13 Matroids

13.4 The Greedy Algorithm

最大化問題

インスタンス：　独立性システム $(E, \mathcal{F})$，$c : E \to \mathbb{R}$.

タスク：　$c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ を最大化する $X \in \mathcal{F}$ の発見.

$(E, \mathcal{F})$ が何らかのオラクルで与えられる状況を考える.

独立性オラクル：$F \subseteq E$ について，$F \in \mathcal{F}$ か否かを返す.

basis-superset **オラクル**：$F \subseteq E$ について，F が基を含むか否かを返す.

例. TSP．**完全**グラフ G について

$$E = V(G), \quad \mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ は } G \text{ のハミルトン閉路の一部}\}.$$

- $(E, \mathcal{F})$ の独立性オラクル：簡単
- $(E, \mathcal{F})$ の basis-superset オラクル：NP-完全

例. 最短経路問題．グラフ G について

$$E = V(G), \quad \mathcal{F} = \{F \subseteq E : F \text{ は } s\text{-}t\text{-パスの一部}\}.$$

- $(E, \mathcal{F})$ の独立性オラクル：NP-完全
- $(E, \mathcal{F})$ の basis-superset オラクル：簡単

Best-In-Greedy アルゴリズム

入力： 独立性オラクルで与えられる独立性システム $(E, \mathcal{F})$,
重み $c : E \to \mathbb{R}_+$.
出力： $F \in \mathcal{F}$.

1. $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を $c(e_1) \geq \cdots \geq c(e_n)$ となるようソート.
2. $F \leftarrow \emptyset$.
3. **for** $i \leftarrow 0$ **to** n **do**: **if** $F \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}$ **then** $F \leftarrow F \cup \{e_i\}$.

例. Kruskal 法.

Worst-Out-Greedy アルゴリズム

入力： basis-superset オラクルで与えられる独立性システム $(E, \mathcal{F})$,
重み $c : E \to \mathbb{R}_+$.
出力： $(E, \mathcal{F})$ の基 F.

1. $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ を $c(e_1) \leq \cdots \leq c(e_n)$ となるようソート.
2. $F \leftarrow E$.
3. **for** $i \leftarrow 0$ **to** n **do**: **if** $F \setminus \{e_i\}$ が基を含む **then** $F \leftarrow F \setminus \{e_i\}$.

主張. $(E, \mathcal{F}, c)$ に対する Best-In-Greedy アルゴリズムは，$(E, \mathcal{F}^*, -c)$ に対する Worst-Out-Greedy アルゴリズムと対応する.

証明.

$$
\begin{aligned}
& F \in \mathcal{F} \\
\iff & \exists B : (E, \mathcal{F}) \text{ の基 s.t. } F \subseteq B \\
\iff & \exists B : (E, \mathcal{F}) \text{ の基 s.t. } F^c \supseteq B^c \quad (B^c \text{ は } (E, \mathcal{F}^*) \text{ の基})
\end{aligned}
$$

□

定理 13.19. $c : E \to \mathbb{R}_+$ に対する最大化問題について，

$$\begin{aligned} G(E, \mathcal{F}, c) &= (\text{Best-In-Greedy が発見した解のコスト}), \\ \mathrm{OPT}(E, \mathcal{F}, c) &= (\text{最適解のコスト}), \end{aligned}$$

とすると

$$q(E, \mathcal{F}) \leq \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{\mathrm{OPT}(E, \mathcal{F}, c)} \leq 1.$$

ある c は下界を達成する．

復習. Rank quotient:

$$q(E, \mathcal{F}) = \min_{F \subseteq E} \frac{\rho(F)}{r(F)}$$

Lower rank:

$$\rho(F) = \min\{|B| : B \text{ は } F \text{ の基}\}$$

証明. $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$，$c(e_1) \geq \cdots \geq c(e_n)$ とする．これに対する Best-In-Greedy の解を G_n とし，最適解を O_n とする．

$$\begin{aligned} E_j &= \{e_1, \ldots, e_j\}, \\ G_j &= G_n \cap E_j, \\ O_j &= O_n \cap E_j, \end{aligned}$$

とする．また，

$$\begin{aligned} d_n &= c(e_n), \\ d_j &= c(e_j) - c(e_{j+1}), \end{aligned}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned} |O_j| &\leq r(E_j) && (\because\ O_j \in \mathcal{F}) \\ |G_j| &\geq \rho(E_j) && (\because\ G_j \text{ は } E_j \text{ の基}). \end{aligned}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
\frac{c(G_n)}{c(O_n)} &= \frac{\sum_{j=1}^{n}(|G_j| - |G_{j-1}|)c(e_j)}{\sum_{j=1}^{n}(|O_j| - |O_{j-1}|)c(e_j)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n} |G_j| d_j}{\sum_{j=1}^{n} |O_j| d_j} \\
&\geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho(E_j) d_j}{\sum_{j=1}^{n} r(E_j) d_j} \\
&\geq q(E, \mathcal{F}).
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
q(E, \mathcal{F}) = \frac{\rho(F)}{r(F)} = \frac{|B_1|}{|B_2|}
$$

