Estruturas Discretas - Lógica

2019/2020

Fundamentos de Lógica

Lógica Matemática:

Fundamentos de Lógica

Lógica Matemática:

- formalização precisa de conceitos e propriedades/proposições;

Fundamentos de Lógica

Lógica Matemática:

- formalização precisa de conceitos e propriedades/proposições;
- justificação da correção de provas (inferências de novas proposições a partir de um conjunto de proposições);

Fundamentos de Lógica

Lógica Matemática:

- formalização precisa de conceitos e propriedades/proposições;
- justificação da correção de provas (inferências de novas proposições a partir de um conjunto de proposições);
- para fins diversos podem usar-se lógicas diferentes.

Fundamentos de Lógica

Lógica Matemática:

- formalização precisa de conceitos e propriedades/proposições;
- justificação da correção de provas (inferências de novas proposições a partir de um conjunto de proposições);
- para fins diversos podem usar-se lógicas diferentes.

Algumas aplicações em CC:

- Desenho de circuitos digitais.
- Expressar condições em programas.
- 'Queries' a bases de dados e motores de pesquisa.

Cálculo Proposicional (CP)

O *Cálculo Proposicional* formaliza o raciocínio lógico atribuindo uma semântica às *conectivas booleanas*.

- Afirmações primitivas são representadas por variáveis proposicionais $p, q, r, s, t, \ldots$ e podem ser verdadeiras ou falsas.
- Os dois valores de verdade são respectivamente representados por **v** e **f**.

Cálculo Proposicional (CP)

O *Cálculo Proposicional* formaliza o raciocínio lógico atribuindo uma semântica às *conectivas booleanas*.

- Afirmações primitivas são representadas por variáveis proposicionais $p, q, r, s, t, \ldots$ e podem ser verdadeiras ou falsas.
- Os dois valores de verdade são respectivamente representados por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{f}$. Em alternativa usa-se também 1 e 0, e ainda $\top$ e $\bot$.
- As fórmulas do CP são construídas a partir das variáveis proposicionais usando conectivas.

Conectivas lógicas

$\neg P$	não P	NEGAÇÃO
$P \wedge Q$	P e Q	CONJUNÇÃO
$P \vee Q$	P ou Q	DISJUNÇÃO
$P \oplus Q$	ou P ou Q	DISJUNÇÃO EXCLUSIVA
$P \rightarrow Q$	se P então Q	IMPLICAÇÃO
$P \leftrightarrow Q$	P se e só se Q	EQUIVALÊNCIA

Conectivas lógicas

$\neg P$	não P	NEGAÇÃO
$P \wedge Q$	P e Q	CONJUNÇÃO
$P \vee Q$	P ou Q	DISJUNÇÃO
$P \oplus Q$	ou P ou Q	DISJUNÇÃO EXCLUSIVA
$P \rightarrow Q$	se P então Q	IMPLICAÇÃO
$P \leftrightarrow Q$	P se e só se Q	EQUIVALÊNCIA

Os símbolos $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ chamam-se conectivas lógicas.

As conectivas lógicas permitem-nos obter proposições/fórmulas partindo de proposições/fórmulas mais pequenas.

O valor de verdade de uma proposição/fórmula depende do valor de verdade das suas componentes.

Negação (Não P): $\neg P$

Dada uma proposição P, a *negação* de P é a proposição "P é falso".

Negação (Não P): $\neg P$

Dada uma proposição P, a *negação* de P é a proposição "P é falso".

É verdade se P é falso, e é falso se P é verdade

Negação (Não P): $\neg P$

Dada uma proposição P, a *negação* de P é a proposição "P é falso".
É verdade se P é falso, e é falso se P é verdade

P	$\neg P$
v	**f**
f	**v**

Negação (Não P): $\neg P$

Dada uma proposição P, a *negação* de P é a proposição "P é falso".
É verdade se P é falso, e é falso se P é verdade

P	$\neg P$
v	**f**
f	**v**

Exemplos:

- $\neg(5 < 10) \Leftrightarrow$?
- $\neg$("O Porto é a maior cidade de Portugal") $\Leftrightarrow$?

