3.21 Differential Posets

shino16

March 20, 2023

今回の内容

Hasse walk (Hasse 図上の walk) の数え上げを扱う．
r-differential poset P を考え，$\widehat{KP}$ 上の連続写像 U, D に関する代数的手法を適用する．

復習

定義

Definition

$r \in \mathbb{P}$ について，r-**differential poset** は以下を満たす poset P

(D1) $\hat{0} \in P$, locally finite, graded

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k+r$ 元が t を被覆

(D3) $s, t \in P$ $(s \neq t)$ について，s, t が同じ j 元を被覆 $\iff$ 同じ j 元が s, t を被覆

定義

Definition

$r \in \mathbb{P}$ について，r**-differential poset** は以下を満たす poset P

(D1) $\hat{0} \in P$, locally finite, graded

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k+r$ 元が t を被覆

(D3) $s, t \in P$ ($s \neq t$) について，s, t が同じ j 元を被覆 $\iff$ 同じ j 元が s, t を被覆

Remark

(D3) において $j = 0, 1$. (証明) $u_1, u_2 \lessdot s, t$ のとき (D3) より $v_1, v_2 \lessdot u_1, u_2$. 無限降下法

定義

Definition

$r \in \mathbb{P}$ について，r-**differential poset** は以下を満たす poset P

(D1) $\hat{0} \in P$, locally finite, graded

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k+r$ 元が t を被覆

(D3) $s, t \in P\ (s \neq t)$ について，s, t が同じ j 元を被覆 $\iff$ 同じ j 元が s, t を被覆

Remark

(D3) において $j = 0, 1$．(証明) $u_1, u_2 \lessdot s, t$ のとき (D3) より $v_1, v_2 \lessdot u_1, u_2$．無限降下法

Remark

r-differential lattice L について，(D3) $\iff$ L がモジュラ束

定義

Definition

$r \in \mathbb{P}$ について，r-**differential poset** は以下を満たす poset P

(D1) $\hat{0} \in P$, locally finite, graded

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k+r$ 元が t を被覆

(D3) $s, t \in P\,(s \neq t)$ について，s, t が同じ j 元を被覆 $\iff$ 同じ j 元が s, t を被覆

Remark

(D3) において $j = 0, 1$．(証明) $u_1, u_2 \lessdot s, t$ のとき (D3) より $v_1, v_2 \lessdot u_1, u_2$．無限降下法

Remark

r-differential lattice L について，(D3) $\iff$ L がモジュラ束

Example

ヤング束 $J_f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \{I : 有限順序イデアル\}$：$1$-differential poset

線形代数との繋がり

Definition

K：体，P：poset について，

$$\widehat{KP} := \{P \text{ の元の線形結合 } (K \text{ 係数})\} = \left\{ \sum_{t \in P} c_t t : c_t \in K \right\}$$

$$KP := \{P \text{ の\textbf{有限個の}元の線形結合 } (K \text{ 係数})\}$$

線形代数との繋がり

Definition

K：体，P：poset について，

$$\widehat{KP} \coloneqq \{P \text{ の元の線形結合 } (K \text{ 係数})\} = \left\{ \sum_{t \in P} c_t t : c_t \in K \right\}$$

$$KP \coloneqq \{P \text{ の}\textbf{有限個の}\text{元の線形結合 } (K \text{ 係数})\}$$

Definition

$$\phi\colon \widehat{KP} \to \widehat{KP} \text{ が}\textbf{連続} \overset{\text{def}}{\iff} \phi\left(\sum_t c_t t\right) = \sum_t c_t \phi(t)$$

線形代数との繋がり

Definition

K：体，P：poset について，

$$\widehat{KP} := \{P \text{ の元の線形結合 } (K \text{ 係数})\} = \left\{ \sum_{t \in P} c_t t : c_t \in K \right\}$$

$$KP := \{P \text{ の}\textbf{有限個の}\text{元の線形結合 } (K \text{ 係数})\}$$

Definition

$$\phi \colon \widehat{KP} \to \widehat{KP} \text{ が}\textbf{連続} \overset{\text{def}}{\iff} \phi\left(\sum_t c_t t\right) = \sum_t c_t \phi(t)$$

Remark

$|P| = \infty$ で $(\forall t)\ \phi(t) = u$ などは，$\phi(\sum_t t) = \sum_{t \in P} u$ の右辺が定義できず NG.

