Estruturas Discretas: Relações e Funções

2019/2020

Pares ordenados

- Dois elementos a, b podem ser agrupados num *par ordenado*, o qual é denotado por (a, b).

Pares ordenados

- Dois elementos a, b podem ser agrupados num *par ordenado*, o qual é denotado por (a, b).
- Dados dois pares ordenados (x, y), (u, v), então

$$(x, y) = (u, v) \text{ se e só se } x = u \text{ e } y = v$$

Pares ordenados

- Dois elementos a, b podem ser agrupados num *par ordenado*, o qual é denotado por (a, b).
- Dados dois pares ordenados (x, y), (u, v), então
$$(x, y) = (u, v) \text{ se e só se } x = u \text{ e } y = v$$
- A noção de par ordenado pode ser estendida a tuplos de tamanho n

Pares ordenados

- Dois elementos a, b podem ser agrupados num *par ordenado*, o qual é denotado por (a, b).
- Dados dois pares ordenados (x, y), (u, v), então
$$(x, y) = (u, v) \text{ se e só se } x = u \text{ e } y = v$$
- A noção de par ordenado pode ser estendida a tuplos de tamanho n
- A noção de tuplos de n elementos, permite representar conjuntos de objectos, nos quais a ordem entre os elementos é importante.

Produto Cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos A e B, o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}.$$

Produto Cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos A e B, o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{\ (x, y) \mid x \in A, y \in B\ \}.$$

Um caso especial bastante útil é:

$$A^2 = A \times A = \{\ (x, y) \mid x, y \in A\ \}.$$

Produto Cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos A e B, o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}.$$

Um caso especial bastante útil é:

$$A^2 = A \times A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}.$$

De uma forma geral definimos: $A^1 = A$, e para $n \geq 2$

$$A^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in A \}.$$

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$,

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Isso implica que $(u, v) \in A \times C$ ou $(u, v) \in B \times C$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Isso implica que $(u, v) \in A \times C$ ou $(u, v) \in B \times C$. No primeiro caso $u \in A$ e $v \in C$ e no segundo caso $u \in B$ e $v \in C$.

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Isso implica que $(u, v) \in A \times C$ ou $(u, v) \in B \times C$. No primeiro caso $u \in A$ e $v \in C$ e no segundo caso $u \in B$ e $v \in C$. Logo $u \in A \cup B$ e $v \in C$,

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Isso implica que $(u, v) \in A \times C$ ou $(u, v) \in B \times C$. No primeiro caso $u \in A$ e $v \in C$ e no segundo caso $u \in B$ e $v \in C$. Logo $u \in A \cup B$ e $v \in C$, o que implica que $(u, v) \in (A \cup B) \times C$.

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Se $A = B$, i.e. $R \subseteq A \times A$, dizemos também que R é uma relaçao binária definida em A.
A relação R indica os pares (a, b) para os quais a relação representada por R é verdadeira.

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Se $A = B$, i.e. $R \subseteq A \times A$, dizemos também que R é uma relaçao binária definida em A.
A relação R indica os pares (a, b) para os quais a relação representada por R é verdadeira.

Por exemplo, a relação $>$ em $\{1, 2, 3\}$ é:

$$> = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Se $A = B$, i.e. $R \subseteq A \times A$, dizemos também que R é uma relaçao binária definida em A.
A relação R indica os pares (a, b) para os quais a relação representada por R é verdadeira.

Por exemplo, a relação $>$ em $\{1, 2, 3\}$ é:

$$> = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Se $(a, b) \in R$, então a está em relação com b em R. Podemos também usar a notação aRb para indicar que $(a, b) \in R$.

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Se $A = B$, i.e. $R \subseteq A \times A$, dizemos também que R é uma relaçao binária definida em A.
A relação R indica os pares (a, b) para os quais a relação representada por R é verdadeira.

Por exemplo, a relação $>$ em $\{1, 2, 3\}$ é:

$$> = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Se $(a, b) \in R$, então a está em relação com b em R. Podemos também usar a notação aRb para indicar que $(a, b) \in R$.

Exemplos de relações matemáticas, que já vimos: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$, $|$, $\equiv_n$, $\subset$, $\subseteq$, etc...

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;
- $(|, A)$;

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;
- $(|, A)$;
- $(|, \mathbb{Z})$;

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;
- $(|, A)$;
- $(|, \mathbb{Z})$;
- $(\subseteq, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}))$.

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;
- $(|, A)$;
- $(|, \mathbb{Z})$;
- $(\subseteq, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}))$.