Negação (Não P): $\neg P$

Dada uma proposição P, a *negação* de P é a proposição "P é falso".
É verdade se P é falso, e é falso se P é verdade

P	$\neg P$
v	**f**
f	**v**

Exemplos:

- $\neg(5 < 10) \Leftrightarrow$?
- $\neg$("O Porto é a maior cidade de Portugal") $\Leftrightarrow$?

Dupla negação:

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
v	**f**	**v**
f	**v**	**f**

Conjunção (P e Q): $P \wedge Q$

Verdade se **ambos** P e Q são verdade

Conjunção (P e Q): $P \wedge Q$

Verdade se **ambos** P e Q são verdade

P	Q	$P \wedge Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**f**

Conjunção (P e Q): $P \wedge Q$

Verdade se **ambos** P e Q são verdade

P	Q	$P \wedge Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**f**

Exemplos:

- $(5 < 10) \wedge (5 > 10) \Leftrightarrow ?$

Disjunção (P ou Q): $P \vee Q$

Verdade se ou P ou Q (ou ambos) são verdade

Disjunção (P ou Q): $P \vee Q$

Verdade se ou P ou Q (ou ambos) são verdade

P	Q	$P \vee Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**v**
f	**v**	**v**
f	**f**	**f**

Disjunção (P ou Q): $P \vee Q$

Verdade se ou P ou Q (ou ambos) são verdade

P	Q	$P \vee Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**v**
f	**v**	**v**
f	**f**	**f**

Exemplos:

- $(5 < 10) \vee (10 \leq 5) \Leftrightarrow$?

Ou exclusivo (P ou Q): $P \oplus Q$

Verdade se ou P ou Q são verdade (mas não ambos)

Ou exclusivo (P ou Q): $P \oplus Q$

Verdade se ou P ou Q são verdade (mas não ambos)

P	Q	$P \oplus Q$
v	**v**	**f**
v	**f**	**v**
f	**v**	**v**
f	**f**	**f**

Ou exclusivo (P ou Q): $P \oplus Q$

Verdade se ou P ou Q são verdade (mas não ambos)

P	Q	$P \oplus Q$
v	**v**	**f**
v	**f**	**v**
f	**v**	**v**
f	**f**	**f**

Exemplos:

- $(5 < 10) \oplus (5 < 8) \Leftrightarrow$?

Implicação (se P então Q): $P \to Q$

Verdade se P falso (falso implica qualquer coisa);

Implicação (se P então Q): $P \to Q$

Verdade se P falso (falso implica qualquer coisa); verdade se Q verdade (tudo implica verdade);

Implicação (se P então Q): $P \to Q$

Verdade se P falso (falso implica qualquer coisa); verdade se Q verdade (tudo implica verdade); senão falso

Implicação (se P então Q): $P \to Q$

Verdade se P falso (falso implica qualquer coisa); verdade se Q verdade (tudo implica verdade); senão falso

P	Q	$P \to Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**v**
f	**f**	**v**

Implicação (se P então Q): $P \to Q$

Verdade se P falso (falso implica qualquer coisa); verdade se Q verdade (tudo implica verdade); senão falso

P	Q	$P \to Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**v**
f	**f**	**v**

Exemplos:

- $(5 < 10) \to (2 * 3 = 5) \Leftrightarrow ?$
- $(2 * 3 = 5) \to (5 < 10) \Leftrightarrow ?$
- $(2 * 3 = 5) \to (5 > 10) \Leftrightarrow ?$

$P \rightarrow Q$

P implica Q	Q é implicado por P
se P então Q	Q se P
P é mais forte do que Q	Q é mais fraco do que P
P é suficiente para Q	Q é necessário para P

$P \rightarrow Q$

P implica Q	Q é implicado por P
se P então Q	Q se P
P é mais forte do que Q	Q é mais fraco do que P
P é suficiente para Q	Q é necessário para P