Up, Down

Definition

(D1) を満たす P について

$$U(s) := \sum_{t \gtrdot s} t,$$

$$D(s) := \sum_{t \lessdot s} t$$

Up, Down

Definition

(D1) を満たす P について

$$U(s) := \sum_{t \gtrdot s} t,$$

$$D(s) := \sum_{t \lessdot s} t$$

Proposition (3.21.3)

$$P \text{ が } r\text{-differential} \iff DU - UD = rI$$

ここで $I : \widehat{KP} \to \widehat{KP}$ は恒等写像.

($\Longrightarrow$ の証明)

Up, Down

Definition

(D1) を満たす P について

$$U(s) := \sum_{t \gtrdot s} t,$$

$$D(s) := \sum_{t \lessdot s} t$$

Proposition (3.21.3)

$$P \text{ が } r\text{-differential} \iff DU - UD = rI$$

ここで $I : \widehat{KP} \to \widehat{KP}$ は恒等写像.

($\Longrightarrow$ の証明)

- (D2) より $[t]UD(t) = k \implies [t]DU(t) = k + r$.

Up, Down

Definition

(D1) を満たす P について

$$U(s) := \sum_{t \gtrdot s} t,$$

$$D(s) := \sum_{t \lessdot s} t$$

Proposition (3.21.3)

$$P \text{ が } r\text{-differential} \iff DU - UD = rI$$

ここで $I : \widehat{KP} \to \widehat{KP}$ は恒等写像.

($\Longrightarrow$ の証明)

- (D2) より $[t]UD(t) = k \implies [t]DU(t) = k + r$.
- (D3) より $s \neq t$ について $[s]UD(t) = j \implies [s]DU(t) = j$.

Up, Down

Definition

(D1) を満たす P について

$$U(s) := \sum_{t \gtrdot s} t,$$

$$D(s) := \sum_{t \lessdot s} t$$

Proposition (3.21.3)

$$P \text{ が } r\text{-differential} \iff DU - UD = rI$$

ここで $I : \widehat{KP} \to \widehat{KP}$ は恒等写像.

($\Longrightarrow$ の証明)

- (D2) より $[t]UD(t) = k \implies [t]DU(t) = k + r$.
- (D3) より $s \neq t$ について $[s]UD(t) = j \implies [s]DU(t) = j$.

逆も同様.

Definition

$X \subseteq P$ について，

$$\boldsymbol{X} = \sum_{t \in X} t$$

例：$\boldsymbol{P} = \sum_{t \in P} t$

Definition

$X \subseteq P$ について，

$$\boldsymbol{X} = \sum_{t \in X} t$$

例：$\boldsymbol{P} = \sum_{t \in P} t$

Proposition (3.21.4)

P が r-differential であるとき

$$D\boldsymbol{P} = (U + r)\boldsymbol{P} \quad (= U\boldsymbol{P} + r\boldsymbol{P})$$

Definition

$X \subseteq P$ について，

$$\boldsymbol{X} = \sum_{t \in X} t$$

例：$\boldsymbol{P} = \sum_{t \in P} t$

Proposition (3.21.4)

P が r-differential であるとき

$$D\boldsymbol{P} = (U + r)\boldsymbol{P} \quad (= U\boldsymbol{P} + r\boldsymbol{P})$$

