Teoria de conjuntos - I

Um *conjunto* é uma colecção de objectos distintos. Aos objectos num conjuntos chamamos *elementos* ou *membros*.

- Lista de elementos entre chavetas:

  $S = \{a, b, c, d\}$ o mesmo que $\{b, c, a, d\}$ o mesmo que $\{b, c, a, d, a, b\}$

- x é um elemento de S (ou x pertence a S): $x \in S$
- Podemos usar reticências para especificar uma sequência que segue um padrão

$$S = \{1, 2, \dots\} \text{ ou } S = \{1, \dots, 64\}$$

- Ambiguidade na definição usando reticências: $S = \{1, 2, \dots, 64\}$, pode representar os inteiros positivos até 64, mas também pode indicar o conjunto de todas as potências de 2 até 64 ($S = \{2^0, 2^1, \dots, 64\}$ notação mais apropriada)

Conjuntos: exemplos

- $\{1, \{1\}\}$.
- $\mathbb{N}$ = naturais = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ = inteiros = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\{2^0, 2^1, \ldots\}$
- $\{1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}^+$ = inteiros positivos.

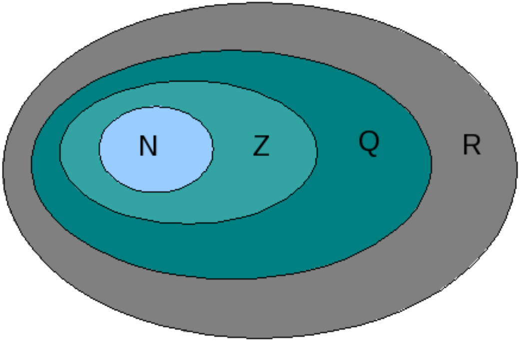
Teoria de conjuntos - II

- Podemos evitar ambiguidade definindo os conjuntos por compreensão
- Os elementos à esquerda de (|) têm que satisfazer a condição $P(X)$, para pertencerem ao conjunto S:

  $$S = \{ X \mid P(X) \}$$

  Nota: podemos também escrever $S = \{ X : P(X) \}$
- Exemplos:
  - $\mathbb{Z} = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ou } -x \in \mathbb{N} \}$.
  - $\mathbb{Q} = \text{racionais} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$.
  - $\{ x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 5 \}$.

Conjuntos



Subconjuntos - I

- Dizemos que A é um **subconjunto** de B (notação $A \subseteq B$), se e só se, todos os elementos de A são também elementos de B, ou seja,

$$\text{Para todo } x, \text{ se } x \in A \text{ então } x \in B$$

- O conjunto A é um subconjunto de si mesmo ($A \subseteq A$).
- Dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B (notação $A \subset B$), se e só se, $A \subseteq B$ e $A \neq B$.
- O conjunto A não é um subconjunto próprio de si mesmo ($A \not\subset A$).
- Dois conjuntos A e B são iguais (notação $A = B$), se e só se têm os mesmo elementos. Mais formalmente,

$$A = B \text{ se e só se, } A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Subconjuntos - II

- O conjunto vazio, $\emptyset$ (ou $\{\}$), é o único conjunto que não contém elementos. ($x \in \emptyset$ é sempre falso!)
- $\emptyset$ é um subconjunto de qualquer conjunto. É sempre verdade que:

$$\text{Para todo } x, \text{ se } x \in \emptyset \text{ então } x \in A$$

- **Exemplos:** Seja $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{1, 5\}$ e $C = \{3, 7\}$.
  1. $B \subseteq A$?
  2. $C \subseteq A$?
  3. $B \subseteq B$?

Conjuntos de conjuntos

- Um conjunto pode ter como elementos outros conjuntos. Exemplo: $\{\{2, 4\}, \{13\}, 17\}$
- Note que, $\{2, 4\} \in \{\{2, 4\}, \{13\}, 17\}$, mas $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4, 13, 17\}$
- Note que, $13 \notin \{\{2, 4\}, \{13\}, 17\}$, mas $\{13\} \in \{\{2, 4\}, \{13\}, 17\}$
- O conjunto $\{\emptyset\}$ não é o conjunto vazio: $\emptyset \in \{\emptyset\}$

O conjunto de subconjuntos

- O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado o conjunto das partes de A (notação 2^A ou $\mathcal{P}(A)$), ou seja:

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{\ S \mid S \subseteq A\ \}$$

- Exemplo: se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ então

$$\mathcal{P}(A) = 2^A =$$

Operações sobre conjuntos

- Dados dois conjuntos A e B, definimos a intersecção, união e diferença de conjuntos da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \in B \,\} \\
A \cup B &= \{\, x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \,\} \\
A \setminus B &= \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \,\}
\end{aligned}
$$

- As operações de união e interseção podem ser definidas para múltiplos conjuntos. Considerando n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então

$$\cap_{i=1}^{n} A_i \quad \text{e} \quad \cup_{i=1}^{n} A_i$$

  definem respectivamente a sua intersecção e a sua união.
- Considerando um determinado universo $\mathcal{U}$, definimos o complementar de A, como:

$$\overline{A} = \{\, x \mid x \notin A \,\} = \mathcal{U} \setminus A$$

Exemplo

Seja $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{6, 7, 8\}$.
Então:

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$
- $\overline{A} =$
- $A \setminus B =$

Exercícios:

1. Determine conjuntos A e B tais que se verifiquem as condições seguintes.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;
- $1 \notin A \setminus B$;
- $2 \notin B \setminus A$.

