Newton 法

@shinkwhek

1. 概要

本稿では Newton 法のアルゴリズムの解説と評価を行う．第2章では Newton 法の導出を，第3章では Newton 法のアルゴリズムを， 第4章では Newton 法の性能について考察を与える．

2. 導出

方程式が関数 f によって $f(x) = 0$ と与えられているとする．これに対し，$\varepsilon \ll 1$ を用いて方程式の解を $x = x_0 + \varepsilon$ とおき，x_0 周りでテイラー展開する．

$$\begin{aligned} f(x_0 + \varepsilon) &= 0 \\ &= f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x_0) + \frac{\varepsilon^3}{6} f'''(x_0)... \end{aligned}$$

ε が十分に小さいことから以下のように近似する．

$$\begin{aligned} f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) &\simeq 0 \\ \Rightarrow \varepsilon &\simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

このように得られた ε を $x_0 + \varepsilon$ に代入することで，真の解により近い値 x_1 を得る．

3. アルゴリズム

方程式 $f(x) = 0$ に対し，以下のような漸化式を得る．

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

初期値 x_0 を適切に与え，

$$x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n$$

を得る．

4. 評価

方程式 $f(x)=0$ の真の解を x_∞ とする．$x_n = x_\infty + \varepsilon_n$ とおくと，

$$x_\infty + \varepsilon_{n+1} = x_\infty + \varepsilon_n - \frac{f\left(x_\infty+\varepsilon_n\right)}{f'\left(x_\infty+\varepsilon_n\right)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f\left(x_\infty+\varepsilon_n\right)}{f'\left(x_\infty+\varepsilon_n\right)}$$

このように誤差 ε に関する漸化式を得ることができる．次にこの ε の収束の仕方を調べるために式を簡単にする．右辺 2 項目を分母と分子それぞれで x_∞ 周りでテイラー展開する．

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n - \frac{f\left(x_\infty\right)+\varepsilon_n f'\left(x_\infty\right)+\frac{\varepsilon_n^2}{2}f''\left(x_\infty\right)}{f'\left(x_\infty\right)+\varepsilon_n f''\left(x_\infty\right)+\frac{\varepsilon_n^2}{2}f'''\left(x_\infty\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 f''\left(x_\infty\right)}{f'\left(x_\infty\right)+\varepsilon_n f''\left(x_\infty\right)+\frac{\varepsilon_n^2}{2}f'''\left(x_\infty\right)}\end{aligned}$$

$f'\left(x_\infty\right) \neq 0$ ならば，

$$\varepsilon_{n+1} \simeq \left[\frac{f''\left(x_\infty\right)}{2f'\left(x_\infty\right)}\right]\varepsilon_n^2$$

このように，ε_{n+1} は ε_n^2 に依存して決まる．

また，$f'\left(x_\infty\right)=0$ ならば

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2}$$

となり，ε_{n+1} は ε_n の $\dfrac{1}{2}$ 倍で決まることとなり， これは $f'\left(x_\infty\right) \neq 0$ の場合に比べて収束が遅い．

次に，

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を考える．上と同様に $x_n = x_\infty + \varepsilon_n$ とおき，ε_{n+1} を計算する．このとき $f'(x) = 0$ であることに注意する．

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &\simeq \varepsilon_n - 2\left[\frac{\dfrac{\varepsilon_n^2}{2} f''(x_\infty) + \dfrac{\varepsilon_n^3}{6} f'''(x_\infty)}{\varepsilon_n f''(x_\infty)}\right] \\
&\simeq \frac{1}{\varepsilon_n f''(x_\infty)}\left[\varepsilon_n^2 f''(x_\infty) - \varepsilon_n^2 f''(x_\infty) - \frac{\varepsilon_n^3}{3} f'''(x_\infty)\right] \\
&\simeq \left[-\frac{f'''(x_\infty)}{3f''(x_\infty)}\right]\varepsilon_n^2
\end{aligned}$$

このように，$f'(x) = 0$ の場合でも同等の収束速度が得られる．