

2 Sieve Methods

2.1 Inclusion-Exclusion

“Sieve method” とは：有限集合 S の要素数を求める方法

パターン (1) $\#S$ を大きめに見積もり、誤差を大きめに見積もり、その誤差を…ということを繰り返し、誤差を 0 に近づけていく

パターン (2) $T \supseteq S$ について、余分な元が打ち消しあうように T の各元を重みづけする（後の節で登場）

定理 2.1.1. n 元集合 S 、線形空間 $V = \{f : 2^S \rightarrow K\}$ (K は体) について、線形写像 $\phi : V \rightarrow V$ を

$$\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y),$$

で定める。このとき ϕ^{-1} が存在し、

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y).$$

T, Y の代わりに補集合 $S - T, S - Y$ を考えると、包含関係を逆にした場合の主張が成り立つ（後述）。

証明. $\psi : V \rightarrow V$ を $\psi f(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y)$ で定めると、

$$\begin{aligned} \phi \psi f(T) &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \phi f(Y) \quad (\psi \phi f(T) \text{ では?}) \\ &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z) \\ &= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \right) f(Z). \end{aligned}$$

T, Z を固定したとき、 $m = \#(Z - T)$ とおくと

$$\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{0m}$$

なので、 $\phi\psi f(T) = f(T)$ がわかる。よって $\phi^{-1} = \psi$ 。 □

よくある定理 2.1.1 の適用例

集合 A と、 A の元が持ったり持たなかったりする性質の集合 S がある。

ちょうど $T \subseteq S$ の性質のみを持つ A の元の個数 $f_=(T)^{*1}$ は求めにくい、少なくとも $T \subseteq S$ の性質は満たすような A の元の個数 $f_{\geq}(T)$ は求めやすいようなとき、

$$f_{\geq}(T) = \sum_{Y \supseteq T} f_=(Y),$$

なので、定理 2.1.1 より

$$f_=(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f_{\geq}(Y).$$

とくに、どの性質も持たないような元の個数は

$$f_=(\emptyset) = \sum_Y (-1)^{\#Y} f_{\geq}(Y). \quad (1)$$

性質を集合で言い換えることもできる。 A_1, \dots, A_n を A の部分集合とし、

$$A_T = \bigcap_{i \in T} A_i,$$

と定める ($A_{\emptyset} = A$ とする)。 A_i を「性質 P_i を満たす A の元の集合」と考えれば、式 (??) に対応するのは

$$\begin{aligned} \#(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) &= \#(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n, \end{aligned}$$

^{*1} 重み $w : A \rightarrow K$ を決めて、元の個数の代わりに元の重みの和 $\sum_x w(x)$ を $f_=(T)$ としてもよい

ただし

$$S_k = \sum_{\#T=k} \#A_T.$$