(証明)

$$[t]U\boldsymbol{P} = \#\{s : t \gtrdot s\} = \#(t \text{ が被覆する元})$$

$$[t]D\boldsymbol{P} = \#\{s : t \lessdot s\} = \#(t \text{ を被覆する元})$$

Definition

$X \subseteq P$ について，

$$\boldsymbol{X} = \sum_{t \in X} t$$

例：$\boldsymbol{P} = \sum_{t \in P} t$

Proposition (3.21.4)

P が r-differential であるとき

$$D\boldsymbol{P} = (U + r)\boldsymbol{P} \quad (= U\boldsymbol{P} + r\boldsymbol{P})$$

(証明)

$$[t]U\boldsymbol{P} = \#\{s : t \gtrdot s\} = \#(t \text{ が被覆する元})$$
$$[t]D\boldsymbol{P} = \#\{s : t \lessdot s\} = \#(t \text{ を被覆する元})$$

(D2) $t \in P$ が k 元を被覆 $\iff$ $k + r$ 元が t を被覆

$$[t]U\boldsymbol{P} = k \iff [t]D\boldsymbol{P} = k + r$$

双線型形式

Definition

$\langle \bullet, \bullet \rangle \colon \widehat{KP} \times KP \to K$ を次で定める：

$$\left\langle \sum a_t t, \sum b_t t \right\rangle = \sum a_t b_t \qquad \text{(ドット積っぽいやつ)}$$

※ $\sum b_t t \in KP$ は有限個の項しかないから，右辺の項も有限個.

双線型形式

Definition

$\langle \bullet, \bullet \rangle \colon \widehat{KP} \times KP \to K$ を次で定める：

$$\left\langle \sum a_t t, \sum b_t t \right\rangle = \sum a_t b_t \qquad \text{(ドット積っぽいやつ)}$$

※ $\sum b_t t \in KP$ は有限個の項しかないから，右辺の項も有限個．

例えば $[t]U\boldsymbol{P} = \langle U\boldsymbol{P}, t\rangle$ と書ける．

双線型形式

Definition

$\langle \bullet, \bullet \rangle : \widehat{KP} \times KP \to K$ を次で定める：

$$\left\langle \sum a_t t, \sum b_t t \right\rangle = \sum a_t b_t \qquad \text{(ドット積っぽいやつ)}$$

※ $\sum b_t t \in KP$ は有限個の項しかないから，右辺の項も有限個．

例えば $[t]U\boldsymbol{P} = \langle U\boldsymbol{P}, t \rangle$ と書ける．
例：$e(t) = \#(\text{飽和鎖 } \hat{0} = t_0 \lessdot t_1 \lessdot \cdots \lessdot t_n = t)$，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について

$$e(t) = \langle U^n \hat{0}, t \rangle$$

$$\sum_{t \in P_n} e(t) = \langle U^n \hat{0}, \boldsymbol{P_n} \rangle$$

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = \langle D^n U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$$

作用素での表現

関係式 $DU - UD = rI$ を

$$\left(r\frac{d}{dz}\right)z - z\left(r\frac{d}{dz}\right) = r$$

で表現．すなわち $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$．

作用素での表現

関係式 $DU - UD = rI$ を

$$\left(r\frac{d}{dz}\right)z - z\left(r\frac{d}{dz}\right) = r$$

で表現．すなわち $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$．

Example

$f(U)$：U のべき級数について，
$r\frac{d}{dz}(f(z)\cdot g(z)) = r\frac{d}{dz}f(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot r\frac{d}{dz}g(z)$ より

$$Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D$$

作用素での表現

関係式 $DU - UD = rI$ を

$$\left(r\frac{d}{dz}\right)z - z\left(r\frac{d}{dz}\right) = r$$

で表現．すなわち $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$．

Example

$f(U)$：U のべき級数について，
$r\frac{d}{dz}(f(z) \cdot g(z)) = r\frac{d}{dz}f(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot r\frac{d}{dz}g(z)$ より

