Estruturas Discretas - Grafos

2020/2021

Grafos não dirigidos

Um grafo não dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V.

Grafos não dirigidos

Um grafo não dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Ou seja,

$$E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y \}.$$

Grafos não dirigidos

Um grafo não dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Ou seja,

$$E \subseteq \{\ \{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\ \}.$$

Os elementos de V são chamados vértices do grafo (também chamados nós) e os elementos de E são as arestas.

Grafos não dirigidos

Um grafo não dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Ou seja,

$$E \subseteq \{ \{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y \}.$$

Os elementos de V são chamados vértices do grafo (também chamados nós) e os elementos de E são as arestas.

Se $\{x, y\} \in E$ dizemos que x e y são vértices adjacentes do grafo G.

Exemplos comuns grafos - Cliques

Definição: Um grafo com n vértices, em que cada par de vértices está ligado, é chamado clique (ou n-clique) e é denotado por K_n.

Exemplos comuns grafos - Cliques

Definição: Um grafo com n vértices, em que cada par de vértices está ligado, é chamado clique (ou n-clique) e é denotado por K_n.

Formalmente $K_n = (V, E)$, onde $V = \{1, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, j\} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$.

Exemplos comuns grafos - Cliques

Definição: Um grafo com n vértices, em que cada par de vértices está ligado, é chamado clique (ou n-clique) e é denotado por K_n.

Formalmente $K_n = (V, E)$, onde $V = \{1, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, j\} \mid 1 \leq i, j \leq n \}$.

O número de arestas de K_n é $\binom{n}{2}$.

Exemplos comuns grafos - Cliques

Definição: Um grafo com n vértices, em que cada par de vértices está ligado, é chamado clique (ou n-clique) e é denotado por K_n.

Formalmente $K_n = (V, E)$, onde $V = \{1, \ldots, n\}$ e $E = \{ \ \{i, j\} \mid 1 \leq i, j \leq n \ \}$.

O número de arestas de K_n é $\binom{n}{2}$.

Exemplo: $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Exemplos comuns grafos - Caminhos

Definição: Um caminho P_n com n vértices, é o grafo $P_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{\ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\ \}$.

Exemplos comuns grafos - Caminhos

Definição: Um caminho P_n com n vértices, é o grafo $P_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1 \}$.

O número de arestas em P_n é $n-1$. Os vértices 1 e n são respectivamente o ínicio e fim de P_n.

Exemplos comuns grafos - Caminhos

Definição: Um caminho P_n com n vértices, é o grafo $P_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1 \}$.

O número de arestas em P_n é $n-1$. Os vértices 1 e n são respectivamente o ínicio e fim de P_n.

Exemplo: $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

Exemplos comuns grafos - Ciclo

Definição: Um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices é o grafo $C_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{\ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1\ \} \cup \{\{1, n\}\}$.

Exemplos comuns grafos - Ciclo

Definição: Um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices é o grafo $C_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1 \} \cup \{\{1, n\}\}$.

O número de arestas em C_n é n.

Exemplos comuns grafos - Ciclo

Definição: Um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices é o grafo $C_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1 \} \cup \{\{1, n\}\}$.

O número de arestas em C_n é n.

Exemplo: $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$.

Exemplos comuns grafos - Ciclo

Definição: Um ciclo C_n com $n \geq 3$ vértices é o grafo $C_n = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $E = \{ \{i, i+1\} \mid 1 \leq i \leq n-1 \} \cup \{\{1, n\}\}$.

O número de arestas em C_n é n.

Exemplo: $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 1\}\}$.

Nota: $G = (V, E)$, com $V = \{A, B, C\}$ e $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}\}$, também é um ciclo apesar de não seguir a definição, pois é isomorfo ao ciclo $G = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$.

Isomorfismo entre grafos

Definição: Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijecção $f : V \to V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \text{ se e só se } \{f(x), f(y)\} \in E.$$

Isomorfismo entre grafos

Definição: Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijecção $f : V \to V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \text{ se e só se } \{f(x), f(y)\} \in E.$$

Nesse caso escrevemos $G \equiv G'$ e a função f é chamada um isomorfismo entre G e G'.

