Lógica Computacional - Formas normais

DCC/FCUP

2019/20

Funções de verdade (ou Booleanas)

p	q	$p \wedge q$
F	**F**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

x	y	$F(x, y)$
F	**F**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

A tabela de verdade duma fórmula ϕ, com $n > 0$ variáveis proposicionais $p_1, \ldots p_n$, define uma função de verdade

$$F_\phi : \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^n \longrightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$$

tal que $F_\phi(x_1, \ldots, x_n) = v_X(\phi)$,onde $v_X(p_i) = x_i$ para $i \in \{1 \ldots n\}$ e $x_i \in \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$

Funções de verdade

Qualquer função de $f : \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^n \longrightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, com $n > 0$ diz-se uma função de verdade.

Para $n = 1$ temos 4 funções:

x_1	$f_1(x_1)$
V	**F**
F	**F**

x_1	$f_2(x_1)$
V	**F**
F	**V**

x_1	$f_3(x_1)$
V	**V**
F	**F**

x_1	$f_4(x_1)$
V	**V**
F	**V**

Existem 16 funções de verdade de aridade 2. Prova!

E quantas funções existem de aridade n, para $n > 0$?

Conjunto de conectivas completo

Um conjunto de conectivas C diz-se completo se para qualquer função de verdade f existe uma fórmula ϕ com n variáveis proposicionais e contendo só conectivas de C, tal que $F_\phi = f$

Proposição

O conjunto de conectivas $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *é completo.*

Demonstração.

Mostramos por indução sobre n.

Base. Para $n = 1$ existem 4 funções de verdade:

x_1	f_1
V	**F**
F	**F**

x_1	f_2
V	**F**
F	**V**

x_1	f_3
V	**V**
F	**F**

x_1	f_4
V	**V**
F	**V**

Sendo $\phi_1 = p \wedge \neg p$, $\phi_2 = \neg p$, $\phi_3 = p$, $\phi_4 = p \vee \neg p$, tem-se que $F_{\phi_i} = f_i$ para $1 \leq i \leq 4$.

□

Conjunto de conectivas completo

Demonstração.

Indução. Supondo que a hipótese é válida para n, seja $f : \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^{n+1} \longrightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Construímos duas funções n-árias f_1 e f_2 tal que:
$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{V})$
$f_2(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{F})$.
Por hipótese de indução existem ϕ_i, com variáveis $p_1, \ldots, p_n$, tal que $F_{\phi_i} = f_i$ para $i = 1, 2$. Tome-se $\phi = (p_{n+1} \wedge \phi_1) \vee (\neg p_{n+1} \wedge \phi_2)$, então $F_\phi = f$.

$\square$

Proposição

O conjunto de conectivas $\{\neg, \to\}$ *é completo.*

Demonstração.

Basta ver que $\phi \ \wedge \ \psi \ \ \equiv \neg(\phi \to \neg\psi)$ e $\phi \ \vee \ \psi \ \ \equiv (\neg\phi \to \psi)$. $\square$

Uso de conectivas

Podemos restringuir-nos só a conjuntos completos de conectivas. Assim podiamos ter só considerado na definição da linguagem da Lógica proposicional, apenas:

- as conectivas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
- as conectivas $\rightarrow$ e $\neg$
- ...

E considerar as restantes abreviaturas.
Uma das vantagens seria ter um número menor de tipos de fórmulas o que é bom para as demonstrações...

Mais conectivas

Mas também podemos definir outras conectivas. Por exemplo, uma para cada uma das funções de verdade unárias ou binárias... As mais usuais são:

Designação	Conectiva	Fórmula semanticamente equivalente
Falso	**F**	$\phi \wedge \neg\phi$
Verdade	**V**	$\phi \vee \neg\phi$
Implicação	$\phi \rightarrow \psi$	$\neg\phi \vee \psi$
Equivalência	$\phi \leftrightarrow \psi$	$(\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)$
Ou Exclusivo	$\phi \dot{\vee} \psi$	$(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi)$
Não-e	$\phi \tilde{\wedge} \psi$	$\neg(\phi \wedge \psi)$
Não-ou	$\phi \tilde{\vee} \psi$	$\neg(\phi \vee \psi)$

Formas normais

Vamos ver que podemos transformar fórmulas em fórmulas semânticamente equivalentes de tal modo a obter fórmulas de formas especiais e que nos permitam decidir mais facilmente sobre a satisfabilidade ou validade das fórmulas originais... algumas dessas formas normais existem para qualquer fórmula outras apenas para certas classes de fórmulas...