$$Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D$$

目標：DU を UD に交換していって，U^iD^j の形を作ろう

作用素での表現

関係式 $DU - UD = rI$ を

$$\left(r\frac{d}{dz}\right)z - z\left(r\frac{d}{dz}\right) = r$$

で表現．すなわち $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$．

Example

$f(U)$：U のべき級数について，
$r\frac{d}{dz}(f(z)\cdot g(z)) = r\frac{d}{dz}f(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot r\frac{d}{dz}g(z)$ より

$$Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D$$

目標：DU を UD に交換していって，U^iD^j の形を作ろう
理由：$D^j\hat{0} = \delta_{j0}\hat{0}$

作用素係数のべき級数

モチベーション：U, D を含む等式を示すため，U, D の式を係数に持つ母関数を考えたい

作用素係数のべき級数

モチベーション：U, D を含む等式を示すため，U, D の式を係数に持つ母関数を考えたい

Definition

x のべき級数 ($K[U, D]$ 係数) $F(x)$ を考える．つまり

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} p_n(U, D)x^n \qquad (p_n \text{ は多項式})$$

$F(x)$ は $\widehat{KP}$ に作用する：

$$\left(\sum_n p_n(U, D)x^n\right)t = \left(\sum_n p_n(U, D)t\right)x^n$$

作用素係数のべき級数

モチベーション：U, D を含む等式を示すため，U, D の式を係数に持つ母関数を考えたい

Definition

x のべき級数 ($K[U, D]$ 係数) $F(x)$ を考える．つまり

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} p_n(U, D) x^n \qquad (p_n \text{ は多項式})$$

$F(x)$ は $\widehat{KP}$ に作用する：

$$\left(\sum_n p_n(U, D) x^n \right) t = \left(\sum_n p_n(U, D) t \right) x^n$$

例：$e^{Dx} = \sum_{n \geq 0} \frac{D^n x^n}{n!}$

$$\begin{aligned} e^{Dx} \hat{0} &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{D^n}{n!} x^n \right) \hat{0} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{D^n \hat{0}}{n!} x^n \\ &= \hat{0} \qquad (n = 0 \text{ だけ残る}) \end{aligned}$$

$(U+D)^n$

Theorem (3.21.6 (a))

$$e^{(U+D)x} = e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{Dx}$$

※ x は不定元

左辺は $(U+D)^n$ の EGF.

$$e^{(U+D)x} = \sum_{n\geq 0}(U+D)^n \frac{x^n}{n!}$$

$(U+D)^n$

Theorem (3.21.6 (a))

$$e^{(U+D)x} = e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{Dx}$$

※ x は不定元

左辺は $(U+D)^n$ の EGF.

$$e^{(U+D)x} = \sum_{n\geq 0}(U+D)^n\frac{x^n}{n!}$$

(証明) $J(x) :=$ (右辺) について

$$J(0) = 1,$$

$$\frac{d}{dx}J(x) = (D+U)J(x) \qquad \text{(ここで } D = r\tfrac{d}{dU} \text{ を使った)}$$

$e^{Dx} f(U, y)$

Theorem (3.21.6 (b))

$f(U, y) = y$ のべき級数 ($K[U]$ 係数) とする．すなわち

$$f(U, y) = \sum_{n \geq 0} p_n(U) y^n \qquad \text{(各 } p_n \text{ は多項式)}$$

このとき，

$$e^{Dx} f(U, y) = f(U + rx, y) e^{Dx}$$

$e^{Dx} f(U, y)$

Theorem (3.21.6 (b))

$$e^{Dx} f(U, y) = f(U + rx, y) e^{Dx}$$

(証明) $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$ とし，各辺を $g(z)$ に作用させる．

