_{21} - 15(\cos x_{11} - \cos x_{21})) - \\ -(1 + \frac{3}{2} \cos x_{21})(u_2 - \frac{3}{2} x_{12}^2 \sin x_{21} - 15 \cos(x_{11} + x_{21})) \end{cases}$$

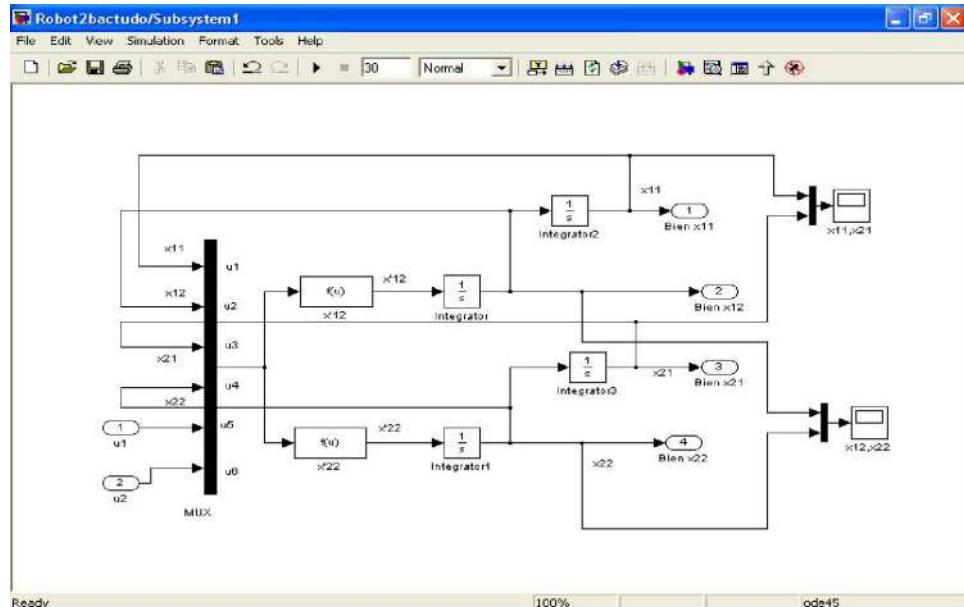
Khớp 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = \frac{1}{4 - 9/4 \cos^2 x_{21}} (- (1 + \frac{3}{2} \cos x_{21})(u_1 + \frac{3}{2} x_{22} (2x_{12} + x_{22}) \sin x_{21} - 15(\cos x_{11} - \cos x_{21})) + \\ +(5 + 3 \cos x_{21})(u_2 - \frac{3}{2} x_{12}^2 \sin x_{21} - 15 \cos(x_{11} + x_{21}))) \end{cases}$$

Ta có mô hình Simulink của Robot 2 bậc tự do:



Khối Subsystem:



Ở đây ta sử dụng các khối:

+ intergrator: khối tích phân với các tham số của khối mặc định cho trước

+ khối mux: chập tín hiệu đơn thành tín hiệu tổng hợp của nhiều tín hiệu

+ khối input, output: đầu vào và đầu ra của tín hiệu.

+ khối hàm: biểu diễn 1 hàm toán học khi có tín hiệu đi vào là các biến, tín hiệu ra thu được là hàm cần biểu diễn:

$$x_{12} = (u[5] + 1.5*u[4]*\sin(u[3])*(2*u[2]+u[4])-15*(\cos(u[1])-\cos(u[3]))-(1+1.5*\cos(u[3]))*(u[6]-1.5*u[2]*u[2]*\sin(u[3])-15*\cos(u[1]+u[3])))/(4-2.25*\cos(u[3])*cos(u[3]))$$

$$\text{Và: } x_{22} = (-(1+1.5*\cos(u[3]))*(u[5]+1.5*u[4]*\sin(u[3])*(2*u[2]+u[4])-15*(\cos(u[1])-\cos(u[3])))+(5+3*\cos(u[3]))*(u[6]-1.5*u[2]*u[2]*\sin(u[3])-15*\cos(u[1]+u[3])))/(4-2.25*\cos(u[3])*cos(u[3]))$$

+ Các khối scope (thuộc thư viện con sinks): Hiển thị các tín hiệu của quá trình mô phỏng theo thời gian. Nếu mở cửa sổ Scope sẵn từ trước khi bắt đầu mô phỏng ta có thể theo dõi trực tiếp diễn biến của tín hiệu.

