1　What Is Enumerative Combinatorics?

1.1　How to Count

i が動くとき，有限集合 S_i の要素数 $f(i)$ を数えるとする．$f(i)$ がどのような形で表されれば「数えた」といえるだろうか？

1. 完全に陽な閉じた式で表され，よく知られた関数のみを含み，総和記号を含まない形．
2. 漸化式．
3. $f(i)$ を計算するある程度効率的なアルゴリズム．
4. 漸近的な評価．
5. 母関数．

1.1.1　母関数の扱いについて

通常型母関数：

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n.$$

指数型母関数：

$$\sum_{n\geq 0} f(n)\frac{x^n}{n!}.$$

これらは形式的べき級数．

x が何かの値をとるわけではなく，x^n や $x^n/n!$ は $f(n)$ が書かれる場所に過ぎない．

$F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ であるとき，a_n は $F(x)$ における x^n の**係数**といい，

$$a_n = [x^n]F(x)$$

と表す．$F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n/n!$ に対しては，

$$a_n = n![x^n]F(x)$$

と表す．また，形式的に $a_0 = F(0)$ と表す．

複変数の母関数の例：

$$\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} f(l,m,n)\frac{x^l y^m z^n}{n!}.$$

（l，m について通常型，n について指数型）

変数は無限個あってもよいが，どの項も無限個の変数を含んではならない．例：$x_1+x_2+x_3+\cdots$．

和・積は次に従う．

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)+\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n,$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)+\left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)\frac{x^n}{n!},$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)x^n,$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a_i b_{n-i}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

$\mathbb{C}$ 係数の形式的べき級数全体が成す環を $\mathbb{C}[[x]]$ と表す．m 変数 $x_1,\ldots,x_m$ の場合は $\mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_m]]$ と表す．これらは一意分解環 (unique factorization domain) をなす．

$F(x)G(x)=1$ であるとき，$G(x)=F(x)^{-1}$ と表す．$F(x)^{-1}$ が存在するための必要十分条件は $F(0)\neq 0$ である．$F(x)^{-1}G(x)=G(x)/F(x)$ と表

す．$(F(x)G(x))^{-1} = F(x)^{-1}G(x)^{-1}$，$(F(x)^{-1})^{-1} = F(x)$ が成り立つ（それぞれ $(\cdot)^{-1}$ が存在する場合）．

例 1.1.5. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．$\left(\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n\right)(1-\alpha x) = 1$ より，

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$$

原則として，形式的べき級数を関数とみなしたときに成り立つ等式は，形式的べき級数の等式としても成立する（式が形式的べき級数としても well defined である場合に限る）．

例 1.1.6. 等式

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = 1 \tag{1}$$

は関数論的には正しい（$e^x e^{-x} = 1$）．すなわち，任意の $x \in \mathbb{C}$ について

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\right)\frac{x^n}{n!} = 1$$

が成り立つので，係数を比較して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0n}$$

である．したがって式 (1) は形式的べき級数に関する等式としても正しい．

例 1.1.7. 等式

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} = e\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

は関数論的には正しい（$e^{x+1} = e \cdot e^x$）が，左辺は $\mathbb{C}[[x]]$ の元でないため，形式的べき級数に関する主張にはならない．例えば左辺の定数項は $\sum_{n\geq 0} 1/n!$ であり，この級数は $\mathbb{C}[[x]]$ においては収束しない．

次の条件が成り立つとき，形式的べき級数の列 $F_1(x), F_2(x), \dots$ が $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ に**収束する**という：

$$\forall n \geq 0,\ \exists\delta(n) \text{ s.t. } \forall i \geq \delta(n),\ [x^n]F_i(x) = a_n.$$

このことを $F_i(x) \to F(x)$ や $\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F(x)$ と表す．

非零な形式的べき級数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ の**次数** $\deg F(x)$ を

$$\deg F(x) = \min\{n : a_n \neq 0\}$$

で定める（$\deg 0 = \infty$ っぽい）．$\deg F(x)G(x) = \deg F(x) + \deg G(x)$ に注意．これを用いると，$F_i(x)$ が収束する条件は

$$\lim_{i\to\infty} \deg(F_{i+1}(x) - F_i(x)) = \infty$$

と表せる．また，$F_i(x)$ が $F(x)$ に収束する条件は

$$\lim_{i\to\infty} \deg(F(x) - F_i(x)) = \infty$$

とも表せる．

命題 1.1.8. 無限級数 $\sum_{j\geq 0} F_j(x)$ が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{j\to\infty} \deg F_j(x) = \infty.$$

証明. $\widetilde{F}_i(x) = \sum_{j=0}^{i} F_j(x)$ とすると，$\deg(\widetilde{F}_{i+1}(x) - \widetilde{F}_i(x)) = \deg F_{i+1}(x)$.

