

13 Matroids

13.2 Other Matroid Axioms

復習

定義 13.2.1. 集合システム (E, \mathcal{F}) : 非空な有限集合 E と $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ の対.

独立性システム (E, \mathcal{F}) : 次を満たす集合システム

(M1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(M2) $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$.

\mathcal{F} の元は**独立**, $2^E \setminus \mathcal{F}$ の元は**従属**. 極小な従属集合は**サーキット**, 極大な独立集合は**基**. $X \subseteq E$ の極大な独立部分集合は, X の基と呼ばれる.

定義 13.2.2. 独立性システム (E, \mathcal{F}) と $X \subseteq E$ について,

ランク : $r(X) := \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$ (X の基の位数の最大値).

閉包 : $\omega(X) := \{y \in E : r(X \cup \{y\}) = r(X)\}$.

定義 13.2.3 (定理 13.5). **マトロイド** (E, \mathcal{F}) : 次 (のいずれか) を満たす独立性システム

(M3) $X, Y \in \mathcal{F}, |X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y$ s.t. $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$,

(M3') $X, Y \in \mathcal{F}, |X| = |Y| + 1 \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y$ s.t. $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$,

(M3'') 任意の $X \subseteq E$ について, X の基の位数はどれも等しい.

基の族に関する公理系

定理 13.2.9. E を有限集合とし, $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ とする. \mathcal{B} が何らかのマトロイド (E, \mathcal{F}) の基の族であることは, 以下が同時に成立することと同値.

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \setminus B_2, \exists y \in B_2 \setminus B_1$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

証明. (\implies) (B1): (M1) よりよい.

(B2): (M2) より $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$.

(M3) より $\exists y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{F}$.

(M3'') よりこれは基.

また $y \in B_2$ より $x \neq y$, したがって $y \in B_2 \setminus B_1$.

(\impliedby) (B2) のイメージ: $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ のとき, B_1 を $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ に置き換えると $|B_1 \cap B_2|$ が 1 増える.

まず, \mathcal{B} の元の位数がどれも等しいことを示す. $|B_1| > |B_2|$ なる B_1, B_2 が存在すると仮定する. (B2) より $|B_1|$ を保ったまま $|B_1 \cap B_2|$ をいくらでも大きくでき, 矛盾.

ここで,

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } F \subseteq B\},$$

とする. (E, \mathcal{F}) がマトロイドであることを示す. (M1), (M2) はよい.

(M3) を示す. ((M3'') で終わりでは??)

$|X| > |Y|$ なる $X, Y \in \mathcal{F}$ を考える. $X \subseteq B_1 \in \mathcal{B}, Y \subseteq B_2 \in \mathcal{B}$ を満たす B_1, B_2 を, $|B_1 \cap B_2|$ が最大になるようにとる.

$B_2 \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ である場合, $x \in B_2 \cap (X \setminus Y)$ とすると, $Y \cup \{x\} \subseteq B_2$ より $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

$B_2 \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ と仮定して矛盾を示す．目標： $B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
& |B_1 \cap B_2| + |Y \setminus B_1| + |(B_2 \setminus B_1) \setminus Y| \\
&= |B_2| = |B_1| \\
&\geq |B_1 \cap B_2| + |X \setminus Y| \quad (B_2 \cap (X \setminus Y) = \emptyset) \\
&> |B_1 \cap B_2| + |Y \setminus X| \quad (|X| > |Y|) \\
&\geq |B_1 \cap B_2| + |Y \setminus B_1|.
\end{aligned}$$

したがって $(B_2 \setminus B_1) \setminus Y \neq \emptyset$ ． $y \in (B_2 \setminus B_1) \setminus Y$ をとると， $\exists x \in B_1 \setminus B_2$ s.t. $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ となり， $|B_1 \cap B_2|$ の最大性に矛盾． \square

演習 8. \mathcal{B} が何らかのマトロイド (E, \mathcal{F}) の基の族であることは，以下が同時に成立することと同値であることを示せ．

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall y \in B_2 \setminus B_1, \exists x \in B_1 \setminus B_2$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

証明.

$$\overline{\mathcal{B}} := \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\} \quad (\overline{B} = E \setminus B),$$

とする．(B2) は

$$\forall \overline{B}_1, \overline{B}_2 \in \overline{\mathcal{B}}, \forall y \in \overline{B}_1 \setminus \overline{B}_2, \exists x \in \overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1 \text{ s.t. } (\overline{B}_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \overline{\mathcal{B}},$$

と同値．また，(M3'') より \mathcal{B} がマトロイドの基の族であることと $\overline{\mathcal{B}}$ が基の族であることは同値． \square

ランク関数に関する公理系

定理 13.2.10. E を有限集合とし, $r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ とする. 次の主張は同値.