Ta sử dụng nguồn tín hiệu  $u_1, u_2$  là  $1(t)$

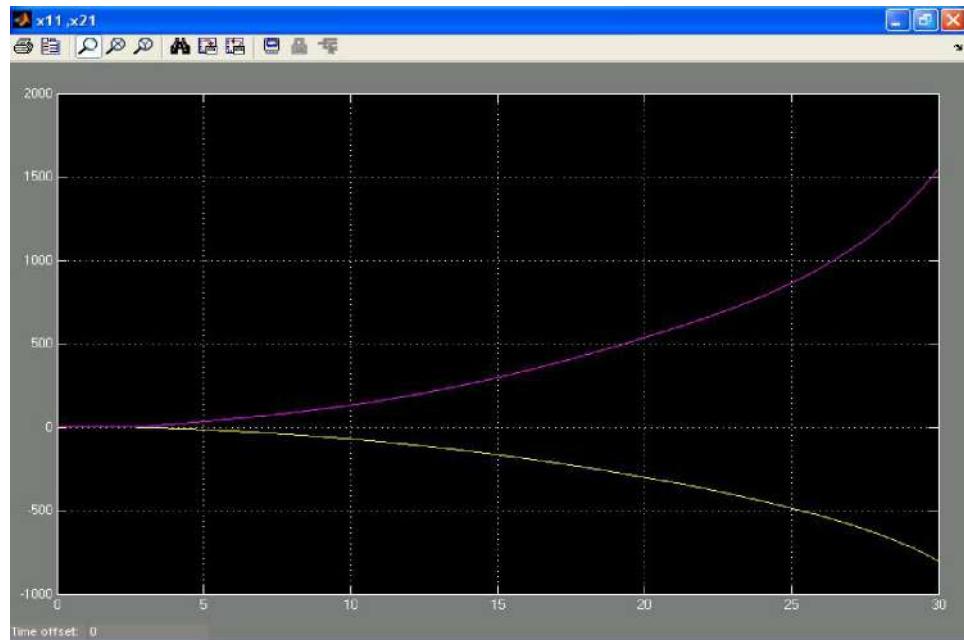
Các hàm  $x'_{12}$ , và  $x'_{22}$  là :

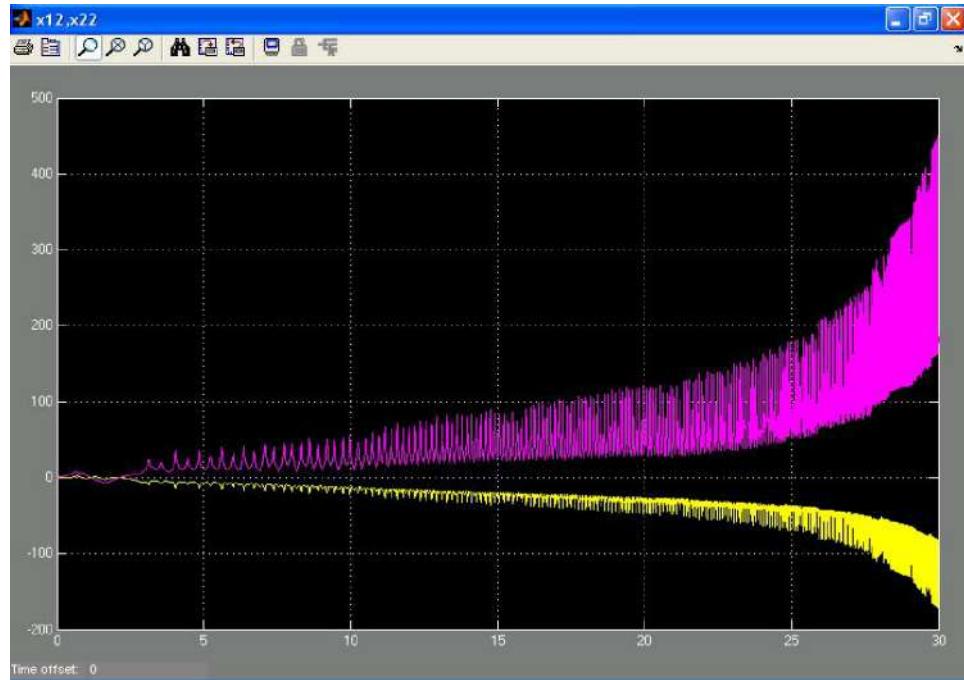
$$X'_{12} = (u[5]+1.5*u[4]*\sin(u[3])*(2*u[2]+u[4])-15*(\cos(u[1])-\cos(u[3]))-(1+1.5*\cos(u[3]))*(u[6]-1.5*u[2]*u[2]*\sin(u[3])-15*\cos(u[1]+u[3])))/(4-2.25*\cos(u[3])*\cos(u[3])).$$

