# 2 Sieve Methods

## 2.5 $V$-Partitions and Unimodal Sequences

**重み $n$ の単峰列** ($n$-stack)：次を満たす正整数の列 $d_1 d_2 \cdots d_m$

a. $\sum d_i = n$,

b. $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_j \ge d_{j+1} \ge \cdots \ge d_m$ for some $j$.

重み $n$ の単峰数列の個数を $u(n)$ とする．$u(0) = 0$ とする．$u(n)$ の母関数を

$$\begin{aligned} U(q) &= \sum_{n \ge 0} u(n) q^n \\ &= q + 2q^2 + 4q^3 + 8q^4 + 15q^5 + 27q^6 + \cdots , \end{aligned}$$

とおく．

$[j]! = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)$ とおく．単峰列の最大の項に着目して[*1]

$$U(q) = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{[k-1]!} \cdot q^k \cdot \frac{1}{[k]!} = \sum_{k \ge 1} \frac{q^k}{[k-1]![k]!}.$$

分割数 $p(n)$ の母関数の式

$$\sum_{n \ge 0} p(n) q^n = \prod_{i \ge 1} (1 - q^i)^{-1},$$

に対応する $U(n)$ の式がほしい．そこで，$n$ の分割と重み $n$ の単峰列の中間的なものを考える．

[*1] $\frac{1}{[k-1]!}$ を無くしたものは $p(n)$ の母関数にあたる．

$n$ **の** $V$**-分割**：次の a.，b. を満たす非負整数の並び

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

a. $c + \sum a_i + \sum b_i = n$,

b. $c \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $c \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$.

$n$ の $V$-分割の個数を $v(n)$ とする．$v(0) = 1$ とする．母関数を

$$\begin{aligned} V(q) &= \sum_{n \geq 0} v(n) q^n \\ &= 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 12q^4 + 21q^5 + \cdots , \end{aligned}$$

とおく．このとき

$$V(q) = \sum_{k \geq 0} \frac{q^k}{[k]!^2}.$$

さらに $n$ の**ダブル分割**を次の a.，b. を満たす非負整数の並びとして定義する．

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

a. $\sum a_i + \sum b_i = n$，

b. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$.

$n$ のダブル分割の個数を $d(n)$ とすると，母関数は

$$\sum_{n\geq 0} d(n)q^n = \prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-2}.$$

$n$ の $V$-分割全体の集合を $V_n$，ダブル分割全体の集合を $D_n$ とする．Sieve method により，$\#V_n$ を $\#D_n$ を用いて表したい．

$\Gamma_1 : D_n \to V_n$ を

$$\Gamma_1 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_2 & b_3 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } b_1 > a_1, \end{cases}$$

で定める．$\Gamma_1$ は全射だが，単射にはならない．ちょうど 2 回カウントされる $V$-分割の集合は

$$V_n^1 := \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 \right\}.$$

したがって

$$\#V_n = \#D_n - \#V_n^1.$$

$\#V_n^1$ を数えるため，$\Gamma_2 : D_{n-1} \to V_n^1$ を次で定める．

$$\Gamma_2 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1+1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+1 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} b_1 & a_1+1 & a_2 & \cdots \\ & b_2 & b_3 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+1 < b_1. \end{cases}$$

先ほどと同様に，$\Gamma_2$ は全射だが単射ではなく，

$$V_n^2 = \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 > a_2 \right\},$$

の元を 2 回カウントする．したがって $\#V_n^1 = \#D_{n-1} - \#V_n^2$ であり，

$$\#V_n = \#D_n - \#D_{n-1} + \#V_n^2.$$

同様に，$\Gamma_3 : D_{n-3} \to V_n^2$ を

$$\Gamma_3 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1 + 2 & a_2 + 1 & a_3 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 + 2 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} b_1 & a_1 + 2 & a_2 + 1 & a_3 & \cdots \\ & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 + 2 < b_1, \end{cases}$$

で定めると，これは

$$V_n^3 = \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 > a_2 > a_3 \right\},$$

の元を 2 回カウントする．したがって

$$\#V_n = \#D_n - \#D_{n-1} + \#D_{n-3} - \#V_n^3.$$

このようにして $\Gamma_i : D_{n-\binom{i}{2}} \to V_n^{i-1}$ を構成することを繰り返せば，

$$v(n) = d(n) - d(n-1) + d(n-3) - d(n-6) + \cdots,$$

が得られる（ただし $m < 0$ について $d(m) = 0$ とする）．

**命題 2.5.1.**

$$V(q) = \left( \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} \right) \prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^{-2}.$$

**命題 2.5.2.**

$$U(q) + V(q) = \prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^{-2}.$$

重み $n$ の単峰列全体の集合を $U_n$ とする．$D_n \to U_n \cup V_n$ の全単射を次で構成できる．

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{bmatrix} & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & & & \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 \geq b_1, \\ \cdots a_2 a_1 b_1 b_2 \cdots & \text{if } b_1 > a_1. \end{cases}$$

**系 2.5.3.**

$$U(q) = \left( \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}} \right) \prod_{i \geq 1} (1 - q^i)^{-2}.$$

## 2.6 Involutions

包除原理の特別な形

$$f_{=}(\emptyset) = \sum_{Y} (-1)^{\#Y} f_{\geq}(Y).$$

を考える．これを

$$f_{=}(\emptyset) + \sum_{\#Y \text{ odd}} f_{\geq}(Y) = \sum_{\#Y \text{ even}} f_{\geq}(Y).$$

と書き換える．これを組合せ的解釈を用いて示してみる．

集合 $A$ の元が，性質（$S$ の元）を持ったり持たなかったりする状況を考える．

$$\begin{aligned} M &= \{x \in A : x \text{ は } S \text{ のどの性質も持たない}\}, \\ N &= \{(x, Y, Z) : x \in A \text{ が持つ性質が } Z \supseteq Y \text{ に一致し，} \#Y \text{ は奇数}\}, \\ N' &= \{(x', Y', Z') : x \in A \text{ が持つ性質が } Z \supseteq Y \text{ に一致し，} \#Y \text{ は偶数}\}, \end{aligned}$$

とする．$S$ に全順序を入れ，$\sigma : M \cup N \to N'$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= (x, \emptyset, \emptyset) \quad \text{if } x \in M, \\ \sigma(x, Y, Z) &= \begin{cases} (x, Y - i, Z) & \text{if } \min Y = \min Z = i, \\ (X, Y \cup i, Z) & \text{if } \min Z = i < \min Y. \end{cases} \end{aligned}$$

$\sigma$ は全単射であり，

$$\sigma^{-1}(x, Y, Z) = \begin{cases} x \in M & \text{if } Y = Z = \emptyset, \\ (X, Y - i, Z) & \text{if } Z \neq \emptyset \text{ and } \min Y = \min Z = i, \\ (X, Y \cup i, Z) & \text{if } Z \neq \emptyset \text{ and } \min Z = i < \min Y, \end{cases}$$

ただし $\min \emptyset = \infty$ とする．