Representação de Relações

Matrizes Seja R uma relação entre $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. R pode ser representada pela matriz $M_R = \{m_{ij}\}$, onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Representação de Relações

Matrizes Seja R uma relação entre $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. R pode ser representada pela matriz $M_R = \{m_{ij}\}$, onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Exemplo $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,b),(b,c)\}$

R	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	1
c	0	1	1

Matrizes

Definição: Sejam $E = (e_{ij})_{m \times n}$ e $F = (f_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes $(0, 1)$ de $m \times n$. Dizemos que E precede F e escrevemos $E \leq F$, se $e_{ij} \leq f_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Matrizes

Definição: Sejam $E = (e_{ij})_{m \times n}$ e $F = (f_{ij})_{m \times n}$ duas matrizes $(0,1)$ de $m \times n$. Dizemos que E precede F e escrevemos $E \leq F$, se $e_{ij} \leq f_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição: Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $I_n = (\delta_{ij})$ é a matriz de $n \times n$ tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Matrizes

Definição: Sejam $E = (e_{ij})_{m\times n}$ e $F = (f_{ij})_{m\times n}$ duas matrizes $(0,1)$ de $m \times n$. Dizemos que E precede F e escrevemos $E \leq F$, se $e_{ij} \leq f_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição: Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $I_n = (\delta_{ij})$ é a matriz de $n \times n$ tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definição: Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz $(0,1)$. A transposta de A, escrevemos A^t, é a matriz $(a^*_{ji})_{n\times m}$ tal que $a^*_{ji} = a_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$ e R uma relação em A. Se M_R é a matriz da relação R, então:

Matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$ e R uma relação em A. Se M_R é a matriz da relação R, então:

- $M_R = 0$ (a matriz com todas as posições 0) se e só se $R = \emptyset$.

Matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$ e R uma relação em A. Se M_R é a matriz da relação R, então:

- $M_R = 0$ (a matriz com todas as posições 0) se e só se $R = \emptyset$.
- $M_R = 1$ (a matriz com todas as posições 1) se e só se $R = A \times A$.

Tipos de relações

Uma relação R num conjunto A é chamada:

Tipos de relações

Uma relação R num conjunto A é chamada:

- reflexiva: $\forall a \in A \; (a, a) \in R$

Tipos de relações

Uma relação R num conjunto A é chamada:

- reflexiva: $\forall a \in A \ (a, a) \in R$
- simétrica: $\forall a, b \in A \ [(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R]$

Tipos de relações

Uma relação R num conjunto A é chamada:

- reflexiva: $\forall a \in A \; (a, a) \in R$
- simétrica: $\forall a, b \in A \; [(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R]$
- anti-simétrica:
  $\forall a, b \in A \; [(a, b) \in R \land (b, a) \in R \;\; \Rightarrow \;\; a = b]$

Tipos de relações

Uma relação R num conjunto A é chamada:

- reflexiva: $\forall a \in A \; (a, a) \in R$
- simétrica: $\forall a, b \in A \; [(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R]$
- anti-simétrica:
  $\forall a, b \in A \; [(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \;\; \Rightarrow \;\; a = b]$
- transitiva:
  $\forall a, b, c \in A \; [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \;\; \Rightarrow \;\; (a, c) \in R]$

Propriedades das relações (Matrizes)

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

Propriedades das relações (Matrizes)

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- R é reflexiva se e só se $I_n \leq M_R$ (I_n é a matriz identidade de dimensão n).

Propriedades das relações (Matrizes)

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- R é reflexiva se e só se $I_n \leq M_R$ (I_n é a matriz identidade de dimensão n).
- R é simétrica se e só se $M_R = M_R^t$ (onde M^t é a matriz transposta de M).

Propriedades das relações (Matrizes)

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- R é reflexiva se e só se $I_n \leq M_R$ (I_n é a matriz identidade de dimensão n).
- R é simétrica se e só se $M_R = M_R^t$ (onde M^t é a matriz transposta de M).
- R é anti-simétrica se e só se $M_R \cap M_R^t \leq I_n$.

Propriedades das relações (Matrizes)

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- R é reflexiva se e só se $I_n \leq M_R$ (I_n é a matriz identidade de dimensão n).
- R é simétrica se e só se $M_R = M_R^t$ (onde M^t é a matriz transposta de M).
- R é anti-simétrica se e só se $M_R \cap M_R^t \leq I_n$.
- R é transitiva se e só se $M_R \times M_R = M_R^2 \leq M_R$.

Relações de equivalência

Definição: uma relação R num conjunto A é chamada *relação de equivalência* se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Relações de equivalência

Definição: uma relação R num conjunto A é chamada *relação de equivalência* se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Como vimos antes a relação $\equiv_n$ em $\mathbb{Z}$ é:

- reflexiva,
- simétrica e
- transitiva

logo é uma relação de equivalência.