Equivalência (P se e só se Q): $P \leftrightarrow Q$

Verdade se P e Q tem o mesmo valor boleano; caso contrário é falso

Equivalência (P se e só se Q): $P \leftrightarrow Q$

Verdade se P e Q tem o mesmo valor boleano; caso contrário é falso

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**v**

Equivalência (P se e só se Q): $P \leftrightarrow Q$

Verdade se P e Q tem o mesmo valor boleano; caso contrário é falso

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
v	**v**	**v**
v	**f**	**f**
f	**v**	**f**
f	**f**	**v**

Exemplos:

- $(5 < 10) \leftrightarrow (10 < 5) \Leftrightarrow$?
- $(2 * 3 = 5) \leftrightarrow (6 = 6) \Leftrightarrow$?
- $(2 * 3 = 5) \leftrightarrow (5 > 10) \Leftrightarrow$?

$P \to Q$

Verdade quando P é falso ou Q é verdade.

$P \to Q$

Verdade quando P é falso ou Q é verdade.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \lor Q$
v	**v**	**f**	**v**
v	**f**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**
f	**f**	**v**	**v**

$P \to Q$

Verdade quando P é falso ou Q é verdade.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \lor Q$
v	**v**	**f**	**v**
v	**f**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**
f	**f**	**v**	**v**

Logo,

a proposição $\neg P \lor Q$ é equivalente a $P \to Q$.

$P \to Q$

Verdade quando P é falso ou Q é verdade.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
v	**v**	**f**	**v**
v	**f**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**
f	**f**	**v**	**v**

Logo,

a proposição $\neg P \vee Q$ é equivalente a $P \to Q$.

Note-se que $P \to Q$ é falso quando P é verdade e Q é falso,

$P \to Q$

Verdade quando P é falso ou Q é verdade.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
v	**v**	**f**	**v**
v	**f**	**f**	**f**
f	**v**	**v**	**v**
f	**f**	**v**	**v**

Logo,

a proposição $\neg P \vee Q$ é equivalente a $P \to Q$.

Note-se que $P \to Q$ é falso quando P é verdade e Q é falso, logo

a proposição $\neg(P \to Q)$ é equivalente a $P \wedge \neg Q$.

(verificar com uma tabela de verdade)

Contrário, Inverso e Contrapositivo de $P \to Q$

- Contrário: $Q \to P$

Contrário, Inverso e Contrapositivo de $P \to Q$

- Contrário: $Q \to P$
- Inverso: $\neg P \to \neg Q$

Contrário, Inverso e Contrapositivo de $P \to Q$

- Contrário: $Q \to P$
- Inverso: $\neg P \to \neg Q$
- Contrapositivo: $\neg Q \to \neg P$

Contrário, Inverso e Contrapositivo de $P \to Q$

- Contrário: $Q \to P$
- Inverso: $\neg P \to \neg Q$
- Contrapositivo: $\neg Q \to \neg P$

Questão: Um dos três tem o mesmo significado de $P \to Q$. Qual?

Contrário, Inverso e Contrapositivo de $P \to Q$

- Contrário: $Q \to P$
- Inverso: $\neg P \to \neg Q$
- Contrapositivo: $\neg Q \to \neg P$

Questão: Um dos três tem o mesmo significado de $P \to Q$. Qual?

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$\neg P \to \neg Q$	$\neg Q \to \neg P$
v	**v**	**f**	**f**	**v**			
v	**f**	**f**	**v**	**f**			
f	**v**	**v**	**f**	**v**			
f	**f**	**v**	**v**	**v**			

Tautologias e Contradições

Definição: Uma expressão lógica é uma *tautologia* se é verdadeira quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Tautologias e Contradições

Definição: Uma expressão lógica é uma *tautologia* se é verdadeira quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Definição: Uma expressão lógica é uma *contradição* se é falsa quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Tautologias e Contradições

Definição: Uma expressão lógica é uma *tautologia* se é verdadeira quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Definição: Uma expressão lógica é uma *contradição* se é falsa quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Se P é uma tautologia, então $\neg P$ é uma contradição e vice-versa.

Tautologias e Contradições

Definição: Uma expressão lógica é uma *tautologia* se é verdadeira quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Definição: Uma expressão lógica é uma *contradição* se é falsa quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Se P é uma tautologia, então $\neg P$ é uma contradição e vice-versa.