$e^{Dx} f(U, y)$

Theorem (3.21.6 (b))

$$e^{Dx} f(U, y) = f(U + rx, y) e^{Dx}$$

(証明) $U = z$，$D = r\frac{d}{dz}$ とし，各辺を $g(z)$ に作用させる．

$$e^{\left(r\frac{d}{dz}\right)x}(f(z,y)\cdot g(z)) = \sum_{n\geq 0} \frac{r^n x^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n}(f(z,y)\cdot g(z))$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{r^n x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dz^k} f(z,y) \cdot \frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}} g(z)$$

$$f(z+rx, y) e^{\left(r\frac{d}{dz}\right)x} g(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(rx)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} f(z,y) \cdot e^{\left(r\frac{d}{dz}\right)x} g(z) \qquad \text{(Taylor 展}$$

$$= \sum_{k,m\geq 0} \frac{(rx)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} f(z,y) \cdot \frac{r^m x^m}{m!} \frac{d^m}{dz^m} g(z)$$

$$= \sum_{k,m\geq 0} \frac{r^{k+m} x^{k+m}}{(k+m)!} \frac{(k+m)!}{k!\,m!} \frac{d^k}{dz^k} f(z,y) \cdot \frac{d^m}{dz^m} g(z$$

Hasse Walk

定義

Definition

s から t への長さ ℓ の **Hasse walk**：

$$s = t_0, t_1, \ldots, t_\ell = t$$

ただし $t_{i-1} \lessdot t_i$ or $t_{i-1} \gtrdot t_i$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)r^n$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n\hat{0}, \hat{0}\rangle$ に注意．

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ に注意．

$$\sum_{n \geq 0} \kappa_n \frac{x^n}{n!} = \left\langle \sum_{n \geq 0} (U+D)^n \frac{x^n}{n!} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P : r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n\hat{0}, \hat{0}\rangle$ に注意．

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\kappa_n\frac{x^n}{n!} &= \left\langle \sum_{n\geq 0}(U+D)^n\frac{x^n}{n!}\hat{0}, \hat{0}\right\rangle \\ &= \left\langle e^{(U+D)x}\hat{0}, \hat{0}\right\rangle\end{aligned}$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n\hat{0}, \hat{0}\rangle$ に注意．

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\kappa_n\frac{x^n}{n!} &= \left\langle \sum_{n\geq 0}(U+D)^n\frac{x^n}{n!}\hat{0},\hat{0}\right\rangle \\ &= \left\langle e^{(U+D)x}\hat{0},\hat{0}\right\rangle \\ &= \left\langle e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{Dx}\hat{0},\hat{0}\right\rangle\end{aligned}$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ に注意．

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \kappa_n \frac{x^n}{n!} &= \left\langle \sum_{n \geq 0} (U+D)^n \frac{x^n}{n!} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{(U+D)x} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\frac{1}{2}rx^2 + Ux} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\frac{1}{2}rx^2 + Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle
\end{aligned}$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ に注意．

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \kappa_n \frac{x^n}{n!} &= \left\langle \sum_{n \geq 0} (U+D)^n \frac{x^n}{n!} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{(U+D)x} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\frac{1}{2}rx^2 + Ux} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{\frac{1}{2}rx^2 + Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= e^{\frac{1}{2}rx^2} \qquad (\langle \bullet, \bullet \rangle \text{ の定義})
\end{aligned}$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ に注意．

$$\sum_{n \geq 0} \kappa_n \frac{x^n}{n!} = e^{\frac{1}{2}rx^2} \qquad (\langle \bullet, \bullet \rangle \text{ の定義})$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n\hat{0}, \hat{0}\rangle$ に注意．

$$\sum_{n\geq 0}\kappa_n\frac{x^n}{n!} = e^{\frac{1}{2}rx^2} \qquad (\langle\bullet,\bullet\rangle \text{ の定義})$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{r^n x^{2n}}{2^n n!}$$

閉じた Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.7)

P：r-differential，$\kappa_\ell = \#(\hat{0}$ から $\hat{0}$ への長さ ℓ の Hasse walk) について，

$$\kappa_{2n-1} = 0, \qquad \kappa_{2n} = (2n-1)!!r^n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)r^n$$

