# 3.11 節の残り

shino16

2022 年 8 月 17 日

## 目次

# 0 復習

**定義.** 配置 $\mathcal{A}$ について,

Intersection poset $L(\mathcal{A}) := \{0$ 個以上の超平面の非空な交わり$\}$.

$\hat{0} = V$. $s \leq t \overset{\text{def}}{\iff} s \supseteq t$.

**定義.**

$$\text{特性多項式 } \chi_{\mathcal{A}}(x) := \sum_{t \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, t) x^{\dim(t)}$$
$$= \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \text{central}}} (-1)^{\#\mathcal{B}} x^{n - \operatorname{rank}(\mathcal{B})} \quad (\text{命題 } 3.11.3).$$

**命題** (3.11.5, Deletion-Restriction)**.** 配置 $\mathcal{A}$, $H_0 \in \mathcal{A}$ について

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A} - \{H_0\},$$
$$\mathcal{A}'' := \mathcal{A}^{H_0} = \{H \cap H_0 \neq \emptyset : H \in \mathcal{A}\}.$$

このとき

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}'}(x) - \chi_{\mathcal{A}''}(x).$$

**定義.** $V$ : 実線形空間 について

$$
\begin{aligned}
r(\mathcal{A}) &:= \#(\text{領域}) = r(\mathcal{A}') + r(\mathcal{A}''),\\
b(\mathcal{A}) &:= \#(\text{相対的に有界な領域}) \quad (\text{essentialize すると有界})\\
&= \begin{cases} b(\mathcal{A}') + b(\mathcal{A}'') & \text{if } \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}'),\\ 0 & \text{if } \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}') + 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

**定理.**

$$
\begin{aligned}
r(\mathcal{A}) &= (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1),\\
b(\mathcal{A}) &= (-1)^{\operatorname{rank}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).
\end{aligned}
$$

# 1 General Position と特性多項式

**定義.** $\mathcal{A}$ の超平面は general position にある

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 以下が同時に成立：

(a) $\{H_1, \ldots, H_p\} \subseteq \mathcal{A}$, $p \leq n \implies \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) = n - p$,

(b) $\{H_1, \ldots, H_p\} \subseteq \mathcal{A}$, $p > n \implies H_1 \cap \cdots \cap H_p = \emptyset$.

**命題.** $\mathcal{A}$ : general position, $m = \#\mathcal{A}$ について

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{A}}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} x^{n-k}\\
&= x^n - m x^{n-1} + \binom{m}{2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{m}{n}.
\end{aligned}
$$

証明. 方針：$L(\mathcal{A})$ の構造に注目. $\mu(\hat{0}, t)$ を explicit に求める.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_m\},\\
&P = \{S \subseteq [m] : \#S \leq n\} \text{ を包含関係で順序付け},\\
&\phi : P \to L(\mathcal{A}), \quad S \mapsto \bigcap_{i \in S} H_i,
\end{aligned}
$$

とする[a]. このとき

(a) $\phi$ は全射：明らか.

(b) $\phi$ は単射：

$$
\begin{aligned}
&\phi(S) = \phi(S')\\
\Longrightarrow\ &\phi(S) = \phi(S \cup S')\\
\Longrightarrow\ &n - \#S = \dim(\phi(S)) = n - \#(S \cup S')\\
\Longrightarrow\ &S = S'.
\end{aligned}
$$

(c) $\phi$ と $\phi^{-1}$ は順序を保つ：

$$S \subseteq S' \iff \phi(S) \supseteq \phi(S').$$

ゆえに $L(\mathcal{A}) \cong P$.

$[\hat{0}, S] \cong B_{\#S}$ より $\mu(\hat{0}, S) = (-1)^{\#S}$, また $\dim(\phi(S)) = n - \#S$ より

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{A}}(x) &= \sum_{t \in L(\mathcal{A})} \mu(\hat{0}, t) x^{\dim(t)}\\
&= \sum_{S \in P} (-1)^{\#S} x^{n - \#S}\\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} x^{n-k}.
\end{aligned}
$$

□

[a] $P$ は truncated boolean algebra と呼ばれる.