2. Sejam A e B conjuntos quaisquer num universo $\mathcal{U}$. Relacione os conjuntos seguintes (quanto à inclusão).

- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}(A \cup B)$;
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}(A \cup B)$.

Exercícios (cont.):

3. Considere os conjuntos $A = \{\, 11k + 8 \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ e $B = \{\, 4m \mid m \in \mathbb{Z} \,\}$ e $C = \{\, 11(4n + 1) - 3 \mid N \in \mathbb{Z} \,\}$. Mostre que $A \cap B = C$.

Cardinalidade

- O número de elementos (distintos!) em A, (notação $|A|$ ou $\#A$), é chamado a cardinalidade de A.
- Se a cardinalidade de um conjunto é um número natural ($\mathbb{N}$), então o conjunto é *finito*, caso contrário é *infinito*.
- Exemplo: Se $A = \{a, b\}$ então $|\{a, b\}| = 2$ e $|2^A| = 4$.
- O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n, ou seja,
$$|2^A| = 2^{|A|}$$
- $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercícios (cont.):

4. Numa escola do secundário com 100 estudantes, as turmas de inglês, alemão e francês têm respectivamente 28, 30 e 42 inscritos. 8 alunos frequentam as turmas de inglês e alemão, 10 as de inglês e francês e 5 as de alemão e francês. 3 estudantes estão inscritos nas três turmas. Quantos alunos aprendem exatamente uma língua estrangeira? E quantos dos 100 estudantes não aprendem nenhuma?

Produto cartesiano de conjuntos

- Um n-tuplo ordenado $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, é uma colecção ordenada, que tem a_i como i-ésimo elemento.
- Um 2-tuplo ordenado é chamado de *par ordenado*.
- O produto cartesiano de o conjunto A com o conjunto B, $A \times B$, é o conjunto de pares ordenados

$$\{ \ (a, b) \mid a \in A \ e \ b \in B \ \}.$$

- O produto cartesiano dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$, é o conjuntos de todos os n-tuplos ordenados

$$\{ \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \ldots a_n \in A_n \ \}.$$

- **Exemplo:** Seja $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Então:

$A \times B =$

Conjuntos: propriedades

A teoria de conjuntos é uma instância de um sistema algébrico chamado

Álgebra Booleana.

1. Comutatividade: para todo o conjunto A e B; $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$.
2. Associatividade: para todo o conjunto A, B e C; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
3. Distributividade: para todo o conjunto A, B e C; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. Complemento duplo: para todo o conjunto A, $\overline{\overline{A}} = A$.
5. Idempotência: para todo o conjunto A, $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.

Conjuntos: propriedades II

6 Elemento neutro: para todo o conjunto A e universo $\mathcal{U}$; $A \cap \mathcal{U} = A$ e $A \cup \emptyset = A$.

7 Elemento absorvente: para todo o conjunto A e universo $\mathcal{U}$; $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$.

8 Leis de De Morgan: para todo o conjunto A e B; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

9 Leis de absorção: para todo o conjunto A e B, $A \cup (A \cap B) = A$ e $A \cap (A \cup B) = A$.

10 Complementar: para todo o conjunto A e universo $\mathcal{U}$, $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Provas...

Vamos provar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Prova: Vamos mostrar que, para todo o x:

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

Seja x um elemento arbitrário do domínio

($\Rightarrow$) Se $x \in \overline{A \cup B}$, então (pela definição de complementar) $x \notin (A \cup B)$.Além disso, $x \notin (A \cup B)$ implica (pela definição de união) que $x \notin A$ e $x \notin B$. Se $x \notin A$, então (pela definição de complementar) $x \in \overline{A}$ e $x \notin B$ implica (pela definição de complementar) $x \in \overline{B}$. Mas, se $x \in \overline{A}$ e $x \in \overline{B}$, então (pela definição de intersecção) $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

($\Leftarrow$) Análogo ao sentido inverso.

Logo $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Provas...

Seja A um conjunto (fixo, mas genericamente escolhido), para mostrar que $A \cap \emptyset = \emptyset$ basta mostrar que $A \cap \emptyset$ não contém nenhum elemento.

Suponhamos que $x \in (A \cap \emptyset)$, por definição de intersecção $x \in A$ e $x \in \emptyset$. Em particular $x \in \emptyset$, o que é impossível por definição de $\emptyset$.

Esta contradição mostra que a hipótese de existir um $x \in (A \cap \emptyset)$ é falsa. Logo $A \cap \emptyset$ não contém elementos e $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Exercício: Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo $\mathcal{U}$; prove a veracidade ou falsidade das afirmações seguintes.

a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

c) $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cup (\overline{A \cap B})$.