(証明) $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ に注意．

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \kappa_n \frac{x^n}{n!} &= e^{\frac{1}{2}rx^2} \qquad (\langle \bullet, \bullet \rangle \text{ の定義}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{r^n x^{2n}}{2^n n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} r^n (2n-1)!! \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

最後の等号は $\frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}$ を使った．

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \sum_{n \geq 0} \langle D^n U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} &= \sum_{n \geq 0} \langle D^n U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n \geq 0} \left\langle \frac{D^n x^n}{n!} \frac{U^n x^n}{n!} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle
\end{aligned}$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} &= \sum_{n \geq 0} \langle D^n U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \\
&= \sum_{n \geq 0} \left\langle \frac{D^n x^n}{n!} \frac{U^n x^n}{n!} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle
\end{aligned}$$

$(m \neq n$ のとき $\langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0)$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

$(m \neq n$ のとき $\langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0)$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

$$(m \neq n \text{ のとき } \langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0)$$

$$= \left\langle e^{(U+rx)x} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P : r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

$$(m \neq n \text{ のとき } \langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0)$$

$$= \left\langle e^{(U+rx)x} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

$$= \left\langle e^{(U+rx)x} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} &= \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&\qquad (m \neq n \text{ のとき } \langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0) \\
&= \left\langle e^{(U+rx)x} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{(U+rx)x} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= e^{rx^2}
\end{aligned}$$

上がって下がる Hasse walk の数え上げ

Theorem (3.21.8)

P：r-differential，$P_n = \{t : \rho(t) = n\}$ について，$\hat{0}$ から $\hat{0}$ への n 回上がって n 回下がる Hasse walk の個数は

$$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = r^n n!$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{t \in P_n} e(t)^2 \right) \frac{x^{2n}}{(n!)^2} &= \left\langle e^{Dx} e^{Ux} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&\qquad (m \neq n \text{ のとき } \langle D^m U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle = 0) \\
&= \left\langle e^{(U+rx)x} e^{Dx} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= \left\langle e^{(U+rx)x} \hat{0}, \hat{0} \right\rangle \\
&= e^{rx^2} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{r^n x^{2n}}{n!}
\end{aligned}$$

ここまでの振り返り

1. $\kappa_n = \langle (U+D)^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$，$\sum_{t \in P_n} e(t)^2 = \langle D^n U^n \hat{0}, \hat{0} \rangle$ といった関係式を EGF で表す
2. $DU - UD = rI$ を用いて，D を交換し U の右側に追いやる
   - ここで U, D を作用素 $z, r\frac{d}{dz}$ で表現
3. $D\hat{0} = 0$ を用いて整理する
4. κ_n，$\sum_{t \in P_n} e(t)^2$ のかんたんな式を得る

ここからは数え上げ対象の EGF を変形してかんたんに表していく．

$DP = (U + r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P : r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

$DP = (U+r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P : r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(1 つ目の証明) $L(x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}$ について,

$$L(0) = 1,$$

$DP = (U + r)\boldsymbol{P}$ の利用

Theorem (3.21.9)

P：r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx + \frac{1}{2}rx^2 + Ux}\boldsymbol{P},$$

$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx + rx^2 + 2Ux}\boldsymbol{P},$$

$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx + \frac{3}{2}rx^2 + 2Ux}\boldsymbol{P}$$

(1 つ目の証明) $L(x) = e^{rx + \frac{1}{2}rx^2 + Ux}$ について，

$$L(0) = 1,$$

$$DL(x)\boldsymbol{P} = (rxL(x) + L(x)D)\boldsymbol{P} \qquad (Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D)$$

$DP = (U+r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P : r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(1 つ目の証明) $L(x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}$ について,

$$L(0) = 1,$$
$$\begin{aligned} DL(x)\boldsymbol{P} &= (rxL(x) + L(x)D)\boldsymbol{P} && \left(Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D\right) \\ &= (rxL(x) + L(x)(U+r))\boldsymbol{P} && (D\boldsymbol{P} = (U+r)\boldsymbol{P}) \end{aligned}$$