なお $V$ : 実線形空間 について

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \\ &= 1 + m + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

$m < n$ のとき

$$\begin{aligned} b(\mathcal{A}) &= (-1)^m \chi_{\mathcal{A}}(1) \\ &= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \\ &= \delta_{0m}, \end{aligned}$$

$m \geq n$ のとき $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n$ より

$$\begin{aligned} b(\mathcal{A}) &= (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{k} \\ &= \binom{m-1}{n}. \end{aligned}$$

(注) 最後の等号について：

(a) 漸化式を用いる：

$$\begin{aligned} &\binom{m}{n} - \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n-2} - \cdots \\ &= \left[\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}\right] - \left[\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n-2}\right] + \cdots \\ &= \binom{m-1}{n}. \end{aligned}$$

(b) FPS：

$$(-1)^n [x^n] \frac{1}{1-x} (1-x)^m = \binom{m-1}{n}.$$

# 2 有限体法

$\mathbb{Q}$ 上の配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式を，有限体を使って計算しよう．

## 2.1 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{F}_q$ への帰着

- $\mathcal{A}$ 全体を同時に整数倍して分母をはらう．
- 素ベキ $q$ をとって全体の $\bmod q$ をとり，$\mathcal{A}_q$ を得る．

**定義．** $\mathcal{A}$ は $\bmod q$ で**良い帰着**を持つ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$.

**命題．** $\mathbb{Z}$ 上の配置 $\mathcal{A}$ について，$\mathcal{A}$ が $\bmod p$ で良い帰着を持たないような素数 $p$ は有限個のみ．

証明．$H_1, \ldots, H_j \in \mathcal{A}$ $(H_i : \alpha_i \cdot x = a_i)$ について，

$$\begin{aligned} & H_1 \cap \cdots \cap H_j \neq \emptyset \\ \iff \quad & \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_j & a_j \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

また $H_1 \cap \cdots \cap H_j \neq \emptyset$ ならば

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_j) = \operatorname{null}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix} = n - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{pmatrix}. \tag{2}$$

等式 (1) の成立/不成立と式 (2) の値が $\mathbb{Z}$ 上，$\mathbb{F}_q$ 上で一致すればよい．
($\because$ 増えない (1)，潰れない (2)，大小関係を保つ (明らか)，比較不可能な関係を保つ (2))

(行列の rank) $=$ (max $k$ s.t. 正則な $k \times k$ 小行列が存在) より，どの正方小行列についても行列式が非ゼロから mod $p$ でゼロにならなければよい．$p$ を十分大きくとれば OK. $\square$

## 2.2　$\chi_{\mathcal{A}}(q)$ の計算

この節のメイン.

**定理** (3.11.10)**.** $\mathbb{Q}^n$ 上の配置 $\mathcal{A}$，$L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ なる素ベキ $q$ について，

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}(q) &= \#\left(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H\right) \\ &= q^n - \# \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H.\end{aligned}$$

無限個の $q$ について上の等式が成り立つので，補完で $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ が得られる.

証明. 方針：$\chi_{\mathcal{A}}(q)$ を Möbius 反転の式にあてはめる.
$f, g : L(\mathcal{A}_q) \to \mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned}f(t) &= \#t = q^{\dim(t)}, \\ g(t) &= \#\left(t - \bigcup_{u > t} u\right),\end{aligned}$$

で定める．$f(t) = \sum_{u \geq t} g(u)$ より

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{u \geq t} \mu(t, u) f(u) \\ &= \sum_{u \geq t} \mu(t, u) q^{\dim(u)}.\end{aligned}$$

$t = \hat{0}$ を代入して

$$g(\hat{0}) = \chi_{\mathcal{A}}(q) = \#\left(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H\right).$$

□

## 2.3　例：ブレイド配置

braid……組みひも

**定義.** ランク $n-1$ の**ブレイド配置**

$$\mathcal{B}_n = \{x_i - x_j = 0 : 1 \le i < j \le n\} \text{ in } K^n.$$

これは直線 $x_1 = \cdots = x_n$ を含む $\binom{n}{2}$ 個の超平面の集まり.

例：$\mathcal{B}_3$ `https://www.geogebra.org/3d/uxubgxrc`

特性多項式を有限体法で計算しよう．十分大きな素数 $p$ について，定理 3.11.10 より

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{B}_n}(p) &= \#\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_p^n : x_i \neq x_j\ (\forall i < j)\} \\ &= (p)_n.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(x) = (x)_n.$$

実は $L(\mathcal{B}_n) \cong \Pi_n$ (問題 108 で後述).

