

## 3.11 節の残り

shino16

2022 年 8 月 23 日

### 目次

0	復習	2
1	General Position と特性多項式	3
2	有限体法	6
2.1	$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{F}_q$ への帰着 . . . . .	6
2.2	$\chi_{\mathcal{A}}(q)$ の計算 . . . . .	7
2.3	例：ブレイド配置 . . . . .	8
2.4	例：Shi 配置 . . . . .	9
3	問題	10

## 0 復習

定義. 配置  $\mathcal{A}$  について,

Intersection poset  $L(\mathcal{A}) := \{0 \text{ 個以上の超平面の非空な交わり}\}.$

$$\hat{0} = V. \quad s \leq t \stackrel{\text{def}}{\iff} s \supseteq t.$$

定義.

$$\begin{aligned} \text{特性多項式 } \chi_{\mathcal{A}}(x) &:= \sum_{t \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, t) x^{\dim(t)} \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \text{central}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} x^{n - \text{rank}(\mathcal{B})} \quad (\text{命題 3.11.3}). \end{aligned}$$

命題 (3.11.5, Deletion-Restriction). 配置  $\mathcal{A}$ ,  $H_0 \in \mathcal{A}$  について

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &:= \mathcal{A} - \{H_0\}, \\ \mathcal{A}'' &:= \mathcal{A}^{H_0} = \{H \cap H_0 \neq \emptyset : H \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

このとき

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}'}(x) - \chi_{\mathcal{A}''}(x).$$

**定義.**  $V$  : 実線形空間 について

$$r(\mathcal{A}) := \#(\text{領域}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}''),$$

$$b(\mathcal{A}) := \#(\text{相対的に有界な領域}) \quad (\text{essentialize すると有界})$$

$$= \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & \text{if } \text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}'), \\ 0 & \text{if } \text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}') + 1. \end{cases}$$

**定理.**

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1),$$

$$b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

## 1 General Position と特性多項式

**定義.**  $\mathcal{A}$  の超平面は general position にある

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$  以下が同時に成立 :

$$(a) \{H_1, \dots, H_p\} \subseteq \mathcal{A}, p \leq n \implies \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) = n - p,$$

$$(b) \{H_1, \dots, H_p\} \subseteq \mathcal{A}, p > n \implies H_1 \cap \dots \cap H_p = \emptyset.$$

**命題.**  $\mathcal{A}$  : general position,  $m = \#\mathcal{A}$  について

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} x^{n-k} \\ &= x^n - mx^{n-1} + \binom{m}{2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

証明. 方針:  $L(\mathcal{A})$  の構造に注目.  $\mu(\hat{0}, t)$  を explicit に求める.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{H_1, \dots, H_m\}, \\ P &= \{S \subseteq [m] : \#S \leq n\} \text{ を包含関係で順序付け,} \\ \phi : P &\rightarrow L(\mathcal{A}), \quad S \mapsto \bigcap_{i \in S} H_i,\end{aligned}$$

とする<sup>a</sup>. このとき

(a)  $\phi$  は全射: 明らか.

(b)  $\phi$  は単射:

$$\begin{aligned}\phi(S) &= \phi(S') \\ \implies \phi(S) &= \phi(S \cup S') \\ \implies n - \#S &= \dim(\phi(S)) = n - \#(S \cup S') \\ \implies S &\supseteq S' .\end{aligned}$$

(c)  $\phi$  と  $\phi^{-1}$  は順序を保つ:

$$S \subseteq S' \iff \phi(S) \supseteq \phi(S').$$

ゆえに  $L(\mathcal{A}) \cong P$ .

$[\hat{0}, S] \cong B_{\#S}$  より  $\mu(\hat{0}, S) = (-1)^{\#S}$ , また  $\dim(\phi(S)) = n - \#S$  より

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(x) &= \sum_{t \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, t) x^{\dim(t)} \\ &= \sum_{S \in P} (-1)^{\#S} x^{n - \#S} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} x^{n-k} .\end{aligned}$$

□

---

<sup>a</sup>  $P$  は truncated boolean algebra と呼ばれる.