Uma expressão que pode ser verdadeira (dependendo dos valores de verdade dos seus termos) é chamada *satisfazível*.

Tautologias e Contradições

Definição: Uma expressão lógica é uma *tautologia* se é verdadeira quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Definição: Uma expressão lógica é uma *contradição* se é falsa quaisquer que sejam os valores de verdade dos seus termos.

Se P é uma tautologia, então $\neg P$ é uma contradição e vice-versa.

Uma expressão que pode ser verdadeira (dependendo dos valores de verdade dos seus termos) é chamada *satisfazível*.

Exemplo: $P \vee \neg P$ é uma tautologia e também satisfazível, enquanto $P \wedge \neg P$ é uma contradição.

Exemplos:

Exercício: Será possível satisfazer simultaneamente as instruções seguintes?

- Se caminhar em silêncio, então não tenha um revólver carregado ou use óculos escuros.
- Se tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio ou não use óculos escuros.
- Se usar óculos escuros ou tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio.
- Caminhe em silêncio ou tenha um revólver carregado, e se tiver um revólver carregado então não caminhe em silêncio.

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Exemplos:

$$P \to Q \qquad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee Q$$

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Exemplos:

$$\begin{array}{lcl} P \rightarrow Q & \Leftrightarrow & \neg P \vee Q \\ \neg(P \rightarrow Q) & \Leftrightarrow & P \wedge \neg Q \end{array}$$

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Exemplos:

$$\begin{array}{lcl} P \to Q & \Leftrightarrow & \neg P \vee Q \\ \neg(P \to Q) & \Leftrightarrow & P \wedge \neg Q \\ P \to Q & \Leftrightarrow & \neg Q \to \neg P \end{array}$$

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Exemplos:

$$\begin{array}{lcl} P \rightarrow Q & \Leftrightarrow & \neg P \vee Q \\ \neg(P \rightarrow Q) & \Leftrightarrow & P \wedge \neg Q \\ P \rightarrow Q & \Leftrightarrow & \neg Q \rightarrow \neg P \\ \neg\neg P & \Leftrightarrow & P \end{array}$$

Equivalência lógica

Definição: Duas proposições P_1 e P_2 são *logicamente equivalentes* e escrevemos $P_1 \Leftrightarrow P_2$, quando P_1 é verdadeira (respectivamente falsa) se e só se P_2 é verdadeira (respectivamente falsa).

$P_1 \Leftrightarrow P_2$ se e só se $P_1 \leftrightarrow P_2$ é uma tautologia.

Exemplos:

$$\begin{array}{lcl} P \rightarrow Q & \Leftrightarrow & \neg P \vee Q \\ \neg(P \rightarrow Q) & \Leftrightarrow & P \wedge \neg Q \\ P \rightarrow Q & \Leftrightarrow & \neg Q \rightarrow \neg P \\ \neg\neg P & \Leftrightarrow & P \end{array}$$

Podemos usar equivalência lógica para simplificar expressões lógicas.

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associatividade	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associatividade	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Distributividade	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associatividade	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Distributividade	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
De Morgan's	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associatividade	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Distributividade	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
De Morgan's	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
Taut./contr.	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

Leis de equivalência

Identidade	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
E. absorvente	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Dupla negação	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
Comutatividade	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Associatividade	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
Distributividade	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
De Morgan's	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
Taut./contr.	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$ $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$
Impl./Equiv.	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Equivalência lógica - Leis de DeMorgan

- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
v	**v**	**f**	**f**			
v	**f**	**f**	**v**			
f	**v**	**v**	**f**			
f	**f**	**v**	**v**			

Equivalência lógica - Leis de DeMorgan

- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
v	**v**	**f**	**f**			
v	**f**	**f**	**v**			
f	**v**	**v**	**f**			
f	**f**	**v**	**v**			

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
v	**v**	**f**	**f**			
v	**f**	**f**	**v**			
f	**v**	**v**	**f**			
f	**f**	**v**	**v**			

Exercício:

Para cada um dos pares de fórmulas seguintes, justifique se são ou não equivalentes. Se não forem escolha valores lógicos para as variáveis envolvidas que tornam uma fórmula verdadeira e a outra falsa. Se forem equivalentes, mostre a equivalência por manipulação algébrica.

1. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad$ e $\quad (p \wedge q) \rightarrow r$;
2. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \quad$ e $\quad p \rightarrow (q \wedge r)$.

Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- As fórmulas da lógica de primeira ordem permitem formalizar noções matemáticas (e não só) mais complexas.

Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- As fórmulas da lógica de primeira ordem permitem formalizar noções matemáticas (e não só) mais complexas.
- As fórmulas podem conter variáveis $x, y, z, \ldots$ que são interpretadas, símbolos para funções $f, g, h, \ldots$ e símbolos para relações/predicados $P, Q, S, \ldots$.

Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- As fórmulas da lógica de primeira ordem permitem formalizar noções matemáticas (e não só) mais complexas.
- As fórmulas podem conter variáveis $x, y, z, \ldots$ que são interpretadas, símbolos para funções $f, g, h, \ldots$ e símbolos para relações/predicados $P, Q, S, \ldots$.
- Podem ainda conter os quantificadores $\forall$ e $\exists$.

Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- As fórmulas da lógica de primeira ordem permitem formalizar noções matemáticas (e não só) mais complexas.
- As fórmulas podem conter variáveis $x, y, z, \ldots$ que são interpretadas, símbolos para funções $f, g, h, \ldots$ e símbolos para relações/predicados $P, Q, S, \ldots$.
- Podem ainda conter os quantificadores $\forall$ e $\exists$.
- As fórmulas são interpretadas num domínio, a que corresponde um universo onde as variáveis tomam os seus valores e interpretações para os símbolos para funções e predicados.

Lógica de Primeira Ordem

Exemplo: $\varphi = \forall x P(x)$

- Se o universo for $\mathbb{N}$ e $P(x)$ representar a propriedade $x \geq 0$, então φ tem o valor lógico **v**.

Lógica de Primeira Ordem

Exemplo: $\varphi = \forall x P(x)$

- Se o universo for $\mathbb{N}$ e $P(x)$ representar a propriedade $x \geq 0$, então φ tem o valor lógico **v**.
- Se o universo for $\mathbb{Z}$ e $P(x)$ representar a propriedade $x \geq 0$, então φ tem o valor lógico **f**.

Lógica de Primeira Ordem

Exemplo: $\varphi = \forall x P(x)$

- Se o universo for $\mathbb{N}$ e $P(x)$ representar a propriedade $x \geq 0$, então φ tem o valor lógico **v**.
- Se o universo for $\mathbb{Z}$ e $P(x)$ representar a propriedade $x \geq 0$, então φ tem o valor lógico **f**.

Para fixar o domínio em que uma fórmula deve ser interpretada podemos incluir a interpretação dos símbolos na própria fórmula, escrevendo por exemplo:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ x \geq 0$$

ou

$$\forall x \in \mathbb{Z}\ x \geq 0$$

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

- $\forall x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo $x \in A$.

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

- $\forall x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Para todo $x \in A$, $P(x)$".

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

- $\forall x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Para todo $x \in A$, $P(x)$".
- $\exists x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para pelo menos um $x \in A$.

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

- $\forall x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Para todo $x \in A$, $P(x)$".
- $\exists x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para pelo menos um $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Existe $x \in A$, tal que $P(x)$".

Quantificadores

Seja $P(x)$ um predicado em x, com $x \in A$. Podemos estabelecer as seguintes proposições:

- $\forall x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Para todo $x \in A$, $P(x)$".
- $\exists x \in A.\ P(x)$, é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para pelo menos um $x \in A$. Esta proposição pode ser lida como "Existe $x \in A$, tal que $P(x)$".

Quando for claro qual o universo, este pode ser omitido das proposições.

Exemplos

Seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, conjunto dos números reais e $P(x, y) : x \cdot y = 0$.

Exemplos

Seja $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, conjunto dos números reais e $P(x, y) : x \cdot y = 0$.
Qual das seguintes proposições é falsa?