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento $a \in A$ é chamado de *classe de equivalência* de a, notação $R[a]$ ou $[a]_R$, e é definida como

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento $a \in A$ é chamado de *classe de equivalência* de a, notação $R[a]$ ou $[a]_R$, e é definida como

$$R[a] = \{b \in A : aRb\}$$

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento $a \in A$ é chamado de *classe de equivalência* de a, notação $R[a]$ ou $[a]_R$, e é definida como

$$R[a] = \{b \in A : aRb\}$$

Definição: Uma partição de um conjunto A é uma conjunto $\mathcal{X} \subseteq 2^A \setminus \{\emptyset\}$, tal que

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento $a \in A$ é chamado de *classe de equivalência* de a, notação $R[a]$ ou $[a]_R$, e é definida como

$$R[a] = \{b \in A : aRb\}$$

Definição: Uma partição de um conjunto A é uma conjunto $\mathcal{X} \subseteq 2^A \setminus \{\emptyset\}$, tal que

(a) Cada $a \in A$ pertence a algum $S \in \mathcal{X}$.

Classes de equivalência

Uma relação de equivalência induz uma partição dos seus elementos, em classes.

Definição: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um elemento $a \in A$ é chamado de *classe de equivalência* de a, notação $R[a]$ ou $[a]_R$, e é definida como

$$R[a] = \{b \in A : aRb\}$$

Definição: Uma partição de um conjunto A é uma conjunto $\mathcal{X} \subseteq 2^A \setminus \{\emptyset\}$, tal que

(*a*) Cada $a \in A$ pertence a algum $S \in \mathcal{X}$.

(*b*) Se $S, T \in \mathcal{X}$, então ou $S = T$ ou $S \cap T = \emptyset$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a).

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Se $(a, b) \notin R$ então seja $c \in R[a]$.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Se $(a, b) \notin R$ então seja $c \in R[a]$. Se $c \in R[b]$ então aRc e bRc,

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Se $(a, b) \notin R$ então seja $c \in R[a]$. Se $c \in R[b]$ então aRc e bRc, o que implica, por transitividade e reflexividade, aRb, o que gera uma contradição.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Se $(a, b) \notin R$ então seja $c \in R[a]$. Se $c \in R[b]$ então aRc e bRc, o que implica, por transitividade e reflexividade, aRb, o que gera uma contradição. Logo nenhum elemento de $R[a]$ pertence a $R[b]$ e $R[a] \cap R[b] = \emptyset$. O que mostra$(b)$ e conclui a prova.

Classes de equivalência e partições

Teorema: Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então $\{R[a] : a \in A\}$ é uma partição de A.

Prova: Seja R uma relação de equivalência em A. Como R é reflexiva então qualquer $a \in A$ pertence a $R[a]$, o que implica (a). Sejam duas classes de equivalência $R[a]$ e $R[b]$. Se aRb, então para todo o $c \in R[a]$, por transitividade e simetria, bRc e $c \in R[b]$. Isto mostra que $R[a] \subseteq R[b]$. Simetricamente demonstramos que $R[b] \subseteq R[a]$, o que implica que $R[a] = R[b]$.

Se $(a, b) \notin R$ então seja $c \in R[a]$. Se $c \in R[b]$ então aRc e bRc, o que implica, por transitividade e reflexividade, aRb, o que gera uma contradição. Logo nenhum elemento de $R[a]$ pertence a $R[b]$ e $R[a] \cap R[b] = \emptyset$. O que mostra$(b)$ e conclui a prova.

Exemplos:

Determine as propriedades da seguinte relação binária R definida em $\mathbb{Z}$. Se R for uma relação de equivalência determine ainda a partição de $\mathbb{Z}$ induzida por R.

$$R = \{ \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \ 4 \mid (a + 3b) \ \}$$

Exemplos:

Seja X um conjunto e Y um subconjunto de X. Determine as propriedades da seguinte relação binária S definida em $\mathcal{P}(X) = 2^X$.

$$S = \{ (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq Y \}$$

Exemplos:

Determine as propriedades da seguinte relação binária T definida em $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$T = \{\ ((a, b), (c, d)) \in A \times A \mid \mathrm{mdc}(a, b) = \mathrm{mdc}(c, d)\ \}$$

Exemplos:

Determine as propriedades da seguinte relação binária T definida em $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$T = \{ \; ((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid \mathrm{mdc}(a,b) = \mathrm{mdc}(c,d) \; \}$$

Determine $[(700, 1320)]_T$.