Isomorfismo entre grafos

Definição: Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijecção $f : V \to V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \text{ se e só se } \{f(x), f(y)\} \in E.$$

Nesse caso escrevemos $G \equiv G'$ e a função f é chamada um isomorfismo entre G e G'.

Identificamos grafos que sejam isomorfos como representando o mesmo grafo.

Isomorfismo entre grafos

Definição: Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijecção $f : V \to V'$ tal que

$$\{x, y\} \in E \text{ se e só se } \{f(x), f(y)\} \in E.$$

Nesse caso escrevemos $G \equiv G'$ e a função f é chamada um isomorfismo entre G e G'.

Identificamos grafos que sejam isomorfos como representando o mesmo grafo.

Grafos isomorfos a cliques, caminhos e ciclos são também cliques, caminhos e ciclos, respectivamente.

Tamanho e Grau

Definição: O número de arestas de um grafo é chamado de tamanho do grafo.

Tamanho e Grau

Definição: O número de arestas de um grafo é chamado de tamanho do grafo.
Ex: O tamanho de um grafo de n vértices é no máximo $\binom{n}{2}$ e corresponde ao clique de n vértices.

Tamanho e Grau

Definição: O número de arestas de um grafo é chamado de tamanho do grafo.
Ex: O tamanho de um grafo de n vértices é no máximo $\binom{n}{2}$ e corresponde ao clique de n vértices.

Definição: O grau $d_G(v)$ de um vértice v num grafo $G = (V, E)$, é o número de vizinhos de v em G. Ou seja

$$d_G(v) = |\{ u \in V \mid \{v, u\} \in E \}|.$$

Tamanho e Grau

Definição: O número de arestas de um grafo é chamado de tamanho do grafo.
Ex: O tamanho de um grafo de n vértices é no máximo $\binom{n}{2}$ e corresponde ao clique de n vértices.

Definição: O grau $d_G(v)$ de um vértice v num grafo $G = (V, E)$, é o número de vizinhos de v em G. Ou seja

$$d_G(v) = |\{\ u \in V \mid \{v, u\} \in E\ \}|.$$

Um grafo diz-se regular, se para algum número k, todos os vértices têm grau k.

Lema dos “apertos de mão”

Proposição: O número de vértices com grau ímpar de um grafo é par.

Lema dos “apertos de mão”

Proposição: O número de vértices com grau ímpar de um grafo é par.

*P*rova: Para um grafo $G = (V, E)$ consideremos a soma dos graus dos seus vértices

$$s = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Lema dos "apertos de mão"

Proposição: O número de vértices com grau ímpar de um grafo é par.

*P*rova: Para um grafo $G = (V, E)$ consideremos a soma dos graus dos seus vértices

$$s = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Note-se que esta soma conta cada aresta e duas vezes, uma para cada um dos vértices adjacentes a e. Logo $s = 2|E|$, e portanto, s é par.

Lema dos “apertos de mão”

Proposição: O número de vértices com grau ímpar de um grafo é par.

*P*rova: Para um grafo $G = (V, E)$ consideremos a soma dos graus dos seus vértices

$$s = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Note-se que esta soma conta cada aresta e duas vezes, uma para cada um dos vértices adjacentes a e. Logo $s = 2|E|$, e portanto, s é par.

Subtraindo a s os graus dos vértices de G com grau par, o resultado é a soma dos graus dos vértices de grau ímpar, e continua a ser par.

Lema dos “apertos de mão”

Proposição: O número de vértices com grau ímpar de um grafo é par.

*P*rova: Para um grafo $G = (V, E)$ consideremos a soma dos graus dos seus vértices

$$s = \sum_{v \in V} d_G(v)$$

Note-se que esta soma conta cada aresta e duas vezes, uma para cada um dos vértices adjacentes a e. Logo $s = 2|E|$, e portanto, s é par.

Subtraindo a s os graus dos vértices de G com grau par, o resultado é a soma dos graus dos vértices de grau ímpar, e continua a ser par.