1. $\forall x \forall y . P(x, y)$.
2. $\forall x \exists y . P(x, y)$.
3. $\exists x \forall y . P(x, y)$.
4. $\exists x \exists y . P(x, y)$.

Cuidado com a comutatividade

Quais das seguintes equivalências são válidas:

$$\left[\forall x \in A\ \forall y \in B . P(x, y)\right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B\ \forall x \in A . P(x, y)\right]$$

Cuidado com a comutatividade

Quais das seguintes equivalências são válidas:

$$\left[\forall x \in A\ \forall y \in B . P(x, y)\right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B\ \forall x \in A . P(x, y)\right]$$

Válida!!!

Cuidado com a comutatividade

Quais das seguintes equivalências são válidas:

$$\left[\forall x \in A\ \forall y \in B . P(x,y)\right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B\ \forall x \in A . P(x,y)\right]$$

Válida!!!

$$\left[\forall x \in A\ \exists y \in B . P(x,y)\right] \Leftrightarrow \left[\exists y \in B\ \forall x \in A . P(x,y)\right]$$

Cuidado com a comutatividade

Quais das seguintes equivalências são válidas:

$$\left[\forall x \in A\ \forall y \in B . P(x, y)\right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B\ \forall x \in A . P(x, y)\right]$$

Válida!!!

$$\left[\forall x \in A\ \exists y \in B . P(x, y)\right] \Leftrightarrow \left[\exists y \in B\ \forall x \in A . P(x, y)\right]$$

Não Válida!!!

Cuidado com a comutatividade

Quais das seguintes equivalências são válidas:

$$\left[\forall x \in A\ \forall y \in B . P(x,y)\right] \Leftrightarrow \left[\forall y \in B\ \forall x \in A . P(x,y)\right]$$

Válida!!!

$$\left[\forall x \in A\ \exists y \in B . P(x,y)\right] \Leftrightarrow \left[\exists y \in B\ \forall x \in A . P(x,y)\right]$$

Não Válida!!!

Exemplo:

$$\left[\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z}\ m > n\right] \not\Leftrightarrow \left[\exists m \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{Z}\ m > n\right]$$

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg \forall x \in A . P(x)$$

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg \forall x \in A . P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A . \neg P(x)$$

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg \forall x \in A. P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A. \neg P(x)$$

$$\neg \exists x \in A. P(x)$$

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg \forall x \in A . P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A . \neg P(x)$$

$$\neg \exists x \in A . P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A . \neg P(x)$$

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg\forall x \in A.P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A.\neg P(x)$$

$$\neg\exists x \in A.P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A.\neg P(x)$$

Vários quantificadores: lidos da esquerda para a direita!

Negação de proposições com quantificadores

$$\neg\forall x \in A.P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in A.\neg P(x)$$

$$\neg\exists x \in A.P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in A.\neg P(x)$$

Vários quantificadores: lidos da esquerda para a direita!

$$\neg\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists m \in \mathbb{Z}\ m > n \quad \Leftrightarrow \quad ?$$

Regras de inferência

Qualquer tautologia da forma $A \to B$ pode ser usada para construir uma regra de inferência da forma $A \Rightarrow B$.

Regras de inferência

Qualquer tautologia da forma $A \rightarrow B$ pode ser usada para construir uma regra de inferência da forma $A \Rightarrow B$.

De uma forma geral, uma regra de inferência tem a seguinte forma:

Regras de inferência

Qualquer tautologia da forma $A \to B$ pode ser usada para construir uma regra de inferência da forma $A \Rightarrow B$.

De uma forma geral, uma regra de inferência tem a seguinte forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \Rightarrow Q$$

onde $\mathbf{P_i}$ são chamadas as hipóteses (ou premissas) e $\mathbf{Q}$ é a conclusão.

Regras de inferência

Qualquer tautologia da forma $A \rightarrow B$ pode ser usada para construir uma regra de inferência da forma $A \Rightarrow B$.

