3.11 節の残り

shino16

2022 年 9 月 14 日

目次

0　復習

定義. P：ランク n の有限階層的半順序集合，ρ：ランク関数，$S \subseteq [0, n]$ について

$$
\begin{aligned}
P_S &\coloneqq \{t \in P : \rho(t) \in S\}, \\
\alpha(S) &\coloneqq \#(P_S \text{ の極大鎖}), \\
\beta(S) &\coloneqq \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S-T)} \alpha(T).
\end{aligned}
$$

定義. P：$\hat{0}, \hat{1}$ を持つ有限階層的半順序集合.
任意の区間 $[s, t]$ について，次を満たす極大鎖 $s = t_0 \lessdot \cdots \lessdot t_\ell = t$ が一意に存在するとき，$\lambda : \{(s, t) : s \lessdot t\} \to \mathbb{Z}$ は **R-ラベリング**：

$$\lambda(t_0, t_1) \leq \cdots \leq \lambda(t_{\ell-1}, t_\ell).$$

R-ラベリングが存在する半順序集合は **R-poset**.

定理 (3.14.2)**.** $S \subseteq [n-1]$ について，

$$\beta(S) = \#\{\text{極大鎖 } \mathfrak{m} : D(\lambda(\mathfrak{m})) = S\}.$$

ただし $\mathfrak{m}$：$\hat{0} = t_0 \lessdot \cdots \lessdot t_n = \hat{1}$ について

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mathfrak{m}) &\coloneqq (\lambda(t_0, t_1), \ldots, \lambda(t_{n-1}, t_n)), \\
D(\lambda(\mathfrak{m})) &\coloneqq \{i : \lambda(t_{i-1}, t_i) > \lambda(t_i, t_{i+1})\}.
\end{aligned}
$$

1　半モジュラ束の R-ラベリング

L：有限半モジュラ束 (階層的かつ $\rho(s)+\rho(t)\geq\rho(s\wedge t)+\rho(s\vee t)$).
$P=\{s\in L:$ 結び既約$\}$ ($s\neq\hat{0}$, $t,u<s$ を用いて $s=t\vee u$ と表せない).
$\omega:P\to[\#P]$：order-preserving な全単射．ここで

$$\begin{aligned} t_i &= \omega^{-1}(i), \\ \lambda(s,t) &= \min\{i : s\vee t_i = t\} \quad (s\lessdot t), \end{aligned}$$

とすると λ は L の R-ラベリング.

概略. ($\lambda(\mathfrak{m})$ が単調増加な極大鎖 $\mathfrak{m}$ の存在) 区間 $[s,t]$ の長さで帰納法.
$s=t$ のときはよい.

$$\begin{aligned} i &\coloneqq \min\{i : s< s\vee t_i\leq t\}, \\ w &\coloneqq \bigvee\{t_j : t_j<t_i\} \quad (\text{空のときは } \hat{0}), \end{aligned}$$

とすると，$w\lessdot t_i$.
また各 $t_j<t_i$ について，i の最小性より $s=s\vee t_j$，したがって $s\geq w$.
これより $s\wedge t_i=w$.

$$\begin{aligned} \rho(s)+\rho(t_i) &\geq \rho(s\vee t_i)+\rho(w) \\ &= \rho(s\vee t_i)+\rho(t_i)-1, \end{aligned}$$

より $\rho(s)+1\geq\rho(s\vee t_i)$．$s<s\vee t_i$ より $s\lessdot(s\vee t_i)$.
帰納法の仮定を使って $s\vee t_i$ から t への極大鎖をとり，s を prepend.
(極大鎖 $\mathfrak{m}$ の一意性) $\lambda(\mathfrak{m}),\lambda(\mathfrak{m}')$ がともに単調増加な極大鎖

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &: s=s_0\lessdot s_1\lessdot\cdots\lessdot s_\ell=t, \\ \mathfrak{m}' &: s=s'_0\lessdot s'_1\lessdot\cdots\lessdot s'_\ell=t, \end{aligned}$$

について，$i=\lambda(s_0,s_1)<\lambda(s'_0,s'_1)$ を仮定する.

$j = \min\{j : t_i \le s'_j\} > 0$ をとると $s'_{j-1} \vee t_i = s'_j$ より $\lambda(s'_{j-1}, s'_j) \le i$, 矛盾. $\square$

2 (P,ω)-分割

2.1 主要な母関数

定義. P：半順序集合, $p = \#P$, 全単射 $\omega : P \to [p]$ とする.
(P,ω)**-分割** $\sigma : P \to \mathbb{N}$ は次を満たす：

(a) $s \le t \implies \sigma(s) \ge \sigma(t)$, and
(b) $s < t$ and $\omega(s) > \omega(t) \implies \sigma(s) > \sigma(t)$.

$\sum_{t\in P} \sigma(t) = n$ とすると, σ は n の (P,ω)-分割.

$s < t \implies \omega(s) < \omega(t)$ のとき ω は P の**自然なラベリング**. このとき条件 (b) は無関係で, このときの σ は P**-分割**.

$s < t \implies \omega(s) > \omega(t)$ のとき ω は P の**双対自然なラベリング**. 条件 (a) で定まる順序関係が全て strict になる. このときの σ は**狭義** P**-分割**.