$DP = (U + r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P：r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(1 つ目の証明) $L(x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}$ について，

$$L(0) = 1,$$

$$\begin{aligned} DL(x)\boldsymbol{P} &= (rxL(x) + L(x)D)\boldsymbol{P} && \left(Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D\right) \\ &= (rxL(x) + L(x)(U + r))\boldsymbol{P} && (D\boldsymbol{P} = (U + r)\boldsymbol{P}) \\ &= (rx + U + r)L(x)\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

$DP = (U+r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P : r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(1 つ目の証明) $L(x) = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}$ について，

$$L(0) = 1,$$

$$\begin{aligned} DL(x)\boldsymbol{P} &= (rxL(x) + L(x)D)\boldsymbol{P} && \left(Df(U) = r\frac{df(U)}{dU} + f(U)D\right) \\ &= (rxL(x) + L(x)(U+r))\boldsymbol{P} && (D\boldsymbol{P} = (U+r)\boldsymbol{P}) \\ &= (rx + U + r)L(x)\boldsymbol{P} \\ &= \frac{d}{dx}L(x)\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

$DP = (U + r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P : r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$

$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$

$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(2 つ目の証明)

$$\begin{aligned} e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} &= e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{Dx}\boldsymbol{P} \\ &= e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P} \\ &= e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

$DP = (U+r)P$ の利用

Theorem (3.21.9)

P：r-differential について

$$e^{Dx}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} = e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P},$$
$$e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} = e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P}$$

(2 つ目の証明)

$$\begin{aligned} e^{(U+D)x}\boldsymbol{P} &= e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{Dx}\boldsymbol{P} \\ &= e^{\frac{1}{2}rx^2+Ux}e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P} \\ &= e^{rx+rx^2+2Ux}\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

(3 つ目の証明)

$$\begin{aligned} e^{Dx}e^{Ux}\boldsymbol{P} &= e^{(U+rx)x}e^{Dx}\boldsymbol{P} \\ &= e^{(U+rx)x}e^{rx+\frac{1}{2}rx^2+Ux}\boldsymbol{P} \\ &= e^{rx+\frac{3}{2}rx^2+2Ux}\boldsymbol{P} \end{aligned}$$

$\alpha(0 \to n)$，δ_n の EGF

Definition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{t \in P_n} e(t)$$

$$\delta_n = \#(\hat{0}\text{ 起点，長さ } n \text{ の Hasse walk})$$

$\alpha(0 \to n)$，δ_n の EGF

Definition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{t \in P_n} e(t)$$

$$\delta_n = \#(\hat{0} \text{ 起点，長さ } n \text{ の Hasse walk})$$

Theorem (3.21.10)

P：r-differential について

$$\sum_{n \geq 0} \alpha(0 \to n) \frac{x^n}{n!} = e^{rx + \frac{1}{2}rx^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \frac{x^n}{n!} = e^{rx + rx^2}$$

$\alpha(0 \to n)$, δ_n の EGF

Theorem (3.21.10)

P : r-differential について

$$\sum_{n \geq 0} \alpha(0 \to n) \frac{x^n}{n!} = e^{rx + \frac{1}{2} rx^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \frac{x^n}{n!} = e^{rx + rx^2}$$

(証明)

$\alpha(0 \to n)$，δ_n の EGF

Theorem (3.21.10)

P：r-differential について

$$\sum_{n \geq 0} \alpha(0 \to n) \frac{x^n}{n!} = e^{rx + \frac{1}{2} rx^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \frac{x^n}{n!} = e^{rx + rx^2}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \alpha(0 \to n) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \langle D^n \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \frac{x^n}{n!} \\
&= \langle e^{Dx} \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \\
&= \langle e^{rx + \frac{1}{2} rx^2 + Ux} \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \\
&= e^{rx + \frac{1}{2} rx^2}
\end{aligned}$$