$$X'_{22} = (-(1+1.5*\cos(u[3]))*(u[5]+1.5*u[4]*\sin(u[3])*(2*u[2]+u[4])-15*(\cos(u[1])-\cos(u[3])))+(5+3*\cos(u[3]))*(u[6]-1.5*u[2]*u[2]*\sin(u[3])-15*\cos(u[1]+u[3])))/(4-2.25*\cos(u[3])*\cos(u[3])).$$

với  $u[1], u[2], u[3], u[4], u[5], u[6]$  tương ứng là các vị trí thứ tự trên khối Mux.  $u[1] = x_{11}, u[2] = x_{12}, u[3] = x_{21}, u[4] = x_{22}, u[5] = u_1, u[6] = u_2$ .

Sau khi mô phỏng ta có đồ thị các đường đặc tính của các biến trạng thái  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$  là :





### Mô phỏng dạng hàm điều khiển:

Từ các công thức:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d}}{\lambda_1} \\ \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d}}{\lambda_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

- Ma trận H:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 5 + 3 \cos \theta_2 \\ h_{12} &= h_{21} = 1 + 3/2 \cos \theta_2 \\ h_{22} &= 1 \end{aligned}$$

- Ma trận C:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -3\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ c_{12} &= -3/2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ c_{21} &= -3\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \\ c_{22} &= 0 \end{aligned}$$

- Ma trận G:

$$\begin{aligned} g_1 &= 15 \cos \theta_1 - 15 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ g_2 &= 15 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Ta có:

$$U_1 = h_{11} \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d}}{\lambda_1} + h_{12} \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d}}{\lambda_2} + c_{11} x_{12} + c_{12} x_{22} + 15$$

$\cos(x_{11})$

$$-15 \sin(x_{11} + x_{21})$$

$$U_2 = h_{21} \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d}}{\lambda_1} + h_{22} \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d}}{\lambda_2} + c_{21} x_{12} + c_{22} x_{22}$$

$$+ 15 \cos(x_{11} + x_{21})$$

Chuyển về dạng hàm của sơ đồ Simulink:

$$U_1 = u[5] * (5 + \cos(u[3])) + (1 + 1.5 * \cos(u[3])) * u[6] - 3 * u[2] * u[3] * \sin(u[3])$$

$$- 1.5 * u[3] * u[4] * \sin(u[3]) + 15 * \cos(u[1]) - 15 * \cos(u[1] + u[3])$$

$$U_2 = (1 + 1.5 * \cos(u[3])) * u[5] + u[6] - 3 * u[1] * u[2] * \sin(u[3]) + 15 * \cos(u[1] + u[3])$$

với  $u[1] = x_{11}$ ,  $u[2] = x_{12}$ ,  $u[3] = x_{21}$ ,  $u[4] = x_{22}$ .