なお  $V$  : 実線形空間 について

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) = \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \\ &= 1 + m + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

$m < n$  のとき

$$\begin{aligned} b(\mathcal{A}) &= (-1)^m \chi_{\mathcal{A}}(1) \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \\ &= \delta_{0m}, \end{aligned}$$

$m \geq n$  のとき  $\text{rank}(\mathcal{A}) = n$  より

$$\begin{aligned} b(\mathcal{A}) &= (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(1) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{m}{k} \\ &= \binom{m-1}{n}. \end{aligned}$$

(注) 最後の等号について：

(a) 漸化式を用いる：

$$\begin{aligned} &\binom{m}{n} - \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n-2} - \cdots \\ &= \left[ \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \right] - \left[ \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n-2} \right] + \cdots \\ &= \binom{m-1}{n}. \end{aligned}$$

(b) FPS：

$$(-1)^n [x^n] \frac{1}{1-x} (1-x)^m = \binom{m-1}{n}.$$

## 2 有限体法

$\mathbb{Q}$  上の配置  $\mathcal{A}$  の特性多項式を, 有限体を使って計算しよう.

### 2.1 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{F}_q$ への帰着

- $\mathcal{A}$  全体を同時に整数倍して分母をはらう.
- 素ベキ  $q$  をとって全体の  $\text{mod } q$  をとり,  $\mathcal{A}_q$  を得る.

**定義.**  $\mathcal{A}$  は  $\text{mod } q$  で良い帰着を持つ  $\stackrel{\text{def}}{\iff} L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ .

**命題.**  $\mathbb{Z}$  上の配置  $\mathcal{A}$  について,  $\mathcal{A}$  が  $\text{mod } p$  で良い帰着を持たないような素数  $p$  は有限個のみ.

証明.  $H_1, \dots, H_j \in \mathcal{A}$  ( $H_i: \alpha_i \cdot x = a_i$ ) について,

$$\begin{aligned} H_1 \cap \dots \cap H_j &\neq \emptyset \\ \iff \text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_j & a_j \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1)$$

また  $H_1 \cap \dots \cap H_j \neq \emptyset$  ならば

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_j) = \text{null} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix} = n - \text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix}. \quad (2)$$

等式 (1) の成立/不成立と式 (2) の値が  $\mathbb{Z}$  上,  $\mathbb{F}_q$  上で一致すればよい.

( $\because$  増えない (1), 潰れない (2), 大小関係を保つ (明らか), 比較不可能な関係を保つ (2))

(行列の rank) = (max  $k$  s.t. 正則な  $k \times k$  小行列が存在) より, どの正方小行列についても行列式が非ゼロから mod  $p$  でゼロにならないければよい.  $p$  を十分大きくとれば OK.  $\square$

## 2.2 $\chi_{\mathcal{A}}(q)$ の計算

この節のメイン.

**定理 (3.11.10).**  $\mathbb{Q}^n$  上の配置  $\mathcal{A}$ ,  $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$  なる素ベキ  $q$  について,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(q) &= \# \left( \mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \right) \\ &= q^n - \# \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H.\end{aligned}$$

無限個の  $q$  について上の等式が成り立つので, 補完で  $\chi_{\mathcal{A}}(x)$  が得られる.

証明. 方針:  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$  を Möbius 反転の式にあてはめる.