## 2.4　例：Shi 配置

**定義.**

$$\textbf{Shi 配置 } \mathcal{S} = \{x_i, x_j = c : c \in \{0,1\},\ i \leq i < j \leq n\}.$$

**定理** (3.11.7)**.**

$$\chi_{\mathcal{S}_n}(x) = x(x-n)^{n-1}.$$

証明. 素数 $p$ について次を示す：

$$\#\left(\mathbb{F}_p^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H\right) = p(p-n)^{n-1}.$$

次の条件を満たす $\pi = (B_1, \ldots, B_{p-n})$ を考える[a]：

(a) $\bigcup B_i = [n]$,
(b) $B_i \cup B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, and
(c) $1 \in B_1$.

$(a, \pi)$ $(a \in \mathbb{F}_p)$ を $\mathbb{F}_p^n - \bigcup_{H \in (\mathcal{S}_n)_p} H$ の元に一対一に対応させよう.

- for $i$ in $1, \ldots, p-n$:
  - for $j$ in $B_i$ (昇順):
    * $\alpha_j \leftarrow a$.
    * $a \leftarrow a + 1$.
  - $a \leftarrow a + 1$.

例：$p = 11$, $n = 6$, $a = 6$, $\pi = (\{1,4\}, \{5\}, \emptyset, \{2,3,6\}, \emptyset)$:

$$\alpha_1 = 6,\ \alpha_4 = 7,\ \alpha_5 = 9,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_6 = 3.$$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\left(\mathbb{F}_p^n-\bigcup_{H\in(\mathcal{S}_n)_p}H\right)$：

$$\alpha_i-\alpha_j=1 \implies i,j \text{ は } \pi \text{ 上で同一ブロックに属し，} j<i.$$

全単射性：$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を，$\alpha_1$ を先頭として昇順に並べる (informal).
$\alpha_1$ から $a$ が，$p-n$ 個のギャップから $p-n$ 個のブロックとそれらの間の順番が一意に決まる.
各 $1<i\le n$ について，$i$ が所属するブロックが $p-n$ 通りあることから，$(a,\pi)$ は $p(p-n)^{n-1}$ 通り. □

[a] $[n]$ の weak ordered partition

**系 (3.11.14).**

$$r(\mathcal{S}_n)=(n+1)^{n-1},$$
$$b(\mathcal{S}_n)=(n-1)^{n-1}.$$

$r(\mathcal{S}_2)=3$, $b(\mathcal{S}_2)=1$.
$r(\mathcal{S}_3)=4^2=16$, $b(\mathcal{S}_3)2^2=4$.

# 3 問題

**問題 108.** 単純グラフ $G=(V,E)$ について，$G$ の $n$-**彩色**とは次を満たす $f:V\to[n]$：

- $f(a)\ne f(b)$ $(\{a,b\}\in E)$.

$\chi_G: n\mapsto \#(G \text{ の } n\text{-彩色})$ は $G$ の**彩色多項式**. $p:=\#V$.

a. $V$ の**安定な分割**：全てのブロックが $G$ の安定集合.

$S_G(j) \coloneqq \#(V$ の安定な $j$ ブロック分割$)$ について次を示せ：

$$\chi_G(n) = \sum_{j=1}^{n} S_G(j)(n)_j.$$

b. 半順序集合 $L_G \coloneqq \{\pi : V$ の分割，各ブロックが $G$ で連結$\}$.
次を示せ：

$$\chi_G(n) = \sum_{\pi \in L_G} \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi}.$$

なお，これより $\chi_G(n) = n^{\#(G \text{ の連結成分})} \chi_{L_G}(n)$.

c. **グラフィカル配置**：

$$\mathcal{B}_G = \{x_i = x_j : \{i, j\} \in E\} \text{ in } \mathbb{R}^p.$$

$L_G \cong L(\mathcal{B}_G)$，$\chi_G = \chi_{\mathcal{B}_G}$ を示せ.

