記法

本の末尾 “List of Notations” が便利.

$\mathbb{N}$: 非負整数の集合

$\mathbb{P}$: 正整数の集合

$\#S$: 有限集合 S の要素数

$S \subset T$: S は T の真部分集合 ($S \subsetneq T$)

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

$\mathfrak{S}_n$: $[n]$ 上の順列の集合

$\left(\binom{n}{k}\right)$: $[n]$ の k-元部分多重集合の個数

$\binom{S}{k}$: S の k-元部分集合の集合

$\left(\binom{S}{k}\right)$: S の k-元部分多重集合の集合

形式的冪級数

通常型母関数 :

$$\sum_{n \geq 0} f(n) x^n.$$

指数型母関数 :

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}.$$

これらは形式的冪級数 (formal power series).

$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ について，x^n の係数は

$$[x^n] F(x) = a_n.$$

また，形式的に $a_0 = F(0)$ と表す.

和・積：

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n,$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) x^n.$$

指数型母関数については,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right) &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!} \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right) x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}\right) \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

これらは形式的冪級数環 $\mathbb{C}[[x]]$ をなす.

$F(x)G(x) = 1$ であるとき，$G(x) = F(x)^{-1} = 1/F(x)$ と表す．これは $F(0) \neq 0$ ならば必ず存在する.

例 1.1.5. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ について，

$$(1 - \alpha x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n.$$

原則として, 形式的冪級数を関数とみなしたときに成り立つ等式は, 形式的冪級数の等式としても成立する. ただし式が形式的冪級数として well-defined である場合に限る.

例 1.1.6.

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

とおく.

$F(x)$ を（通常の意味での）関数とみなしてみる．任意の $x \in \mathbb{C}$ について $F(x) = 1$ が成り立つ $(e^x e^{-x} = 1)$ ので，係数比較により

$$a_0 = 1, \qquad a_n = 0 \quad (n \geq 1).$$

したがって，

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 1$$

が形式的冪級数の等式としても成立する．

例 1.1.7. 等式

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(x+1)^n}{n!} = e \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

は関数論的には正しい（$e^{x+1} = e \cdot e^x$）が，左辺は形式的冪級数として収束しないため NG.

$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ と $G(0) = 0$ を満たす $G(x)$ について，

$$F(G(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n G(x)^n.$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$(1+x)^\lambda = \sum_{n \geq 0} \binom{\lambda}{n} x^n.$$

ただし $\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}$.

$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ について，

$$F'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

exp, log はテイラー展開に沿って定義する．

$$\exp x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

例 1.1.11. $F(0)=1$ とし，次を満たす形式的冪級数 $G(x)$ を考える：

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)}, \qquad G(0)=0.$$

このとき

$$F(x) = \exp G(x).$$

証明. $F(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n$，$\exp G(x) = \sum b_n x^n$ とおく．各 b_n は有限個の a_i の値によって決まる．$F(0)=1$ より各 b_n は有限個の a_i の多項式,

$$b_n = p_n(a_1, \ldots, a_m)$$

として表せる．ここで $a_1, \ldots, a_m$ を動かして十分小さくとれば，$F(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ が収束するような 0 の近傍 U がとれる．$\forall x \in U$ について

$$F(x) = \exp G(x)$$

が成り立つので,

$$a_n = b_n = p_n(a_1, \ldots, a_m).$$

多項式 $p_n(a_1, \ldots, a_m)$ と a_n が何らかの $0 \in \mathbb{C}^m$ の近傍で一致することから，$b_n = p_n(a_1, \ldots, a_m)$ は多項式として a_n に一致する． □

例 1.1.12. $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ について，母関数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ の簡単な式を求める．

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} a_n x^n &= \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^n \\ &= x \sum_{n\geq 2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} a_{n-2} x^{n-2}\end{aligned}$$

より，

$$F(x) - (1+x) = x(F(x)-1) + x^2F(x).$$

したがって

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

例 1.1.13. $a_0 = 1$，$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$ $(n \geq 0)$ について，母関数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n/n!$ の簡単な式を求める．

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} na_{n-1}\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} a_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!},\end{aligned}$$

すなわち

$$F'(x) = F(x) + xF(x).$$

例 1.1.11 より，$F(x) = \exp\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$．

q-類似

“n の q-類似”：

$$\boldsymbol{(n)} = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = (1-q^n)/(1-q).$$

“$n!$ の q-類似”：

$$\boldsymbol{(n)!} = \boldsymbol{(1)(2)\cdots(n)} = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}).$$

“$\binom{n}{k}$ の q-類似”：

$$\boldsymbol{\binom{n}{k}} = \frac{\boldsymbol{(n)!}}{\boldsymbol{(k)!(n-k)!}}.$$

$q \to 1$ のとき $\boldsymbol{(n)} \to n$，$\boldsymbol{(n)!} \to n!$，$\boldsymbol{\binom{n}{k}} \to \binom{n}{k}$．

$n!$: $[n]$ の部分集合の列 $\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n = [n]$ の個数.

$\boldsymbol{(n)!}$: 線形空間 $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間の列 $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}_q^n$ の個数.

$\binom{n}{k}$: $[n]$ の k-元部分集合の個数.

$\boldsymbol{\binom{n}{k}}$: $\mathbb{F}_q^n$ の k 次元部分空間の個数.

系 1.3.13. 順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ の転倒数を $\mathrm{inv}(w)$ で表すとき,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(w)} = \boldsymbol{(n)!}.$$