$$U[5] = \frac{K_1 h(S_1) + \dot{e}_1 + \lambda_1 \ddot{x}_{1d}}{\lambda_1}$$

$$U[6] = \frac{K_2 h(S_2) + \dot{e}_2 + \lambda_2 \ddot{x}_{2d}}{\lambda_2}$$

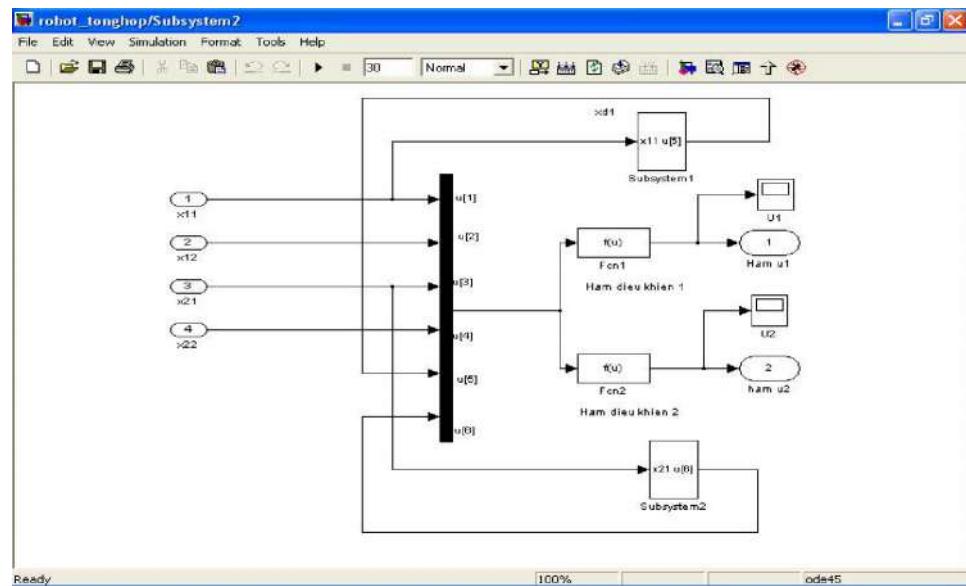
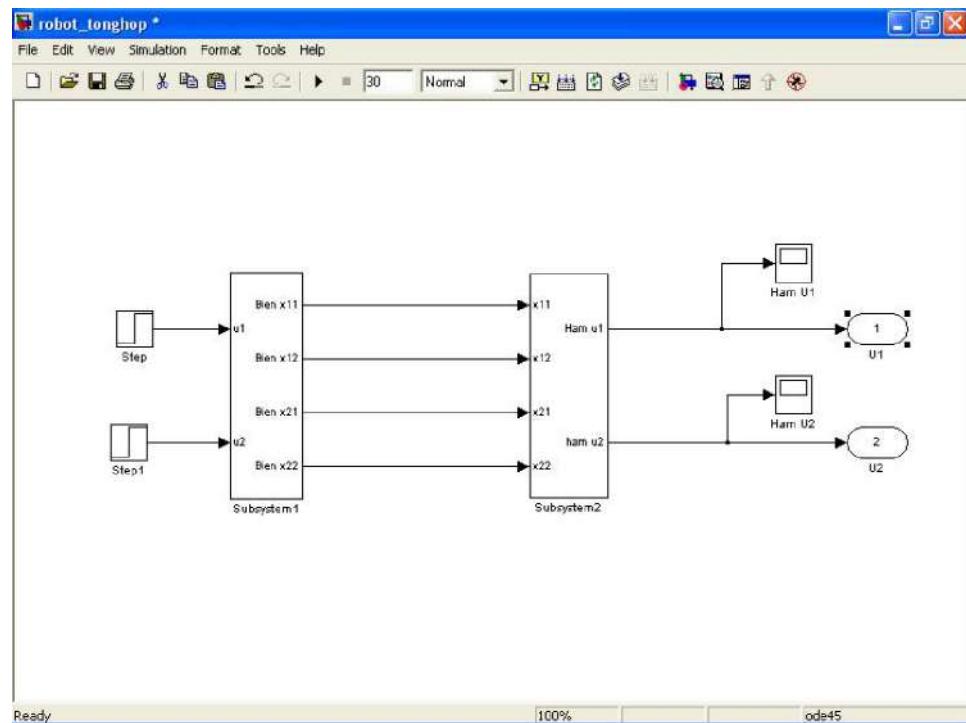
Theo công thức kinh nghiệm ta chọn:  $K_1 = K_2 = 500$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,156$ .

