3.21 Differential Posets

shino16

March 28, 2023

復習

r-differential poset の定義

Definition

$r \in \mathbb{P}$ について，r-**differential poset** は以下を満たす poset P

(D1) $\hat{0} \in P$, locally finite, graded

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k + r$ 元が t を被覆

(D3) $s, t \in P$ $(s \neq t)$ について，s, t が同じ j 元を被覆 $\iff$ 同じ j 元が s, t を被覆

線形代数

Definition

K：体，P：poset について，

$$\widehat{KP} := \{P \text{ の元の線形結合 } (K \text{ 係数})\} = \left\{ \sum_{t \in P} c_t t : c_t \in K \right\}$$

$$KP := \{P \text{ の}\textbf{有限個の}\text{元の線形結合 } (K \text{ 係数})\}$$

Definition

$$\phi \colon \widehat{KP} \to \widehat{KP} \text{ が}\textbf{連続} \overset{\text{def}}{\iff} \phi\left(\sum_t c_t t\right) = \sum_t c_t \phi(t)$$

Hasse Walk

定義

Definition

s から t への長さ ℓ の **Hasse walk**：

$$s = t_0, t_1, \ldots, t_\ell = t$$

ただし $t_{i-1} \lessdot t_i$ or $t_{i-1} \gtrdot t_i$

定義

Definition

s から t への長さ ℓ の **Hasse walk**：

$$s = t_0, t_1, \ldots, t_\ell = t$$

ただし $t_{i-1} \lessdot t_i$ or $t_{i-1} \gtrdot t_i$

Definition

$$e(t) = \#(\hat{0} \text{ から } t \text{ へ上に上がるだけの Hasse walk})$$

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{t \in P_n} e(t)$$

$$\delta_n = \#(\text{起点 } \hat{0}\text{，長さ } n \text{ の Hasse walk})$$

定理

Theorem (3.21.9)

P：r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

定理

Theorem (3.21.9)

P：r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

Theorem (3.21.10)

P：r-differential について

$$\sum_{n\geq 0}\alpha(0\to n)\frac{x^n}{n!} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2}$$
$$\sum_{n\geq 0}\delta_n\frac{x^n}{n!} = e^{rx+rx^2}$$

$\alpha(n \to n+k)$

$\alpha(0 \to n)$ の一般化，$\alpha(n \to n+k)$ を調べる

$\alpha(n \to n+k)$

$\alpha(0 \to n)$ の一般化，$\alpha(n \to n+k)$ を調べる

$k = 0$ のとき $\alpha(n \to n) = \#P_n$

Definition

Graded poset P のランク母関数

$$F(P,q) := \sum_{n \geq 0} (\#P_n) q^n$$

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P : r-differential

$$\sum_{n,k \geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) \exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$$

(証明)

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P：r-differential

$$\sum_{n,k \geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) \exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$$

(証明) $\gamma : \widehat{KP} \to K[[q]]$ を次で定める：

$$\gamma\left(\sum_{t \in P} c_t t\right) = \sum_{t \in P} c_t q^{\rho(t)}$$

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P：r-differential

$$\sum_{n,k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) \exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$$

(証明) $\gamma : \widehat{KP} \to K[[q]]$ を次で定める：

$$\gamma\left(\sum_{t\in P} c_t t\right) = \sum_{t \in P} c_t q^{\rho(t)}$$

$$\begin{aligned} \alpha(n \to n+k) &= \sum_{t \in P_n} \#(t \text{ から } k \text{ 回上がる Hasse walk}) \\ &= [q^n]\gamma(D^k \boldsymbol{P}) \end{aligned}$$

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P：r-differential

$$\sum_{n,k \geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) \exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$$

(証明) $\gamma : \widehat{KP} \to K[[q]]$ を次で定める：

$$\gamma\left(\sum_{t \in P} c_t t\right) = \sum_{t \in P} c_t q^{\rho(t)}$$

$$\begin{aligned} \alpha(n \to n+k) &= \sum_{t \in P_n} \#(t \text{ から } k \text{ 回上がる Hasse walk}) \\ &= [q^n]\gamma(D^k \boldsymbol{P}) \end{aligned}$$

$$G(q,x) := (\text{左辺}) = \sum_{k \geq 0} \gamma(D^k \boldsymbol{P}) \frac{x^k}{k!}$$

証明続き

$$
\begin{aligned}
G(q,x) &= \sum_{k\geq 0} \gamma(D^k \boldsymbol{P}) \frac{x^k}{k!} \\
&= \gamma(e^{Dx}\boldsymbol{P}) \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2}\gamma(e^{Ux}\boldsymbol{P}) \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^{n+k} \frac{x^k}{k!} \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^{n} \frac{(qx)^k}{k!} \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} G(q,qx)
\end{aligned}
$$

証明続き

$$
\begin{aligned}
G(q,x) &= \sum_{k\geq 0} \gamma(D^k \boldsymbol{P}) \frac{x^k}{k!} \\
&= \gamma(e^{Dx}\boldsymbol{P}) \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \gamma(e^{Ux}\boldsymbol{P}) \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^{n+k} \frac{x^k}{k!} \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^{n} \frac{(qx)^k}{k!} \\
&= e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} G(q,qx)
\end{aligned}
$$

$x \leftarrow 0$ に注目すると

$$G(q,0) = F(P,q)$$

証明続き

わかったこと：

- $G(q,x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2}G(q,qx)$
- $G(q,0) = F(P,q)$

$G(q,x) = F(p,q)\exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$ がこの方程式の一意解だと示せれば OK.

証明続き

わかったこと：

- $G(q,x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} G(q,qx)$
- $G(q,0) = F(P,q)$

$G(q,x) = F(p,q)\exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$ がこの方程式の一意解だと示せれば OK.

$$G(q,x) = \sum_{k\geq 0} f_k(q)\, x^k \qquad (f_k(q) \in K[[q]])$$

とおく．$x \leftarrow 0$ に注目して $f_0(q) = F(P,q)$.

証明続き

わかったこと：

- $G(q,x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} G(q,qx)$
- $G(q,0) = F(P,q)$

$G(q,x) = F(p,q)\exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$ がこの方程式の一意解だと示せれば OK.

$$G(q,x) = \sum_{k\geq 0} f_k(q)\, x^k \qquad (f_k(q) \in K[[q]])$$

とおく．$x \leftarrow 0$ に注目して $f_0(q) = F(P,q)$.

$$\sum_{k\geq 0} q_k(q)\, x^k = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{k\geq 0} f_k(q)\,(qx)^k$$

証明続き

わかったこと：

- $G(q,x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} G(q,qx)$
- $G(q,0) = F(P,q)$

$G(q,x) = F(p,q)\exp\left[\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right]$ がこの方程式の一意解だと示せれば OK．

$$G(q,x) = \sum_{k\geq 0} f_k(q)\, x^k \qquad (f_k(q) \in K[[q]])$$

とおく．$x \leftarrow 0$ に注目して $f_0(q) = F(P,q)$.

$$\sum_{k\geq 0} q_k(q)\, x^k = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2} \sum_{k\geq 0} f_k(q)\,(qx)^k$$

ここで x^k の係数を比較すると，

$$f_k(q) = f_k(q)\, q^k + r f_{k-1}(q)\, q^{k-1} + \cdots + (\cdots) f_0(q)$$

の形になり，$f_k(q)$ が $f_{k-1}(q), \ldots, f_0(q)$ から一意に決まる．