□

命題 1.1.9. 無限積 $\prod_{j\geq 1}(1 + G_j(x))$ $(G_j(0) = 0)$ が収束するための必要十分条件は，

$$\lim_{j\to\infty} \deg G_j(x) = \infty.$$

証明. $\widetilde{G}_i = \prod_{j=1}^{i}(1+G_j(x))$ とすると，

$$\begin{aligned}\deg(\widetilde{G}_{i+1}-\widetilde{G}_i) &= \deg\frac{\widetilde{G}_{i+1}-\widetilde{G}_i}{\widetilde{G}_i} \quad (\widetilde{G}_i^{-1}\text{ の定数項は非零})\\ &= \deg\left(\frac{\widetilde{G}_{i+1}}{\widetilde{G}_i}-1\right)\\ &= \deg G_{i+1}(x).\end{aligned}$$

□

$F(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ は $F_j(x)=a_jx^j$ の無限級数ともみなせる．

$F(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ と $G(0)=0$ を満たす $G(x)$ について，**合成** $F(G(x))$ を

$$F(G(x))=\sum_{n\geq 0}a_nG(x)^n$$

で定める．

例 1.1.10. $F(x)\in\mathbb{C}[[x]]$ が $F(0)=0$ を満たすとき，$\lambda\in\mathbb{C}$ について

$$(1+F(x))^{\lambda}=\sum_{n\geq 0}\binom{\lambda}{n}F(x)^n$$

と定義する．ただし $\binom{\lambda}{n}=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)/n!$．

$F(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ について，形式的導関数 $F'(x)$ (または $\frac{dF}{dx}$ や $DF(x)$) を

$$F'(x)=\sum_{n\geq 0}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$$

で定める．次の成立が確認できる：

$$\begin{aligned}(F+G)' &= F'+G',\\ (FG)' &= F'G+FG',\\ F(G(x))' &= G'(x)F'(G(x)).\end{aligned}$$

例 1.1.11. $F(0)=1$ とし，次を満たす形式的べき級数 $G(x)$ をとる：

$$G'(x)=\frac{F'(x)}{F(x)},\qquad G(0)=0.$$

関数論的にこの条件を $F(x)$ について解くと，

$$F(x)=\exp G(x) \tag{2}$$

が得られる．ただし

$$\exp G(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{G(x)^n}{n!}$$

と定める．式 (2) は形式的べき級数の等式としても正しい．

証明. $F(x)$ の係数を動かすことを考える．

$$F(x)=1+\sum_{n\geq 1}a_nx^n,$$
$$G(x)=\sum_{n\geq 1}b_nx^n,$$
$$\exp G(x)=1+\sum_{n\geq 1}c_nx^n$$

とおく．各 b_n は有限個の a_i の多項式なので，c_n も有限個の a_i の多項式である．

$$c_n=p_n(a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

とおく．各 a_i の値を適当に定めると，原点の近傍 $U\subseteq\mathbb{C}$ であって U 上で $1+\sum_{n\geq 1}a_nx^n$ が収束するようなものがとれる．U 上で $F(x)=\exp G(x)$ が成り立つので，これらの a_i の値に対して $a_n=c_n=p_n(a_1,\ldots,a_m)$．

したがって，$\mathbb{C}^m$ の近傍で $p_n(a_1,\ldots,a_m)$ が a_n に一致するので，これらは多項式として等しい．よって任意の a_i について $a_n=p_n(a_1,\ldots,a_m)=c_n$ であり，$F(G)=\exp G(x)$ が形式的べき級数の等式として成立する． □

例 1.1.12. $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ について，母関数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ の簡単な式を求める．

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n\geq 2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\
&= 1 + x + x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x)
\end{aligned}$$

より，これを $F(x)$ について解いて

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

を得る．

例 1.1.13. $a_0 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n a_{n-1}$ $(n \geq 0)$ について，母関数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n / n!$ の簡単な式を求める．

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} n a_{n-1} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} a_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

すなわち

$$F'(x) = F(x) + x F(x)$$

である．これを例 1.1.11 と同様に解いて，$F(x) = \exp\bigl(x + \frac{1}{2}x^2\bigr)$．