Forma normal negativa

Um literal é uma variável proposicional p ou a sua negação, $\neg p$.
Uma fórmula diz-se em forma normal negativa se $\neg$ ocorre apenas em literais.

Proposição

Qualquer fórmula contendo apenas as conectivas $\wedge$, $\vee$ *e* $\neg$ *é semanticamente equivalente a uma fórmula em forma normal negativa.*

Demonstração.

Basta usar as Leis de DeMorgan e eliminar as duplas negações. $\square$

Forma normal negativa

Exemplo

$$
\begin{array}{rl}
\neg((p \lor q) \land \neg p) & \\
\neg(p \lor q) \lor \neg\neg p & \textit{(DeMorgan)} \\
(\neg p \land \neg q) \lor \neg\neg p & \textit{(DeMorgan)} \\
(\neg p \land \neg q) \lor p & \textit{(Dupla Negação)}
\end{array}
$$

Formas normal disjuntiva

Uma fórmula diz-se em forma normal disjuntiva se for da forma:

$$(\alpha_{11} \wedge \ldots \wedge \alpha_{1k_1}) \vee \ldots \vee (\alpha_{n1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é um literal.

Lema

Para qualquer função $f : \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}\}^n \longrightarrow \{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}\}$, existe uma fórmula ϕ com n variáveis proposicionais em forma normal disjuntiva, tal que $F_\phi = f$.

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$
F	**F**	**F**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**
V	**V**	**V**

$p_1 \wedge p_2$

Demonstração.

Se f é **F** , para todos os valores dos argumentos, então $\phi = p_1 \wedge \neg p_1$.

Senão, para cada valoração v seja

$$l_i^v = \begin{cases} p_i & \text{se } v(p_i) = \mathbf{V} \\ \neg p_i & \text{se } v(p_i) = \mathbf{F} \end{cases}$$

Quanto é $v(l_i^v)$?

e então

$$\phi_v = l_1^v \wedge \ldots \wedge l_n^v$$

Nota que $v(\phi_v) = \mathbf{V}$. Então, basta considerar

$$\phi = \bigvee_{f(v(p_1),\ldots,v(p_n))=\mathbf{V}} \phi_v$$

(Verifica!) $\square$

Exemplo

Para a seguinte função de verdade:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

uma fórmula em forma normal disjuntiva é:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

Corolário

Qualquer fórmula é semanticamente equivalente a uma fórmula em forma normal disjuntiva.

Demonstração.

Dada uma fórmula é possível transformá-la numa semanticamente equivalente em forma normal disjuntiva, considerando os seguintes passos:

1. obter uma fórmula apenas com as conectivas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$
2. obter uma fórmula em forma normal negativa
3. aplicar a distributividade: $(\phi \vee \psi) \wedge \theta \equiv (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)$