Exemplos:

Determine as propriedades da seguinte relação binária T definida em $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$T = \{ \; ((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid \mathrm{mdc}(a,b) = \mathrm{mdc}(c,d) \; \}$$

Determine $[(700, 1320)]_T$.

(Nota: $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$.)

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto A juntamente com uma relação parcial R é chamado um um conjunto parcialmente ordenado, *poset*, e é denotado por (A, R).

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto A juntamente com uma relação parcial R é chamado um um conjunto parcialmente ordenado, *poset*, e é denotado por (A, R).

As relações $\leq$, $\geq$, e $|$ em $\mathbb{Z}$, assim como a relação $\subseteq$ em 2^A para qualquer A, são relações de ordem parcial.

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto A juntamente com uma relação parcial R é chamado um um conjunto parcialmente ordenado, *poset*, e é denotado por (A, R).

As relações $\leq$, $\geq$, e $|$ em $\mathbb{Z}$, assim como a relação $\subseteq$ em 2^A para qualquer A, são relações de ordem parcial.

Definição: Os elementos a e b de uma ordem parcial (A, R) são comparáveis se aRb ou bRa, caso contrário são incomparáveis.

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto A juntamente com uma relação parcial R é chamado um um conjunto parcialmente ordenado, *poset*, e é denotado por (A, R).

As relações $\leq$, $\geq$, e $|$ em $\mathbb{Z}$, assim como a relação $\subseteq$ em 2^A para qualquer A, são relações de ordem parcial.

Definição: Os elementos a e b de uma ordem parcial (A, R) são comparáveis se aRb ou bRa, caso contrário são incomparáveis.

Exemplo: Considere a seguinte ordem parcial $(Z^+, |)$, 3 e 9 são comparáveis?

Ordens parciais

Definição: Uma relação R num conjunto A é chamada de *ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Um conjunto A juntamente com uma relação parcial R é chamado um um conjunto parcialmente ordenado, *poset*, e é denotado por (A, R).

As relações $\leq$, $\geq$, e $|$ em $\mathbb{Z}$, assim como a relação $\subseteq$ em 2^A para qualquer A, são relações de ordem parcial.

Definição: Os elementos a e b de uma ordem parcial (A, R) são comparáveis se aRb ou bRa, caso contrário são incomparáveis.

Exemplo: Considere a seguinte ordem parcial $(Z^+, |)$, 3 e 9 são comparáveis? e 5 e 7?

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*.

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*. Um conjunto totalmente ordenada é chamado uma *cadeia*.

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*. Um conjunto totalmente ordenada é chamado uma *cadeia*.

Exemplo: $(Z, \leq)$ é uma ordem total? e $(Z^+, |)$?

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*. Um conjunto totalmente ordenada é chamado uma *cadeia*.

Exemplo: $(Z, \leq)$ é uma ordem total? e $(Z^+, |)$?

Definição: Uma relação R em A é uma relação de ordem *estrita* se satisfaz as duas condições:

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*. Um conjunto totalmente ordenada é chamado uma *cadeia*.

Exemplo: $(Z, \leq)$ é uma ordem total? e $(Z^+, |)$?

Definição: Uma relação R em A é uma relação de ordem *estrita* se satisfaz as duas condições:

- Para todos $a, b, c \in A$, aRb e bRc implica aRc. (Transitividade.)

Ordens totais

Definição: Se (A, R) é uma ordem parcial e todo o par de elementos de A são comparáveis, R é chamada uma relação de ordem *total*. Um conjunto totalmente ordenada é chamado uma *cadeia*.

Exemplo: $(Z, \leq)$ é uma ordem total? e $(Z^+, |)$?

Definição: Uma relação R em A é uma relação de ordem *estrita* se satisfaz as duas condições:

- Para todos $a, b, c \in A$, aRb e bRc implica aRc. (Transitividade.)
- Dados $a, b \in A$, exactamente uma das seguintes afirmações se verifica (e não as outras duas): aRb, bRa, $a = b$.

Diagramas de Hasse

Ao representarmos uma ordem parcial sob a forma de um grafo dirigido, não é necessário especificar todos os ramos... alguns garantidamente tem que estar presentes.

Diagramas de Hasse

Ao representarmos uma ordem parcial sob a forma de um grafo dirigido, não é necessário especificar todos os ramos... alguns garantidamente tem que estar presentes.

Em geral devemos: desenhar o grafo dirigido da relação

Diagramas de Hasse

Ao representarmos uma ordem parcial sob a forma de um grafo dirigido, não é necessário especificar todos os ramos... alguns garantidamente tem que estar presentes.

