Conjuntos e Relações

1. Sejam $A = \{b, c, d, f, g\}$ e $B = \{a, b, c\}$; determine em extensão $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

2. Considere o universo $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Determine:

(a) $(A \cup B) \cap C$;

(b) $A \cup (B \cap C)$;

(c) $\overline{C} \cup \overline{D}$;

(d) $\overline{C \cap D}$;

(e) $(A \cup B) \setminus C$

(f) $A \cup (B \setminus C)$;

(g) $(B \setminus C) \setminus D$;

(h) $B \setminus (C \setminus D)$;

(i) $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$.

3. Determine conjuntos A e B que satisfaçam simultaneamente

(a) $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\}$ e $B \cup A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14\}$.

(b) $A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\}$, $B \setminus A = \{2, 6, 8\}$ e $A \cap B = \{4, 9\}$.

4. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) $3 \in \{1, 2, 3\}$

(b) $\{2\} \in \{1, 2\}$

(c) $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$

(d) $1 \subseteq \{1\}$

(e) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$

(f) $\{2\} \subseteq \{2\}$

5. Recorde que, sendo A um conjunto, 2^A designa o conjunto dos subconjuntos de A.

(a) Represente em extensão os conjuntos $2^{\emptyset}$, $2^{\{0\}}$, $2^{\{0,1\}}$ e $2^{\{0,1,2\}}$.

(b) Sendo A um conjunto finito não vazio e a um elemento de A fixo, como se pode construir 2^A a partir de $2^{A \setminus \{a\}}$?

(c) Dê uma justificação informal para o facto de $|2^A| = 2^{|A|}$, qualquer que seja o conjunto finito A. (NB: A prova formal faz-se por *indução matemática*, método que será leccionado mais adiante na disciplina).

6. Sejam $A = \{a, \{b\}\}$ e $B = \{a, b, \{a, b\}\}$. Determine $A \cap B$, $A \cup B$, 2^A e $B \cap 2^A$.

7. Mostre que, para todo o conjunto A e B, se $A \subseteq B$ então $2^A \subseteq 2^B$.

$\star$ **8** Se $2^A \subseteq 2^B$, qual a relação entre A e B?

$\star$ **9** Encontre o erro na seguinte prova:

"Teorema": Para todo o conjunto A e B, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Prova: Sejam A e B conjuntos, e suponhamos que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Então $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$ por definição de união. Logo, por definição de complemento temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$ e por definição de união temos que $x \notin A \cup B$. Então $x \in \overline{A \cup B}$ por definição de complemento, donde $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

10. Mostre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ se e só se $C \subseteq A$, quaisquer que sejam A, B e C conjuntos do universo $\mathcal{U}$.

11. Mostre que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, quaisquer que sejam os conjuntos A e B.

12. Seja $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

(a) $1 \in A$
(b) $\{1\} \in A$
(c) $\{1\} \subseteq A$
(d) $\{\{1\}\} \subseteq A$
(e) $\{1, 2\} \in A$
(f) $\{1, 2\} \subseteq A$
(g) $\{\{1\}, \{2\}\} \subseteq A$
(h) $|A| = 2$
(i) $A = 2^{\{1,2\}}$
(j) $A \subset 2^{\{1,2\}}$

13. Quais das seguintes proposições são verdadeiras num universo $\mathcal{U}$ não vazior?

(a) $\emptyset \in \emptyset$
(b) $\emptyset \subset \emptyset$
(c) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(e) $\emptyset \in A$, para todo conjunto A
(f) $\emptyset \subseteq A$, para todo conjunto A
(g) $\emptyset \in 2^A$, para todo conjunto A

14. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{y \in \mathbb{N} \ : \ y \text{ é múltiplo de } 7\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 100\}$$
$$C = \{x + y \ : \ x, y \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{N} : \text{o dígito menos significativo da representação de } x \text{ em binário é } 0\}$$

Classifique cada um dos conjuntos quanto a ser infinito, finito ou vazio. Represente a intersecção de cada par de conjuntos em compreensão.