$\square$

Exemplo

Determina uma forma normal disjuntiva para

$$(p \lor r) \leftrightarrow (q \land \neg p)$$

$$
\begin{array}{l}
(p \lor r) \leftrightarrow (q \land \neg p) \equiv \\
((p \lor r) \rightarrow (q \land \neg p)) \land ((q \land \neg p) \rightarrow (p \lor r)) \equiv \\
(\neg(p \lor r) \lor (q \land \neg p)) \land (\neg(q \land \neg p) \lor (p \lor r)) \equiv \\
((\neg p \land \neg r) \lor (q \land \neg p)) \land ((\neg q \lor p) \lor (p \lor r)) \equiv \\
(((\neg p \land \neg r) \lor (q \land \neg p)) \land (\neg q \lor p)) \lor (((\neg p \land \neg r) \lor \\
(q \land \neg p)) \land (p \lor r)) \equiv \\
(\neg p \land \neg r \land (\neg q \lor p)) \lor (q \land \neg p \land (\neg q \lor p)) \\
\lor (\neg p \land \neg r \land (p \lor r)) \lor (q \land \neg p \land (p \lor r)) \equiv \\
(\neg p \land \neg r \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (q \land \neg p \land \neg q) \lor (q \land \neg p \land p \\
\lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (\neg p \land \neg r \land r) \lor (q \land \neg p \land p) \lor (q \land \neg p \land r)
\end{array}
$$

Satisfabilidade de fórmulas em FND

Lema

Uma conjunção de literais $l_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ l_n$ *é satisfazível se e só se para todo o* $1 \leq i, j \leq n$, l_i *não é* $\neg l_j$.

Exemplo

Serão satisfazíveis?

$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge q$

$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$

Exemplo

$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge q$ *Não*

$\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$ *Sim*

Corolário

Uma fórmula ϕ *em forma normal disjuntiva é satisfazível se e só se alguma das suas conjunções de literais o for.*

Obtemos assim um método de determinar se uma fórmula é satisfazível

Exemplo

Determina se é satisfazível

$$(p \lor r) \leftrightarrow (q \land \neg p)$$

$(p \lor r) \leftrightarrow (q \land \neg p) \equiv$
$(\neg p \land \neg r \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (q \land \neg p \land \neg q) \lor$
$(q \land \neg p \land p) \lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (\neg p \land \neg r \land r)$
$\lor (q \land \neg p \land p) \lor (q \land \neg p \land r)$

$(p \lor r) \leftrightarrow (q \land \neg p) \equiv$
$(\neg p \land \neg r \land \neg q) \lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (q \land \neg p \land \neg q) \lor$
$(q \land \neg p \land p) \lor (\neg p \land \neg r \land p) \lor (\neg p \land \neg r \land r)$
$\lor (q \land \neg p \land p) \lor (q \land \neg p \land r)$

Sim

Forma normal conjuntiva

Uma fórmula diz-se em forma normal conjuntiva se for da forma:

$$(\alpha_{11} \vee \ldots \vee \alpha_{1k_1}) \wedge \ldots \wedge (\alpha_{n1} \vee \ldots \vee \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é um literal.
Por dualidade temos

Lema

Uma disjunção de literais $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ é uma tautologia se e só se para algum $1 \leq i, j \leq n$, l_i é $\neg l_j$.

Então é fácil determinar se uma fórmula em forma normal conjuntiva é uma tautologia: verificar se todas as disjunções são tautologias, pelo método dado no Lema anterior.
Mas como obter uma fórmula em forma normal conjuntiva?

1. se tivermos a tabela de verdade, por um método dual ao da forma normal disjuntiva: isto é, escolher as linhas que correspondem a **F** considerar para cada uma a disjunção de literais tal que se $x_i =$ **V** coloca-se $\neg p_i$ e se $x_i =$ **F** coloca-se p_i; e finalmente tomar a conjunção dessas disjunções.
2. adptar o método dado para a forma normal disjuntiva,usando a distributividade para a conjunção:
   $(\phi \wedge \psi) \vee \theta \equiv (\phi \vee \theta) \wedge (\psi \vee \theta)$

Exercícios

Obtem uma fórmula em forma normal conjuntiva correspondente à tabela de verdade

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

$$(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$$

Exercícios

Determina uma forma normal conjuntiva para a fórmula abaixo e verifica se é uma tautologia

$$(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$$

$(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p) \equiv$
$((p \vee r) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \wedge ((q \wedge \neg p) \rightarrow (p \vee r)) \equiv$
$(\neg(p \vee r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p) \vee (p \vee r)) \equiv$
$((\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (p \vee r)) \equiv$
$((\neg p \wedge \neg r) \vee q) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee p \vee r) \equiv$
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee p \vee p \vee r)$

Não