3.20 Promotion and Evacuation

shino16

March 14, 2023

Poset Pと$p = \#P$について，

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \{1, \ldots, p\}\text{に通常の順序がついたposet}, \\ \mathcal{L}(P) &= (P\text{の線形拡大の集合}) \\ &= \{f : P \to \mathbf{p}, \text{大小関係を保つ全単射}\} \end{aligned}$$

$f(t)$はtのラベルと解釈できる．
$f \in \mathcal{L}(P)$に以下の操作(promotion)を行って得られるものを$f\partial$とする：

1. $f(t_1) = 1$なるt_1を取る．
2. $t_2 = \operatorname{argmin}\{f(t_2) : t_1 \lessdot t_2\}$.
3. $t_3 = \operatorname{argmin}\{f(t_3) : t_2 \lessdot t_3\}$.
4. これを繰り返し，極大な元t_kを得るまで続ける．
5. $f(t_1) \leftarrow f(t_2)$，$f(t_2) \leftarrow f(t_3)$，...，$f(t_{k-1}) \leftarrow f(t_k)$と代入する．
6. $f(t_k) \leftarrow p + 1$と代入し，全ての元のラベルを1減らす．

$f\partial$はfのpromotion．極大鎖$t_1 \lessdot t_2 \lessdot \cdots \lessdot t_k$は$f$のpromotion

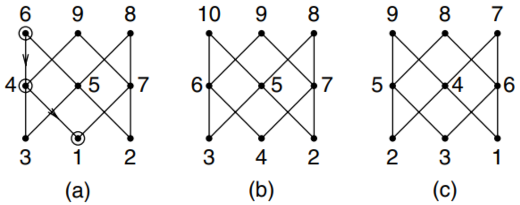

Figure: Promotion

δの双対な操作をdual promotion ∂^*とする．内容は：

1. $f(t_1) = p$なるt_1を取る．
2. $t_2 = \mathrm{argmax}\{f(t_2) : t_1 \gtrdot t_2\}$.
3. $t_3 = \mathrm{argmax}\{f(t_3) : t_2 \gtrdot t_3\}$.
4. これを繰り返し，極小な元t_kを得るまで続ける．
5. $f(t_1) \leftarrow f(t_2)$，$f(t_2) \leftarrow f(t_3)$，...，$f(t_{k-1}) \leftarrow f(t_k)$と代入する．
6. $f(t_k) \leftarrow 0$と代入し，全ての元のラベルを1増やす．

$f \in \mathcal{L}(P)$に以下の操作(evacuation)を行って得られるものを$f\epsilon$とする．

1. $f \leftarrow f\partial$とし，ラベルpを固定する．
2. fの残りのラベルのみに∂を作用させ，さらにラベル$p-1$を固定する．
3. fの残りのラベルのみに∂を作用させ，さらにラベル$p-2$を固定する．
4. これをfのラベルがすべて固定されるまで繰り返す．

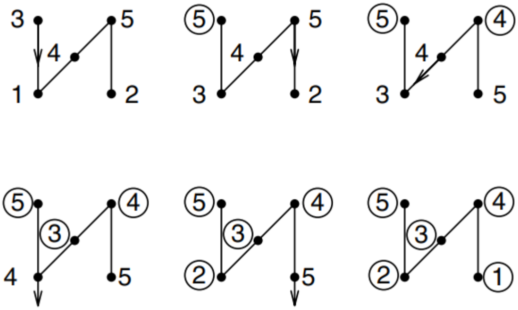

Figure: Evacuation

ϵの双対dual evacuation
ϵ^*も同様に定義する．つまり，ラベルを上に流して下方のラベルから

Theorem (3.20.1)

(a) $\epsilon^2 = 1$ (恒等写像).

(b) $\partial^{\mathsf{p}} = \epsilon\epsilon^*$.

(c) $\partial\epsilon = \epsilon\partial^{-1}$.

この定理を示すのが3.20節の目標.