Em geral devemos: desenhar o grafo dirigido da relação

1. Como a relação é reflexiva: retirar os ramos de um vértice para ele mesmo

Diagramas de Hasse

Ao representarmos uma ordem parcial sob a forma de um grafo dirigido, não é necessário especificar todos os ramos... alguns garantidamente tem que estar presentes.

Em geral devemos: desenhar o grafo dirigido da relação

1. Como a relação é reflexiva: retirar os ramos de um vértice para ele mesmo
2. Como a relação é transitiva: retirar os ramos que podem ser obtidos por transitividade

Diagramas de Hasse

Ao representarmos uma ordem parcial sob a forma de um grafo dirigido, não é necessário especificar todos os ramos... alguns garantidamente tem que estar presentes.

Em geral devemos: desenhar o grafo dirigido da relação

1. Como a relação é reflexiva: retirar os ramos de um vértice para ele mesmo
2. Como a relação é transitiva: retirar os ramos que podem ser obtidos por transitividade
3. Colocar os vértices de partida abaixo dos de destino e retirar a direcção dos ramos.

Exemplo

- Desenhe o diagrama de Hasse da ordem parcial $\{(a, b) : a \text{ divide } b\}$ definida em $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

Exemplo

- Desenhe o diagrama de Hasse da ordem parcial $\{(a, b) : a \text{ divide } b\}$ definida em $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.
- Desenhe o diagrama de Hasse da ordem parcial $(P(S), \subseteq)$, onde $S = \{a, b, c, d\}$.

Elementos minimal e maximal

Definição: Um elemento a diz-se maximal na ordem parcial (A, R) se não existe um elemento $b \neq a$ tal que $(a, b) \in R$. Analogamente diz-se minimal se não existe um elemento $b \neq a$ tal que $(b, a) \in R$.

Elementos minimal e maximal

Definição: Um elemento a diz-se maximal na ordem parcial (A, R) se não existe um elemento $b \neq a$ tal que $(a, b) \in R$. Analogamente diz-se minimal se não existe um elemento $b \neq a$ tal que $(b, a) \in R$.

Exemplos:

1. Quais os elementos minimais/maximais ordem parcial 'divide' definida no conjunto $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$?
2. Seja A um conjunto. Quais os elementos minimais/maximais da ordem parcial $(P(A), \subseteq)$?

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

$$R_{|S} = \{ (a, b) \in R \mid a, b \in S \}.$$

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

$$R_{|S} = \{ (a, b) \in R \mid a, b \in S \}.$$

Definição: Dados três conjuntos A, B, C, e as relações $R \subseteq A \times B$, e $S \subseteq B \times C$. A **composição de R e S** é uma relação $T \subseteq A \times C$, definida da seguinte forma:

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

$$R_{|S} = \{ (a, b) \in R \mid a, b \in S \}.$$

Definição: Dados três conjuntos A, B, C, e as relações $R \subseteq A \times B$, e $S \subseteq B \times C$. A **composição de R e S** é uma relação $T \subseteq A \times C$, definida da seguinte forma:

$$(a, c) \in T \text{ sse } \exists b \in B \, [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S].$$

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

$$R_{|S} = \{ (a, b) \in R \mid a, b \in S \}.$$

Definição: Dados três conjuntos A, B, C, e as relações $R \subseteq A \times B$, e $S \subseteq B \times C$. A **composição de R e S** é uma relação $T \subseteq A \times C$, definida da seguinte forma:

$$(a, c) \in T \text{ sse } \exists b \in B \, [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S].$$

A composição de R e S é denotada por RS, ou em alternativa por $S \circ R$.

Formando novas relações

Definição: Dada uma relação R num conjunto A, e um subconjunto $S \subseteq A$, usamos R para definir uma relação em S chamada de **restrição de R a S**. Escrevemos $R_{|S}$, e é definida como:

$$R_{|S} = \{ (a, b) \in R \mid a, b \in S \}.$$

Definição: Dados três conjuntos A, B, C, e as relações $R \subseteq A \times B$, e $S \subseteq B \times C$. A **composição de R e S** é uma relação $T \subseteq A \times C$, definida da seguinte forma:

$$(a, c) \in T \text{ sse } \exists b \in B \, [(a, b) \in R \wedge (b, c) \in S].$$

A composição de R e S é denotada por RS, ou em alternativa por $S \circ R$.

Matrizes - composição

Exercício: Sejam $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$, $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$. Considere ainda as matrizes $M_R = (\alpha_{ij})_{m\times n}$, $M_S = (\beta_{jk})_{n\times p}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p$. Mostre que $(a_i, c_k) \in RS$ se e só se $\delta_{ik} = 1$, onde

$$\delta_{ik} = \alpha_{i1} \cdot \beta_{1k} + \cdots + \alpha_{in} \cdot \beta_{nk},$$

interpretando 0 e 1 como valores lógicos (correspondendo respectivamente a `falso` e `verdadeiro`) e as operações $\cdot$ e $+$ como conjunção e disjunção, respectivamente.

