CMU Concrete CMU Concrete Noto Sans CJK JP Noto Sans CJK JP

2 Sieve Methods

2.1 Inclusion-Exclusion

“Sieve method”：有限集合Sの要素数を求める方法

パターン(1) $\#S$を大きめに見積もり，誤差を大きめに見積もり，その誤差を…ということを繰り返し，誤差を0に近づけていく

パターン(2) $T \supseteq S$について，余分な元が打ち消しあうようにTの各元を重みづけする（後の節で登場）

定理 2.1.1. n元集合S，線形空間$V = \{f : 2^S \to K\}$ (Kは体)について，線形写像$\phi : V \to V$を

$$\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y),$$

で定める．このときϕ^{-1}が存在し，

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y).$$

証明. $\psi : V \to V$を$\psi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y)$で定めると，

$$\begin{aligned}
\phi\psi f(T) &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \phi f(Y) \qquad (\psi\phi f(T)\text{では？}) \\
&= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z) \\
&= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \right) f(Z).
\end{aligned}$$

T，Zを固定したとき，$m = \#(Z - T)$とおくと

$$\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{0m},$$

なので，$\phi\psi f(T) = f(T)$がわかる．よって$\phi^{-1} = \psi$. □

よくある定理2.1.1の適用例

$\widetilde{\phi}: V \to V$を

$$\widetilde{\phi} f(T) = \sum_{Y \subseteq T} f(Y),$$

で定めるとき，$\widetilde{\phi}^{-1}$が存在して

$$\widetilde{\phi}^{-1} f(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(T-Y)} f(Y).$$

である．証明も同様．元の定理2.1.1について$f'(T) = f(S-T)$を考えることでも双対形の主張が得られる．また，高々Tの性質しか満たさないAの元の個数を$f_{\leq}(T)$とするとき，

$$f_{\leq}(T) = \sum_{Y \subseteq T} f_{=}(Y),$$
$$f_{=}(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(T-Y)} f_{\leq}(Y).$$

$f_{=}(T)$がTの要素数によってのみ決まる場合を考える．$i = 0, \ldots, n$について

$$a(n-i) = f_{=}(T) \quad (\#T = i),$$
$$b(n-i) = f_{\geq}(T) \quad (\#T = i),$$

とする．このとき$0 \leq m \leq n$について

$$b(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a(i),$$
$$a(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{m-i} b(i).$$

$n = \infty$でも上の2つの式が同値であることが確認できる．また，有限差分を使うと$0 \leq m \leq n$について

$$a(m) = \Delta^m b(0),$$

とも表せる．$a(m)$，$b(m)$の値がnに依存しないなら，任意の$m \in \mathbb{N}$について$a(m) = \Delta^m b(0)$ (命題2.2.2).

2.2 Examples and Special Cases

例 2.2.1 (攪乱順列)**.** 順列$w \in \mathfrak{S}_n$であって，不動点を持たない($\forall i\ w(i) \neq i$)ものはいくつあるか？そのような順列（攪乱順列）の個数を$D(n)$とおく．

少なくとも$T \subseteq [n]$の点が不動点であるような順列の個数は

$$f_{\geq}(T) = b(n-i) = (n-i)! \quad (\#T = i).$$

したがって，不動点を持たない順列の個数$f_{=}(\emptyset) = a(n) = D(n)$は

$$\begin{aligned} D(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i! \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

これより$n!/e$が$D(n)$の良い近似であることが分かる．実際，$n > 0$について$D(n) = \mathrm{round}(n!/e)$が確認できる．[*2]

また，$n \geq 1$について

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n,$$

---

*2

$$\left| D(n) - \frac{n!}{e} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots.$$

右辺を$g(n+1)$とおくと，$g(n+1) = ng(n) - 1$ $(n \geq 1)$より

$$g(1) = e - 1 \approx 1.718, \quad g(2) \approx 0.718, \quad g(3) \approx 0.436, \quad g(4) = 0.308, \ldots$$

WolframAlphaによると$g(n) = e(\Gamma(n) - \Gamma(n,1)) = \int_0^1 t^{n-1} e^{-t} dt$で，これは$n \geq 1$について単調減少．また$|D(1) - 1!/e| = |0 - 1!/e| < 1/2$.

$n = 0$については$D(0) = 1$なので不成立.

これを繰り返し使って

$$\begin{aligned} D(n) &= nD(n-1) - (-1)^{n-1} \\ &= nD(n-1) - (D(n-1) - (n-1)D(n-2)) \\ &= (n-1)(D(n-1) + D(n-2)). \end{aligned}$$

$D(n)$の指数型母関数は

$$\sum_{n\geq 0} D(n)\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

例 **2.2.3.** 多重集合$M_n = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$の順列のうち，どの2つの隣接する項も等しくないものの個数を$h(n)$とおく．$h(0) = 1$，$h(1) = 0$，$h(2) = 2$.