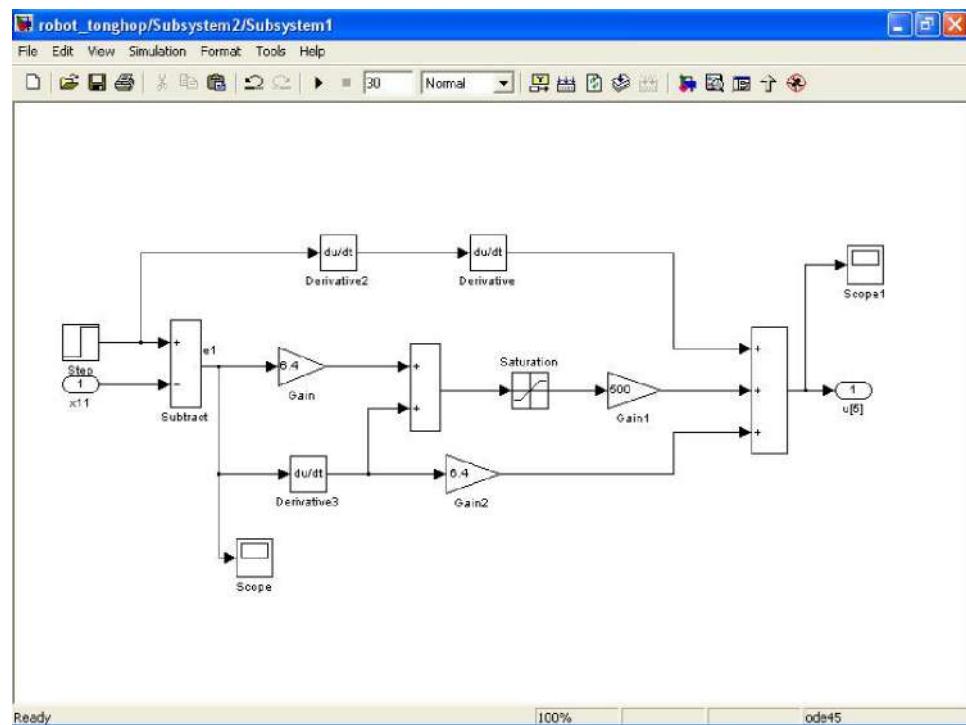
Trường hợp này ta dùng hàm  $H(S_1), H(S_2)$  là các hàm giới hạn đầu vào trong khoảng giá trị upper và giá trị lower.

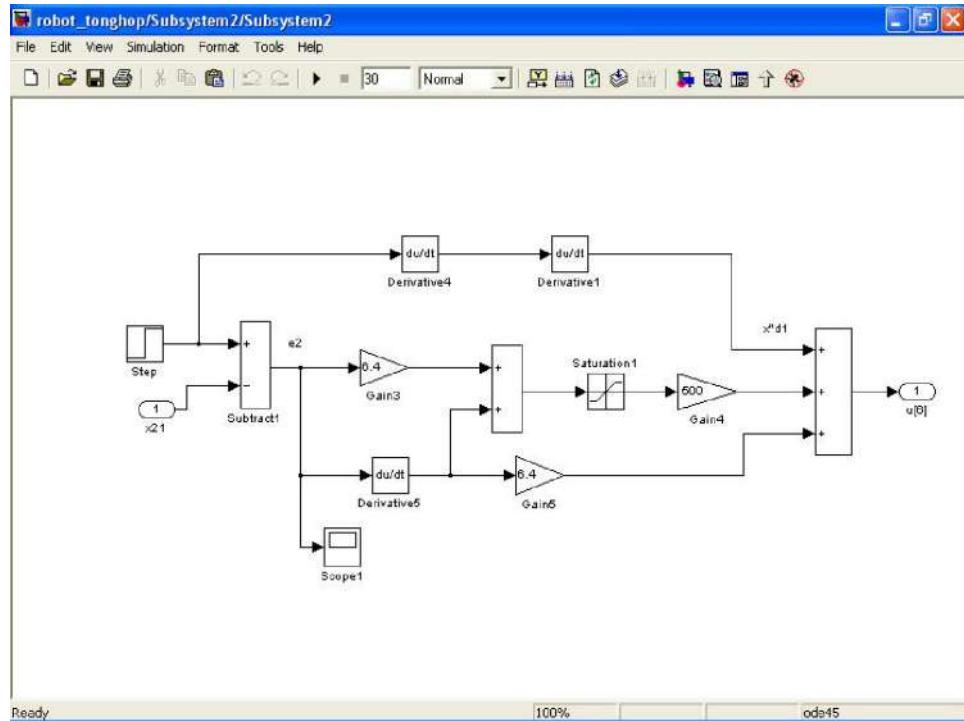
từ đó ta có:

$$u[5] = \frac{K_1}{\lambda_1} H(S_1) + \frac{1}{\lambda_1} e_1 + \ddot{x}_{1d} \quad (\text{Khối subsystem})$$

$$u[6] = \frac{K_2}{\lambda_2} H(S_2) + \frac{1}{\lambda_2} e_2 + \ddot{x}_{2d} \quad (\text{Khối subsystem2})$$







Ta chọn khoảng thời gian mô phỏng là từ 0 ->30 s , tức giá trị stop time = 30 ở trong Configuration Parameters.

