Demonstrações por indução

1. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$.

3. Examinando os valores da expressão para valores pequenos de n, determine uma fórmula fechada para a soma

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Use indução matemática para provar o seu resultado.

$\star$ **4** Mostre que a soma dos primeiros n números naturais ímpares é n^2.

5. Use indução matemática para mostrar que um conjunto com n elementos tem $\frac{1}{2}n(n-1)$ subconjuntos com exactamente dois elementos, para todo o $n \geq 2$.

6. Averigue a partir de que inteiro positivo é válida a desigualdade $n! \geq n^2$. Prove a sua conjectura usando indução sobre n.

7. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

8. Mostre que $3^n < n!$ para todo o inteiro $n > 6$.

9. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n! < n^n$.

10. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, 3 divide $n^3 + 2n$.

11. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$, 5 divide $n^5 - n$.

12. Mostre que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ se tem $8|((2n-1)^2 - 1)$.

13. Mostre que $9|(4^n + 15n - 1)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

14. Mostre por indução que, para qualquer conjunto A, $|2^A| = 2^{|A|}$.

15. Usando indução matemática, mostre que é possível obter qualquer valor igual ou superior a 20 cêntimos usando apenas selos de 5 ou 6 cêntimos.

16. Considere a seguinte função definida para os números naturais:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 4f(n/2) & \text{se } n \text{ for par e } n > 0 \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Mostre que $f(n) = n^2$ para todo o $n \geq 0$.

17. Seja f a seguinte função definida para os naturais:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ 2f(n/2) & \text{se } n \text{ for par e } n > 0 \\ f(n-2) + 2 & \text{se } n \text{ for ímpar e } n > 1 \end{cases}$$

Consegue demonstrar que $f(n) = n$ para todo o $n \geq 0$?

⋆ **18** Prove a desigualdade de Bernoulli's: Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$, tal que $r > -1$,

$$(1+r)^n \geq 1 + rn.$$

19. Mostre, usando indução matemática, que $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

20. Considere a *sucessão de Fibonacci*, definida por recorrência,

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \end{aligned}$$

Mostre, usuando indução, que

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ \forall n \geq 1$$

⋆ **21** Considerando a *sucessão de Fibonacci* definida no exercício anterior, mostre que

$$F_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

22. No problema da *Torre de Hanoi* é dada uma torre de n discos de diâmetro decrescente, colocada num de três pilares; o objectivo consiste em mover a torre para outro pilar, um disco de cada vez, *de modo a nunca colocar um disco maior sobre um outro menor*.

Uma solução para este problema é dada pelo seguinte algoritmo recursivo:

- se $n = 1$ então basta mover o (único) disco e terminar;
- se $n > 1$ então...
  - mover os primeiros $n-1$ discos para o pilar intermédio;
  - mover o último disco para o pilar final;
  - por fim, mover os $n-1$ discos para o pilar final.

(a) Encontre uma fórmula de recorrência para o número T_n de movimentos necessários para mover uma torre com n discos.

(b) Calcule (usando a fórmula de recorrência) alguns valores de T_n (ex.: $n = 1, 2, 3, 4, 5$). Consegue "adivinhar" uma expressão (sem recorrência) para T_n?

(c) Usando indução finita, mostre que a expressão encontrada é válida.

23. Use matemática indução para mostrar que se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

24. Use indução matemática para mostrar que se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são subconjuntos do universo $\mathcal{U}$, então

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

25. Usando as definições seguintes em Haskell:

```
[]     ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x:(xs++ys)

reverse []     = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

(a) Usando indução sobre o comprimento da lista xs, prove a associatividade da concatenação:

$$(xs ++ys) ++zs = xs ++(ys ++zs)$$

(b) Prove a distributividade de `reverse sobre a concatenação` $++$:

$$\texttt{reverse}\ (\texttt{xs} ++\texttt{ys}) = \texttt{reverse ys} ++\texttt{reverse xs}$$

`Use o resultado do exercício anterior (associatividade de` $++$`) e note que as duas listas` xs, ys `aparecem por ordem contrária no lado direito da igualdade.`

26. Usando as seguintes definições em Haskell das funções `take`, `drop` e a definição anterior da concatenação $(++)$, mostre que $(\texttt{take n xs}) ++ (\texttt{drop n xs}) = \texttt{xs}$.

$$\texttt{take}\ 0\ \texttt{xs} = [\,]$$
$$\texttt{take n}\ [\,] \quad | \quad \texttt{n} > 0 = [\,]$$
$$\texttt{take n}\ (\texttt{x} : \texttt{xs}) \quad | \quad \texttt{n} > 0 = \texttt{x} : \texttt{take}\ (\texttt{n} - 1)\ \texttt{xs}$$

$$\texttt{drop}\ 0\ \texttt{xs} = \texttt{xs}$$
$$\texttt{drop n}\ [\,] \quad | \quad \texttt{n} > 0 = [\,]$$
$$\texttt{drop n}\ (\texttt{x} : \texttt{xs}) \quad | \quad \texttt{n} > 0 = \texttt{drop}\ (\texttt{n} - 1)\ \texttt{xs}$$

Sugestão: use indução sobre n e análise de casos da lista xs.

27. Seja L o conjunto de palavras assim definidas:

1. a e b são palavras;
2. se β é uma palavra então aaβ e bbβ também são palavras;

As palavras de L são todas (e apenas) as que resultam das regras 1 e 2.

(a) Verifique que aaaabba e bbaabbbbb são elementos de L.

(b) Mostre que qualquer palavra de L tem ou um número par de a's e ímpar de b's, ou um número par de b's e ímpar de a's.

28. Seja L o conjunto de *expressões* em que só ocorrem os símbolos (e), assim definidas:

- () é uma expressão;
- se α é uma expressão, então (α) é uma expressão;
- se α e β são expressões, então $\alpha\beta$ é uma expressão.

onde $\alpha\beta$ denota a justaposição das duas expressões. Mostre que em qualquer expressão de L:

(a) o número de parêntesis abertos é igual ao número de parêntesis fechados.

(b) em qualquer prefixo duma expressão, o número de parêntesis fechados não excede o número de parêntesis abertos.