13 Matroids

13.7 Weighted Matroid Intersection

重み付きマトロイド交差問題

インスタンス：	独立性オラクルで与えられるマトロイド $(E, \mathcal{F}_1)$, $(E, \mathcal{F}_2)$，重み $c : e \to \mathbb{R}$.
タスク：	$c(X)$ を最大化する $X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

補題 1. マトロイド $(E, \mathcal{F})$，重み $c : E \to \mathbb{R}$，独立集合 $X \in \mathcal{F}$ について，$x_1, \ldots, x_l \in X$ と $y_1, \ldots, y_l \notin X$ が

(a) $x_j \in C(X, y_j)$ and $c(x_j) = c(y_j)$ for all j,

(b) $x_i \notin C(X, y_j)$ or $c(x_i) > c(y_j)$ for all i < j,

(c) $x_i \notin C(X, y_j)$ or $c(x_i) \geq c(y_j)$ for all j < i,

を満たすとき，$(X \setminus \{x_1, \ldots, x_l\}) \cup \{y_1, \ldots, y_l\} \in \mathcal{F}$.

証明. l で帰納法.
$l = 1$ のとき，$x_1 \in C(X, y_1)$ より $(X \setminus \{x_1\}) \cup \{y_1\}$.
$\mu \coloneqq \min c(x_i)$，$h \coloneqq \min\{i : c(x_i) = \mu\}$，$X' \coloneqq (X \setminus \{x_h\}) \cup \{y_h\}$.
(a) より $X' \in \mathcal{F}$. $C(X', y_j) = C(X, y_j)$ $(\forall j \neq h)$ が言えれば，X' と $(x_i), (y_i)$ の残りに帰納法の仮定を適用して終了.
$h < j$ のとき，$c(x_h) = \mu \leq c(x_j) = c(y_j)$ なので $x_h \notin C(X, y_j)$.
$j < h$ のとき，$c(x_h) = \mu < c(x_j) = c(y_j)$ なので $x_h \notin C(X, y_j)$.
したがって，$j \neq h$ について $x_h \notin C(X, y_j)$.
ゆえに $C(X, y_j) = C(X \setminus \{x_h\}, y_j) = C(X', y_j)$. □

アルゴリズムの概略

$X = X_0 = \emptyset$ から始めて，

- 増加パス P をとり，$X_{k+1} \leftarrow X_k \triangle V(P)$

を繰り返す（重みなし ver. と同様）.
これで得られる $X_0, \ldots, X_m \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ $(|X_k| = k)$ について，

$$c(X_k) = \max\{c(X) : X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2,\ |X| = k\} \quad (\forall k)$$

を保証．$\max_k c(X_k)$ を達成する X_k が答え.

補題 (#). X_k と $c_1, c_2 : E \to \mathbb{R}$ が

- $c_1 + c_2 = c$, and
- $c_i(X_k) = \max\{c_i(X) : X \in \mathcal{F}_i,\ |X| = k\}$ $(\forall i)$

を満たすとき，$c(X_k) = \max\{c(X) : X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2,\ |X| = k\}$.

証明．max を達成する X をとると，

$$\begin{aligned} c(X_k) &\leq c(X) \\ &= c_1(X) + c_2(X) \\ &\leq c_1(X_k) + c_2(X_k) \\ &= c(X_k). \end{aligned}$$

□

補題 (#) の条件を満たす X_k, c_1, c_2 について，二部グラフを構築する．

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= \{(x,y) : x \in C_1(X_k, y) \setminus \{y\},\ y \in E \setminus X\},\\
A^{(2)} &= \{(y,x) : x \in C_2(X_k, y) \setminus \{y\},\ y \in E \setminus X\},\\
S &= \{y \in E \setminus X : X_k \cup \{y\} \in \mathcal{F}_1\},\\
T &= \{y \in E \setminus X : X_k \cup \{y\} \in \mathcal{F}_2\}
\end{aligned}$$

とする．ここで

$$\begin{aligned}
m_1 &= \max\{c_1(y) : y \in S\},\\
m_2 &= \max\{c_2(y) : y \in T\},\\
\bar{S} &= \{y \in S : c_1(y) = m_1\},\\
\bar{T} &= \{y \in T : c_2(y) = m_2\},\\
\bar{A}^{(1)} &= \{(x,y) \in A^{(1)} : c_1(x) = c_1(y)\},\\
\bar{A}^{(2)} &= \{(y,x) \in A^{(2)} : c_2(x) = c_2(y)\},
\end{aligned}$$

とし，グラフ $\bar{G} = (E, \bar{A}^{(1)} \cup \bar{A}^{(2)})$ を考える．

補題． (I) $c_1(x) \geq c_1(y)$ $(\forall (x,y) \in A^{(1)})$.

(II) $c_2(x) \geq c_2(y)$ $(\forall (y,x) \in A^{(2)})$.

(i) $c_1(x) > c_1(y)$ $(\forall (x,y) \in A^{(1)} \setminus \bar{A}^{(1)})$.

(ii) $c_2(x) > c_2(y)$ $(\forall (y,x) \in A^{(2)} \setminus \bar{A}^{(2)})$.

証明．(I), (II) は定理 13.23 よりよい．(i), (ii) は $\bar{A}^{(1)}, \bar{A}^{(2)}$ の定義よりよい． □

補題． 最短 $\bar{S}$-$\bar{T}$-パス P について，$X_{k+1} = X_k \triangle V(P)$ とすると

(A) $X_{k+1} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, and
(B) X_{k+1}, c_1, c_2 は補題 (#) の条件を満たす．

証明. (A) $P = y_0 x_1 y_1 \cdots x_l y_l$ とおく．
$X_{k+1} \in \mathcal{F}_1$ を示す．$y_0 \in S$ より $X_k \cup \{y_0\} \in \mathcal{F}_1$，また $C(X_k, y_j) = C(X_k \cup \{y_0\}, y_j)$.
$X_k \cup \{y_0\}$，c_1，$x_1, \ldots, x_l$ と $y_1, \ldots, y_l$ に対して補題 13.35 を適用.

(a) $(x_j, y_j) \in \bar{A}^{(1)}$ より $x_j \in C_1(X_k, y_j)$ and $c_1(x_j) = c_1(y_j)$.
(b) $i < j$ とする．P は最短なので $(x_i, y_j) \notin \bar{A}^{(1)}$

□