1.6.3　Min-Max Trees and the cd-Index

$T(w)$（w の Cartesian tree）の変形を考える。

相異なる整数の列 $w = a_1a_2\cdots a_n$ の **min-max tree** $M(w)$ を次のように定義する。

1. $a_j = \min a_i$ または $a_j = \max a_i$ を満たす最小の j をとる。
2. a_j を $M(w)$ の根とし、左側の部分木を $M(a_1, \ldots, a_{j-1})$、右側の部分木を $M(a_{j+1}, \ldots, a_n)$ とする。

$M(w)$ の頂点で、左の子だけを持つようなものは存在しないことに注意。

Min-max tree $M(w)$ と $1 \le i \le n$ について、$M(w)$ の頂点の並び替え $\psi_i M(w)$ を次のように定める。

1. $M(w)$ 上で、頂点 a_i とその右側の部分木をまとめて M_{a_i} とする。
2. $a_i = \min V(M_{a_i})$ の場合は、a_i を $\max V(M_{a_i})$ に置き換え、M_{a_i} の残りの部分では頂点同士の大小関係を保つように並び変える。
3. $a_i = \max V(M_{a_i})$ の場合は、a_i を $\min V(M_{a_i})$ に置き換え、残りは同様にする。

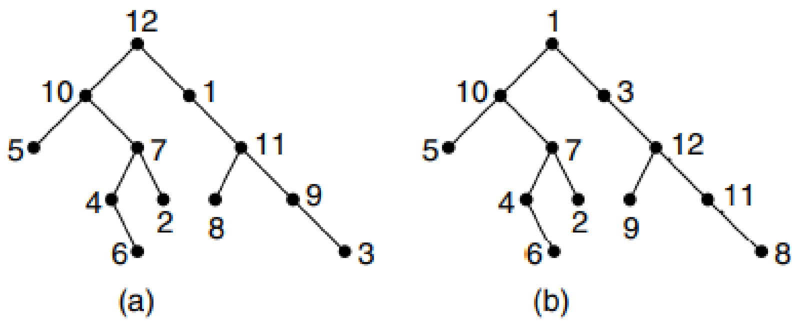

図1: (a) $M(5, 10, 4, 6, 7, 2, 12, 1, 8, 11, 9, 3)$

(b) $\psi_7 M(\ldots)$

Fact 1. $\psi_1, \ldots, \psi_n$ の合成は可換であり、$\psi_i \circ \psi_i = \mathrm{id}$。ゆえにこれらは可換群 $\mathfrak{G}_w$ を生成する。$\mathfrak{G}_w$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\iota(w)}$ と同型（ただし $\iota(w)$ は $M(w)$ が持つ葉でない頂点の個数)。したがって、$\psi M(w)$ $(\psi \in \mathfrak{G}_w)$ として得られる木は $2^{\iota(w)}$ 通り。

$w \in \mathfrak{S}_n$、$\psi \in \mathfrak{G}_w$ について、$\psi M(w) = M(\psi w)$ となるように ψw を定める。$v, w \in \mathfrak{S}_n$ について、$v = \psi w$ となるような $\psi \in \mathfrak{G}_w$ が存在するとき v と w は M-**同値**であるといい、$v \overset{M}{\sim} w$ で表す。これは同値関係。Fact 1 より、w を含む同値類 $[w]$ の要素数は $2^{\iota(w)}$。

Fact 2. $M(w)$ の頂点 a_i が、右の子のみを持つとする。このとき

$$D(\psi_i w) = \begin{cases} D(w) \cup \{i\} & \text{if } i \notin D(w), \\ D(w) - \{i\} & \text{if } i \in D(w). \end{cases}$$

a_i が左の子と右の子を持つとき、$i \in D(w)$ と $i - 1 \in D(w)$ のちょうど片方が成立し、

$$D(\psi_i w) = \begin{cases} (D(w) \cup \{i\}) - \{i-1\} & \text{if } i \notin D(w), \\ (D(w) \cup \{i-1\}) - \{i\} & \text{if } i \in D(w). \end{cases}$$

Descent set $D(w)$ や木の構造の情報を、非可換な不定元 a, b, c, d, e を用いた単項式で表すことを考える。

集合 $S \subseteq [n-1]$ について、その characteristic monomial を

$$u_S = e_1 e_2 \cdots e_{n-1},$$

で定める。ここで

$$e_i = \begin{cases} a & \text{if } i \notin S, \\ b & \text{if } i \in S, \end{cases}$$