d. $e \in E$ について

$$G - e = (V, E - \{e\},$$
$$G/e = (e \text{ を縮約し，多重辺を 1 つにまとめる}).$$

次を示せ：

$$\chi_G(n) = \chi_{G-e}(n) - \chi_{G/e}(n).$$

**解答** (a.)．ちょうど $j$ 色を使う $n$-彩色は $S_G(j)(n)_j$ 通り．ただし $(n)_j$ は $j$ 個のブロックに色を割り当てる方法の数.

**解答** (b.)．$g(\sigma) = \sum_{\pi \geq \sigma} \mu(\sigma, \pi) n^{\#\pi}$ とすると，Möbius 反転により

$$n^{\#\sigma} = \sum_{\pi \geq \sigma} g(\pi).$$

$g(\hat{0}) = \chi_G(n)$ となるように $g$ をうまく定めたい.

$g(\sigma) := (\pi$ の各ブロックを縮約したグラフでの答え) とすればよい．各頂点の自由な $n$-彩色は，両端点の色が同じ辺を全て縮約したグラフ (のみ) の $n$-彩色.
定義より $\chi_G(n) = g(\hat{0}) = \sum_\pi \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi}$.
$\chi_G(n) = n^{\#(G \text{ の連結成分})} \chi_{L_G}(n)$：

$$\begin{aligned} L_G \text{ のランク} &= p - \#(G \text{ の連結成分}), \\ \rho(\pi) &= p - \#\pi, \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \chi_{L_G}(n) &= \sum_\pi \mu(\hat{0}, \pi) n^{(L_G \text{ のランク}) - \rho(\pi)} \\ &= \sum_\pi \mu(\hat{0}, \pi) n^{\#\pi - \#(G \text{ の連結成分})}. \end{aligned}$$

**解答** (c.)**.** $\pi \in L_G$ に対して, $\pi$ の各ブロックに含まれる辺を集め, これらに対応する超平面の交叉 $(\in L(\mathcal{B}_G))$ を対応付ける．これは $L_G \to L(\mathcal{B}_G)$ の同型写像.
b. より

$$\chi_G(n) = n^a \chi_{L_G}(n) = n^a \chi_{L(\mathcal{B}_G)}(n) = n^{a+b} \chi_{\mathcal{B}_G}(n) \quad (a, b \text{ は定数}).$$

どちらも次数は $p$ なので $a + b = 0$.

**解答** (d.)**.**

$$\chi_{\mathcal{B}_G}(n) = \chi_{\mathcal{B}_{G-e}}(n) - \chi_{\mathcal{B}_{G/e}}(n).$$

を示す．Deletion-Restriction $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_{\mathcal{A}'}(x) - \chi_{\mathcal{A}''}(x)$ を用いる．
$e$ に対応する超平面 $H_e$ について $(\mathcal{B}_G)' = \mathcal{B}_G - \{H_e\} = \mathcal{B}_{G-e}$.

あとは $\chi_{(\mathcal{B}_G)''}(n) = \chi_{\mathcal{B}_{G/e}}(n)$ を示せばよい．WLOG $e = \{p-1, p\}$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_G)'' &= \{H \cap H_e \neq \emptyset : H \in \mathcal{B}_G - \{H_e\}\} \\ &= \{x_i = x_j, x_{p-1} = x_p : \{i,j\} \in E - \{e\}\} \text{ in } \mathbb{R}^p, \\ \mathcal{B}_{G/e} &= \{x_i = x_j : \{i,j\} \in E, i,j < p\} \\ &\qquad \cup \{x_i = x_{p-1} : \{i,p\} \in E\} \text{ in } \mathbb{R}^{p-1}.\end{aligned}$$

$\mathcal{B}_G$ の超平面は必ず $x_{p-1} = x_p$ であり，$x_p$ を取り除けば $\mathcal{B}_{G/e}$ に一致.
したがって $(\mathcal{B}_G)'', \mathcal{B}_{G/e}$ は本質的に同じ (informal).
注：組合せ的証明の方が簡単．$e = \{i,j\}$ について

$$\begin{aligned}\chi_G(n) &= \#\{f : G-e \text{ の } n\text{-彩色，} f(i) \neq f(j)\}, \\ \chi_{G/e}(n) &= \#\{f : G-e \text{ の } n\text{-彩色，} f(i) = f(j)\}.\end{aligned}$$