Subgrafos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$:

- Um grafo $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G se e só se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Subgrafos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$:

- Um grafo $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G se e só se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

- Um grafo $G' = (V', E')$ é chamado de subgrafo induzido de G se e só se $V' \subseteq V$ e $E' = \{ \{u, v\} \in E \mid u, v \in V' \}$.

Subgrafos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$:

- Um grafo $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G se e só se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

- Um grafo $G' = (V', E')$ é chamado de subgrafo induzido de G se e só se $V' \subseteq V$ e $E' = \{ \{u, v\} \in E \mid u, v \in V' \}$.

Dado um grafo G, um caminho, ciclo, ou clique em G é um subgrafo de G que é respectivamente um caminho, ciclo ou clique.

Conectividade

Definição: Dois vértices v e u de G dizem-se ligados se e só se existe um caminho em G que liga u e v.

Conectividade

Definição: Dois vértices v e u de G dizem-se ligados se e só se existe um caminho em G que liga u e v.

Definição: Um grafo G diz-se conexo se e só se qualquer par de vértices em G está ligado.

Conectividade

Definição: Dois vértices v e u de G dizem-se ligados se e só se existe um caminho em G que liga u e v.

Definição: Um grafo G diz-se conexo se e só se qualquer par de vértices em G está ligado.

Um subgrafo G' de G é chamado de componente conexa de G se G' é conexo e não existe um grafo G'', tal que $G' \subset G'' \subseteq G$ que seja conexo.

Conectividade

Definição: Dois vértices v e u de G dizem-se ligados se e só se existe um caminho em G que liga u e v.

Definição: Um grafo G diz-se conexo se e só se qualquer par de vértices em G está ligado.

Um subgrafo G' de G é chamado de componente conexa de G se G' é conexo e não existe um grafo G'', tal que $G' \subset G'' \subseteq G$ que seja conexo. Um grafo é conexo se e só se tem uma única componente conexa.

Grafos dirigidos - digrafos

Definição: Um grafo dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de pares ordenados de V. Ou seja

$$E \subseteq \{ \, (x, y) \mid x, y \in V \, \}.$$

Grafos dirigidos - digrafos

Definição: Um grafo dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de pares ordenados de V. Ou seja

$$E \subseteq \{ (x, y) \mid x, y \in V \}.$$

Nota: Representamos uma relação binária R definida num conjunto A pelo grafo dirigido $G_R = (A, R)$.

Grafos dirigidos - digrafos

Definição: Um grafo dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de pares ordenados de V. Ou seja

$$E \subseteq \{\ (x, y) \mid x, y \in V\ \}.$$

Nota: Representamos uma relação binária R definida num conjunto A pelo grafo dirigido $G_R = (A, R)$.

Para grafos dirigidos, definimos a noção de *grau de entrada* e *grau de saída* de um vértice v definidos respectivamente como $|\{\ u \in V \mid (u, v) \in E\ \}|$

Grafos dirigidos - digrafos

Definição: Um grafo dirigido G é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto e E é um conjunto de pares ordenados de V. Ou seja

$$E \subseteq \{ (x, y) \mid x, y \in V \}.$$

Nota: Representamos uma relação binária R definida num conjunto A pelo grafo dirigido $G_R = (A, R)$.

Para grafos dirigidos, definimos a noção de *grau de entrada* e *grau de saída* de um vértice v definidos respectivamente como $|\{ u \in V \mid (u, v) \in E \}|$ e $|\{ u \in V \mid (v, u) \in E \}|$.

Outras Noções de Grafos

Um grafo (dirigido ou não dirigido) pode ter múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices.

Outras Noções de Grafos

Um grafo (dirigido ou não dirigido) pode ter múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices.

A presença de múltiplas arestas significa que as arestas passam a ser representadas por um multiconjunto.

Outras Noções de Grafos

Um grafo (dirigido ou não dirigido) pode ter múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices.

A presença de múltiplas arestas significa que as arestas passam a ser representadas por um multiconjunto.

