3.20 Promotion and Evacuation

shino16

2023 年 1 月 23 日

目次

0 復習

Poset P と $p = \#P$ について,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \{1, \ldots, p\} \text{ に通常の順序がついた poset}, \\ \mathcal{L}(P) &= (P \text{ の線形拡大の集合}) \\ &= \{f : P \to \boldsymbol{p}, \text{ 大小関係を保つ全単射}\} \end{aligned}$$

$f(t)$ は t のラベルと解釈できる.

1 Promotion

$f \in \mathcal{L}(P)$ に以下の操作 (promotion) を行って得られるものを $f\partial$ とする：

1. $f(t_1) = 1$ なる t_1 を取る.
2. $t_2 = \mathrm{argmin}\{f(t_2) : t_1 \lessdot t_2\}$.
3. $t_3 = \mathrm{argmin}\{f(t_3) : t_2 \lessdot t_3\}$.
4. これを繰り返し，極大な元 t_k を得るまで続ける.
5. $f(t_1) \leftarrow f(t_2)$，$f(t_2) \leftarrow f(t_3)$，...，$f(t_{k-1}) \leftarrow f(t_k)$ と代入する.
6. $f(t_k) \leftarrow p + 1$ と代入し，全ての元のラベルを 1 減らす.

$f\partial$ は f の **promotion**．極大鎖 $t_1 \lessdot t_2 \lessdot \cdots \lessdot t_k$ は f の **promotion chain**.

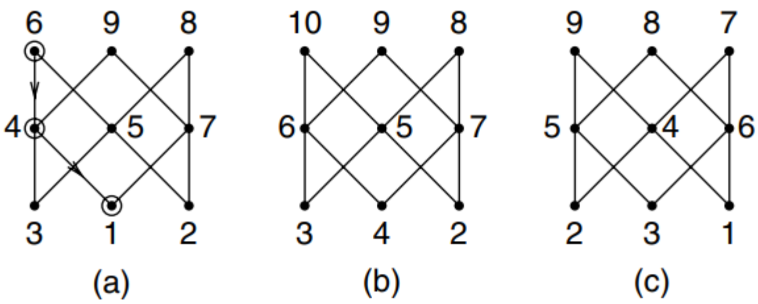

図1 Promotion

δ の双対な操作を **dual promotion** ∂^* とする．内容は：

1. $f(t_1) = p$ なる t_1 を取る．
2. $t_2 = \mathrm{argmax}\{f(t_2) : t_1 \gtrdot t_2\}$.
3. $t_3 = \mathrm{argmax}\{f(t_3) : t_2 \gtrdot t_3\}$.
4. これを繰り返し，極小な元 t_k を得るまで続ける．
5. $f(t_1) \leftarrow f(t_2)$，$f(t_2) \leftarrow f(t_3)$，...，$f(t_{k-1}) \leftarrow f(t_k)$ と代入する．
6. $f(t_k) \leftarrow 0$ と代入し，全ての元のラベルを 1 増やす．

$\partial^* = \partial^{-1}$ に注意.

$f \in \mathcal{L}(P)$ に以下の操作 (evacuation) を行って得られるものを $f\epsilon$ とする．

1. $f \leftarrow f\partial$ とし，ラベル p を固定する．
2. f の残りのラベルのみに ∂ を作用させ，さらにラベル $p-1$ を固定する．
3. f の残りのラベルのみに ∂ を作用させ，さらにラベル $p-2$ を固定する．
4. これを f のラベルがすべて固定されるまで繰り返す．

$f\epsilon$ は f の **evacuation**.