- (a) $\mathcal{F} := \{F \subseteq E : r(F) = |F|\}$ とするとき, r はマトロイド (E, \mathcal{F}) のランク関数.
- (b) 各 $X, Y \subseteq E$ について,
 - (R1) $r(X) \leq |X|$,
 - (R2) $X \subseteq Y \implies r(X) \leq r(Y)$,
 - (R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ (劣モジュラ性).
- (c) 各 $X \subseteq E$ と $x, y \in E$ について,
 - (R1') $r(\emptyset) = 0$,
 - (R2') $r(X) \leq r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1$,
 - (R3') $r(X \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) = r(X) \implies r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$.

証明. (a) \implies (b): r はランク関数なので, (R1) と (R2) は明らか. (R3) を示す.

$X, Y \subseteq E$ について, $X \cap Y$ の基 A をとる. 基 A を拡張して, $A \dot{\cup} B$ を X の基, $A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$ を $X \cup Y$ の基とする. $C \subseteq Y$ より $A \cup C \subseteq Y$. また $A \cup B \cup C \in \mathcal{F}$ より $A \cup C \in \mathcal{F}$. したがって

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |A \cup B| + |A \cup C| \\ &= |A \cup B \cup C| + |A| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y). \end{aligned}$$

(b) \implies (c): (R1') は (R1) より, (R2') の前半は (R2) よりよい. また (R3) より

$$r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + r(\{y\}) - r(X \cap \{y\}) \leq r(X) + 1.$$

(R3') を示す. $x = y$ のときは明らか, $x \neq y$ のとき,

$$\begin{aligned} 2r(X) &\leq r(X) + r(X \cup \{x, y\}) && \because (R2) \\ &\leq r(X \cup \{x\}) + r(X \cup \{y\}) && \because (R3) \\ &= 2r(X), \end{aligned}$$

より $r(X) = r(X \cup \{x, y\})$.

(c) \implies (a):

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : r(F) = |F|\},$$

とする. (M1) は (R1') よりよい. (M2) を示す. $Y \in \mathcal{F}$, $y \in Y$ について, $X := Y \setminus \{y\}$ とすると,

$$|X| + 1 = |Y| = r(Y) = r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1 \leq |X| + 1,$$

より $X \in \mathcal{F}$.

(M3') を示す. $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| = |Y| + 1$ とする.

$$X \setminus Y = \{x_1, \dots, x_k\},$$

とおく. $\exists i$ s.t. $Y \cup \{x_i\} \in \mathcal{F}$ を示したい. そうでないと仮定する. (R2) より

$$r(Y \cup \{x_i\}) = r(Y) \quad (i = 1, \dots, k).$$

さらに (R3) より

$$r(Y \cup \{x_1, x_i\}) = r(Y) \quad (i = 2, \dots, k).$$

そこで, $Y \leftarrow Y \cup \{x_1\}$ とし, 同じ議論を繰り返すと,

$$r(Y \cup \{x_1, \dots, x_k\}) = r(X \cup Y) = r(Y).$$

これは $r(X \cup Y) \geq r(X) = |X| = |Y| + 1 > r(Y)$ に矛盾.

最後に r がマトロイド (E, \mathcal{F}) のランク関数であることを示す. $X \subseteq E$ について, X の基 Y を $|Y|$ が最大になるようにとる. $\forall x \in X \setminus Y, r(Y \cup \{x\}) = r(Y)$ なので, 先ほどと同じ議論により $r(X) = r(Y) = |Y|$. \square

閉包演算子に関する公理系

定理 13.2.11. E を有限集合とし, $\sigma : 2^E \rightarrow 2^E$ とする. σ があるマトロイド (E, \mathcal{F}) の閉包演算子であることは, 任意の $X, Y \subseteq E$ と $x, y \in E$ について以下が同時に成立することと同値.