15. Seja $\mathcal{U}$ um universo finito e $A, B \subseteq \mathcal{U}$; coloque por ordem crescente os valores seguintes.

(a) $|A \cup B|$, $|B|$, $|\emptyset|$, $|A \cap B|$, $|\mathcal{U}|$
(b) $|A \setminus B|$, $|A| + |B|$, $|\emptyset|$, $|A \cup B|$
(c) $|A \setminus B|$, $|\emptyset|$, $|A|$, $|A \cup B|$, $|\mathcal{U}|$

⋆ **16** Seja A um conjunto contendo n elementos. Para cada um dos seguinte elementos, indique a sua cardinalidade. Se for necessária mais informação para responder, explique porque razão.

(a) $A \cup \emptyset$
(b) $A \cap \emptyset$
(c) $A \cup \{\emptyset\}$
(d) $A \cap \{\emptyset\}$
(e) $\{A, A\}$
(f) $2^A \cup \{A\}$

⋆ **17** Seja A um conjunto com m elementos e B um conjunto com n elementos, e assuma $m < n$. Para cada um dos seguintes conjuntos, indique limites superiores e inferiores para a sua cardinalidade, justificando cada limite.

(a) $A \cap B$
(b) $A \cup B$
(c) $A \setminus B$
(d) $2^A \cup A$

18. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo $\mathcal{U}$; prove a veracidade ou falsidade das afirmações seguintes.

(a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(b) Se $A \subseteq B$ e $B \nsubseteq C$, então $A \nsubseteq C$.

(c) Se $A \subseteq B$ e $B \nsubseteq C$, então $A \subseteq C$.

(d) Se $A \nsubseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \nsubseteq C$.

$\star$ **19** Prove ou dê um contra-exemplo:

(a) Se $A \subset B$ e $A \subset C$, então $A \subset B \cap C$

(b) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

(c) Se $A \in B$ e $B \in C$, então $A \in C$.

20. Prove cada um dos seguintes resultados, sendo A, B, C e D conjuntos num universo $\mathcal{U}$.

(a) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então $A \cap C \subseteq B \cap D$ e $A \cup C \subseteq B \cup D$.

(b) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cap B \subseteq C$ e $A \cup B \subseteq C$.

(c) $A \subseteq B$ se e só se $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

(d) $A \subseteq B$ se e só se $\overline{A} \cup B = \mathcal{U}$.

21. Averigue a validade ou falsidade das seguintes afirmações para A, B e C conjuntos quaisquer.

(a) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$.

(b) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.

(c) $(A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C) \Rightarrow A = B$.

22. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, considere o conjunto $M_k = \{kn \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ dos inteiros múltiplos de k. Por exemplo,

$$M_2 = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

é o conjunto dos inteiros múltiplos de 2.

1. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras ou falsas.

   (a) $M_8 \subseteq M_4 \subseteq M_2$

   (b) $M_2 \subseteq M_4 \subseteq M_8$

   (c) $M_3 \subseteq M_6$

   (d) $M_6 \subseteq M_3$

   (e) $M_6 \subseteq M_2$

   (f) $\overline{M_6} \subseteq \overline{M_2}$

2. Determine uma representação em compreensão simplificada para cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $M_2 \cup M_4$

   (b) $M_2 \cap M_8$

   (c) $M_3 \cup M_6$

   (d) $M_3 \cap M_6$

   (e) $\overline{M_2}$

   (f) $M_4 \setminus M_2$

3. Prove a veracidade ou falsidade das proposições:

   (a) Existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que M_k é infinito.

   (b) Existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que M_k é finito.

(c) Para todo $k \in \{2p+1 : p \in \mathbb{Z}\}$, o conjunto M_k é infinito.

(d) Para todo $k \in \{2p : p \in \mathbb{Z}\}$, o conjunto M_k é infinito.

