Lógica

33. Sejam p e q as proposições “Joguei no totoloto” e “Ganhei o *jackpot*”, respectivamente. Exprima cada uma das seguintes proposições compostas como uma frase em Português.

(a) $\neg p$
(b) $p \wedge q$
(c) $\neg p \vee \neg q$
(d) $p \to q$
(e) $q \to p$
(f) $\neg p \to \neg q$

34. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes proposições.

(a) $p \to p$
(b) $\neg(p \to q)$
(c) $\neg q \wedge (p \to q)$
(d) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
(e) $p \to (\neg p \to q)$
(f) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
(g) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
(h) $(p \oplus q) \wedge (p \wedge q)$
(i) $(p \oplus q) \to \neg(p \wedge q)$

35. Usando tabelas de verdade ou álgebra boleana, mostre as seguintes equivalências entre proposições.

(a) $p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$
(b) $\neg p \to q \;\Leftrightarrow\; \neg q \to p$
(c) $p \to (q \to r) \;\Leftrightarrow\; q \to (p \to r)$
(d) $(p \to q) \to p \;\Leftrightarrow\; p$
(e) $(p \vee q) \to r \;\Leftrightarrow\; (p \to r) \wedge (q \to r)$
(f) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; \neg(p \oplus q)$

36. Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia.

37. Mostre que $(p \to q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ não são equivalentes.

38. Atribuindo valores de verdade a p, q e r investigue quantas das disjunções $p \vee \neg q$, $\neg p \vee q$, $q \vee r$, $q \vee \neg r$, $\neg q \vee \neg r$ podem ser simultaneamente verdade.

39. Exprima as proposições seguintes usando conectivas lógicas, quantificadores e comparações e operações aritméticas; considere como universo o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

(a) A soma de dois inteiros negativos é negativa.
(b) A diferença entre dois inteiros negativos não é necessariamente negativa.
(c) A soma de dos quadrados de dois inteiros é maior ou igual ao quadrado da sua soma.
(d) O módulo do produto de dois inteiros é igual ao produto dos seus módulos.

40. Traduza cada uma das seguintes proposições por uma frase em Português; considere como universo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

(a) $\exists x \, \forall y \, (x + y = y)$
(b) $\forall x \, \forall y \, (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \to (x - y > 0))$

(c) $\exists x\, \exists y\, (((x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \rightarrow (x - y > 0))$

(d) $\forall x\, \forall y\, (((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \leftrightarrow (x \times y \neq 0))$

41. Determine o valor de verdade da proposição $\forall x\, \exists y\, (x \times y = 1)$, considerando os universos seguintes.

(a) o conjunto $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dos inteiros diferentes de zero.

(b) o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dos números reais diferentes de zero.

(c) o conjunto $\mathbb{R}^+$ dos números reais positivos.

42. Escreva cada uma das proposições seguintes de forma a que as negações só apareçam sobre predicados (ou seja, nenhuma negação esteja sobre um quantificador ou uma expressão envolvendo conectivas).

(a) $\neg \exists y\, \exists x\, P(x, y)$

(b) $\neg \forall x\, \exists y\, P(x, y)$

(c) $\neg \exists y\, (Q(y) \wedge \forall x\, \neg R(x, y))$

(d) $\neg \exists y\, (\exists x\, R(x, y) \vee \forall x\, S(x, y))$

(e) $\neg \exists y\, (\forall x\, \exists z\, T(x, y, z) \vee \exists x\, \forall z\, U(x, y, z))$

$\star$ **43** Formule cada uma das seguintes afirmações como uma única proposição ou predicado, usando apenas notação matemática e lógica. Ou seja, é permitido o uso de quantificadores e conectivas lógicas, operações aritméticas, de teoria de conjuntos e de teoria dos números, assim como os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc., mas não o uso da linguagem natural.

(a) Qualquer inteiro maior do que 5 pode ser escrito como soma de um múltiplo de 2 e de um múltiplo de 3.

(b) Qualquer inteiro múltiplo de 4 pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos.