$f, g : L(\mathcal{A}_q) \rightarrow \mathbb{Z}$  を

$$\begin{aligned}f(t) &= \#t = q^{\dim(t)}, \\ g(t) &= \# \left( t - \bigcup_{u > t} u \right),\end{aligned}$$

で定める.  $f(t) = \sum_{u \geq t} g(u)$  より

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{u \geq t} \mu(t, u) f(u) \\ &= \sum_{u \geq t} \mu(t, u) q^{\dim(u)}.\end{aligned}$$

$t = \hat{0}$  を代入して

$$g(\hat{0}) = \chi_{\mathcal{A}}(q) = \# \left( \mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H \right).$$

□

## 2.3 例：ブレイド配置

braid……組みひも

**定義.** ランク  $n - 1$  のブレイド配置

$$\mathcal{B}_n = \{x_i = x_j : 1 \leq i < j \leq n\} \text{ in } K^n.$$

これは直線  $x_1 = \cdots = x_n$  を含む  $\binom{n}{2}$  個の超平面の集まり.

例： $\mathcal{B}_3$  <https://www.geogebra.org/3d/uxubgxrc>

特性多項式を有限体法で計算しよう. 十分大きな素数  $p$  について, 定理 3.11.10 より

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{B}_n}(p) &= \#\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n : x_i \neq x_j \ (\forall i < j)\} \\ &= (p)_n. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(x) = (x)_n.$$

実は  $L(\mathcal{B}_n) \cong \Pi_n$  (問題 108 で後述).



## 2.4 例：Shi 配置

定義.

Shi 配置  $\mathcal{S} = \{x_i - x_j = c : c \in \{0, 1\}, i \leq i < j \leq n\}$ .

定理 (3.11.7).

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(x) = x(x - n)^{n-1}.$$

証明. 素数  $p$  について次を示す：

$$\# \left( \mathbb{F}_p^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H \right) = p(p - n)^{n-1}.$$

次の条件を満たす  $\pi = (B_1, \dots, B_{p-n})$  を考える<sup>a</sup>：

- (a)  $\bigcup B_i = [n]$ ,
- (b)  $B_i \cup B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ), and
- (c)  $1 \in B_1$ .

$(a, \pi)$  ( $a \in \mathbb{F}_p$ ) を  $\mathbb{F}_p^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H$  の元に一対一に対応させよう.

- for  $i$  in  $1, \dots, p - n$ :
  - for  $j$  in  $B_i$  (昇順):
    - \*  $\alpha_j \leftarrow a$ .
    - \*  $a \leftarrow a + 1$ .
  - $a \leftarrow a + 1$ .

例： $p = 11, n = 6, a = 6, \pi = (\{1, 4\}, \{5\}, \emptyset, \{2, 3, 6\}, \emptyset)$ :

$$\alpha_1 = 6, \alpha_4 = 7, \alpha_5 = 9, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_6 = 3.$$

### 3 問題

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \left( \mathbb{F}_p^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H \right) :$$

$$\alpha_i - \alpha_j = 1 \implies i, j \text{ は } \pi \text{ 上で同一ブロックに属し, } j < i.$$

全単射性： $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  を， $\alpha_1$  を先頭として昇順に並べる (informal).

$\alpha_1$  から  $a$  が， $p - n$  個のギャップから  $p - n$  個のブロックとそれらの間の順番が一意に決まる．

各  $1 < i \leq n$  について， $i$  が所属するブロックが  $p - n$  通りあることから， $(a, \pi)$  は  $p(p - n)^{n-1}$  通り．  $\square$

---

<sup>a</sup>  $[n]$  の weak ordered partition

系 (3.11.14).

$$\begin{aligned} r(\mathcal{S}_n) &= (n + 1)^{n-1}, \\ b(\mathcal{S}_n) &= (n - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$r(\mathcal{S}_2) = 3, b(\mathcal{S}_2) = 1.$$

$$r(\mathcal{S}_3) = 4^2 = 16, b(\mathcal{S}_3) = 2^2 = 4.$$

### 3 問題

**問題 108.** 単純グラフ  $G = (V, E)$  について， $G$  の  $n$ -彩色とは次を満たす  $f : V \rightarrow [n]$  :

$$\bullet f(a) \neq f(b) \text{ } (\{a, b\} \in E).$$

$\chi_G : n \mapsto \#(G \text{ の } n\text{-彩色})$  は  $G$  の彩色多項式.  $p := \#V$ .

a.  $V$  の安定な分割：全てのブロックが  $G$  の安定集合.