$\star$ **23** Se $a(t)$, $b(t)$, e $c(t)$ são os tamanhos dos três lados de um triângulo t por ordem crescente (i.e. $a(t) \leq b(t) \leq c(t)$), definimos os seguintes conjuntos :

- $X = \{\text{Triângulo } t : a(t) = b(t)\}$
- $Y = \{\text{Triângulo } t : b(t) = c(t)\}$
- $T =$ o conjunto de todos os triângulos

Utilizando apenas operações de conjuntos sobre X, Y, T, defina:

(a) O conjunto de todos os triângulos equiláteros (todos os lados iguais).

(b) O conjunto de todos os triângulos isósceles (pelo menos dois lados iguais).

(c) O conjunto de todos os triângulos escalenos (todos os lados diferentes).

24. Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa, para A e B conjuntos quaisquer.

(a) Se A e B são conjuntos infinitos, então $A \cap B$ é infinito.

(b) Se B é infinito e $A \subseteq B$ então A é infinito.

(c) Se $A \subseteq B$ e B é finito então A é finito.

(d) Se $A \subseteq B$ e A é finito então B é finito.

25. Sendo A, B e C conjuntos, mostre que:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(d) se $A \subseteq B$, então $A \cap B = A$.

(e) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

(f) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

(g) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(h) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

(i) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.

$\star$ **26** Mostre que para todo o conjunto A e B:

(a) se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$.

(b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

27. Prove que, para quaisquer conjuntos X, A e B, as seguintes condições são equivalentes.

$$\text{(i) } X \subseteq A \cup B \qquad \text{(ii) } (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset \qquad \text{(iii) } (X \setminus A) \subseteq B$$

28. Sendo A e B conjuntos quaisquer, averigue se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Justifique as suas respostas.

(a) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

(b) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$

(c) $A \cup A = A$

(d) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$

29. A *diferença simétrica* de A e B, representada por $A \Delta B$, é o conjunto contendo os elementos em A ou B, mas não em ambos.

(a) Represente em extensão a diferença simétrica entre $\{1,3,5\}$ e $\{1,2,3\}$.

(b) Mostre que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(c) O que pode concluir sobre dois conjuntos A e B se $A \Delta B = A$?

(d) Suponha que A, B e C são conjuntos tais que $A \Delta C = B \Delta C$. Será que isso implica que $A = B$?

30. Supondo que A e B designam subconjuntos de $\mathbb{Z}$, classifique cada uma das condições seguintes como satisfazível (ou possível), impossível ou universal.

(a) $A \cup B = \{1, 23\} \ \wedge \ |A| = 2 \ \wedge \ B \nsubseteq A$

(b) $(A \cup B) \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

(c) $(|A| = 7 \ \vee \ |A| = 8) \ \wedge \ |2^A| < 200$

(d) $|A| \neq 8 \ \vee \ |2^A| = 64$

(e) $B \setminus A = B \ \wedge \ B \cap A \neq \emptyset$

31. Represente as seguintes relações binárias no conjunto $\{1,2,3,4\}$ sob a forma matricial.

(a) $R_1 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

(b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(c) $R_3 = \{(2,4),(4,2)\}$.

(d) $R_4 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

(e) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(f) $R_6 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$.

32. Liste os pares ordenados na relação em $\{1,2,3\}$ correspondentes as seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\star$ **33** Prove ou dê um contra-exemplo:

(a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Propriedades algébricas de conjuntos

$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	elementos absorventes
$A \cap \emptyset = \emptyset$	
$A \cup \emptyset = A$	elementos neutros
$A \cap \mathcal{U} = A$	
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	elementos complementares
$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
$A \cup A = A$	idempotências
$A \cap A = A$	
$\overline{\overline{A}} = A$	duplo complemento
$A \cup B = B \cup A$	comutatividades
$A \cap B = B \cap A$	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	associatividades
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributividades
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	leis de De Morgan
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	