Khi chạy sơ đồ Simulink ta được các kết quả đường đặc tuyến của 2 hàm điều khiển  $U_1$ ,  $U_2$ , và sai số  $\dot{e}_1$ ,  $\dot{e}_2$  là:

Ta có các giá trị đặt  $x_{d1}$  và  $x_{d2}$  là:

Từ các công thức:

$$\begin{cases} x_0 = l(C_{12} + C_1) \\ y_0 = l(S_{12} + S_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ \sin(\alpha) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{2l}\right) + \alpha \\ \theta_2 = \arccos\left(\frac{x_0^2 + y_0^2 - 2l^2}{2l^2}\right) \end{cases}$$

=> $x_{d1} =$

$\text{acos}(\sqrt{(\cos(u[1]+u[3])+\cos(u[1]))^2+(\sin(u[1]+u[3])+\sin(u[1]))^2})/2 +$   
 $\text{acos}((\cos(u[1]+u[3])+\cos(u[1]))/\sqrt{(\cos(u[1]+u[3])+\cos(u[1]))^2+(\sin(u[1]+u[3]))^2})$

$x_{d2} = \text{acos}(((\cos(u[1]+u[3])+\cos(u[1]))^2+(\sin(u[1]+u[3])+\sin(u[1]))^2-2)/2)$

Kết luận

**Các vấn đề đã được giải quyết :**

**Các vấn đề còn tồn tại :**

Tài liệu tham khảo :

1. Nguyễn Thiện Phúc: **Robot công nghiệp**. NXB KHKT 2004.
2. Nguyễn Thiện Phúc: **Người máy công nghiệp và sản xuất tự động linh hoạt**. NXB KHKT 1991.
3. Nguyễn Phùng Quang: **Điều khiển Robot công nghiệp - Những vấn đề cần biết**. Tạp chí Tự động hóa ngày nay - số tháng 4, 5, 6 / 2006.
4. Nguyễn Thiện Phúc: **Robot - Thế giới công nghệ cao của bạn**. NXB KHKT 2005.
5. Đào Văn Hiệp: **Kỹ thuật Robot**. NXB KHKT 2002.
6. Đinh Gia Tường, Tạ Khánh Lâm: **Nguyên lý máy**. NXB GD 2003.
7. Nguyễn Hùng Thái: **Xây dựng thuật toán điều khiển và mô phỏng động Robot nhiều bậc tự do**. Thư viện ĐHBK HN 2002.
8. Lê Huy Tùng: **Điều khiển trượt thích nghi động cho đối tượng phi tuyến có mô hình không tường minh**. Thư viện ĐHBK HN 2003.
9. Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh, Hán Thành Trung: **Lý thuyết điều khiển phi tuyến**. NXB KHKT 2003.
10. Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh: **Hệ phi tuyến**. NXB KHKT 2000.
11. Nguyễn Thương Ngõ: **Lý thuyết điều khiển tự động hiện đại**. NXB KHKT 2003.
12. Nguyễn Thương Ngõ: **Lý thuyết điều khiển thông thường và hiện đại**. NXB KHKT 2002.
13. Nguyễn Doãn Phước: **Lý thuyết điều khiển tuyến tính**. NXB KHKT 2002.

14. Nguyễn Phùng Quang: **Matlab & Simulink dành cho kỹ sư điều khiển tự động.** NXB KHKT 2004.
15. Nguyễn Hoàng Hải: **Lập trình Matlab.** NXB KHKT 2003.
16. Solomon: **Stability of nonlinear control systems.** 1965.
17. **Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations.** Thư viện DHBK HN 1994.
18. Harry: **Nonlinear Modulation Theory.** 1971.
19. Jakub Mozaryn, Jerzt E.Kurek: **Design of the Sliding Mode Control for the Puma 560 Robot.** Institute of Automatic Control and Robotics Warsaw university of Technology.
20. Martin Ansbjerg Kjaer: **Sliding Mode Control.** Sweden February 6<sup>th</sup> 2004.
21. C.Abdallah, D.Dawson, P.Dorato, and M.Jamshidi: **Survey of Robust Control for Rigid Robots .**
22. Mark W.Spong: **Motion control of Robot Manipulators.** The coordinated Science Laboratory, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1308 W. Main St, Urbana, III. 61801 USA.
23. . Andre' Jaritz and Mark W. Spong: **An Experimental Comparison of Robust control Algorithms on a Direct Drive Manipulator .** IEEE Transaction on Control Systems Technology, Vol. 4, No. 6, November 1996.
24. Austin Blaquie're: **Nonlinear system analysis.** Academic Press New York and London 1966.