De uma forma geral, uma regra de inferência tem a seguinte forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

onde $\mathbf{P_i}$ são chamadas as hipóteses (ou premissas) e $\mathbf{Q}$ é a conclusão.
Notação alternativa:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

Exemplo: *modus ponens*

Com base na tautologia

$$P \wedge (P \to Q) \to Q$$

Exemplo: *modus ponens*

Com base na tautologia

$$P \wedge (P \to Q) \to Q$$

ou

$$\begin{array}{c} P \\ P \to Q \\ \hline Q \end{array}$$

Exemplo: *modus ponens*

Com base na tautologia

$$P \wedge (P \to Q) \to Q$$

ou

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ P \to Q \end{array}}{Q}$$

Significa que se P e $P \to Q$ são válidos podemos concluir que Q é válido.

Algumas regras de inferência

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \text{(Adição)}$$

Algumas regras de inferência

$$\frac{P}{P \lor Q} \qquad \text{(Adição)}$$

$$\frac{P \land Q}{P} \qquad \text{(Simplificação)}$$

Algumas regras de inferência

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \text{(Adição)}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{(Simplificação)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \qquad \text{(Conjunção)}$$

Algumas regras de inferência

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \text{(Adição)}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{(Simplificação)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \qquad \text{(Conjunção)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \end{array}}{P \rightarrow R} \qquad \text{(Transitividade)}$$

Provas formais

Para provar que um argumento é válido ou a conclusão pode ser obtida "logicamente" a partir das hipóteses:

Provas formais

Para provar que um argumento é válido ou a conclusão pode ser obtida "logicamente" a partir das hipóteses:

- **Assumimos** que as hipóteses são verdadeiras

Provas formais

Para provar que um argumento é válido ou a conclusão pode ser obtida "logicamente" a partir das hipóteses:

- **Assumimos** que as hipóteses são verdadeiras
- Usamos regras de inferência e equivalências lógicas para determinar se a conclusão é verdadeira.

Mais algumas regras de inferência

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ \neg Q \end{array}}{\neg P} \qquad \text{(Modus Tollens)}$$

Mais algumas regras de inferência

$$\frac{\begin{array}{c} P \to Q \\ \neg Q \end{array}}{\neg P} \qquad \text{(Modus Tollens)}$$

$$\frac{\neg P \to \mathbf{F}}{P} \qquad \text{(Contradição)}$$

Mais algumas regras de inferência

$$\frac{P \to Q \qquad \neg Q}{\neg P} \qquad \text{(Modus Tollens)}$$

$$\frac{\neg P \to \mathbf{F}}{P} \qquad \text{(Contradição)}$$

$$\frac{P \to R \qquad Q \to R}{P \vee Q \to R} \qquad \text{(Prova por casos)}$$

Mais algumas regras de inferência

$$\frac{P \rightarrow Q \qquad \neg Q}{\neg P} \quad \text{(Modus Tollens)}$$

$$\frac{\neg P \rightarrow \mathbf{F}}{P} \quad \text{(Contradição)}$$

$$\frac{P \rightarrow R \qquad Q \rightarrow R}{P \vee Q \rightarrow R} \quad \text{(Prova por casos)}$$

$$\frac{P \rightarrow R \qquad Q \rightarrow S \qquad P \vee Q}{R \vee S} \quad \text{(Dilema construtivo)}$$

Forma Normal Disjuntiva e Conjuntiva

São úteis em demonstração automática de teoremas

Forma Normal Disjuntiva e Conjuntiva

São úteis em demonstração automática de teoremas
Existem algoritmos (eficientes) para determinar a satisfazibilidade de fórmulas em forma normal disjuntiva.

Forma Normal Disjuntiva e Conjuntiva

- São úteis em demonstração automática de teoremas
- Existem algoritmos (eficientes) para determinar a satisfazibilidade de fórmulas em forma normal disjuntiva.
- As *fórmulas de Horn* são um tipo especial de fórmulas normais conjuntivas e estão na base da programação lógica.

Forma Normal Disjuntiva e Conjuntiva

São úteis em demonstração automática de teoremas

Existem algoritmos (eficientes) para determinar a satisfazibilidade de fórmulas em forma normal disjuntiva.