$P = \{t_1, \ldots, t_p\}$ とおく. (P,ω)-分割たちに関連する基本母関数は

$$F_{P,\omega} = F_{P,\omega}(x_1, \ldots, x_p) := \sum_{\sigma:\ (P,\omega)\text{-分割}} x_1^{\sigma(t_1)} \cdots x_p^{\sigma(t_p)}.$$

ω が自然なラベリングであるとき, ω を省略して F_P と書く.

例. $t_1 < \cdots < t_p$ からなる P と自然なラベリング ω について,

$$\begin{aligned} F_P &= \sum_{a_1 \ge \cdots \ge a_p \ge 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\ &= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1x_2\cdots x_p)}. \end{aligned}$$

例. $t_1 < \cdots < t_p$ からなる P と双対自然なラベリング ω について，

$$
\begin{aligned}
F_{P,\omega} &= \sum_{a_1 > \cdots > a_p \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\
&= \frac{x_1^{p-1} x_2^{p-2} \cdots x_{p-1}}{(1-x_1)(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1x_2\cdots x_p)}.
\end{aligned}
$$

例. p 元反鎖 P について

$$
\begin{aligned}
F_P &= \sum_{a_1,\ldots,a_p \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_p^{a_p} \\
&= \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_p)}.
\end{aligned}
$$

例. $t_1 < t_2$，$t_1 < t_3$，$t_2 \parallel t_3$ からなる P と $\omega(t_1) = 2$，$\omega(t_2) = 1$，$\omega(t_3) = 3$ について，

$$
F_{P,\omega} = \sum_{b < a \geq c} x_1^a x_2^b x_3^c.
$$

定義. ラベル付き半順序集合 (P,ω) について，**Jordan-Hölder 集合**

$$
\mathcal{L}(P,\omega) := \{P \text{ のトポロジカルソートをラベルで並べたもの}\} \subseteq \mathfrak{S}_p.
$$

定義.

$$
\mathcal{A}(P,\omega) := \{\sigma : P \to \mathbb{N},\ (P,\omega)\text{-分割}\}.
$$

$\sigma \in \mathcal{A}(P,\omega)$ に対して，$\sigma' : [p] \to \mathbb{N}$ を $\sigma'(\omega(t)) = \sigma(t)$ で定める．

定義. $w \in \mathfrak{S}_n$ について，次の条件を満たす $f : [n] \to \mathbb{N}$ は w-compatible.

- $f(w_1) \geq \cdots \geq f(w_n)$, and
- $f(w_i) = f(w_{i+1}) \implies w_i < w_{i+1}$.

f が w-compatible となる w は一意に存在.

定義.

$$S_w = \{\sigma : P \to \mathbb{N},\ \sigma' \text{ が } w\text{-compatible}\}.$$

補題 (3.15.3)**.** $\sigma : P \to \mathbb{N}$ について，

$$\sigma \text{ は } (P,\omega)\text{-分割} \iff \sigma' \text{ が } w\text{-compatible のとき } w \in \mathcal{L}(P,\omega).$$

言い換えると，

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P,\omega) &= \{\sigma : P \to \mathbb{N},\ \sigma' \text{ が } w\text{-compatible},\ w \in \mathcal{L}(P,\omega)\} \\ &= \bigcup_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} S_w \quad (\text{非交和}). \end{aligned}$$

証明. ($\subseteq$) $\sigma \in \mathcal{A}(P,\omega)$ をとる．σ' が w-compatible だとする．$w \in \mathcal{L}(P,\omega)$ を言えばよい.

$i < j$ について $w_i = \omega(s)$，$w_j = \omega(t)$ とし，$s \not> t$ を示したい.

σ' は w-compatible なので $\sigma'(w_i) \geq \sigma'(w_j)$ i.e. $\sigma(s) \geq \sigma(t)$.

$\sigma(s) > \sigma(t)$ のとき $s \geq t \implies \sigma(s) \leq \sigma(t)$ より $s \not\geq t$.

$\sigma(s) = \sigma(t)$ のとき $\sigma'(w_i) = \sigma'(w_j)$ より $w_i < w_{i+1} < \cdots < w_j$，ゆえに $\omega(s) < \omega(t)$.

$s > t$ and $\omega(s) < \omega(t) \implies \sigma(s) < \sigma(t)$ より $s \not> t$.

以上より $s \not> t$，$\therefore \sigma \in \mathcal{L}(P,\omega)$.

$(\supseteq)$ $w \in \mathcal{L}(P,\omega)$，$\sigma'$ が w-compatible な w を取り，$\sigma \in \mathcal{A}(P,\omega)$ を示す．$w_i = \omega(s)$，$w_j = \omega(t)$ とする．

$s \leq t \implies i \leq j \implies \sigma'(w_i) \geq \sigma'(w_j) \implies \sigma(s) \geq \sigma(t)$.

$s < t$，$w_i = \omega(s) > \omega(t) = w_j$ として $\sigma(s) > \sigma(t)$ を示す．$w_i > w_j$ より，$\exists k \in [i, j-1]$ s.t. $w_k > w_{k+1}$．σ' は w-compatible なので，

$$\begin{aligned}\sigma(s) = \sigma'(w_i) \geq \sigma'(w_{i+1}) \geq \cdots \geq \sigma'(w_k) \\ > \sigma'(w_{k+1}) \geq \cdots \geq \sigma'(w_j) = \sigma(t).\end{aligned}$$

$\square$