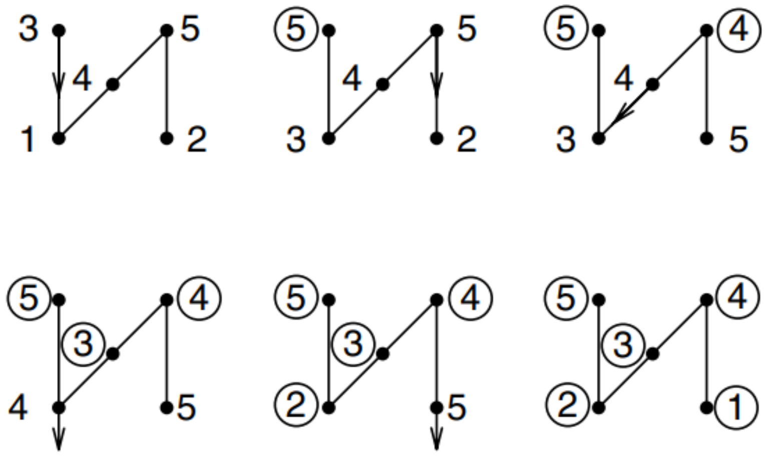

図2　Evacuation

ϵ の双対 **dual evacuation** ϵ^* も同様に定義する．つまり，ラベルを上に流して下方のラベルから固定していく．

定理 (3.20.1)**.** (a) $\epsilon^2 = 1$ (恒等写像).

(b) $\partial^p = \epsilon\epsilon^*$.

(c) $\partial\epsilon = \epsilon\partial^{-1}$.

この定理を示すのが 3.20 節の目標.

定義.

$$\begin{aligned}
\text{群 } G &= \langle \tau_1, \ldots, \tau_{p-1} \mid \tau_i^2 = 1,\ \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i \text{ if } |i-j| > 1 \rangle, \\
\delta_j &= \tau_1\tau_2\cdots\tau_j, \qquad (j = 1, \ldots, p-1) \\
\gamma_j &= \delta_j\delta_{j-1}\cdots\delta_1, \\
\gamma_j^* &= (\tau_j\tau_{j-1}\cdots\tau_1)(\tau_j\tau_{j-1}\cdots\tau_2)\cdots(\tau_j\tau_{j-1})(\tau_j).
\end{aligned}$$

補題. (a) $\gamma_j^2 = (\gamma_j^*)^2 = 1$.

(b) $\delta_j^{j+1} = \gamma_j\gamma_j^*$.

(c) $\delta_j\gamma_j = \gamma_j\delta_j^{-1}$

証明. (a) $(\tau_1, \ldots, \tau_j)$ を $(\tau_j, \ldots, \tau_1)$ に置換すると γ_j は γ_j^* に変わる. よって γ_j についてのみ示せばよい.

j の帰納法. $j = 1$ については

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \delta_1 = \tau_1, \\
\tau_1^2 &= 1,
\end{aligned}$$

より OK.

例えば

$$
\begin{aligned}
\gamma_4^2 &= (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\cancel{\tau_2})(\cancel{\tau_1})(\cancel{\tau_1}\cancel{\tau_2}\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1) \\
&= (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)\tau_1(\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1) \\
&= (\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)\tau_1\cancel{\tau_4}\cancel{\tau_3}(\cancel{\tau_3}\cancel{\tau_4})(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1) \\
&= \gamma_3^2
\end{aligned}
$$

ということから，帰納的に OK.

(b,c) j の帰納法で同様にやる. □

定理 (3.20.1，再掲)**.** (a) $\epsilon^2 = 1$.

(b) $\partial^p = \epsilon\epsilon^*$.

(c) $\partial\epsilon = \epsilon\partial^{-1}$.

補題 (再掲)**.** (a) $\gamma_j^2 = (\gamma_j^*)^2 = 1$.

(b) $\delta_j^{j+1} = \gamma_j\gamma_j^*$.

(c) $\delta_j\gamma_j = \gamma_j\delta_j^{-1}$

定理 3.20.1 の証明. $f \in \mathcal{L}(P)$ を P の元の列 $u_1u_2\cdots u_p$ と同一視する (ここで $f(u_i) = i$).

$i = 1, \ldots, p-1$ について，$\tau_i : \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P)$ を

$$
(u_1u_2\cdots u_p)\tau_i = \begin{cases} u_1u_2\cdots u_iu_{i+1}\cdots u_p & \text{if } u_i < u_{i+1}, \\ u_1u_2\cdots u_{i+1}u_i\cdots u_p & \text{if } u_i \text{ と } u_{i+1} \text{ が比較不能}, \end{cases}
$$

で定める. (なお $f(u_i) < f(u_{i+1})$ より，$u_i > u_{i+1}$ はあり得ない)

あとは $\partial = \delta_{p-1}$ と $\epsilon = \gamma_{p-1}$ を示せば終わり. 前者はお絵描き. 後者は Evacuation ϵ の定義と $\gamma_{p-1} = \delta_{p-1}\delta_{p-2}\cdots\delta_1$ から. □