

Chương 7: ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ

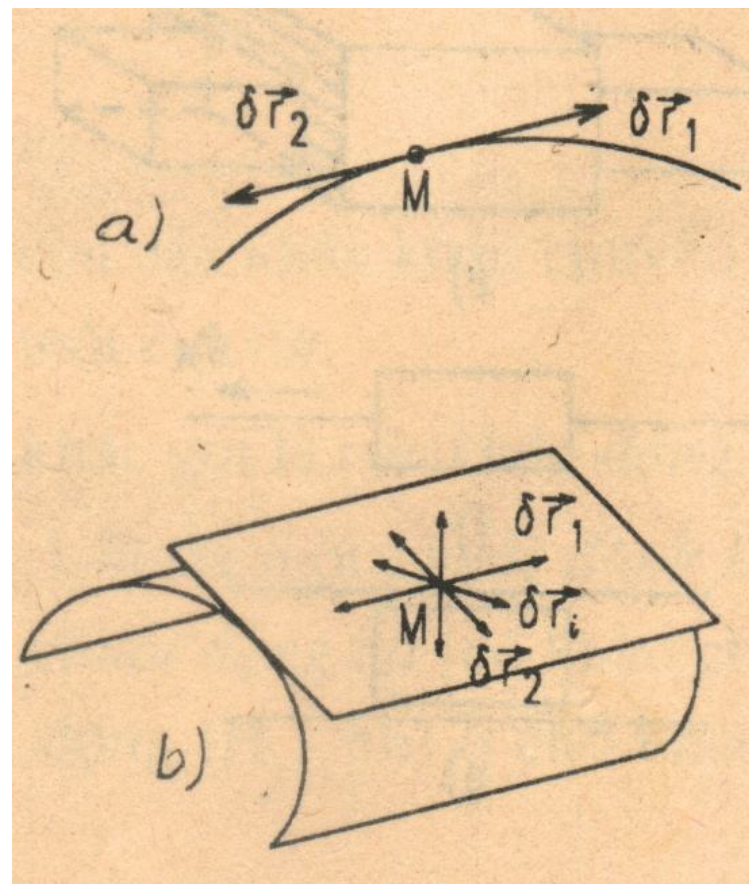
1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1. Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ

- Chuyển động của cơ hệ thường bị ràng buộc bởi những điều kiện hình học và động học nhất định tập hợp các điều kiện đó gọi là liên kết.
- ❖ Tập hợp những di chuyển vô cùng bé bảo toàn liên kết của hệ gọi là di chuyển khả dĩ của hệ.
- ❖ Ví dụ: Số di chuyển khả dĩ của điểm M.

$$\delta \vec{r}_1 = k \delta \vec{r}_2$$

$$\delta \vec{r}_i = k_1 \delta \vec{r}_1 + k_2 \delta \vec{r}_2$$



❖ Di chuyển khả dĩ độc lập

$$\vec{\delta r}_1 = k \vec{\delta r}_2$$

$$\vec{\delta r}_i = k_1 \vec{\delta r}_1 + k_2 \vec{\delta r}_2$$

❖ Số bậc tự do của cơ hệ bằng số di chuyển khả dĩ độc lập.

1.2. Toạ độ suy rộng của cơ hệ

- Tập hợp các thông số đủ để xác định vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định gọi là các toạ độ suy rộng của cơ hệ ký hiệu: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$.
- Toạ độ đề các của các chất điểm có thể biểu diễn qua toạ độ suy rộng.
- Nếu các toạ độ suy rộng là độc lập \Rightarrow toạ độ suy rộng đủ (q_1, q_2, \dots, q_n).
- Nếu không ta có toạ độ suy rộng dư ($q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_m$), $m > n$.
- Số toạ độ suy rộng dư bằng số phương trình liên kết.

❖ Ví dụ:

- Khảo sát hai thanh liên kết bản lề loại 5 với nhau và với giá như hình vẽ:
- Vị trí của chúng có thể xác định như sau:

➤ $\{\varphi, \psi\}$

- Số tọa độ suy rộng đủ.

