# 3.11 節の残り

shino16

2022 年 9 月 13 日

## 目次

# 0　復習

**定義．** $P$：ランク $n$ の有限階層的半順序集合，$\rho$：ランク関数，$S \subseteq [0,n]$ について

$$\begin{aligned} P_S &:= \{t \in P : \rho(t) \in S\}, \\ \alpha(S) &:= \#(P_S \text{ の極大鎖}), \\ \beta(S) &:= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S-T)} \alpha(T). \end{aligned}$$

**定義．** $P$：$\hat{0}, \hat{1}$ を持つ有限階層的半順序集合．
任意の区間 $[s,t]$ について，次を満たす極大鎖 $s = t_0 \lessdot \cdots \lessdot t_\ell = t$ が一意に存在するとき，$\lambda : \{(s,t) : s \lessdot t\} \to \mathbb{Z}$ は **R-ラベリング**：

$$\lambda(t_0, t_1) \leq \cdots \leq \lambda(t_{\ell-1}, t_\ell).$$

R-ラベリングが存在する半順序集合は **R-poset**．

**定理** (3.14.2)**．** $S \subseteq [n-1]$ について，

$$\beta(S) = \#\{\text{極大鎖 } \mathfrak{m} : D(\lambda(\mathfrak{m})) = S\}.$$

ただし $\mathfrak{m}$：$\hat{0} = t_0 \lessdot \cdots \lessdot t_n = \hat{1}$ について

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{m}) &:= (\lambda(t_0, t_1), \ldots, \lambda(t_{n-1}, t_n)), \\ D(\lambda(\mathfrak{m})) &:= \{i : \lambda(t_{i-1}, t_i) > \lambda(t_i, t_{i+1})\}. \end{aligned}$$

# 1　半モジュラ束の R-ラベリング

$L$：有限半モジュラ束 (階層的かつ $\rho(s)+\rho(t) \geq \rho(s \wedge t)+\rho(s \vee t)$).
$P=\{s \in L :$ 結び既約$\}$ ($s \neq \hat{0}$, $t, u < s$ を用いて $s = t \vee u$ と表せない).
$\omega : P \to [\#P]$：order-preserving な全単射．ここで

$$\begin{aligned} t_i &= \omega^{-1}(i), \\ \lambda(s,t) &= \min\{i : s \vee t_i = t\} \quad (s \lessdot t), \end{aligned}$$

とすると $\lambda$ は $L$ の R-ラベリング.

概略. ($\lambda(\mathfrak{m})$ が単調増加な極大鎖 $\mathfrak{m}$ の存在) 区間 $[s,t]$ の長さで帰納法.
$s=t$ のときはよい.

$$\begin{aligned} i &\coloneqq \min\{i : s < s \vee t_i \leq t\}, \\ w &\coloneqq \bigvee\{t_j : t_j < t_i\} \quad (\text{空のときは } \hat{0}), \end{aligned}$$

とすると，$w \lessdot t_i$.
また各 $t_j < t_i$ について，$i$ の最小性より $s = s \vee t_j$，したがって $s \geq w$.
これより $s \wedge t_i = w$.

$$\begin{aligned} \rho(s)+\rho(t_i) &\geq \rho(s \vee t_i)+\rho(w) \\ &= \rho(s \vee t_i)+\rho(t_i)-1, \end{aligned}$$

より $\rho(s)+1 \geq \rho(s \vee t_i)$．$s < s \vee t_i$ より $s \lessdot (s \vee t_i)$.
帰納法の仮定を使って $s \vee t_i$ から $t$ への極大鎖をとり，$s$ を prepend.
(極大鎖 $\mathfrak{m}$ の一意性) $\lambda(\mathfrak{m}), \lambda(\mathfrak{m}')$ がともに単調増加な極大鎖

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &: s = s_0 \lessdot s_1 \lessdot \cdots \lessdot s_\ell = t, \\ \mathfrak{m}' &: s = s'_0 \lessdot s'_1 \lessdot \cdots \lessdot s'_\ell = t, \end{aligned}$$

について，$i = \lambda(s_0, s_1) < \lambda(s'_0, s'_1)$ を仮定する.