$S_G(j) := \#(V \text{ の安定な } j \text{ ブロック分割})$  について次を示せ：

$$\chi_G(n) = \sum_{j=1}^n S_G(j)(n)_j.$$

b. 半順序集合  $L_G := \{\pi : V \text{ の分割, 各ブロックが } G \text{ で連結}\}$ .  
次を示せ：

$$\chi_G(n) = \sum_{\pi \in L_G} \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi}.$$

なお、これより  $\chi_G(n) = n^{\#(G \text{ の連結成分})} \chi_{L_G}(n)$ .

c. グラフィカル配置：

$$\mathcal{B}_G = \{x_i = x_j : \{i, j\} \in E\} \text{ in } \mathbb{R}^p.$$

$L_G \cong L(\mathcal{B}_G)$ ,  $\chi_G = \chi_{\mathcal{B}_G}$  を示せ.

d.  $e \in E$  について

$$G - e = (V, E - \{e\}),$$

$$G/e = (e \text{ を縮約し, 多重辺を 1 つにまとめる}).$$

次を示せ：

$$\chi_G(n) = \chi_{G-e}(n) - \chi_{G/e}(n).$$

**解答 (a.).** ちょうど  $j$  色を使う  $n$ -彩色は  $S_G(j)(n)_j$  通り. ただし  $(n)_j$  は  $j$  個のブロックに色を割り当てる方法の数.

**解答 (b.).**  $g(\sigma) = \sum_{\pi \geq \sigma} \mu(\sigma, \pi) n^{\#\pi}$  とすると, Möbius 反転により

$$n^{\#\sigma} = \sum_{\pi \geq \sigma} g(\pi).$$

$g(\hat{0}) = \chi_G(n)$  となるように  $g$  をうまく定めたい.

### 3 問題

$g(\sigma) := (\pi \text{ の各ブロックを縮約したグラフでの答え})$  とすればよい. 各頂点の自由な  $n$ -彩色は, 両端点の色が同じ辺を全て縮約したグラフ (のみ) の  $n$ -彩色.

定義より  $\chi_G(n) = g(\hat{0}) = \sum_{\pi} \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi}$ .

$\chi_G(n) = n^{\#(G \text{ の連結成分})} \chi_{L_G}(n)$  :

$$\begin{aligned} L_G \text{ のランク} &= p - \#(G \text{ の連結成分}), \\ \rho(\pi) &= p - \#\pi, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \chi_{L_G}(n) &= \sum_{\pi} \mu(\hat{0}, \pi) n^{(L_G \text{ のランク}) - \rho(\pi)} \\ &= \sum_{\pi} \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi - \#(G \text{ の連結成分})}. \end{aligned}$$

**解答 (c.).**  $\pi \in L_G$  に対して,  $\pi$  の各ブロックに含まれる辺を集め, これらに対応する超平面の交叉 ( $\in L(\mathcal{B}_G)$ ) を対応付ける. これは  $L_G \rightarrow L(\mathcal{B}_G)$  の同型写像.

b. より

$$\chi_G(n) = n^a \chi_{L_G}(n) = n^a \chi_{L(\mathcal{B}_G)}(n) = n^{a+b} \chi_{\mathcal{B}_G}(n) \quad (a, b \text{ は定数}).$$

どちらも次数は  $p$  なので  $a + b = 0$ .

**解答 (d.).**

$$\chi_{\mathcal{B}_G}(n) = \chi_{\mathcal{B}_{G-e}}(n) - \chi_{\mathcal{B}_{G/e}}(n).$$

を示す. Deletion-Restriction  $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}'}(x) - \chi_{\mathcal{A}''}(x)$  を用いる.