Conclua, que $M_{RS} = (\delta_{ik})_{m\times p} = M_R M_S$.

O fecho de uma relação binária para uma propriedade

Definição: Dada uma relação binária (R, A) e uma propriedade P chamamos (se existir) ao menor conjunto $R_P \subseteq A \times A$, tal que $R \subseteq R_P$ e R_P tem a propriedade P, o fecho de R para a propriedade P.

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

A composição de relações num mesmo conjunto A está sempre bem definida.

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

A composição de relações num mesmo conjunto A está sempre bem definida.

Dada uma relação R em A, definimos recursivamente:

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

A composição de relações num mesmo conjunto A está sempre bem definida.

Dada uma relação R em A, definimos recursivamente:

- $R^1 = R$

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

A composição de relações num mesmo conjunto A está sempre bem definida.

Dada uma relação R em A, definimos recursivamente:

- $R^1 = R$
- $R^n = R^{n-1} \circ R$, para todo $n \geq 2$.

Fecho transitivo

Seja T o fecho transitivo de uma relação binária R definida num conjunto A. Então:

- T é transitivo.
- T é a menor relação transitiva que contém R. (Ou seja, se U é uma relação transitiva em A e $R \subseteq U$, então $T \subseteq U$.

A composição de relações num mesmo conjunto A está sempre bem definida.

Dada uma relação R em A, definimos recursivamente:

- $R^1 = R$
- $R^n = R^{n-1} \circ R$, para todo $n \geq 2$.

Propriedades do fecho transitivo

Seja R uma relação binária definida em A. Mostre que:

Propriedades do fecho transitivo

Seja R uma relação binária definida em A. Mostre que:

1. $R \subseteq A \times A$ é transitiva se e só se $R^2 \subseteq R$, i.e. $M_R^2 \leq M_R$.

Propriedades do fecho transitivo

Seja R uma relação binária definida em A. Mostre que:

1. $R \subseteq A \times A$ é transitiva se e só se $R^2 \subseteq R$, i.e. $M_R^2 \leq M_R$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ tem-se $(x_0, x_n) \in R^n$ se e só se existem $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ tal que $(x_0, x_1) \in R, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R$.
3. A relação R^+ definida por

$$R^+ = \cup_{i \in \mathbb{N}^+} R^i$$

é o *fecho transitivo* de R.

Propriedades do fecho transitivo

Seja R uma relação binária definida em A. Mostre que:

1. $R \subseteq A \times A$ é transitiva se e só se $R^2 \subseteq R$, i.e. $M_R^2 \leq M_R$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ tem-se $(x_0, x_n) \in R^n$ se e só se existem $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ tal que $(x_0, x_1) \in R, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R$.
3. A relação R^+ definida por
$$R^+ = \cup_{i \in \mathbb{N}^+} R^i$$
é o *fecho transitivo* de R.
4. Se $|A| = n$ então
$$R^+ = \cup_{i=1}^{n} R^i$$

Propriedades do fecho transitivo

Seja R uma relação binária definida em A. Mostre que:

1. $R \subseteq A \times A$ é transitiva se e só se $R^2 \subseteq R$, i.e. $M_R^2 \leq M_R$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}^+$ tem-se $(x_0, x_n) \in R^n$ se e só se existem $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ tal que $(x_0, x_1) \in R, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R$.
3. A relação R^+ definida por

   $$R^+ = \cup_{i \in \mathbb{N}^+} R^i$$

   é o *fecho transitivo* de R.
4. Se $|A| = n$ então

   $$R^+ = \cup_{i=1}^{n} R^i$$

Fecho transitivo

Teorema: Seja M_R uma matriz $(0, 1)$ de uma relação R num conjunto com n elementos. A matriz $(0, 1)$ da relação R^+ (fecho transitivo de R) é dada por

$$M_{R^+} = M_R \cup M_R^2 \cup M_R^3 \cup ... \cup M_R^n$$

Fecho transitivo

Teorema: Seja M_R uma matriz $(0, 1)$ de uma relação R num conjunto com n elementos. A matriz $(0, 1)$ da relação R^+ (fecho transitivo de R) é dada por

$$M_{R^+} = M_R \cup M_R^2 \cup M_R^3 \cup \ldots \cup M_R^n$$

Exercício: Determine a matriz $0, 1$ do fecho transitivo da relação R com

$$M_R = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Fecho reflexivo

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.