Um grafo com pesos é um grafo onde podemos associar pesos (númericos) às arestas.

Outras Noções de Grafos

Um grafo (dirigido ou não dirigido) pode ter múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices.

A presença de múltiplas arestas significa que as arestas passam a ser representadas por um multiconjunto.

Um grafo com pesos é um grafo onde podemos associar pesos (númericos) às arestas.

Quando não indicado nada em contrário usamos a designação **grafo** para grafos não dirigidos (sem pesos).

Grafo Complementar e União de Grafos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos o grafo complementar de G, como o par (V, E'), tal que uma aresta $e' \in E'$ se e só se $e' \notin E$. Denotamos o grafo complementar por $\overline{G}$.

Grafo Complementar e União de Grafos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos o grafo complementar de G, como o par (V, E'), tal que uma aresta $e' \in E'$ se e só se $e' \notin E$. Denotamos o grafo complementar por $\overline{G}$.

Definição: A união de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ é o grafo com conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ e conjunto de arestas $E_1 \cup E_2$. A união de G_1 e G_2 é denotada por $G_1 \cup G_2$.

Percursos, Pistas e Circuitos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, um percurso W em G é uma sequência $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ de vértices e arestas em G que não são necessariamente distintas e tais que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq E$, e $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, para todo $1 \leq i \leq n - 1$.

Percursos, Pistas e Circuitos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, um percurso W em G é uma sequência $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ de vértices e arestas em G que não são necessariamente distintas e tais que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\} \subseteq E$, e $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, para todo $1 \leq i \leq n - 1$.

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, uma pista é um percurso $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ em que cada aresta aparece no máximo uma vez.

Percursos, Pistas e Circuitos

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, um percurso W em G é uma sequência $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ de vértices e arestas em G que não são necessariamente distintas e tais que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$, $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} \subseteq E$, e $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, uma pista é um percurso $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ em que cada aresta aparece no máximo uma vez.

Definição: Dado um grafo $G = (V, E)$, um circuito é uma pista $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n)$ em que v_1 e v_n coincidem.

Percursos e circuitos Eulerianos

Definição: Um percurso de Euler num grafo é uma pista que inclui todos os ramos desse grafo.

Percursos e circuitos Eulerianos

Definição: Um percurso de Euler num grafo é uma pista que inclui todos os ramos desse grafo.

Um percurso Euleriano fechado (ou seja um circuito), é chamado de circuito Euleriano.

Um grafo diz-se Euleriano se contém um circuito Euleriano.

Percursos e circuitos Eulerianos

Definição: Um percurso de Euler num grafo é uma pista que inclui todos os ramos desse grafo.

Um percurso Euleriano fechado (ou seja um circuito), é chamado de circuito Euleriano.

Um grafo diz-se Euleriano se contém um circuito Euleriano.

Teorema: Um grafo é Euleriano se e só se é conexo e cada um dos seus vértices tem um grau par.

Sete pontes de Königsberg

O problema é baseado na cidade de Königsberg (Prússia até 1945, actual Kaliningrado, Rússia) que é cortada pelo Rio Pregolia e onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete (7) pontes.

Sete pontes de Königsberg

O problema é baseado na cidade de Königsberg (Prússia até 1945, actual Kaliningrado, Rússia) que é cortada pelo Rio Pregolia e onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete (7) pontes.

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem repetir nenhuma, voltando ao ponto de partida.

Sete pontes de Königsberg

O problema é baseado na cidade de Königsberg (Prússia até 1945, actual Kaliningrado, Rússia) que é cortada pelo Rio Pregolia e onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete (7) pontes.

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem repetir nenhuma, voltando ao ponto de partida.

Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Leonhard Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Caminhos e ciclos Hamiltoneanos

Definição: Um caminho de Hamilton (1859) num grafo é um caminho que passa por todos os vértices do grafo.

Caminhos e ciclos Hamiltoneanos

Definição: Um caminho de Hamilton (1859) num grafo é um caminho que passa por todos os vértices do grafo.

