2 Sieve Methods

2.1 Inclusion-Exclusion

“Sieve method” とは：有限集合 S の要素数を求める方法

パターン (1) $\#S$ を大きめに見積もり、誤差を大きめに見積もり、その誤差を…ということを繰り返し、誤差を 0 に近づけていく

パターン (2) $T \supseteq S$ について、余分な元が打ち消しあうように T の各元を重みづけする（後の節で登場）

定理 2.1.1. n 元集合 S、線形空間 $V = \{f : 2^S \to K\}$ (K は体) について、線形写像 $\phi : V \to V$ を

$$\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y),$$

で定める。このとき ϕ^{-1} が存在し、

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y).$$

証明. $\psi : V \to V$ を $\psi f(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y)$ で定めると、

$$\begin{aligned}
\phi\psi f(T) &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \phi f(Y) \qquad (\psi\phi f(T) \text{ では？}) \\
&= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z) \\
&= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \right) f(Z).
\end{aligned}$$

T、Z を固定したとき、$m = \#(Z - T)$ とおくと

$$\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{0m},$$

なので、$\phi\psi f(T) = f(T)$ がわかる。よって $\phi^{-1} = \psi$。 $\square$

よくある定理 2.1.1 の適用例

集合 A と、A の元が持ったり持たなかったりする性質の集合 S がある。

ちょうど $T \subseteq S$ の性質のみを持つ A の元の個数 $f_=(T)$[*1]は求めにくいが、少なくとも $T \subseteq S$ の性質は満たすような A の元の個数 $f_\geq(T)$ は求めやすいようなとき、

$$f_\geq(T) = \sum_{Y \supseteq T} f_=(Y),$$

なので、定理 2.1.1 より

$$f_=(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f_\geq(Y).$$

とくに、どの性質も持たないような元の個数は

$$f_=(\emptyset) = \sum_{Y} (-1)^{\#Y} f_\geq(Y). \tag{1}$$

性質を集合で言い換えることもできる。$A_1, \ldots, A_n$ を A の部分集合とし、

$$A_T = \bigcap_{i \in T} A_i,$$

と定める（$A_\emptyset = A$ とする）。A_i を「性質 P_i を満たす A の元の集合」と考えれば、式 (1) に対応するのは

$$\begin{aligned}\#(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= \#(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n,\end{aligned}$$

ただし

$$S_k = \sum_{\#T = k} \#A_T.$$

[*1] 重み $w : A \to K$ を決めて、元の個数の代わりに元の重みの和 $\sum_x w(x)$ を $f_=(T)$ としてもよい

包除原理やその変種は、$\cap$ と $\cup$、$\subseteq$ と $\supseteq$ などを入れ替えることで双対形が得られる。定理 2.1.1 の双対形は、

$\widetilde{\phi}: V \to V$ を

$$\widetilde{\phi} f(T) = \sum_{Y \subseteq T} f(Y),$$

で定めるとき、$\widetilde{\phi}^{-1}$ が存在して

$$\widetilde{\phi}^{-1} f(T) \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(T-Y)} f(Y).$$

である。証明も同様。元の定理 2.1.1 について $g(T) \mapsto f(S-T)$ を考えることでも双対形の主張が得られる。