Problema: determinar a menor relação reflexiva contendo R.

Fecho reflexivo

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.

Problema: determinar a menor relação reflexiva contendo R.

Resposta:

Fecho reflexivo

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é reflexiva.

Problema: determinar a menor relação reflexiva contendo R.

Resposta: adicionar os pares $(2,2)$ e $(3,3)$.

O fecho reflexivo de uma relação R num conjunto A pode ser formado adicionando a R todos os pares da forma (a,a) com $a \in A$.

Fecho simétrico

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica.

Problema determinar a menor relação simétrica contendo R.

Fecho simétrico

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica.

Problema determinar a menor relação simétrica contendo R.

Resposta

Fecho simétrico

A relação $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$ em $A = \{1,2,3\}$ não é simétrica.

Problema determinar a menor relação simétrica contendo R.

Resposta adicionar os pares $(2,1)$ e $(1,3)$.

O fecho simétrico de uma relação R num conjunto A pode ser formado considerando a união da relação com o seu inverso, i.e, $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R. ($R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$)

Fecho reflexivo e simétrico: matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

Fecho reflexivo e simétrico: matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- A matriz do fecho reflexivo de R é $M_R \cup I_n$

Fecho reflexivo e simétrico: matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- A matriz do fecho reflexivo de R é $M_R \cup I_n$
- A matriz do fecho simétrico de R é $M_R \cup M_R^t$

Fecho reflexivo e simétrico: matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$, R uma relação em A e M_R é a matriz da relação R, então:

- A matriz do fecho reflexivo de R é $M_R \cup I_n$
- A matriz do fecho simétrico de R é $M_R \cup M_R^t$

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

(a) Se $x \in A$, então existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

(a) Se $x \in A$, então existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

(b) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

(a) Se $x \in A$, então existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

(b) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Uma função é também chamada de *mapeamento*.

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

(a) Se $x \in A$, então existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

(b) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Uma função é também chamada de *mapeamento*.

O conjunto A é chamado de *domínio* da função e o conjunto B é chamado de *contradomínio*.

Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ tal que:

(a) Se $x \in A$, então existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

(b) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

Uma função é também chamada de *mapeamento*.

O conjunto A é chamado de *domínio* da função e o conjunto B é chamado de *contradomínio*.

Uma função $f : A \to B$ é um tipo especial de relação de A em B que relaciona cada elemento $x \in A$ com exactamente um elemento $f(x) \in B$.

Tipos de funções

Dada uma função $f : A \to B$, chamamos conjunto *imagem* ao conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Tipos de funções

Dada uma função $f : A \to B$, chamamos conjunto *imagem* ao conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Definição: Uma função $f : A \to B$, diz-se *sobrejectiva*, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para pelo menos um $x \in A$. Se f é sobrejectiva então $f(A) = B$.

Tipos de funções

Dada uma função $f : A \to B$, chamamos conjunto *imagem* ao conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Definição: Uma função $f : A \to B$, diz-se *sobrejectiva*, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para pelo menos um $x \in A$. Se f é sobrejectiva então $f(A) = B$.

Definição: Uma função $f : A \to B$ é *injectiva*, se para qualquer $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Ou seja, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para no máximo um $x \in A$.

Tipos de funções

Dada uma função $f : A \to B$, chamamos conjunto *imagem* ao conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Definição: Uma função $f : A \to B$, diz-se *sobrejectiva*, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para pelo menos um $x \in A$. Se f é sobrejectiva então $f(A) = B$.

Definição: Uma função $f : A \to B$ é *injectiva*, se para qualquer $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Ou seja, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para no máximo um $x \in A$.

Definição: Uma função $f : A \to B$ é *bijectiva* se é simultaneamente sobrejectiva e injectiva. Ou seja, se cada elemento de B é da forma $f(x)$ para exactamente um $x \in A$.

Formando novas funções

Definição: Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definimos a função *composta*, $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Formando novas funções

Definição: Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definimos a função *composta*, $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Para qualquer conjunto A, a função *identidade* $i_A : A \to A$, é definida como $i_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Formando novas funções

Definição: Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definimos a função *composta*, $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Para qualquer conjunto A, a função *identidade* $i_A : A \to A$, é definida como $i_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Propriedades:
Se $f : A \to B$ é bijectiva, então a sua função *inversa* $f^{-1} : B \to A$ é definida, tal que $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$.