➤ $\{x_A, y_A, x_B, y_B\}$

$$m-n = 2$$

Phương trình liên kết:

$$x_A^2 + y_A^2 = OA^2$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = AB^2$$

Trong trường hợp các phương trình liên kết không chứa các vận tốc suy rộng \Rightarrow liên kết hình học

Nếu không chứa thời gian \Rightarrow liên kết dừng.

Trong phạm vi giáo trình ta chỉ khảo sát các cơ hệ chịu liên kết hình học và dừng.

1.3. Các đặc trưng hình học khối của vật rắn

1.3.1. Khối tâm của vật rắn

- Vị trí khối tâm của vật rắn được xác định như sau:

$$\vec{r}_c = \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k} = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} dm$$

- Chiếu phương trình này lên các trục tọa độ \Rightarrow tọa độ (x_c, y_c, z_c) của khối tâm.

1.3.2. Mô men quán tính của vật rắn

- Mô men quán tính của vật rắn đối với trục z ký hiệu I_z , là một đại lượng vô hướng xác định theo công thức:

$$I_z = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k \rho_k^2 = \iiint_v \rho^2 dm$$

- Trong trường hợp vật thể hình trụ, tròn hoặc vành khăn:

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \qquad I_z = mR^2$$

1.4. Các lực tác dụng lên cơ hệ

- Lực tác dụng lên các chất điểm của cơ hệ thay đổi theo thời gian, không những phụ thuộc vào vị trí và vận tốc của chất điểm chịu lực mà còn phụ thuộc vào vị trí và vận tốc của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ.

- Gọi \vec{F}_k là lực tác dụng lên chất điểm M_k .

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$$

❖ Lực tác dụng lên cơ hệ gồm:

- Ngoại lực: Lực từ bên ngoài tác dụng lên chất điểm M_k của cơ hệ ký hiệu \vec{F}_{ck} .
- Nội lực: Lực do các chất điểm thuộc cơ hệ tác dụng lẫn nhau ký hiệu \vec{F}_{ik} .
- Lực liên kết: Ký hiệu \vec{R}_k , là lực liên kết tác dụng lên chất điểm thuộc cơ hệ.
- Lực hoạt động là lực không phụ thuộc vào loại lực liên kết.

1.5. Lực suy rộng

1.5.1. Biểu thức công của lực trong di chuyển khả dĩ

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k)$$

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum \left(F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k \right)$$

- Giả sử số tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$. Vì x_k là hàm số của q_i nên:

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad \delta y_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad \delta z_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

- Thay vào biểu thức của $\sum \delta A_k$ ta có:

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

1.5.2. Lực suy rộng

- Đại lượng: $Q_i = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$

- Thứ nguyên của lực suy rộng phụ thuộc vào thứ nguyên của tọa độ suy rộng (lực hoặc mômen).

1.6. Liên kết lý tưởng

- ❖ Là liên kết mà tổng công của các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ đều bằng 0, thực tế nếu bỏ qua ma sát và tính đàn hồi các liên kết sau đây:

- Các vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lý tưởng:

- Hai vật rắn luôn tựa vào nhau (bỏ qua ma sát);
- Dây mềm không dẫn vắt qua ròng rọc (ma sát trục, trượt);
- Hai vật lăn không trượt với nhau.
- Dễ dàng thấy:

$$Q_i^R = \sum \vec{R}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = 0$$

2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

- Đối với các cơ hệ chịu liên kết hình học, dừng, và lý tưởng điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng tại vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ từ vị trí đang xét đều triệt tiêu.

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0$$

- \vec{F}_k là lực hoạt động (hợp lực) tác dụng lên chất điểm M_k .
- $\delta \vec{r}_k$ là di chuyển khả dĩ của điểm M_k .

2.2. Điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ

Từ nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có:

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0$$

- Do các tọa độ suy rộng đủ độc lập với nhau nên các δq_i cũng độc lập đối với nhau.

Vậy: $Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots n)$

Định lý: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hình học, dừng và lý tưởng cân bằng tại một vị trí là các lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với các tọa độ suy rộng đủ phải đồng thời triệt tiêu.

- Nếu đặt: $\vec{v}_k^* = \frac{\delta \vec{r}_k}{dt}$ thì nguyên lý di chuyển khả dĩ có thể viết dưới dạng:
$$\sum \vec{F}_k \vec{v}_k^* = 0$$

- Phương trình này gọi là phương trình công suất DCKD.