順列wに対して，性質P_iを「2つのiが隣接すること」とする．求める値は$f_{=}(\emptyset) = h(n)$.

$g(i) = f_{\geq}(T)$ $(i = \#T)$とおくと

$$g(i) = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i}(n+i)!2^{-i} \\ &= \Delta^n (n+i)!2^{-i}\Big|_{i=0}. \end{aligned}$$

例 **2.2.4.** 順列$w = a_1a_2\cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$について**descent set** $D(w)$を

$$D(w) = \{i : a_i > a_{i+1}\},$$

で定める．また，

$$\begin{aligned} \alpha_n(S) &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : D(w) \subseteq S\}, \\ \beta_n(S) &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : D(w) = S\}, \end{aligned}$$

とする．このとき

$$\alpha_n(S) = \sum_{T \subseteq S} \beta_n(T),$$
$$\beta_n(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S-T)} \alpha_n(T).$$

また，$S = \{s_1, \ldots, s_k\}_< \subseteq [n-1]$のとき

$$\alpha_n(S) = \binom{n}{s_1,\ s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots,\ n - s_k},$$
$$\beta_n(S) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le k} (-1)^{k-j} \binom{n}{s_{i_1}, s_{i_2} - s_{i_1}, \ldots, n - s_{i_j}}.$$

$s_0 = 0$，$s_{k+1} = n$とすると，

$$\beta_n(S) = n! \det\left[\frac{1}{(s_{j+1} - s_i)!}\right]_{(i,j) \in [0,k] \times [0,k]}$$

と書き換えられる（ただし$i \ge j$について(i,j)-成分は0とする）．さらに$n!$を各列にばらすと

$$\beta_n(S) = \det\left[\binom{n - s_i}{s_{j+1} - s_i}\right],$$

が得られる．

例 2.2.5. $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq [n-1]$について，

$$\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ D(w) \subseteq S}} q^{s(w)} = \boldsymbol{\binom{n}{s_1, s_2 - s_1, \ldots, n - s_k}}$$

が成り立つような$s(w)$を考える．実は$s(w) = \mathrm{inv}(w)$とすると上の等式が成り立つ．

$$t_1 = s_1,\ t_2 = s_2 - s_1,\ \ldots,\ t_{k+1} = n - s_k,$$

とし，

$$M=\{1^{t_1},2^{t_2},\dots,(k+1)^{t_{k+1}}\},$$

とおく．命題1.7.1より

$$\sum_{u\in\mathfrak{S}(M)} q^{\mathrm{inv}(u)}=\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{t_1,t_2,\dots,t_{k+1}}}.$$

$u\in\mathfrak{S}(M)$について，uの要素に対して小さい順に番号を振りなおして，$\mathrm{inv}(u)=\mathrm{inv}(v)$となるように$v\in\mathfrak{S}_n$をとる（例：$u=12112\Rightarrow v=14235$）．$w=v^{-1}$とおく．

このようにしてとれる$w\in\mathfrak{S}_n$は$D(w)\subseteq\{s_1,\dots,s_k\}$を満たす．逆に，$w\in\mathfrak{S}_n$について$D(w)\subseteq\{s_1,\dots,s_k\}$が成り立つなら，対応する$u\in\mathfrak{S}(M)$がただ一つ存在する．よって示された．

$$\beta_n(S,q)=\sum_{\substack{w\in\mathfrak{S}_n\\ D(w)=S}} q^{\mathrm{inv}(w)},$$

とおくと，例2.2.4と同じ議論により

$$\begin{aligned}\beta_n(S,q)&=\boldsymbol{(n)!}\det\left[\frac{1}{\boldsymbol{(s_{j+1}-s_i)!}}\right]\\&=\det\left[\binom{\boldsymbol{n-s_i}}{\boldsymbol{s_{j+1}-s_i}}\right].\end{aligned}$$

上の議論を一般化して，次の結果が得られる．

命題 2.2.6. $S=\{P_1,\dots,P_n\}$を性質の集合とする．またhを$\mathbb{N}$上の関数とし，eを$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上の関数であって$e(i,i)=1$，$e(i,j)=0$ $(j<i)$が成り立つものとする．

各$T\subseteq S$について，$T=\{P_{s_1},\dots,P_{s_k}\}$ $(1\le s_1<\cdots<s_k\le n)$ とおくと

$$f_{\le}(T)=h(n)e(s_0,s_1)e(s_1,s_2)\cdots e(s_k,s_{k+1}),$$

が成り立つとする（ただし$s_0 = 0$，$s_{k+1} = n$とする）．このとき

$$f_=(T) = h(n) \det[e(s_i, s_{j+1})].$$