2 Sieve Methods

2.5 V-Partitions and Unimodal Sequences

重み n の単峰列 (n-stack)：次を満たす正整数の列 $d_1 d_2 \cdots d_m$

a. $\sum d_i = n$,

b. $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_j \geq d_{j+1} \geq \cdots \geq d_m$ for some j.

重み n の単峰数列の個数を $u(n)$ とする．$u(0) = 0$ とする．$u(n)$ の母関数を

$$\begin{aligned} U(q) &= \sum_{n \geq 0} u(n) q^n \\ &= q + 2q^2 + 4q^3 + 8q^4 + 15q^5 + 27q^6 + \cdots , \end{aligned}$$

とおく．

$[j]! = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)$ とおく．単峰列の最大の項に着目して[*1]

$$U(q) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{[k-1]!} \cdot q^k \cdot \frac{1}{[k]!} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{[k-1]![k]!}.$$

分割数 $p(n)$ の母関数の式

$$\sum_{n \geq 0} p(n) q^n = \prod_{i \geq 1} (1-q^i)^{-1},$$

に対応する $U(n)$ の式がほしい．そこで，n の分割と重み n の単峰列の中間的なものを考える．

[*1] $\frac{1}{[k-1]!}$ を無くしたものは $p(n)$ の母関数にあたる．

n **の** V**-分割**：次の a.，b. を満たす非負整数の並び

$$\begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

a. $c + \sum a_i + \sum b_i = n$,

b. $c \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $c \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots$.

n の V-分割の個数を $v(n)$ とする．$v(0) = 1$ とする．母関数を

$$\begin{aligned} V(q) &= \sum_{n \geq 0} v(n) q^n \\ &= 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 12q^4 + 21q^5 + \cdots, \end{aligned}$$

とおく．このとき

$$V(q) = \sum_{k \geq 0} \frac{q^k}{[k]!^2}.$$

さらに n の**ダブル分割**を次の a.，b. を満たす非負整数の並びとして定義する．

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

a. $\sum a_i + \sum b_i = n$，

b. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$.

n のダブル分割の個数を $d(n)$ とすると，母関数は

$$\sum_{n\geq 0} d(n)q^n = \prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-2}.$$

n の V-分割全体の集合を V_n，ダブル分割全体の集合を D_n とする．Sieve method により，$\#V_n$ を $\#D_n$ を用いて表したい．

$\Gamma_1 : D_n \to V_n$ を

$$\Gamma_1 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & & & \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} & a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & & & \\ & b_2 & b_3 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } b_1 > a_1, \end{cases}$$

で定める．Γ_1 は全射だが，単射にはならない．ちょうど 2 回カウントされる V-分割の集合は

$$V_n^1 := \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 \right\}.$$

したがって

$$\#V_n = \#D_n - \#V_n^1.$$

$\#V_n^1$ を数えるため，$\Gamma_2 : D_{n-1} \to V_n^1$ を次で定める．

$$\Gamma_2 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1+1 & & & \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+1 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} & a_1+1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & & & \\ & b_2 & b_3 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+1 < b_1. \end{cases}$$

先ほどと同様に，Γ_2 は全射だが単射ではなく，

$$V_n^2 = \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 > a_2 \right\},$$

の元を 2 回カウントする．したがって $\#V_n^1 = \#D_{n-1} - \#V_n^2$ であり，

$$\#V_n = \#D_n - \#D_{n-1} + \#V_n^2.$$

同様に，$\Gamma_3 : D_{n-3} \to V_n^2$ を

$$\Gamma_3 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_1+2 & a_2+1 & a_3 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+2 \geq b_1, \\ \begin{bmatrix} b_1 & a_1+2 & a_2+1 & a_3 & \cdots \\ & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1+2 < b_1, \end{cases}$$

で定めると，これは

$$V_n^3 = \left\{ \begin{bmatrix} c & a_1 & a_2 & \cdots \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \in V_n : c > a_1 > a_2 > a_3 \right\},$$

の元を 2 回カウントする．したがって

$$\#V_n = \#D_n - \#D_{n-1} + \#D_{n-3} - \#V_n^3.$$

このようにして $\Gamma_i : D_{n-\binom{i}{2}} \to V_n^{i-1}$ を構成することを繰り返せば，

$$v(n) = d(n) - d(n-1) + d(n-3) - d(n-6) + \cdots,$$

が得られる（ただし $m < 0$ について $d(m) = 0$ とする）．

命題 2.5.1.

$$V(q) = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^{\binom{n+1}{2}}\right)\prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-2}.$$

命題 2.5.2.

$$U(q) + V(q) = \prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-2}.$$

重み n の単峰列全体の集合を U_n とする．$D_n \to U_n \cup V_n$ の全単射を次で構成できる．

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{bmatrix} & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & & & \\ & b_1 & b_2 & \cdots \end{bmatrix} & \text{if } a_1 \geq b_1, \\ \cdots a_2 a_1 b_1 b_2 \cdots & \text{if } b_1 > a_1. \end{cases}$$

系 2.5.3.

$$U(q) = \left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}\right)\prod_{i\geq 1}(1-q^i)^{-2}.$$