2.3. Ví dụ

3. NGUYÊN LÝ ĐA LẮM BE

3.1. Nguyên lý Đa lăm be đối với chất điểm

- Các lực thực sự đặt vào chất điểm cùng lực quán tính của chất điểm tạo thành một hệ lực cân bằng.

- Theo định luật cơ bản của ĐLH (Niu tơn 2): $\vec{F} = m\vec{a}$

- Biến đổi ta có $\vec{F} + (-m\vec{a}) = \vec{F} + \vec{F}_{qt} = 0$

3.2. Nguyên lý Đa lăm be đối với cơ hệ

- Khảo sát chất điểm thứ k thuộc cơ hệ:

$$\vec{F}_k + (-m\vec{a}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_{qt}^k = 0$$

- Lấy tổng hai vế từ 1 đến n (hệ lực phẳng) ta có:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \vec{R}_{qt} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\vec{F}_k^e) + \bar{M}_o qt = 0$$

3.3. Thu gọn hệ lực quán tính

3.3.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$\vec{R}_{qt} = \sum_{k=1}^n -m_k \vec{a}_k = -M\vec{a}_c$$

- Hợp lực quán tính đặt tại khối tâm C của vật.

3.3.2. Vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định

- Thu gọn hệ lực quán tính về O ta được.

$$\vec{R}_{qt} = \sum_{k=1}^n -m_k \vec{a}_k = -M\vec{a}_c$$

$$M_{o_{qt}} = \sum_{k=1}^n m_o \left(\vec{F}_{kqt}^\tau \right) + \sum_{k=1}^n m_o \left(\vec{F}_{kqt}^n \right) = \sum_{k=1}^n m_o \left(-m_k \vec{a}_k^\tau \right) = -I_z \varepsilon$$

3.3.3. Vật rắn chuyển động song phẳng

- Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta được.

$$\vec{R}_{Cqt} = -M\vec{a}_c \quad \overline{M}_{Cqt} = -I_{Cz} \overline{\varepsilon}_c$$

3.4. Ví dụ

4. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

4.1. Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn

4.1.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

- Theo nguyên lý Đa lăm be:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k + \vec{R}_{qt} = 0$$

$$M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = M \ddot{\vec{r}}_c = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx}$$

$$M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky}$$

4.1.2. Vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định

$$\sum_{k=1}^N \overline{m}_o(\vec{F}_k) + \overline{M}_{oqt} = 0$$

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^N \overline{m}_o(\vec{F}_k)$$

- Trong đó \vec{F}_k là các lực ngoài kể cả phản lực liên kết.

4.1.3. Chuyển động song phẳng của tấm phẳng

- Trong hệ tọa độ đề các:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N F_{kx} \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N F_{ky} \quad I_{Cz} \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^N \overline{m}_o(\vec{F}_k)$$

- Trong đó: x_C và y_C là tọa độ khối tâm C.

4.2. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ – Phương trình Lagrange loại 2

- Khảo sát cơ hệ chịu liên kết hình học và lý tưởng có vị trí xác định nhờ n tọa độ suy rộng đủ: $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$.
- Theo nguyên lý Đa lăm be:

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_N, \vec{R}_1, \vec{R}_2 \dots \vec{R}_N, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt} \dots \vec{F}_N^{qt} \equiv 0$$

- Do liên kết lý tưởng nên các lực liên kết triệt tiêu nhau nên điều kiện cân bằng sẽ là:

$$Q_i^F + Q_i^{qt} = 0 \quad \text{Trong đó: } i = 1, 2 \dots n$$

- Từ biểu thức động năng T của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng có thể chứng minh:

$$Q_i^{qt} = - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Q_i^F Là lực suy rộng của các lực hoạt động.

- Thay vào phương trình điều kiện cân bằng

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = Q_i^F$$

- Đây là phương trình Lagrange II mô tả chuyển động của cơ hệ.
- Nếu các lực hoạt động gồm các lực có thể với hàm thế năng Π và các lực hoạt động khác không thể có lực suy rộng Q_i^* thì phương trình Lagrange loại II có thể viết như sau:

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n$$

5. VÍ DỤ