Definição: Um ciclo de Hamilton é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Caminhos e ciclos Hamiltoneanos

Definição: Um caminho de Hamilton (1859) num grafo é um caminho que passa por todos os vértices do grafo.

Definição: Um ciclo de Hamilton é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Serve de modelo ao *"Problema do caixeiro viajante"*, que tendo que visitar várias localidades, pretende saber qual o melhor caminho a percorrer sem passar (se possível) duas vezes na mesma localidade.

Caminhos e ciclos Hamiltoneanos

Definição: Um caminho de Hamilton (1859) num grafo é um caminho que passa por todos os vértices do grafo.

Definição: Um ciclo de Hamilton é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo.

Serve de modelo ao *"Problema do caixeiro viajante"*, que tendo que visitar várias localidades, pretende saber qual o melhor caminho a percorrer sem passar (se possível) duas vezes na mesma localidade.

Nota: É um problema *NP*-completo.

Alguns grafos especiais

Recordemos:
Grafo completo de n vértices: O grafo K_n com n vértices em que cada par de vértices está ligado.

Alguns grafos especiais

Recordemos:

Grafo completo de n vértices: O grafo K_n com n vértices em que cada par de vértices está ligado.

Ciclo de n vértices: O grafo $C_n = (V, E)$, com $n \geq 3$ vértices, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e
$E = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$.

Alguns grafos especiais

Recordemos:
Grafo completo de n vértices: O grafo K_n com n vértices em que cada par de vértices está ligado.

Ciclo de n vértices: O grafo $C_n = (V, E)$, com $n \geq 3$ vértices, onde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ e
$E = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$.

Roda de n vértices: O grafo W_n, pode ser obtido de C_n, adicionando um vértice adicional e ligando o novo vértice aos n vértices de C_n.

Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo que pode ser particionado em duas partes tal que as arestas do grafo ligam uma parte à outra, mas não vértices numa mesma parte.

Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo que pode ser particionado em duas partes tal que as arestas do grafo ligam uma parte à outra, mas não vértices numa mesma parte.

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se bipartido se e só se existe uma partição $\{V_1, V_2\}$ de V, tal que

$$E \subseteq \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}.$$

Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo que pode ser particionado em duas partes tal que as arestas do grafo ligam uma parte à outra, mas não vértices numa mesma parte.

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se bipartido se e só se existe uma partição $\{V_1, V_2\}$ de V, tal que

$$E \subseteq \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}.$$

Os conjuntos V_1 and V_2 são chamados de *classes* de G.

Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo que pode ser particionado em duas partes tal que as arestas do grafo ligam uma parte à outra, mas não vértices numa mesma parte.

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se bipartido se e só se existe uma partição $\{V_1, V_2\}$ de V, tal que

$$E \subseteq \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}.$$

Os conjuntos V_1 and V_2 são chamados de *classes* de G.

O grafo C_6 é um grafo bipartido e K_3 não é bipartido.

Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é um grafo que pode ser particionado em duas partes tal que as arestas do grafo ligam uma parte à outra, mas não vértices numa mesma parte.

Definição: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se bipartido se e só se existe uma partição $\{V_1, V_2\}$ de V, tal que

$$E \subseteq \{ \{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}.$$

Os conjuntos V_1 and V_2 são chamados de *classes* de G.

O grafo C_6 é um grafo bipartido e K_3 não é bipartido.

Proposição: Um grafo é bipartido se e só se não tem ciclos de tamanho ímpar.

Grafos bipartidos completos

Um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é um grafo que contém todas as arestas possíveis entre as duas classes.

Grafos bipartidos completos

Um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é um grafo que contém todas as arestas possíveis entre as duas classes.

Ou seja, $K_{m,n} = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, m + n\}$ e $E = \{\ \{i, j\} \mid 1 \leq i \leq m, m + 1 \leq j \leq m + n\ \}$.

Grafos bipartidos completos

Um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é um grafo que contém todas as arestas possíveis entre as duas classes.

Ou seja, $K_{m,n} = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, m + n\}$ e $E = \{ \ \{i, j\} \mid 1 \leq i \leq m, m + 1 \leq j \leq m + n \ \}$.

