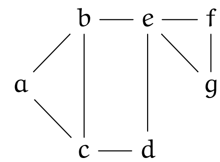
Grafos

1. Considere o grafo não dirigido G representado na figura seguinte.



(a) Indique a representação do grafo G como um par (V, E) de conjuntos V de vértices e E de arestas.

(b) Indique:

1. um caminho de b para d;
2. um ciclo a partir de b.

(c) Quantos caminhos existem entre b e f?

2. Se a e b são dois vértices distintos num grafo não dirigido conexo, definimos a *distância* entre a e b como o comprimento (isto é, número de arestas) do menor caminho entre a e b; se $a = b$ então a distância é zero.

Calcule as distâncias entre todos os pares de vértices do grafo do exercício anterior.

3. Sete cidades a, b, c, d, e, f e g estão ligadas por uma rede de estradas de sentido único: a A22 vai de a a c passando por b; a A33 passa por c, d, b e f; a A44 passa por d, e e a; a A55 vai de f a b passando por g; a A66 vai de g a d.

(a) Desenhe um grafo dirigido que represente as conexões entre cidades.

(b) Liste todos os caminho de g para a.

(c) Qual o menor número de troços de auto-estrada que têm de estar fechados para impedir viajar de b a d?

(d) Será possível iniciar viagem em c e visitar cada uma das outras cidades exactamente uma vez?

(e) Qual a resposta à questão anterior se também for exigido terminar a viagem em c?

(f) Será possível iniciar viagem numa cidade e percorrer cada troço de auto-estrada exactamente uma vez?

4. Indique se existe um grafo não dirigido com cinco vértices com, respectivamente, os seguintes graus. Em caso afirmativo, desenhe o grafo.

(a) $3, 3, 3, 3, 2$

(b) $1, 2, 3, 4, 5$

(c) $1, 2, 3, 4, 4$

(d) $0, 1, 2, 2, 3$

(e) $1, 1, 1, 1, 1$

5. Seja $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Encontre três grafos não isomorfos, $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ e $G_3 = (V, E_3)$ tais que, para todos eles, se tem $\deg(a) = 3$, $\deg(b) = \deg(c) = 2$ e $\deg(d) = \deg(e) = \deg(f) = 1$.

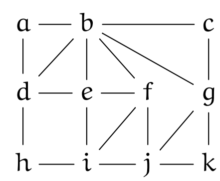
⋆ **6** Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido. Considera uma relação R em V (conjunto dos vértices do grafo) definida por "xRy sse $x = y$ ou existe um caminho no grafo de x para y".

(a) Mostra que R é uma relação de equivalência.

(b) Mostra que cada classe de equivalência de R é um *subgrafo conexo* de G. Mostre, ainda, que cada classe é um subgrafo conexo *máximo*, *ie*, se lhe juntarmos mais um qualquer vértice obtemos um subgrafo de G que é não conexo.

(c) Como se poderia exprimir a propriedade "G é um grafo conexo" em termos de propriedades da relação R e/ou das suas classes de equivalência?

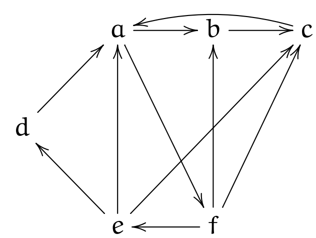
7. Considere o grafo representado pela seguinte figura:



(a) Encontre um circuito de Euler.

(b) Encontre uma pista de Euler (não necessariamente um circuito) no grafo resultante da remoção da aresta $\{d, e\}$.

8. Considere o grafo dirigido representado na figura.



(a) Diga, justificando, se o grafo é fortemente conexo.

(b) Verifique se o grafo tem algum ciclo de Hamilton.