となるように $F \subseteq E$ と F の基 B_1，B_2 をとる．

$$
c(e) = \begin{cases} 1 & (e \in F) \\ 0 & (e \notin F) \end{cases}
$$

とし，

$$
\begin{aligned}
c(e_1) \geq \cdots \geq c(e_n), \\
B_1 = \{e_1, \ldots, e_{|B_1|}\},
\end{aligned}
$$

となるように E の元を並べると，

$$
\begin{aligned}
G(E, \mathcal{F}, c) = |B_1|, \\
\mathrm{OPT}(E, \mathcal{F}, c) \geq |B_2|.
\end{aligned}
$$

$\square$

定理 13.20 (Edmonds-Rado の定理). 次は同値.

(a) $(E, \mathcal{F})$ はマトロイド.

(b) 任意の $c : E \to \mathbb{R}_+$ について，Best-In-Greedy は $(E, \mathcal{F}, c)$ に関する最大化問題の最適解を与える.

証明.

$$
\begin{aligned}
& (E, \mathcal{F}) \text{ はマトロイド} \\
\iff & q(E, \mathcal{F}) = 1 \\
\iff & \text{Best-In-Greedy は常に最適解を与える.}
\end{aligned}
$$

□

定理 13.21. マトロイド $(E, \mathcal{F})$，ランク関数 $r : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ をとる.

$(E, \mathcal{F})$ の**マトロイド超多面体 (matroid polytope)**（$\mathcal{F}$ の元の接続ベクトルの凸包）は

$$
\left\{ x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ \sum_{e \in A} x_e \leq r(A) \text{ for all } A \subseteq E \right\}
$$

証明. $(\subseteq)$ は明らか.

$(\supseteq)$ $e \in E$ について $r(\{e\}) \leq 1$ より，超多面体の各頂点 x について $0 \leq x \leq 1$．これに $x \in \mathbb{Z}^E$ という条件が加われば，x はある $F \subseteq E$ の接続ベクトルとなり，

$$
\sum_{e \in F} x_e = |F| \leq r(F)
$$

より $F \in \mathcal{F}$，したがって $x \in$ (matroid polytope)．したがって，超多面体の頂点がすべて整数ベクトルであればよい．そこで，

$$
\max \left\{ cx : x \geq 0,\ \sum_{e \in A} x_e \leq r(A) \text{ for all } A \subseteq E \right\}
$$

が任意の $c \in \mathbb{R}^E$ について整数解を持つことを示す．

$c : E \to \mathbb{R}$ をとる．ある $e \in E$ について $c(e) < 0$ ならば最適解 x は $x_e = 0$ を満たすので，そのような e は考慮から外してよい．そこで $c \geq 0$ を仮定し，$(E, \mathcal{F}, c)$ に対する最大化問題を考える．

LP の最適解 x について，

$$s_j = x_{e_1} + \cdots + x_{e_j} \ \ (\leq r(\{e_1, \ldots, e_j\}) = r(E_j)),$$

とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{c(G_n)}{\sum_{e \in E} c(e) x_e} &= \frac{\sum_{j=1}^n (|G_j| - |G_{j-1}|) c(e_j)}{\sum_{j=1}^n (s_j - s_{j-1}) c(e_j)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n |G_j| d_j}{\sum_{j=1}^n s_j d_j} \\
&\geq \frac{\sum_{j=1}^n \rho(E_j) d_j}{\sum_{j=1}^n r(E_j) d_j} \\
&\geq q(E, \mathcal{F}) = 1.
\end{aligned}$$

したがって $c(G_n) \geq cx$ なので，G_n も LP の最適解． □

定理 13.22. 独立性システム $(E, \mathcal{F})$，$c : E \to \mathbb{R}_+$ に関する**最小**化問題について，

$$\begin{aligned}
G(E, \mathcal{F}, c) &= (\text{Worst-Out-Greedy が発見した解のコスト}), \\
\rho^* &= ((E, \mathcal{F}^*) \text{ の lower rank 関数}), \\
r^* &= ((E, \mathcal{F}^*) \text{ のランク関数})
\end{aligned}$$