O número de arestas em $K_{m,n}$ é mn.

Grafos bipartidos completos

Um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é um grafo que contém todas as arestas possíveis entre as duas classes.

Ou seja, $K_{m,n} = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \ldots, m+n\}$ e $E = \{\ \{i, j\} \mid 1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq m+n\ \}$.

O número de arestas em $K_{m,n}$ é mn.

Uma rede com uma topologia em estrela, pode ser representada por um grafo bipartido completo $K_{1,n}$.

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Essa representação é chamada de representação planar do grafo.

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Essa representação é chamada de representação planar do grafo.

Caminhos e ciclos são exemplos de grafos planares (assim como árvores).

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Essa representação é chamada de representação planar do grafo.

Caminhos e ciclos são exemplos de grafos planares (assim como árvores).

O grafo K_4 é planar

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Essa representação é chamada de representação planar do grafo.

Caminhos e ciclos são exemplos de grafos planares (assim como árvores).

O grafo K_4 é planar

O grafo $K_{3,3}$ é não-planar.

Grafos planares

Definição: Um grafo é planar se e só se for possível representá-lo no plano sem que haja cruzamento de arestas.

Essa representação é chamada de representação planar do grafo.

Caminhos e ciclos são exemplos de grafos planares (assim como árvores).

O grafo K_4 é planar

O grafo $K_{3,3}$ é não-planar.

A representação planar de um grafo divide o plano em regiões, incluindo uma região não limitada.

Coloração de grafos

Uma *coloração* do grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de cores aos vértices do grafo, de tal forma que nenhum vértice adjacente tenha a mesma cor.

Coloração de grafos

Uma *coloração* do grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de cores aos vértices do grafo, de tal forma que nenhum vértice adjacente tenha a mesma cor.

Definição: Uma k-coloração de $G = (V, E)$ é uma função $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que se $\{v, w\} \in E$ então $c(v) \neq c(w)$.

Coloração de grafos

Uma *coloração* do grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de cores aos vértices do grafo, de tal forma que nenhum vértice adjacente tenha a mesma cor.

Definição: Uma k-coloração de $G = (V, E)$ é uma função $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que se $\{v, w\} \in E$ então $c(v) \neq c(w)$.

O valor mais pequeno $k \in \mathbb{N}$ para o qual uma k-coloração de G existe é chamado de número cromático de G.

Coloração de grafos

Uma *coloração* do grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de cores aos vértices do grafo, de tal forma que nenhum vértice adjacente tenha a mesma cor.

Definição: Uma k-coloração de $G = (V, E)$ é uma função $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que se $\{v, w\} \in E$ então $c(v) \neq c(w)$.

O valor mais pequeno $k \in \mathbb{N}$ para o qual uma k-coloração de G existe é chamado de número cromático de G.

Teorema das 4 cores

Teorema das 4 cores: O número cromático de qualquer grafo finito que seja planar não excede quatro.

Teorema das 4 cores

Teorema das 4 cores: O número cromático de qualquer grafo finito que seja planar não excede quatro.

Este teorema foi durante mais de 100 anos uma conjectura.

Teorema das 4 cores

Teorema das 4 cores: O número cromático de qualquer grafo finito que seja planar não excede quatro.

Este teorema foi durante mais de 100 anos uma conjectura.

Foi demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o auxílio de um computador.

Teorema das 4 cores

Teorema das 4 cores: O número cromático de qualquer grafo finito que seja planar não excede quatro.

Este teorema foi durante mais de 100 anos uma conjectura.

Foi demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o auxílio de um computador.

Não existe até ao momento nenhuma demonstração do resultado que não utilize computadores.

Teorema das 4 cores

Teorema das 4 cores: O número cromático de qualquer grafo finito que seja planar não excede quatro.

Este teorema foi durante mais de 100 anos uma conjectura.

Foi demonstrado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com o auxílio de um computador.

Não existe até ao momento nenhuma demonstração do resultado que não utilize computadores.

Existem demonstrações simples de que 5 e 6 cores são suficientes.