- (S1) $X \subseteq \sigma(X)$,
- (S2) $X \subseteq Y \subseteq E \implies \sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$,
- (S3) $\sigma(X) = \sigma(\sigma(X))$,
- (S4) $y \notin \sigma(X), y \in \sigma(X \cup \{x\}) \implies x \in \sigma(X \cup \{y\})$.

証明. (\implies) (S1) はよい. $X \subseteq Y, z \in \sigma(X)$ について

$$\begin{aligned}
 r(Y \cup \{z\}) &= r(X \cup Y \cup \{z\}) \\
 &\leq r(X \cup \{z\}) + r(Y) - r((X \cup \{z\}) \cap Y) && \because (R3) \\
 &\leq r(X) + r(Y) - r(X) && \because (R2) \\
 &= r(Y),
 \end{aligned}$$

より (S2) もよい.

(R3') を使って X に $\sigma(X) \setminus X$ の元を追加していくと $r(\sigma(X)) = r(X)$ が成り立つ. このランクを保ったまま $\sigma(X)$ に新たな元を追加することはできないので, (S3) もよい.

$y \notin \sigma(X), y \in \sigma(X \cup \{x\}), x \notin \sigma(X \cup \{y\})$ と仮定する. (R2') より $r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1, r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{x\}), r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{y\}) + 1$. ゆえに $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$ となり矛盾. よって (S4) もよい.

(\Leftarrow)

$$\mathcal{F} := \{X \subseteq E : \forall x \in X, x \notin \sigma(X \setminus \{x\})\},$$

とする. (E, \mathcal{F}) がマトロイドであることを示す.

(M1) はよい. $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して

$$x \notin \sigma(Y \setminus \{x\}) \supseteq \sigma(X \setminus \{x\}),$$

より $X \in \mathcal{F}$. よって (M2) もよい.

主張. $X \in \mathcal{F}$ と $Y \subseteq E$ が $|X| > |Y|$ を満たすとき, $X \not\subseteq \sigma(Y)$.

証明. $|Y \setminus X|$ に関する帰納法で示す. $Y \setminus X = \emptyset$ のとき, $Y \subset X$. $x \in X \setminus Y$ をとる.

$$x \notin \sigma(X \setminus \{x\}) \supseteq \sigma(Y),$$

より $x \notin \sigma(Y)$, したがって $X \not\subseteq \sigma(Y)$.

$|Y \setminus X| > 0$ とする. $y \in Y \setminus X$ をとる. 帰納法の仮定より,

$$x \in X \setminus \sigma(Y \setminus \{y\}),$$

がとれる. $x \notin \sigma(Y)$ ならよい. そうでないとき, $x \notin \sigma(Y \setminus \{y\})$ かつ

$$x \in \sigma(Y) = \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{y\}),$$

なので, (S4) より

$$y \in \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$

y 以外の Y の元は $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})$ に属するので,

$$Y \subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$

(S2) より

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(\sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})) = \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$

帰納法の仮定より $X \not\subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})$ なので, $X \not\subseteq \sigma(Y)$. ■

先ほどの主張を用いて (M3) を示す. $X, Y \in \mathcal{F}$ が $|X| > |Y|$ を満たすとする. 主張より, $x \in X \setminus \sigma(Y)$ がとれる. ここで $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことを示す.

$z \in Y \cup \{x\}$ とする. $z \in Y$ のとき, $Y \in \mathcal{F}$ より $z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$. $z = x$ のとき, $z \notin \sigma(Y)$ より $z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$.

$z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$, $x \notin \sigma(Y)$ から, (S4) より

$$z \notin \sigma((Y \setminus \{z\}) \cup \{x\}) \supseteq \sigma((Y \cup \{x\}) \setminus \{z\}).$$

したがって $z \notin \sigma((Y \cup \{x\}) \setminus \{z\})$. よって $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$.

以上より, (E, \mathcal{F}) はマトロイド. マトロイド (E, \mathcal{F}) のランク関数を r , 閉包演算子を σ' とする. $\sigma = \sigma'$ を示す.

まず, $X \subseteq E$ と $z \in \sigma'(X)$ について, $z \in \sigma(X)$ を示す. $z \in X \subseteq \sigma(X)$ ならよい. そうでない場合を考える. X の基 Y をとる.

$$r(Y \cup \{z\}) \leq r(X \cup \{z\}) = r(X) = |Y| < |Y \cup \{z\}|,$$

より $Y \cup \{z\} \notin \mathcal{F}$. したがって

$$\exists y \text{ s.t. } y \in \sigma((Y \cup \{z\}) \setminus \{y\}).$$

$y = z$ ならば $z \in \sigma(Y \setminus \{z\}) \subseteq \sigma(X)$. $y \neq z$ ならば, $y \notin \sigma(Y \setminus \{y\})$ なので (S2) より $z \in \sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$.

