第 1 章演習問題

shino16

2022 年 10 月 18 日

問題 (9)．$f(m,n) = ((0,0)$ から (m,n) へ移動する経路の個数)，ただし使える移動は $(1,0)$，$(0,1)$，$(1,1)$ のみ．

a. 次を示せ：

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} f(m,n)x^n y^n = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

b. $\sum_{n\geq 0} f(n,n)x^n$ を簡単に表せ．

解答．(a.)

$$(\text{左辺}) = 1 + (x+y+xy) + (x+y+xy)^2 + \cdots .$$

(b.) $(0,1)$ の移動を k 回使うと，$(1,0)$ は k 回，$(1,1)$ は $n-k$ 回．したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} f(n,n)x^n &= \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{n+k}{n-k,k,k} \\
&= \sum_{n\geq 0} x^n \sum_k \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k} \\
&= \sum_k \binom{2k}{k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} x^n \\
&= \sum_k \binom{2k}{k} x^k \sum_{n+k\geq 0} \binom{n+2k}{2k} x^n \\
&= \sum_k \binom{2k}{k} \frac{x^k}{(1-x)^{2k+1}}.
\end{aligned}$$

ここで $(1-4x)^{-1/2} = \sum_n \binom{2n}{n} x^n$ を使うと，

$$\sum_{n\geq 0} f(n,n)x^n = \frac{1}{1-x}\left(1 - \frac{4x}{(1-x)^2}\right)^{-1/2} = (1-6x+x^2)^{-1/2}.$$

問題 (10). $f(n,r,s) = \#\left\{ S \subseteq [2n] : \begin{array}{l} \text{奇数 } r \text{ 個，偶数 } s \text{ 個,} \\ \text{どの 2 つの元も隣接しない} \end{array} \right\}$.
$f(n,r,s) = \binom{n-r}{s}\binom{n-s}{r}$ を示せ.

解答. DP (漸化式) で解けるので，$f(n,r,s) = \binom{n-r}{s}\binom{n-s}{r}$ が初期条件と漸化式を満たすことを示せば OK.

解答. 数え上げの対象 $S = \{a_1, \ldots, a_{r+s}\}_< \subseteq [2n]$ について，

$$\phi(S) \coloneqq \{\{a_1, a_2 - 2, a_3 - 4, \ldots, a_{r+s} - 2(r+s-1)\}\} \quad (\text{多重集合}).$$

$\phi(S)$ は $[2n - 2(r+s-1)]$ 上の多重集合で，奇数 r 個，偶数 s 個.
ϕ はそのような多重集合たちへの全単射なので，

$$\begin{aligned} f(n,r,s) &= \left(\!\!\binom{n-r-s+1}{r}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n-r-s+1}{s}\!\!\right) \\ &= \binom{n-s}{r}\binom{n-r}{s}. \end{aligned}$$

問題 (15). 以下の個数を求めよ.

a. 多項式 $(1+x+x^2)^n$ の係数で，3 の倍数でないもの.

解答. (a.) $\mathbb{F}_3$ 上で $1 + x + x^2 = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$.
よって $\binom{2n}{k} \not\equiv 0 \pmod 3$ なる $0 \le k \le 2n$ を数えればよい.
Lucas の定理より, $2n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_r}_{(3)}$ のとき答えは $(a_1+1)\cdots(a_r+1)$.

問題 (33). a. $k, n \geq 1$ について, 次を満たす列 $\emptyset = S_0, \ldots, S_k \subseteq [n]$ はいくつあるか.

(i) $S_{i-1} \subset S_i$ or $S_{i-1} \supset S_i$, and

(ii) $|\#S_{i-1} - \#S_i| = 1$.

b. 上に条件 $S_k = \emptyset$ を課したときの答え $f_k(n)$ が

$$f_k(n) = \frac{1}{2^n} \sum_i \binom{n}{i} (n-2i)^k$$

であることを示せ.

解答. (a.) $S_{i-1} \triangle S_i = \{a_i\}$ とすると, 列 $(a_1, \ldots, a_k)$ は $\emptyset = S_0, \ldots, S_k$ を一意に決める．よって n^k 個.

問題 (63). a. 大きさが相異なる n 個の封筒が与えられる．封筒をより大きな封筒に入れることを 0 回以上繰り返して得られる配置はいくつあるか.

b. a. のうち，他の封筒の中に入っていない封筒が k 個あるものはいくつあるか.

a. のうち，他の封筒が入っていない封筒が k 個あるものはいくつあるか.

