Chandrupatla 法

@shinkwhek

1. 概要

Newton 法の問題として，

- 導関数が複雑な場合，準備に手間が掛かる
- 初期値の選択に注意しなければならない
- 場合によって遅くなる（$f'\left(x_\infty\right) = 0$ のとき）

などがある． これに対し，Chandrupatla 法は導関数を求める必要がなく， 誤差収束が常に $\varepsilon^{1.84}$ で，初期値の選択が Newton 法のそれより機械的に行えるといった利点がある．

第2章では Chandrupatla 法の導出を，第3章ではアルゴリズムについて記述する．

以下の議論において，特に断りが無ければ任意の値が取る空間は $\mathbb{R}$ とする．

2. 導出

方程式 $f(x) = 0$ が与えられたとする．x 軸を跨ぐような 3 点 $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\left(x_3,y_3\right)$ を用意する．

Lemma 2.0.1 *異なる 3 点を通る 2 次関数は一意*

Proof :

$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\left(x_3,y_3\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ に対し，2 次方程式 $y_i = a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3, i = 1,2,3$ とおく．これを 1 つにまとめ，

$$
\begin{aligned}
y &= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} a \\
&= Va
\end{aligned}
$$

とおく．$detV \neq 0$ ならば V の逆行列が存在して a は一意． ここで V は Vandermonde's determinant なので，

$$
\begin{aligned}
detV &= \left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 - x_2\right)\left(x_2 - x_1\right) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

QED.

ここでラグランジュの補間公式の逆関数を以下のように与える．

Definition 2.0.2

$$
x(y) := x_3 \frac{\left(y - y_1\right)\left(y - y_2\right)}{\left(y_3 - y_2\right)\left(y_3 - y_2\right)} + x_2 \frac{\left(y - y_1\right)\left(y - y_3\right)}{\left(y_2 - y_1\right)\left(y_2 - y_3\right)} + x_1 \frac{\left(y - y_2\right)\left(y - y_3\right)}{\left(y_1 - y_2\right)\left(y_1 - y_3\right)}
$$

また，ラグランジュの補間公式は以下の性質を満たす．$(i = 1,2,3)$

$$
x\left(y_i\right) = y_i
$$

これを用いて新たな点の x 座標を得る．

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x(y = 0) \\
&= \frac{x_3}{\left(\frac{y_3}{y_1} - 1\right)\left(\frac{y_3}{y_2} - 1\right)} + \frac{x_2}{\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right)\left(\frac{y_2}{y_3} - 1\right)} + \frac{x_1}{\left(\frac{y_1}{y_2} - 1\right)\left(\frac{y_1}{y_3} - 1\right)}
\end{aligned}
$$

3. アルゴリズム

$y_i := f\left(x_i\right)$, $(i \in \mathbb{N})$ とおく．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ に対し，$y_1 < 0 \land y_2 > 0$ であるような点 $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)$ を得る．

(2) $x_3 := \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ とし，点 $\left(x_3, y_3\right)$ を得る．

(3) 点 $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \left(x_3, y_3\right)$ を初期値とする．

(4) 与えられた 3 点 $\left(x_n, y_n\right), \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right), \left(x_{n+2}, y_{n+2}\right)$ に対し，

$$x_{n+3} = \frac{x_{n+2}}{\left(\dfrac{y_{n+2}}{y_n} - 1\right)\left(\dfrac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - 1\right)} + \frac{x_{n+1}}{\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n} - 1\right)\left(\dfrac{y_{n+1}}{y_{n+2}} - 1\right)} + \frac{x_n}{\left(\dfrac{y_n}{y_{n+1}} - 1\right)\left(\dfrac{y_n}{y_{n+2}} - 1\right)}$$

を用いて x_{n+3} を得る．

(5) 3 点 $\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right), \left(x_{n+2}, y_{n+2}\right), \left(x_{n+3}, y_{n+3}\right)$ に対し (4) を再帰的に行う．（つまり n を 1 つずつズラし 3 点を更新してゆく）

4. 例

4.1. $x - e^{-x} = 0$

$$\begin{aligned}
\left(x_1, y_1\right) &= \left(1, 1 - e^{-1}\right) \\
\left(x_2, y_2\right) &= (-1, -1 - e) \\
\left(x_3, y_3\right) &= (0,\text{-}1)
\end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
x_4 &= 0.5771270342 \\
x_5 &= 0.5674140938 \\
x_6 &= 0.5671432725
\end{aligned}$$

4.2. $x - \cos x = 0$

$$\begin{aligned}
\left(x_1, y_1\right) &= (2, 2 - \cos 2) \\
\left(x_2, y_2\right) &= (1, 1 - \cos 1) \\
\left(x_3, y_3\right) &= (1.25, 1.25 - \cos 1.25)
\end{aligned}$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 0.7240472384 \\
x_5 &= 0.7393581343 \\
x_6 &= 0.7390848511 \\
x_7 &= 0.7390851332
\end{aligned}
$$

4.3. $x^6 - x - 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\left(x_1, y_1\right) &= (2, 61) \\
\left(x_2, y_2\right) &= (1, -1) \\
\left(x_3, y_3\right) &= (1.5, 8.890625)
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 1.056426144 \\
x_5 &= 1.160856479 \\
x_6 &= 1.130869905 \\
x_7 &= 1.134801751 \\
x_8 &= 1.134724072 \\
x_9 &= 1.134724138
\end{aligned}
$$