とする。例えば、$u_{D(37485216)} = ababbba$。

$w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ と $1 \le i \le n$ について、

$$f_i = f_i(w) = \begin{cases} c & \text{if } a_i \text{ が } M(w) \text{ 上で右の子のみを持つ}, \\ d & \text{if } a_i \text{ が左の子と右の子を持つ}, \\ e & \text{if } a_i \text{ が子を持たない}, \end{cases}$$

とする。$\Phi'_w = \Phi'_w(c,d,e) = f_1 f_2 \cdots f_n$ とし、そこから e を削除したものを $\Phi_w = \Phi_w(c,d)$ とする。例えば、$w = 5, 10, 4, 6, 7, 2, 12, 1, 8, 11, 9, 3$ に対して

$$\Phi'_w = edcededcedce,$$
$$\Phi_w = dcddcdc.$$

Φ_w に対して末尾と各 d の直前に e を挿入すれば Φ'_w が復元できる。$v \overset{M}{\sim} w$ ならば、$\Phi'_v = \Phi'_w$ と $\Phi_v = \Phi_w$ が成り立つ。

Fact 3. $w \in \mathfrak{S}_n$ とし、w が属する M-同値類を $[w]$ で表すとき、

$$\Phi_w(a+b, ab+ba) = \sum_{v \in [w]} u_{D(v)}.$$

これが成り立つことは Fact 2. から確認できる。

たとえば、$w = 5, 10, 4, 6, 7, 2, 12, 1, 8, 11, 9, 3$ に対して、

$$\sum_{v \in [w]} u_{D(v)} = (ab+ba)(a+b)(ab+ba)(ab+ba)(a+b)(ab+ba)(a+b).$$

Fact 4. 各同値類 $[w]$ は、ちょうど一つの alternating permutation（とちょうど一つの reverse alternating permutation）を含む。したがって、$w \in \mathfrak{S}_n$ が動くときの $[w]$ の種類数はオイラー数 E_n。

これは Fact 3. から分かる。

ここで、母関数

$$\Psi_n = \Psi_n(a,b) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} u_{D(w)}$$
$$= \sum_{S\in[n-1]} \beta(S)u_S,$$

を考える。たとえば $\Psi_3 = aa + 2ab + 2ba + bb$。この多項式 Ψ_n は $\mathfrak{S}_n$ の ab-index と呼ばれる。

ここで

$$\Psi_n = \sum_{[w]} \sum_{v\in[w]} u_{D(v)} = \sum_{[w]} \Phi_w(a+b, ab+ba),$$

であるから、次が成り立つ。

定理 1.6.1. $c = a+b$、$d = ab+ba$ とすると、ab-index Ψ_n は c、d の単項式 E_n 個からなる多項式として表せる。

この c、d の多項式を Φ_n とし、$\mathfrak{S}_n$ の cd-index と呼ぶ。Φ_n の相異なる項の個数は、Φ_w としてありうる c、d の単項式の個数、すなわちフィボナッチ数 F_n である。

$S \subseteq [n-1]$ に対して、

$$\omega(S) = \{i \in [n-2] : i \in S \text{ と } i+1 \in S \text{ のちょうど一方が成立する}\},$$

とする。

命題 1.6.2. $S, T \subseteq [n-1]$ とする。$\omega(S) \subset \omega(T)$ ならば $\beta_n(S) < \beta_n(T)$。

証明. $w \in \mathfrak{S}_n$、$\Phi'_w = f_1 f_2 \cdots f_n$ $(f_i \in \{c,d,e\})$ とする。

$$S_w = \{i-1 : f_i = d\},$$

とするとき、

$$\Phi_w(a+b, ab+ba) = \sum_{v\in[w]} u_{D(v)} = \sum_{\omega(X)\supseteq S_w} u_X,$$

である。

$$\Psi_n = \sum_S \beta_n(S) u_s = \sum_{[w]} \sum_{v \in [w]} u_{D(v)} = \sum_{[w]} \sum_{\omega(X) \supseteq S_w} u_X$$

より、$\omega(S) \subseteq \omega(T)$ ならば $\beta_n(S) \leq \beta_n(T)$。$\omega(S) \subsetneq \omega(T)$ のとき、$\omega(T) \supseteq S_w$ かつ $\omega(S) \not\supseteq S_w$ なる w が存在するので、$\beta_n(S) < \beta_n(T)$。 □

系 1.6.3. $S \subseteq [n-1]$ のとき、$\beta_n(S) \leq E_n$。等号成立は $S = \{1, 3, 5, \ldots\} \cap [n-1]$ または $S = \{2, 4, 6, \ldots\} \cap [n-1]$ のとき。