とすると，

$$1 \leq \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{\mathrm{OPT}(E, \mathcal{F}, c)} \leq \max_{F \subseteq E} \frac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)}.$$

ある c は上界を達成する．

証明. 分子側 ($|G_j| \leq |E_j| - \rho^*(E_j)$) を示す．$E_j \setminus G_j$ が $(E, \mathcal{F}^*)$ における E_j の基であると言えれば，

$$|E_j| - |G_j| = |E_j \setminus G_j| = r^*(E_j) \geq \rho^*(E_j).$$

(a) $E_j \setminus G_j \in \mathcal{F}^*$：$G_n$ は $(E, \mathcal{F})$ の基であり，$(E_j \setminus G_j) \cap G_n = \emptyset$.

(b) $(E_j \setminus G_j) \cup \{e\} \notin \mathcal{F}^*$ for all $e \in G_j$：$\forall B$(基) $G_j \setminus \{e\} \not\supseteq B$ より，$\forall B$(基) $((E_j \setminus G_j) \cup \{e\}) \cap B \neq \emptyset$.

分母側 ($|O_j| \geq |E_j| - r^*(E_j)$) を示す．$O_n$ は $(E, \mathcal{F})$ の基であり，$(E_j \setminus O_j) \cap O_n = \emptyset$ なので，$E_j \setminus O_j \in \mathcal{F}^*$，よって

$$|E_j| - |O_j| = |E_j \setminus O_j| \leq r^*(E_j \setminus O_j) \leq r^*(E_j).$$

よって同様の計算により不等式が示される．

上界を達成する c を構成する．

$$\max_{F \subseteq E} \frac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)} = \frac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)} = \frac{|F| - |B_1|}{|F| - |B_2|}$$

となるように $F \subseteq E$ と F の ($(E, \mathcal{F}^*)$ での) 基 B_1，B_2 をとり，

$$c(e) = \begin{cases} 1 & (e \in F) \\ 0 & (e \notin F) \end{cases}$$

とする．E の元を $c(e_1) \geq \cdots c(e_n)$，$B_1 = \{e_1, \ldots, e_{|B_1|}\}$ となるように並べると，

$$G(E, \mathcal{F}, c) = |F| - |B_1|,$$
$$\mathrm{OPT}(E, \mathcal{F}, c) = |F| - |B_2|.$$

□

定理 13.23. マトロイド $(E,\mathcal{F})$，$C: E \to \mathbb{R}$，$X \in \mathcal{F}$，$k = |X|$ について，$c(X) = \max\{c(Y) : Y \in \mathcal{F},\ |Y| = k\}$ であることは，以下が同時に成り立つこととと同値．

(a) $y \in E \setminus X$，$X \cup \{y\} \notin \mathcal{F}$，$x \in C(X,y) \Longrightarrow c(x) \geq c(y)$．[*1]
(b) $y \in E \setminus X$，$X \cup \{y\} \in \mathcal{F}$，$x \in X \Longrightarrow c(x) \geq c(y)$．

例. 連結グラフ G のグラフィックマトロイド $(E,\mathcal{F})$，$k = r(E) = |V| - 1$．

証明. $(\Longrightarrow)$ いずれかが成立しない場合，$(X \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ がより大きな重みを持つ．

$(\Longleftarrow)$ WLOG $c \geq 0$ と仮定する．$\mathcal{F}' := \{F \in \mathcal{F} : |F| \leq k\}$．

$E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ の元を重みの降順で並べ，同じ重みのもの同士では X の元が先に来るようにする．

$(E,\mathcal{F}')$ はマトロイドなので，最大化問題に対する Best-In-Greedy の貪欲解 X' をとると $c(X) = \max\{c(Y) : Y \in \mathcal{F}\}$．

$X = X'$ を示す．$X \neq X'$ を仮定する．

X' は基なので $|X| = k = |X'|$．$e_i \in X' \setminus X$ なる最小の i をとる．このとき $j < i$ について $e_j \in X \Longleftrightarrow e_j \in X'$．

$X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{F}$ ならば，(a) より各 $e_j \in C(X,e_i)$ は $j \leq i$ を満たす．$e_j \in X$ または $e_j = e_i$ より $e_j \in X'$．したがって $C(X,e_i) \subseteq X'$ となり，$X' \in \mathcal{F}'$ に矛盾．

$X \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}$ ならば，(b) より各 $e_j \in X$ は $j < i$ を満たす．したがって $e_j \in X'$ より，$X \subset X'$．$|X| = |X'|$ に矛盾． $\square$

[*1] $C(X,y)$ は $X \cup \{y\}$ が含むただ一つの閉路のこと．