(c) Existe um número natural entre 100 e 130 que é um número primo.

(d) Existe uma infinidade de números primos.

(e) Dois inteiros são primos relativos se e só se qualquer inteiro pode ser escrito como a sua combinação linear.

(f) O princípio de indução.

(g) Conjectura de Goldbach. (“ Qualquer inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos.”)

$\star$ **44** Escreva a negação de cada uma das afirmações lógicas definidas no exercício anterior, de forma a que o símbolo $\neg$ não apareça nas afirmações. (Ou seja, eliminando os quantificadores negados e as fórmulas compostas, e substituindo afirmações como $\neg(a|b)$ por afirmações como $a \nmid b$.) Escreva as afirmações obtidas em Português.

$\star$ **45** Sejam p, q e r proposições lógicas. Qual das seguintes afirmações são tautologias, quais são contradições e quais não são nenhuma das duas? Para cada uma das fórmulas que pensem não ser uma tautologia ou uma contradição, indiquem uma atribuição de valores que torna a fórmula verdadeira e outra que torna a fórmula falsa.

(a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$

(c) $((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

(d) $)(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

⋆ **46** Quais das seguintes afirmações são válidas? Demonstre.

(a) $(p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

(b) $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$

(c) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

⋆ **47** Conjuntos de conectivas

(a) Mostre que as conectivas lógicas $\{\neg, \vee\}$ são um conjunto universal. Ou seja, proposições da forma $p \to q$, $p \leftrightarrow q$, e $p \wedge q$ podem ser escritas usando apenas as conectivas $\neg$ e $\vee$.

(b) Mostre que $\neg$, $\oplus$ não são definem um conjunto universal.

(c) Defina uma nova conectiva $\overline{\wedge}$ da seguinte forma:

p	q	$p \overline{\wedge} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Mostre que as proposições $\neg p$, $p \wedge q$, e $p \vee q$ podem ser escritas usando apenas a conectiva $\overline{\wedge}$. Conclua que $\overline{\wedge}$ é universal.

48. Use regras de inferência lógica e as hipóteses "O João trabalha arduamente", "Se o João trabalha arduamente então recebe um aumento" e "Se o João for aumentado, então compra um carro novo" para mostrar a conclusão "O João compra um carro novo".

49. Usando regras de inferência lógica, construa uma prova da conclusão "Choveu" apartir das hipóteses "Se não chover ou se não houver nevoeiro, então a competição de vela vai decorrer e a demonstração de salvamento vai ser efectuada", "Se a competição de vela decorrer então o troféu vai ser atribuído" e "O troféu não foi atribuído".

50. Alguns dos seguintes argumentos são válidos e outros não. Use símbolos para escrever a forma lógica de cada um deles. Se o argumento for válido, identifique a regra de inferência.

(a) Se o Luís resolver correctamente os exercícios, vai viajar para os Açores. O Luís vai viajar para os Açores. Logo, o Luís resolveu correctamente os exercícios.

(b) Se x é maior do que 2, então o seu quadrado é maior do que 4. O número x não é maior do que 2. Logo, o quadrado de x não é maior do que 4.

(c) Se o programa P está correcto, então executando P com o exemplo obtemos o resultado correcto. Executando P com o exemplo obtemos o resultado correcto. Logo, o programa P está correcto.

(d) Se eu for ao cinema, não resolvo os exercícios. Se eu não resolver os exercícios vou reprovar a matemática. Logo, se eu for ao cinema vou reprovar a matemática.

51. Use as regras de inferência estudadas na aula teórica para completar os seguintes argumentos de forma a que sejam válidos.

(a) Se a matemática é difícil, então o Pai Natal existe. O Pai Natal não existe. Logo...

(b) Se a matemática é difícil, então o Pai Natal existe. A matemática é difícil. Logo...

