Propriedades de Relações e Relações de Equivalência

1. Sejam R, S e T relações binárias em $\mathbb{R}$ assim definidas:

$$\begin{aligned} R &= \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 64 < x^2 + y^2 \leq 100\} \\ S &= \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge |y| \geq 8\} \\ T &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Represente geometricamente no plano as relações R, S, $R \cup S$, $R \cap S$, $R \cap T$.

(b) Determine em extensão os conjuntos $\{a \mid a \in \mathbb{R} \wedge (5,a) \in R\}$ e $\{a \mid a \in \mathbb{R} \wedge (a,5) \in S\}$.

2. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0 \wedge n \leq 100\}$. Considera a relação binária R de A em B e a relação binária S de B em C, respectivamente definidas por:

$$\begin{aligned} R &= \{(a,b) \in A \times B \ : \ a|b\} \\ S &= \{(b,c) \in B \times C \ : \ b^2 = c\} \end{aligned}$$

Determina em extensão as relações R, S e $RS = S \circ R$.

3. Represente as seguintes relações binárias no conjunto $\{1,2,3,4\}$ sob a forma matricial.

(a) $R_1 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$.

(b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(c) $R_3 = \{(2,4),(4,2)\}$.

(d) $R_4 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

(e) $R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

(f) $R_6 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$.

4. Indique quais das relações definidas no exercício anterior são reflexivas, simétricas, anti-simétricas ou transitivas.

5. (a) Quantas relações distintas existem no conjunto $\{0,1\}$?

(b) Quantas dessas relações contém o par $(0,1)$?

(c) Para cada uma delas diga se é reflexiva, simétrica, antisimétrica e/ou transitiva.

6. Liste os pares ordenados na relação em $\{1,2,3\}$ correspondentes as seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Das relações definidas no exercício anterior, diga quais as reflexivas, simétricas e/ou transitivas.

$\star$ **8** Seja A um conjunto. Dada uma relação R em A, seja S a relação definida por $xSy \Leftrightarrow (xRy$ e $yRx)$, e T a relação definida por $xTy \Leftrightarrow (xRy$ e $y \not R x)$.

(a) Mostre que S é simétrica e T anti-simétrica.

(b) Prove que $xRy \Leftrightarrow (xSy$ ou $xTy)$.

(c) Mostre que, se R é transitiva, então S e T são também transitivas, mas o inverso não se verifica.

9. Quais das seguintes relações em $\{0,1,2,3\}$ são relações de equivalência?

(a) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
(b) $\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.
(c) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.
(d) $\{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.
(e) $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$.

⋆ **10** Para cada uma das seguintes relações indique quais verificam as 4 principais propriedades: reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade. Justifique.

(a) A relação de primos relativos em $\mathbb{Z}$. (Recorde que $a, b \in \mathbb{Z}$ são primos relativos se e só se $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.)
(b) Divisibilidade em $\mathbb{Z}$.
(c) A relação T em R tal que aTb se e só se $ab \in \mathbb{Q}$.

11. Considera as seguintes relações em $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
R &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \ x \leq 1+2y\} \\
S &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \ x|y\} \\
T &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \ 2|x+y\} \\
U &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \exists d \ (d > 1 \wedge d|x \wedge d|y)\} \\
V &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ : \ \mathrm{mdc}(x,y) = 1\} \cup \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

Verifique quais destas relações são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas. Quais as relações que são de equivalência?

12. Seja R uma relação transitiva e reflexiva num conjunto A. Mostre que a relação $\sim$ definida por $x \sim y \iff x\,R\,y \wedge y\,R\,x$ é uma relação de equivalência.

13. Determine a menor relação de equivalência no conjunto $\{a,b,c,d\}$ que contém a relação $\{(a,b),(a,c),(d,c)\}$.

14. Determina as propriedades das seguintes relações binárias definidas no conjunto dos inteiros positivos. Indica as que são de equivalência e determina o conjunto das classes de equivalência de cada uma delas.