Definition

$$
\begin{aligned}
\text{群}\mathsf{G} &= \langle \tau_1, \dots, \tau_{\mathsf{p}-1} \mid \tau_{\mathsf{i}}^2 = 1, \tau_{\mathsf{i}}\tau_{\mathsf{j}} = \tau_{\mathsf{j}}\tau_{\mathsf{i}} \text{ if } |\mathsf{i}-\mathsf{j}| > 1 \rangle, \\
\delta_{\mathsf{j}} &= \tau_1\tau_2\cdots\tau_{\mathsf{j}}, \qquad (\mathsf{j} = 1, \dots, \mathsf{p}-1) \\
\gamma_{\mathsf{j}} &= \delta_{\mathsf{j}}\delta_{\mathsf{j}-1}\cdots\delta_1, \\
\gamma_{\mathsf{j}}^* &= (\tau_{\mathsf{j}}\tau_{\mathsf{j}-1}\cdots\tau_1)(\tau_{\mathsf{j}}\tau_{\mathsf{j}-1}\cdots\tau_2)\cdots(\tau_{\mathsf{j}}\tau_{\mathsf{j}-1})(\tau_{\mathsf{j}}).
\end{aligned}
$$

Lemma

(a) $\gamma_{\mathbf{j}}^2 = (\gamma_{\mathbf{j}}^*)^2 = 1$.

(b) $\delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{j}+1} = \gamma_{\mathbf{j}}\gamma_{\mathbf{j}}^*$.

(c) $\delta_{\mathbf{j}}\gamma_{\mathbf{j}} = \gamma_{\mathbf{j}}\delta_{\mathbf{j}}^{-1}$

(a)
$(\tau_1,\dots,\tau_\mathsf{j})$を$(\tau_\mathsf{j},\dots,\tau_1)$に置換すると$\gamma_\mathsf{j}$は$\gamma_\mathsf{j}^*$に変わる．よって$\gamma_\mathsf{j}$につ
jの帰納法．j $=1$については

$$\gamma_1 = \delta_1 = \tau_1,$$
$$\tau_1^2 = 1,$$

よりOK．
例えば

$$\begin{aligned}
\gamma_4^2 &= (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\cancel{\tau_2})(\cancel{\tau_1})(\cancel{\tau_1}\cancel{\tau_2}\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1)\\
&= (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)\tau_1(\tau_3\tau_4)(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1)\\
&= (\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)\tau_1\cancel{\tau_4}\cancel{\tau_3}(\cancel{\tau_3}\cancel{\tau_4})(\tau_1\tau_2\tau_3)(\tau_1\tau_2)(\tau_1)\\
&= \gamma_3^2
\end{aligned}$$

ということから，帰納的にOK．
(b,c) jの帰納法で同様にやる． □

Theorem (3.20.1，再掲)

(a) $\epsilon^2 = 1$.

(b) $\partial^{\mathsf{p}} = \epsilon\epsilon^*$.

(c) $\partial\epsilon = \epsilon\partial^{-1}$.

Lemma (再掲)

(a) $\gamma_{\mathsf{j}}^2 = (\gamma_{\mathsf{j}}^*)^2 = 1$.

(b) $\delta_{\mathsf{j}}^{\mathsf{j}+1} = \gamma_{\mathsf{j}}\gamma_{\mathsf{j}}^*$.

(c) $\delta_{\mathsf{j}}\gamma_{\mathsf{j}} = \gamma_{\mathsf{j}}\delta_{\mathsf{j}}^{-1}$

$f \in \mathcal{L}(P)$をPの元の列$u_1u_2\cdots u_p$と同一視する(ここで$f(u_i) = i$).

$i = 1, \ldots, p-1$について，$\tau_i : \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P)$を

$$(u_1u_2\cdots u_p)\tau_i = \begin{cases} u_1u_2\cdots u_iu_{i+1}\cdots u_p & \text{if } u_i < u_{i+1}, \\ u_1u_2\cdots u_{i+1}u_i\cdots u_p & \text{if } u_i\text{と}u_{i+1}\text{が比較不能}, \end{cases}$$

で定める．(なお$f(u_i) < f(u_{i+1})$より，$u_i > u_{i+1}$はあり得ない)

あとは$\partial = \delta_{p-1}$と$\epsilon = \gamma_{p-1}$を示せば終わり．前者はお絵描き．後者はEvacuation ϵの定義と$\gamma_{p-1} = \delta_{p-1}\delta_{p-2}\cdots\delta_1$から． $\square$