$j = \min\{j : t_i \le s'_j\} > 0$ をとると $s'_{j-1} \vee t_i = s'_j$ より $\lambda(s'_{j-1}, s'_j) \le i$, 矛盾. □

# 2 $(P,\omega)$-分割

## 2.1 主要な母関数

**定義.** $P$：半順序集合，$p = \#P$，全単射 $\omega : P \to [p]$ とする.
$(P,\omega)$**-分割** $\sigma : P \to \mathbb{N}$ は次を満たす：

(a) $s \le t \implies \sigma(s) \ge \sigma(t)$, and
(b) $s < t$ and $\omega(s) > \omega(t) \implies \sigma(s) > \sigma(t)$.

$\sum_{t\in P} \sigma(t) = n$ とすると，$\sigma$ は $n$ の $(P,\omega)$-分割.

$s < t \implies \omega(s) < \omega(t)$ のとき $\omega$ は $P$ の**自然なラベリング**．このとき条件 (b) は無関係で，このときの $\sigma$ は $P$**-分割**.

$s < t \implies \omega(s) > \omega(t)$ のとき $\omega$ は $P$ の**双対自然なラベリング**. 条件 (a) で定まる順序関係が全て strict になる．このときの $\sigma$ は**狭義** $P$**-分割**.

$P = \{t_1, \dots, t_p\}$ とおく．$(P,\omega)$-分割たちに関連する基本母関数は

$$F_{P,\omega} = F_{P,\omega}(x_1, \dots, x_p) := \sum_{\sigma:\ (P,\omega)\text{-分割}} x_1^{\sigma(t_1)} \cdots x_p^{\sigma(t_p)}.$$

$\omega$ が自然なラベリングであるとき，$\omega$ を省略して $F_P$ と書く.

**例.** $t_1 < \dots < t_p$ からなる $P$ と自然なラベリング $\omega$ について，

$$\begin{aligned} F_P &= \sum_{a_1 \ge \dots \ge a_p \ge 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\ &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1x_2\cdots x_p)}. \end{aligned}$$

**例.** $t_1 < \cdots < t_p$ からなる $P$ と双対自然なラベリング $\omega$ について,

$$
\begin{aligned}
F_{P,\omega} &= \sum_{a_1 > \cdots > a_p \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\
&= \frac{x_1^{p-1} x_2^{p-2} \cdots x_{p-1}}{(1-x_1)(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1x_2\cdots x_p)}.
\end{aligned}
$$

**例.** $p$ 元反鎖 $P$ について

$$
\begin{aligned}
F_P &= \sum_{a_1,\ldots,a_p \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\
&= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_p)}.
\end{aligned}
$$

**例.** $t_1 < t_2$, $t_1 < t_3$, $t_2 \parallel t_3$ からなる $P$ と $\omega(t_1) = 2$, $\omega(t_2) = 1$, $\omega(t_3) = 3$ について,

$$
F_{P,\omega} = \sum_{b < a \geq c} x_1^a x_2^b x_3^c.
$$

**定義.** ラベル付き半順序集合 $(P,\omega)$ について, **Jordan-Hölder 集合**

$$
\mathcal{L}(P,\omega) \coloneqq \{P\text{ のトポロジカルソートをラベルで並べたもの}\} \subseteq \mathfrak{S}_p.
$$

**定義.**

$$
\mathcal{A}(P,\omega) \coloneqq \{\sigma : P \to \mathbb{N},\ (P,\omega)\text{-分割}\}.
$$

$\sigma \in \mathcal{A}(P,\omega)$ に対して, $\sigma' : [p] \to \mathbb{N}$ を $\sigma'(\omega(t)) = \sigma(t)$ で定める.

**定義.** $w \in \mathfrak{S}_n$ について，次の条件を満たす $f : [n] \to \mathbb{N}$ は $w$-compatible.

- $f(w_1) \geq \cdots \geq f(w_n)$, and
- $f(w_i) = f(w_{i+1}) \implies w_i < w_{i+1}$.

$f$ が $w$-compatible となる $w$ は一意に存在.

**定義.**

$$S_w = \{\sigma : P \to \mathbb{N},\ \sigma' \text{ が } w\text{-compatible}\}.$$

**補題** (3.15.3)**.** $\sigma : P \to \mathbb{N}$ について,

$$\sigma \text{ は } (P,\omega)\text{-分割} \iff \exists w \in \mathcal{L}(P,\omega) \text{ s.t. } \sigma' \text{ が } w\text{-compatible}.$$

言い換えると,

$$\mathcal{A}(P,\omega) = \bigcup_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} S_w \quad (\text{非交和}).$$