Formando novas funções

Definição: Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definimos a função *composta*, $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Para qualquer conjunto A, a função *identidade* $i_A : A \to A$, é definida como $i_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Propriedades:
Se $f : A \to B$ é bijectiva, então a sua função *inversa* $f^{-1} : B \to A$ é definida, tal que $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijectivas, então $g \circ f : A \to C$ é bijectiva e

Formando novas funções

Definição: Dadas duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$ definimos a função *composta*, $g \circ f : A \to C$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Para qualquer conjunto A, a função *identidade* $i_A : A \to A$, é definida como $i_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Propriedades:
Se $f : A \to B$ é bijectiva, então a sua função *inversa* $f^{-1} : B \to A$ é definida, tal que $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são bijectivas, então $g \circ f : A \to C$ é bijectiva e

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$?

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$? Sim

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$? Sim

Logo

$$|\mathbb{N}|$$

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$? Sim

Logo

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

Bijecções e cardinalidade

Definição: Dois conjuntos A e B têm o mesmo número de elementos se e só se existe uma bijecção $f : A \to B$.

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$? Sim

Podemos definir uma bijecção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$? Sim

Logo

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.
- Se R é de equivalência e $(x, y) \in R$ para algum $(x, y) \in A^2$ com $x \neq y$, então o número de classes de equivalência de R é estritamente inferior a $|A|$.

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.
- Se R é de equivalência e $(x, y) \in R$ para algum $(x, y) \in A^2$ com $x \neq y$, então o número de classes de equivalência de R é estritamente inferior a $|A|$.
- Se R é anti-simétrica então o fecho simétrico de R é $R \cap R^{-1}$.

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.
- Se R é de equivalência e $(x, y) \in R$ para algum $(x, y) \in A^2$ com $x \neq y$, então o número de classes de equivalência de R é estritamente inferior a $|A|$.
- Se R é anti-simétrica então o fecho simétrico de R é $R \cap R^{-1}$.
- $\forall (x, y) \in A^2 \ (xR^+y \rightarrow (xR^py, \ p = |A|))$.
- R é transitiva se e só se $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \wedge xRz)$.

Exercícios

Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. **Justifique** se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.
- Se R é de equivalência e $(x, y) \in R$ para algum $(x, y) \in A^2$ com $x \neq y$, então o número de classes de equivalência de R é estritamente inferior a $|A|$.
- Se R é anti-simétrica então o fecho simétrico de R é $R \cap R^{-1}$.
- $\forall (x, y) \in A^2\ (xR^+y \rightarrow (xR^py,\ p = |A|))$.
- R é transitiva se e só se $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \wedge xRz)$.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\, \{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset$.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\, \{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset$.
- Se R é de equivalência então $RR^{-1} = R$.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x,y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\ \{y \in A \mid (x,y) \in R\} \neq \emptyset$.
- Se R é de equivalência então $RR^{-1} = R$.
- Se $R^3 \subseteq R$ então $R^+ = R \cup R^2$.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\ \{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset$.
- Se R é de equivalência então $RR^{-1} = R$.
- Se $R^3 \subseteq R$ então $R^+ = R \cup R^2$.
- Se as matrizes das relações $RR \cup R$ e R são iguais então R é transitiva.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\,(\{y \in A \mid (x,y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\,\{y \in A \mid (x,y) \in R\} \neq \emptyset$.
- Se R é de equivalência então $RR^{-1} = R$.
- Se $R^3 \subseteq R$ então $R^+ = R \cup R^2$.
- Se as matrizes das relações $RR \cup R$ e R são iguais então R é transitiva.
- Se R é transitiva então as matrizes das relações $RR \cup R$ e R são iguais.

Exercícios

- Se $\forall x \in A\, (\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.
- Se R é de equivalência, então $\forall x \in A\, \{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset$.
- Se R é de equivalência então $RR^{-1} = R$.
- Se $R^3 \subseteq R$ então $R^+ = R \cup R^2$.
- Se as matrizes das relações $RR \cup R$ e R são iguais então R é transitiva.
- Se R é transitiva então as matrizes das relações $RR \cup R$ e R são iguais.

Exercícios

- Seja R uma relação no conjunto dos inteiros tal que aRb se $a = b$ ou $a = -b$.
  - Mostre que R é uma relação de equivalência.
  - Determine a classe de equivalência de um determinado inteiro a.
- Seja R uma relação no conjunto dos números reais tal que aRb sse $a - b$ é um inteiro. Mostre que R é uma relação de equivalência.
- Mostre que a relação "maior ou igual" ($\geq$) é uma ordem parcial no conjunto dos inteiros.
- Mostre que a relação de divisibilidade é uma ordem parcial no conjunto dos naturais.
- Mostre que a relação $\subseteq$ é uma ordem parcial no conjunto das partes, 2^A, de um conjunto A.