$e$  に対応する超平面  $H_e$  について  $(\mathcal{B}_G)' = \mathcal{B}_G - \{H_e\} = \mathcal{B}_{G-e}$ .

### 3 問題

あとは  $\chi_{(\mathcal{B}_G)''}(n) = \chi_{\mathcal{B}_{G/e}}(n)$  を示せばよい. WLOG  $e = \{p-1, p\}$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_G)'' &= \{H \cap H_e \neq \emptyset : H \in \mathcal{B}_G - \{H_e\}\} \\ &= \{x_i = x_j, x_{p-1} = x_p : \{i, j\} \in E - \{e\}\} \text{ in } \mathbb{R}^p, \\ \mathcal{B}_{G/e} &= \{x_i = x_j : \{i, j\} \in E, i, j < p\} \\ &\quad \cup \{x_i = x_{p-1} : \{i, p\} \in E\} \text{ in } \mathbb{R}^{p-1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_G$  の超平面は必ず  $x_{p-1} = x_p$  であり,  $x_p$  を取り除けば  $\mathcal{B}_{G/e}$  に一致. したがって  $(\mathcal{B}_G)'', \mathcal{B}_{G/e}$  は本質的に同じ (informal).

注: 組合せ的証明の方が簡単.  $e = \{i, j\}$  について

$$\begin{aligned} \chi_G(n) &= \#\{f : G - e \text{ の } n\text{-彩色}, f(i) \neq f(j)\}, \\ \chi_{G/e}(n) &= \#\{f : G - e \text{ の } n\text{-彩色}, f(i) = f(j)\}. \end{aligned}$$

**問題 109.** 単純無向グラフ  $G$  について

$$\text{ao}(G) = \#(G \text{ の acyclic な向き付け})$$

とするとき次を示せ:

$$\text{ao}(G) = (-1)^p \chi_G(-1).$$

**解答** (帰納法). 辺  $e = \{i, j\} \in E$  について,

$$\begin{aligned} &\text{ao}(G) \\ &= \#(e \text{ を適当に向き付ければ acyclic な } E - \{e\} \text{ の向き付け}) \\ &\quad + \#(i \rightarrow j \text{ としても } j \rightarrow i \text{ としても acyclic な } E - \{e\} \text{ の向き付け}) \\ &= \text{ao}(G - e) + \text{ao}(G/e). \end{aligned}$$

$E = \emptyset$  のとき  $\chi_G(n) = n^p$ ,  $\text{ao}(G) = 1$  より  $\text{ao}(G) = (-1)^p \chi_G(-1)$ .  $\#E$  の帰納法で OK.

### 3 問題

**解答** (配置の領域の個数).  $G$  の acyclic な向き付けを 1 つとり, 配置  $\mathcal{B}_G$  の領域に対応させる. 各辺  $\{i, j\} \in E$  について,  $i \rightarrow j$  なら超平面  $x_i = x_j$  で仕切られた  $x_i < x_j$  側を,  $j \rightarrow i$  なら  $x_i > x_j$  側を選ぶ. これは一対一対応.

ゆえに  $\text{ao}(G) = r(\mathcal{B}_G) = (-1)^p \chi_{\mathcal{B}_G}(-1) = (-1)^p \chi_G(-1)$ .

**問題 115 (a).**

カタラン配置  $\mathcal{C}_n = \{x_i - x_j = c : c \in \{0, \pm 1\}, 1 \leq i < j \leq n\}$

について次を示せ:

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(x) = x(x - n - 1)(x - n - 2)(x - n - 3) \cdots (x - 2n + 1).$$

**解答.**  $a_i - a_j \neq 0, \pm 1$  なる  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n$  を数える.

$a_1$  を  $p$  通りから選べば, 残りの  $n - 1$  元をどの 2 つも隣接しないように  $[p - 3]$  から選ぶのみで,  $p \binom{p-3-(n-1)+1}{n-1} (n-1)!$  通り.