$\alpha(0 \to n)$，δ_n の EGF

Theorem (3.21.10)

P：r-differential について

$$\sum_{n \geq 0} \alpha(0 \to n) \frac{x^n}{n!} = e^{rx + \frac{1}{2}rx^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \frac{x^n}{n!} = e^{rx + rx^2}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \delta_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \langle (U + D)^n \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \frac{x^n}{n!} \\
&= \langle e^{(U+D)x} \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \\
&= \langle e^{rx + rx^2 + 2Ux} \boldsymbol{P}, \hat{0} \rangle \\
&= e^{rx + rx^2}
\end{aligned}$$

順列との関係

$w \in \mathfrak{S}_n$ について，$c(w) :=$ (サイクルの個数)

Proposition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{w^2=1} r^{c(w)}$$

(証明)

順列との関係

$w \in \mathfrak{S}_n$ について，$c(w) :=$ (サイクルの個数)

Proposition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{w^2=1} r^{c(w)}$$

(証明) $w^2 = 1 \iff w$ の各サイクルが長さ ≤ 2

順列との関係

$w \in \mathfrak{S}_n$ について，$c(w) :=$ (サイクルの個数)

Proposition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{w^2=1} r^{c(w)}$$

(証明) $w^2 = 1 \iff w$ の各サイクルが長さ ≤ 2

$$\begin{aligned}
\sum_{w^2=1} r^{c(w)} &= \sum_{2k \leq n} \frac{r^{n-k}}{k!} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdots \binom{n-2k+2}{2} \\
&= \sum_{2k \leq n} \frac{n!\, r^{n-k}}{k!\, 2^k\, (n-2k)!} \\
&= n!\, [x^n] e^{rx} e^{\frac{1}{2} rx^2} \\
&= \alpha(0 \to n)
\end{aligned}$$

順列との関係

$w \in \mathfrak{S}_n$ について，$c(w) :=$ (サイクルの個数)

Proposition

$$\alpha(0 \to n) = \sum_{w^2=1} r^{c(w)}$$

(証明) $w^2 = 1 \iff w$ の各サイクルが長さ ≤ 2

$$\begin{aligned}
\sum_{w^2=1} r^{c(w)} &= \sum_{2k \leq n} \frac{r^{n-k}}{k!} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdots \binom{n-2k+2}{2} \\
&= \sum_{2k \leq n} \frac{n!\, r^{n-k}}{k!\, 2^k\, (n-2k)!} \\
&= n!\, [x^n] e^{rx} e^{\frac{1}{2} rx^2} \\
&= \alpha(0 \to n)
\end{aligned}$$

$c_2(w) :=$ (長さ 2 のサイクルの個数)

$$\begin{aligned}
\sum_{w^2=1} r^{c(w)} 2^{c_2(w)} &= \sum_{2k \leq n} \frac{n!\, r^{n-k}}{k!\, (n-2k)!} \\
&= n!\, [x^n] e^{rx} e^{rx^2} = \delta_n
\end{aligned}$$

$\alpha(n \to n+k)$

$\alpha(0 \to n)$ を一般化しよう

$\alpha(n \to n+k)$

$\alpha(0 \to n)$ を一般化しよう
ランク母関数

$$F(P,q) := \sum_{n \geq 0} (\#P_n) q^n$$

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P : r-differential

$$\sum_{n,k\geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) exp\left(\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)}\right)$$

(証明)(テクい)

$\alpha(n \to n+k)$ の母関数

Theorem (3.21.11)

P：r-differential

$$\sum_{n,k \geq 0} \alpha(n \to n+k) q^n \frac{x^k}{k!} = F(P,q) exp(\frac{rx}{1-q} + \frac{rx^2}{2(1-q^2)})$$

(証明)(テクい) $\gamma : \widehat{KP} \to K[[q]]$ を次で定める：

$$\gamma\left(\sum_{t \in P} c_t t\right) = \sum_{t \in P} c_t q^{\rho(t)}$$