52. Faça corresponder a cada uma das seguintes tautologias um dos argumentos lógicos.

Tautologias

(1) $p \vee \neg p$

(2) $p \wedge q \rightarrow p$

(3) $p \rightarrow p \vee q$

(4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(5) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$

(6) $(((p \vee q) \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow r$

Argumentos

(a) Se x é um número real tal que $0 \leq x \leq 1$, então $x \leq 1$.

(b) Seja n um natural tal que n é divisível por 3. Logo, n é divisível por 2 ou n é divisível por 3.

(c) O João obtém frequência se fizer o trabalho em C ou em Java. O João fez o trabalho em C. Logo o João obteve frequência.

(d) Seja x um número real; temos $x < 0$ ou $x \geq 0$.

(e) Seja n inteiro; se n é divisível por 4 então n é divisível por 2. Logo, se n não é divisível por 2, então não é divisível por 4.

(f) Seja n inteiro; se n é par, então $n^2 - n = (n-1)n$ é par; se n é ímpar, então $n^2 - n = (n-1)n$ é par. Logo, $n^2 - n$ é sempre par.

⋆ **53** Dada

$$(t \rightarrow (r \vee p)) \rightarrow ((\neg r \vee k) \wedge \neg k).$$

Mostre que implica $\neg r$. Escreva uma prova usando regras de inferência. Crie regras de inferência a partir de tautologias se necessário.

54. Complete o seguinte argumento com uma conclusão válida e indique as regras de inferência usadas.

Para obter frequência, o João tem de fazer o trabalho prático e ir às aulas. Se o João obtiver frequência e estudar, então tem aprovação no exame. O João fez o trabalho prático e foi às aulas, mas não teve aprovação no exame. Logo...

55. Determine a forma normal disjuntiva da proposição $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.

56. Mostre que:

(a) Se $p \rightarrow (q \vee r)$, $q \rightarrow s$ e $r \rightarrow t$, então $p \rightarrow (s \vee t)$.

(b) Se $p \rightarrow (q \wedge r)$, $q \vee s \rightarrow t$ e $p \vee s$, então t.

57. Mostre que:

(a) das hipóteses $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall x\,P(x)$ podemos concluir $\forall x\,Q(x)$;

(b) das hipóteses $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall x\,P(x)$ podemos concluir $\exists x\,Q(x)$.

Será que de $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists x\,P(x)$ podemos concluir $\exists x\,Q(x)$? Justifique.

58. Construa provas para os seguintes argumentos:

(a) De $\forall x\,\forall y\,\forall z(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ e $\forall x\,\neg xRx$ concluimos $\forall x\,\forall y\,(xRy \rightarrow \neg yRx)$;

(b) De $\forall x\,\forall y\,(xRy \rightarrow \neg yRx)$ concluimos $\forall x\,\neg xRx$;

(c) De $\forall x\,\forall y\,(xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg yRx)$ concluimos $\forall x\,\forall y\,(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$.

Leis da álgebra boleana

$a \wedge 0 = 0$	elemento absorvente $\wedge$
$a \vee 1 = 1$	elemento absorvente $\vee$
$a \wedge 1 = a$	elemento neutro $\wedge$
$a \vee 0 = a$	elemento neutro $\vee$
$a \wedge \neg a = 0$	elemento complementar $\wedge$
$a \vee \neg a = 1$	elemento complementar $\vee$
$a \wedge a = a$	idempotência $\wedge$
$a \vee a = a$	idempotência $\vee$
$a \wedge b = b \wedge a$	comutatividade $\wedge$
$a \vee b = b \vee a$	comutatividade $\vee$
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	associatividade $\wedge$
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	associatividade $\vee$
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	distributividade $\wedge, \vee$
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	distributividade $\vee, \wedge$
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	lei de DeMorgan
$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$	lei de DeMorgan
$\neg(\neg a) = a$	dupla negação

Equivalências

$a \to b \Leftrightarrow \neg a \vee b$	implicação
$a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$	contraposição
$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \to b) \wedge (b \to a)$	dupla implicação
$a \oplus b \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$	ou-exclusivo
$\neg \forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$	
$\neg \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$	