(a) $R_1 = \{(x,y) \mid x + 3y \geq 25\}$
(b) $R_2 = \{(x,y) \mid x \text{ é potência de } y\}$
(c) $R_3 = \{(x,y) \mid \text{os restos da divisão de } x \text{e } y \text{ por 7 são iguais}\}$
(d) $R_4 = \{(x,y) \mid |x - 2y| < 7\} \cup \{(x,y) \mid x > |x-y|\}$
(e) $R_5 = \{(x,y) \mid x \text{ e } y \text{ são potências (positivas) de um mesmo primo ou } x = y\}$

⋆ **15** Mostre que cada uma das seguintes relações $\sim$ é uma relação de equivalência.

(a) Para inteiros positivos a e b, $a \sim b$ se e só se a e b têm exactamente os mesmos factores primos, a menos de repetições. (Por exemplo, $6 = 2 \times 3$ e $432 = 2^4 \times 3^3$ estão relacionados por $\sim$, mas $18 = 2 \times 3^2$ e $10 = 2 \times 5$ não estão.)

(b) Para inteiros a e b, $a \sim b$ se e só se $a + 3b$ é divisível por 4.

(c) Seja S um conjunto e T um subconjunto de S. Para subconjuntos A e B de S, $A \sim B$ se e só se $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq T$.

16. A relação $\sim$ no conjunto de pares de números inteiros é definida por

$$(x, y) \sim (z, w) \iff xw = yz$$

A relação $\sim$ traduz a noção de que dois pares de numerador e denominador inteiros representam os mesmo valor racional. Por exemplo, $(2, 3) \sim (4, 6)$ porque $2/3$ e $4/6$ representam o mesmo número racional.

(a) Escreva em compreensão de forma mais simples os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y) \sim (2, 3)\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x, y) \sim (3, 1)\}$.

(b) Mostre que $\sim$ é reflexiva, transitiva e simétrica, logo é uma relação de equivalência. Quais são as classe de equivalência de $(0, 1)$ e de $(1, 0)$?

(c) Usualmente não se atribui significado a fracções com denominador zero. Modifique a relação $\sim$ de forma a que as classes de equivalência dessas fracções sejam distintas.

17. Para um conjunto A, com $|A| = 5$ quantas relações distintas podemos definir em A. E quantas simétricas?

18. Determina quais das seguintes colecções de conjuntos constituem partições de A. Para as que não são partições explica o que falha da definição.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A_1 = \{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 7\}$.

(b) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $A_1 = \{d, e\}$, $A_2 = \{a, c, d\}$, $A_3 = \{f, h\}$, $A_4 = \{b, g\}$.

19. Considere a seguinte relação definida em $\mathbb{Z}$: $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y_{(\text{mod } 7)}\}$. Mostre que R é uma relação de equivalência. Indice qual a partição induzida por R em $\mathbb{Z}$.

20. Considera a seguinte relação definida em $\mathbb{Z}$ definida por $m \, R \, n$ se e só se $(m \text{ é par } \wedge n = m + 1) \vee (n \text{ é par } \wedge m = n + 1) \vee m = n$. Mostre que R é uma relação de equivalência e determine as suas classes de equivalência.

21. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja R definida em A por $(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2)$ se e só se $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

(a) Verifique que R é uma relação de equivalência em A.

(b) Determine as classes de equivalência $[(1, 3)]$, $[(2, 4)]$ e $[(1, 1)]$.

(c) Determine a partição de A induzida por R.

22. Seja A um conjunto finito não vazio e seja R uma relação binária definida em A. Justifica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) Se R é uma relação de equivalência, então o número de classes de equivalência de R não excede $|A|$.

(b) Se R é de equivalência e $(x, y) \in R$ para algum $(x, y) \in A^2$ com $x \neq y$, então o número de classes de equivalência de R é estritamente inferior a $|A|$.

(c) R é transitiva se e só se $\forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \wedge xRz)$.

(d) Se $\forall x \in A \; (\{y \in A \mid (x, y) \in R\} \neq \emptyset)$ então R é de equivalência.