As *fórmulas de Horn* são um tipo especial de fórmulas normais conjuntivas e estão na base da programação lógica.

Uma fórmula está em **forma normal disjuntiva** se é da forma:

$$(\alpha_{11} \wedge \cdots \wedge \alpha_{1k_1}) \vee \cdots \vee (\alpha_{n1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é um literal (uma variável proposicional ou a sua negação).

Método para encontrar uma fórmula equivalente em DNF

Exemplo: encontrar a DNF de $(p \vee q) \to \neg r$.

Método para encontrar uma fórmula equivalente em DNF

Exemplo: encontrar a DNF de $(p \vee q) \to \neg r$.

p	q	r	$(p \vee q) \to \neg r$
f	**f**	**f**	**V**
f	**f**	**v**	**V**
f	**v**	**f**	**V**
f	**v**	**v**	**f**
v	**f**	**f**	**V**
v	**f**	**v**	**f**
v	**v**	**f**	**V**
v	**v**	**v**	**f**

Método para encontrar uma fórmula equivalente em DNF

Exemplo: encontrar a DNF de $(p \vee q) \rightarrow \neg r$.

p	q	r	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
f	**f**	**f**	**V**
f	**f**	**v**	**V**
f	**v**	**f**	**V**
f	**v**	**v**	**f**
v	**f**	**f**	**V**
v	**f**	**v**	**f**
v	**v**	**f**	**V**
v	**v**	**v**	**f**

$(p \vee q) \rightarrow \neg r \Leftrightarrow$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

Forma normal conjuntiva (CNF)

Uma fórmula está em forma normal conjuntiva se é da forma:

$$(\alpha_{11} \vee \cdots \vee \alpha_{1k_1}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{n1} \vee \cdots \vee \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é uma variável proposicional, ou a sua negação.

Forma normal conjuntiva (CNF)

Uma fórmula está em forma normal conjuntiva se é da forma:

$$(\alpha_{11} \vee \cdots \vee \alpha_{1k_1}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{n1} \vee \cdots \vee \alpha_{nk_n})$$

onde cada α_{ij} é uma variável proposicional, ou a sua negação.

Método para encontrar uma fórmula equivalente em CNF:

- Usar as linhas da tabela de verdade em que a proposição é falsa.
- Descrever o valor lógico das variáveis nessa linha.
- Negar estas 'descrições', aplicar as leis de Morgan e formar a conjunção dessas 'descrições' (já transformadas em disjunções).

Exercícios

1. Determine o valor lógico da proposição $\forall x \exists y.(xy = 1)$ sendo o universo a considerar
   1.1 os números reais diferentes de zero.
   1.2 os inteiros diferentes de zero.
   1.3 os números reais positivos.
2. Escreva a seguinte proposição, de forma a que as negações só apareçam em predicados (ou seja, nenhuma negação esteja fora de um quantificador ou de uma expressão envolvendo conectivas).
$$\neg \exists y.(Q(y) \wedge \forall x.\neg R(x, y))$$
3. Determine uma fórmula normal conjuntiva (disjuntiva) equivalente a $(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge \neg p)$.

Formule cada uma das seguintes afirmações através de uma fórmula matemática. Ou seja, é permitido o uso de quantificadores e conectivas lógicas, operações aritméticas, de teoria de conjuntos e de teoria dos números, assim como os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc., mas não o uso da linguagem natural.

- Qualquer inteiro múltiplo de 4 pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos.
- Existe uma infinidade de números primos.
- Dois inteiros são primos relativos se e só se qualquer inteiro pode ser escrito como a sua combinação linear.
- Conjectura de Goldbach. ("Qualquer inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois primos.")

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

d) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
d) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.
e) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \subseteq C$.

1. Prove a validade ou falsidade das seguintes afirmações, sendo A, B e C conjuntos quaisquer. Identifique as regras aplicadas em cada um dos passos das provas que apresentar, escrevendo uma afirmação da forma $x \notin X$ como $\neg(x \in X)$.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.
d) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.
e) Se $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \subseteq C$.
f) Se $A \not\subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \not\subseteq C$.