解答. 封筒を大きい順に $1, \ldots, n$ とラベル付けする.
他の封筒に入っていないことを，「封筒 0 に入っている」と考える.
(a.) 各 $i = 1, \ldots, n$ について，封筒 i を入れる先を $0, \ldots, i-1$ から自由に選べる．よって $n!$ 個.
(b. 前半) 順列 $w_1 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$ について，封筒の配置を次のように構成する：

- 各 i について，$j = \max\{j < i : w_j < w_i\}$ (存在しなければ $j = 0$) とし，封筒 i を封筒 j に入れる．

これは配置を全単射的に構成する．例：57316284

このうち left-to-right minima が k 個あるものを探せば良く，これは非交なサイクル k 個からなる順列の個数 $c(n,k)$ (符号なし第一種スターリング数).

(b. 後半) 順列のうち descent が $k-1$ 個しかないものを探せばよく，これは Eulerian number $A(n,k)$．[a]

---

[a] 命題 1.4.4

$$\sum_{k=1}^{n} A(n,k)x^k = (1-x)^{n+1} \sum_{m \geq 0} m^n x^m$$

より，n を固定すると各 $k \leq n$ について同時に $O(n \log n)$ 時間で求まる．

問題 (64). a.

$$f(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{正整数列 } a_1, \ldots, a_n : \\ \qquad (\forall k > 1,\ k \in \{a_1, \ldots, a_n\}) \\ \qquad \underline{\text{最後の}}\ k \text{ は } k-1 \text{ の後ろに現れる} \end{array} \right\}.$$

$f(n) = n!$ を示せ．

b. 上のうち $\max\{a_1, \ldots, a_n\} = k$ を満たすものの個数が $A(n,k)$ であることを示せ[a]．

---

[a] $A(n,k) =$ (非交なサイクル $k-1$ 個からなる順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ の個数)

ヒント：各 k の最後の出現だけに注目

解答. 数え上げ対象 $(a_1, \ldots, a_n)$ から $w \in \mathfrak{S}_n$ を全単射的に構成する：

1. $m_1 =$ (1 の出現回数) とし，1 を <u>右</u> から順に $1, 2, \ldots, m_1$ で置き

換える．

2. $m_2 =$ (2 の出現回数) とし，元々の 2 を 右 から順に $m_1+1, m_1+2, \ldots, m_1+m_2$ で置き換える．
3. 3 以降も同様．

例：13213312

問題 (97)**.** 整数列 $(a_1, \ldots, a_n)$ で，$0 \leq a_i \leq 9$ かつ総和が 4 の倍数であるものの個数を求めよ．

解答. $f(x) = 1 + x + \cdots + x^9$ とすると，求める答えは $\sum_i [x^{4i}] f(x)^n$. これは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(f(1)^n + f(i)^n + f(-1)^n + f(-i)^n) \\
&= \frac{1}{4}(10^n + (1+i)^n + (1-i)^n) \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{4}(10^n + (-1)^k 2^{2k+1}) & \text{if } n = 4k, \\
\frac{1}{4}(10^n + (-1)^k 2^{2k+1}) & \text{if } n = 4k+1, \\
\frac{1}{4} 10^n & \text{if } n = 4k+2, \\
\frac{1}{4}(10^n + (-1)^{k+1} 2^{2k+2}) & \text{if } n = 4k+3,
\end{cases}
\end{aligned}$$

問題 (108)**.** a. $[n]$ の分割であって，どの隣接する 2 元も同じブロックに属さないものの個数がベル数 $B(n-1)$ であることを示せ．

解答. $[n-1]$ の分割 π をとる．同じブロックに $i, i+1, \ldots, j-1, j$ (極大) が属するとき，そのうち $i+1, i+3, \ldots$ を n が属するブロックに移動させる．これを繰り返すと数え上げ対象の $[n]$ の分割が得られ，この構成は全単射．

問題 (109)**.** a. 順列 $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ のうち，$a_i < a_j < a_{j+1}$ なる $i < j$ が存在しないものの個数が $B(n)$ であることを示せ.

b. $a_i < a_j < a_{j+1}$ の代わりに $a_i < a_{j+1} < a_j$ を考えても結果は同じであることを示せ.

c. (a.) (b.) の条件をともに満たす順列の個数は，$\mathfrak{S}_n$ の対合の個数と等しいことを示せ[a].

[a] $f : X \to X$ が対合 $\iff$ $f \circ f = \mathrm{id}$

解答. (a.) $[n]$ の分割 π をとる．ブロックを最小元の降順に並べ，各ブロックの元を (最小元), (残りの元の降順) に並べる．これらを結合して $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ を得る．この構成は全単射．例：13569|248|7

(b.) (a.) と同じことをする，ただし各ブロックの元は昇順に並べる.

(c.) (a.) で得た順列が (b.) の条件を満たすには，各ブロックの要素数が 2 以下であることが必要十分.