1 What is Enumerative Combinatorics?

1.6 Alternating Permutations, Euler Numbers, and the *cd*-Index of $\mathfrak{S}_n$

1.6.1 Basic Properties

Alternating permutations $w \in \mathfrak{S}_n$ の個数 E_n をオイラー数と呼ぶ．

命題 1.6.1.

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \sec x + \tan x.$$

なお $\sum_{n\geq 0} E_n \frac{(-x)^n}{n!} = \sec x - \tan x$ より，

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sec x,$$

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan x.$$

E_{2n} は secant number，E_{2n+1} は tangent number とも呼ばれる．

証明. $0 \leq k \leq n$ とする．$S \in \binom{[n]}{k}$ をとり，$\overline{S} = [n] - S$ とする．S の reverse alternating permutation u と，$\overline{S}$ の reverse alternating permutation v をとる．$\mathrm{rev}(u), n+1, v$ の連結を w とする．以上の手順ですべての alternationg permutation と reverse alternating permutation $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ をちょうど 1 回ずつ生成できる．したがって，$n \geq 1$ について

$$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$

$y = \sum_{n\geq 0} E_n x^n/n!$ とする．上の等式を $x^n/n!$ 倍して足し上げると，微分方程式

$$2y' = y^2 + 1,$$

が導かれる．初期条件 $y(0) = E_0 = 1$ により，$y = \sec x + \tan x$ が唯一解． $\square$

等式

$$\sum_{n\geq 0} E_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = (\cos x)^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)^{-1},$$

は，

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = e^x = (e^{-x})^{-1} = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)^{-1},$$

とあわせて次のように一般化できる．

定理.

$$f_k(n) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : D(w) = \{k, 2k, 3k, \ldots\} \cap [n-1]\},$$

とするとき，

$$\sum_{n\geq 0} f_k(kn)\frac{x^{kn}}{(kn)!} = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{kn}}{(kn)!}\right)^{-1}.$$

証明.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{kn}}{(kn)!}\right)^{-1} &= \left(1 - \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{kn}}{(kn)!}\right)^{-1}\\ &= \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{kn}}{(kn)!}\right)^{j}.\end{aligned}$$

右辺の j 乗部分を展開すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{kn}}{(kn)!}\right)^j \\
&= \sum_{j\geq 0}\sum_{N\geq 0}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=N\\ a_i\geq 1}}\binom{kN}{ka_1,\ldots,ka_j}(-1)^{N-j}\frac{x^{kN}}{(kN)!}.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
S &= \{k, 2k, \ldots, (N-1)k\},\\
T &= \{ka_1, k(a_1+a_2), \ldots, k(a_1+\cdots+a_{j-1})\},
\end{aligned}
$$

とおくと $\binom{kN}{ka_1,\ldots,ka_j} = \alpha_{kN}(T)$ $(= \#\{w \in \mathfrak{S}_{kN} : D(w) \subseteq T\})$ である．$\#S = N-1$，$\#T = j-1$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0}\sum_{N\geq 0}\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_j=N\\ a_i\geq 1}}\binom{kN}{ka_1,\ldots,ka_j}(-1)^{N-j}\frac{x^{kN}}{(kN)!}\\
&= \sum_{N\geq 0}\sum_{T\subseteq S}(-1)^{\#S-\#T}\alpha_{kN}(T)\frac{x^{kN}}{(kN)!}\\
&= \sum_{N\geq 0}\beta_{kN}(S)\frac{x^{kN}}{(kN)!},
\end{aligned}
$$

ただし $\beta_{kN}(S) = \#\{w \in \mathfrak{S}_{kN} : D(w) = S\}$． □

これはさらに一般化できる．演習問題 146：

$$
\sum_{n\geq 0} f_k(kn+i)\frac{x^{kn+i}}{(kn+i)!} = \frac{\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{nk+i}}{(kn+i)!}}{\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{kn}}{(kn)!}} \quad (1 \leq i \leq k).
$$

$i = k$ として両辺に 1 を足すと先ほどの等式が，$k = 2$，$i = 1$ とすれば $\sum_{n\geq 0} E_{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x/\cos x = \tan x$ が得られる．

1.6.2 Flip Equivalence of Increasing Binary Trees

w の increasing binary tree $T(w)$ について，頂点 v の左右の子を入れ替える操作を **flip** という．n 頂点の increasing binary tree T に何度か flip を行って T' にできるとき，T と T' が**同値**であるとする．

これらの同値類の個数を $f(n)$ とする．すなわち $f(n)$ は子同士の順番の違いを無視した increasing binary tree の個数．このような木は $(1,2)$-木と呼ばれる．

命題 1.6.2.

$$f(n) = E_n.$$

証明. 漸化式を考える．根が子を 1 個持つものと 2 個持つもので分けて数えると，

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} f(i) f(n-i).$$

$y = \sum_{n\geq 1} f(n)x^n/n!$ とすると

$$y' = 1 + y + \frac{1}{2}y^2, \quad y(0) = 0.$$

$2(y+1)' = 1 + (y+1)^2$ より，唯一解は $y = \sec x + \tan x - 1$． □