次に, $z \notin \sigma'(X)$ (すなわち $r(X \cup \{z\}) > r(X)$) として $z \notin \sigma(X)$ を示す. $X \cup \{z\}$ の基 Y をとる. $z \notin Y$ だとすると $Y \subseteq X$ となって $r(X \cup \{z\}) > r(X)$ に矛盾するため, $z \in Y$. また

$$|Y \setminus \{z\}| = |Y| - 1 = r(X \cup \{z\}) - 1 = r(X),$$

より $Y \setminus \{z\}$ は X の基. ゆえに

$$X \subseteq \sigma'(Y \setminus \{z\}) \subseteq \sigma(Y \setminus \{z\}),$$

よって $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y \setminus \{z\})$. $z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$ より $z \notin \sigma(X)$. □

サーキット族に関する定義

定理 13.2.12. E を有限集合とし, $\mathcal{C} \subseteq 2^E$ とする.

$$\mathcal{F} = \{F \subset E : C \subseteq F \text{ なる } C \in \mathcal{C} \text{ が存在しない}\},$$

とするとき, \mathcal{C} が独立性システム (E, \mathcal{F}) のサーキットの族であることは, 以下が同時に成立することと同値.

$$(C1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C},$$

$$(C2) \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \subseteq C_2 \implies C_1 = C_2.$$

さらに, \mathcal{C} が独立性システム (E, \mathcal{F}) のサーキットの族であるとき, 以下は同値.

$$(a) \quad (E, \mathcal{F}) \text{ はマトロイド.}$$

$$(b) \quad X \in \mathcal{F}, e \in E \text{ について, } X \cup \{e\} \text{ は高々 1 個のサーキットしか持たない.}$$

$$(C3) \quad \text{任意の相異なる } C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ と } e \in C_1 \cap C_2 \text{ について, } C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \text{ なる } C_3 \in \mathcal{C} \text{ が存在する.}$$

$$(C3') \quad \text{任意の } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, e \in C_1 \cap C_2, f \in C_1 \setminus C_2 \text{ について, } f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \text{ なる } C_3 \in \mathcal{C} \text{ が存在する.}$$

前半の証明. $(\implies) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$ より (C1) はよい. (C2) はサーキットの極小性よりよい.

$(\impliedby) \quad (M1)$ は (C1) よりよい. (M2) は定義より明らか. 任意のサーキットが \mathcal{C} に属することは定義から確認できる. (C2) より \mathcal{C} はサーキットの族. □

後半の証明. $(a) \implies (C3')$: \mathcal{C} をマトロイドのサーキットの族とする. $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, e \in C_1 \cap C_2, f \in C_1 \setminus C_2$ について, (R3) (ランク関数

の劣モジュラ性) より

$$\begin{aligned} & |C_1| - 1 + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{e, f\}) + |C_2| - 1 \\ &= r(C_1) + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{e, f\}) + r(C_2) \\ &\geq r(C_1) + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{f\}) + r(C_2 \setminus \{e\}) \\ &\geq r(C_1 \setminus \{f\}) + r(C_1 \cup C_2) + r(C_2 \setminus \{e\}) \\ &= |C_1| - 1 + r(C_1 \cup C_2) + |C_2| - 1. \end{aligned}$$

これより $r((C_1 \cup C_2) \setminus \{e, f\}) = r(C_1 \cup C_2)$. $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e, f\}$ の基 B をとる. $|B \cup \{f\}| > r(C_1 \cup C_2)$ より, $B \cup \{f\}$ はサーキット C_3 を含む. よって $f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$.

(C3') \implies (C3): 明らか.

(C3) \implies (b): $X \in \mathcal{F}$ について $X \cup \{e\}$ が相異なるサーキット C_1, C_2 を含むとき, (C3) より $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \notin \mathcal{F}$. しかし $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \subseteq X$ なので, $X \notin \mathcal{F}$.

(b) \implies (a): 定理 13.8 と命題 13.7 よりよい. □