Exercícios

- Das seguintes afirmações identifique as verdadeiras:
  1. $2 \in \{1, 2, 3\}$
  2. $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$
  3. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$
  4. $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
  5. $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$
  6. $\{2\} \in \{\{1\}, \{\{2\}\}\}$
- Seja $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Determine:
  1. $B \times A$ e $A \times B \times A$.
  2. $|A \times B|$.
- Se $|A| = 4$ e $|B| = 2$, determine $|A \times B|$.
- Mostre que para todo o conjunto A e B, $A \cap B \subseteq A$.
- Mostre que para todo o conjunto A e B, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- Mostre que para todo o conjunto A,B e C $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Exercícios

1. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo $\mathcal{U}$; prove a veracidade ou falsidade das afirmações seguintes.
   a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
   b) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.
   c) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \subseteq C$.
   d) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.

Exercícios

Prove cada um dos seguintes resultados, sendo A, B, C e D conjuntos num universo $\mathcal{U}$.

a) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então $A \cap C \subseteq B \cap D$;

b) Se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$, então $A \cup C \subseteq B \cup D$.

Exercícios

Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;

d) se $A \subseteq B$, então $A \cap C \subseteq B \cap C$;

e) se $A \cup C = B \cup C$, então $A = B$;

f) se $A \subseteq B$, então $2^A \subseteq 2^B$.

Pares ordenados

- Dois elementos a, b podem ser agrupados num *par ordenado*, o qual é denotado por (a, b).
- Dados dois pares ordenados (x, y), (u, v), então
$$(x, y) = (u, v) \text{ se e só se } x = u \text{ e } y = v$$
- A noção de par ordenado pode ser estendida a tuplos de tamanho n
- A noção de tuplos de n elementos, permite representar conjuntos de objectos, nos quais a ordem entre os elementos é importante.

Produto Cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos A e B, o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$:

$$A \times B = \{ \ (x, y) \mid x \in A, y \in B \ \}.$$

Um caso especial bastante útil é:

$$A^2 = A \times A = \{ \ (x, y) \mid x, y \in A \ \}.$$

De uma forma geral definimos: $A^1 = A$, e para $n \geq 2$

$$A^n = \{ \ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in A \ \}.$$

Produto Cartesiano

Proposição: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Prova: Recordemos que dois conjuntos X e Y são iguais se e só se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
Seja $(x, y) \in (A \cup B) \times C$, então por definição de produto cartesiano $x \in A \cup B$ e $y \in C$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$ então $(x, y) \in A \times C$ e se $x \in B$ então $(x, y) \in B \times C$. Portanto, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in B \times C$, logo $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Seja $(u, v) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Isso implica que $(u, v) \in A \times C$ ou $(u, v) \in B \times C$. No primeiro caso $u \in A$ e $v \in C$ e no segundo caso $u \in B$ e $v \in C$. Logo $u \in A \cup B$ e $v \in C$, o que implica que $(u, v) \in (A \cup B) \times C$.

Relações binárias

Definição: Uma *relação binária* de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$.

Se $A = B$, i.e. $R \subseteq A \times A$, dizemos também que R é uma relaçao binária definida em A.
A relação R indica os pares (a, b) para os quais a relação representada por R é verdadeira.

Por exemplo, a relação $>$ em $\{1, 2, 3\}$ é:

$$> = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Se $(a, b) \in R$, então a está em relação com b em R. Podemos também usar a notação aRb para indicar que $(a, b) \in R$.

Exemplos de relações matemáticas, que já vimos: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\neq$, $|$, $\equiv_n$, $\subset$, $\subseteq$, etc...

Exemplos

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determine as relações binárias seguintes (por extensão).

- $(\equiv_4, A)$;
- $(\equiv_4, \mathbb{Z})$;
- $(|, A)$;
- $(|, \mathbb{Z})$;
- $(\subseteq, \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}))$.

Representação de Relações

Matrizes Seja R uma relação entre $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. R pode ser representada pela matriz $M_R = \{m_{ij}\}$, onde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Exemplo $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c)(c, b), (c, c)\}$

R	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	1
c	0	1	1

Matrizes

Definição: Sejam $E = (e_{ij})_{m\times n}$ e $F = (f_{ij})_{m\times n}$ duas matrizes $(0,1)$ de $m \times n$. Dizemos que E precede F e escrevemos $E \leq F$, se $e_{ij} \leq f_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição: Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $I_n = (\delta_{ij})$ é a matriz de $n \times n$ tal que

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definição: Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz $(0,1)$. A transposta de A, escrevemos A^t, é a matriz $(a^*_{ji})_{n\times m}$ tal que $a^*_{ji} = a_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Matrizes

Seja A um conjunto com $|A| = n$ e R uma relação em A. Se M_R é a matriz da relação R, então:

- $M_R = 0$ (a matriz com todas as posições 0) se e só se $R = \emptyset$.
- $M_R = 1$ (a matriz com todas as posições 1) se e só se $R = A \times A$.