Relações e funções

1. Sejam R e S relações num conjunto A representadas pelas seguintes matrizes:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a forma matricial as relações $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$ e $S \circ R$.

$\star$ **2** Exemplos de relações:

(a) Encontre relações R e S num conjunto A, tais que $R \circ S = S \circ R$.

(b) Encontre uma relação R num conjunto finito A, tal que $R^n = R^{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}^+$.

3. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ relações em A de definidas por: $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (4, 4)\}$ e $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$. Calcular $\mathcal{RS}, \mathcal{SR}, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3$.

4. Prove que se R é uma relação reflexiva definida em A, então também R^2 é uma relação reflexiva.

5. Mostre que se R é uma relação simétrica, então o seu fecho transitivo R^+ também é uma relação simétrica.

6. Determine o fecho transitivo das seguintes relações em $\{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$.

(b) $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

(c) $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

(d) $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$.

7. Considera as seguintes relações em $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x \leq 1 + 2y\} \\ S &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x|y\} \\ T &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ 2|x + y\} \\ U &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \exists d \ (d > 1 \ \wedge \ d|x \ \wedge \ d|y)\} \\ V &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ \mathrm{mdc}(x, y) = 1\} \cup \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

Verifique quais destas relações são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas. Quais as relações que são de ordem parcial? E de equivalência?

8. Quais dos seguintes elementos são comparáveis na ordem parcial $(\mathbb{Z}^+, |)$?

(a) $5, 15$ (b) $6, 9$ (c) $8, 16$ (d) $7, 7$

9. Desenhe o diagrama de Hasse da relação $\leq$ no conjunto $\{0, 2, 5, 10, 11, 15\}$.

10. Desenhe o diagrama de Hasse da relação de divisibilidade nos seguintes conjuntos:

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

(b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

(c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$.

(d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

11. A relação de *ordem lexicográfica* $\prec$ no conjunto dos pares de números naturais é definida por

$$(x, y) \prec (z, w) \iff x < z \vee (x = z \wedge y \leq w)$$

(a) Escreva em compreensão de forma mais simples os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \prec (2, 3)\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (2, 3) \prec (x, y)\}$.

(b) Mostra que $\prec$ é uma relação de ordem, isto é, é reflexiva, transitiva e anti-simétrica.

12. Seja $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, tal que $a \, R \, b$ se e só se $a - b$ é um número inteiro par e não negativo. Verifique que R define uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$. Será R uma relação de ordem total? Justifique.

$\star$ **13** Sejam R e S relações de equivalência num conjunto A. Indique, justificando, quais das relações seguintes são também relações de equivalência em A. Considere depois que R e S são ordens parciais em A. Indique, justificando, quais das seguintes relações, são ordens parciais em A.

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \circ S$

14. Averigua se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, justificando a sua resposta.

(a) Se $r \subseteq A \times B$ e $s \subseteq B \times C$ são relações binárias não vazias então $rs = s \circ r$ não é vazia.

(b) Se $f \subseteq A \times B$ e $g \subseteq B \times C$ e $fg = g \circ f$ é uma função, então f e g são funções.

(c) Seja $R \subseteq A \times B$; então $RR^{-1} = \mathcal{I}_A$ e $R^{-1}R = \mathcal{I}_B$ se e só se R é uma função bijectiva.

(d) Se $A \neq \emptyset$ é um conjunto finito, então $R \subseteq A \times A$ é uma função se existir pelo menos um 1 em cada linha da matriz de R.

15. Determine se cada uma das seguintes funções é injectiva.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x + 1$

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 5$

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - x$

(e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2^x + 1$

16. Para cada uma das seguintes funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ determine se são injectivas e/ou sobrejectivas. Para as não sobrejectivas determine o seu contra-domínio.

(a) $f(x) = x + 7$

(b) $f(x) = 2x - 3$

(c) $f(x) = -x + 5$

(d) $f(x) = x^2$

(e) $f(x) = x^2 + x$

(f) $f(x) = x^3$

17. Sejam A, A' e B conjuntos tais que $|A| = 5$, $|B| = 4$, $A' \subseteq A$ e $|A'| = 3$. De quantas maneiras distintas é possível estender uma função $g : A' \to B$ a uma função $f : A \to B$?

18. Dê um exemplo de uma função $f : A \to B$ e dois conjuntos $A_1, A_2 \subseteq A$ de tal modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

$\star$ **19** Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que seja:

(a) Nem injectiva, nem sobrejectiva.

(b) Injectiva, mas não sobrejectiva.

(c) Sobrejectiva, mas não injectiva.

(d) Sobrejectiva e injectiva.

$\star$ **20** Para cada um dos seguintes pares de conjuntos, defina uma bijecção entre os dois. Justifique brevemente que a função definida é uma bijecção.

(a) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

(b) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{N}^+$ e $\mathbb{Q}^+$, onde $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{N}^+\}$. (Consideramos nesta questão que dois elementos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^+$, são considerados iguais apenas se $a = c$ e $b = d$).