3.5 Chains in Distributive Lattices
3.6 Incidence Algebras

shino16

2022 年 7 月 28 日

目次

0　復習

命題 (3.5.1)**.** 有限半順序集合 P, $m \in \mathbb{N}$ について以下は全て等しい：

a. 順序を保つ $\sigma : P \to \boldsymbol{m}$ の写像の個数,

b. $J(P)$ における長さ m の多重鎖 $\hat{0} = I_0 \leq I_1 \leq \cdots \leq I_m = \hat{1}$ の個数.

c. $J(P \times \boldsymbol{m-1})$ の位数.

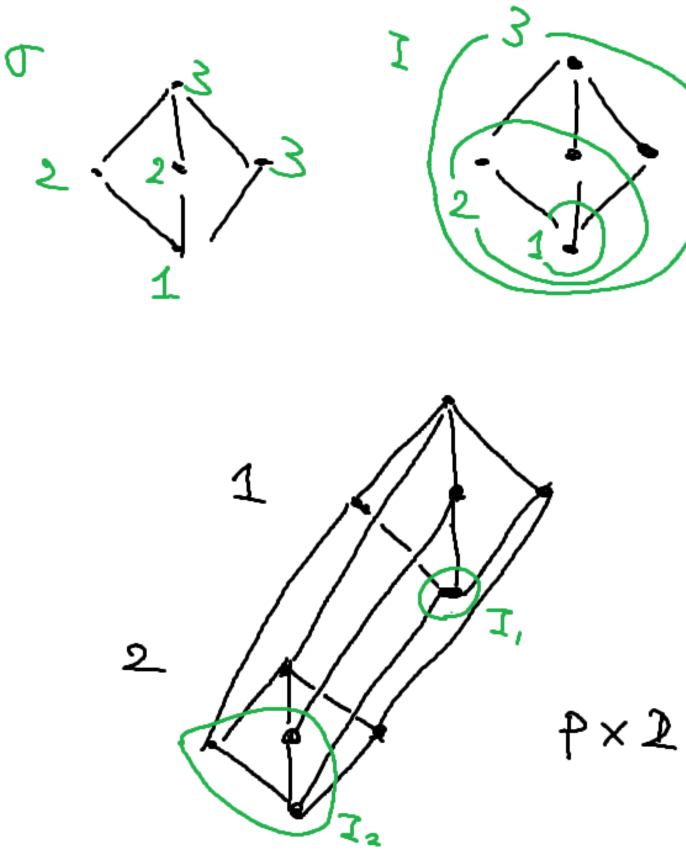

図1　$P = \Pi_3$，$m = 3$ の例

命題 1 (3.5.2)**.** 有限半順序集合 P，$m \in \mathbb{N}$ について以下は等しい：

a. 順序を保つ全射 $\sigma : P \to \boldsymbol{m}$ の写像の個数，
b. $J(P)$ における長さ m の鎖 $\hat{0} = I_0 < I_1 < \cdots < I_m = \hat{1}$ の個数.

1　線形順序拡大

定義. $\#P = p$ のとき，順序を保つ全単射 $\sigma : P \to \boldsymbol{p}$ を**線形順序拡大 (linear extension)** または**トポロジカルソート**といい，線形順序拡大の個数を $e(P)$ で表す.

1.1　格子パスとの対応

命題 1より，

$$\begin{aligned} e(P) &= (J(P) \text{ 上の鎖 } \hat{0} = I_0 < I_1 < \cdots < I_{\#P} = \hat{1} \text{ の個数}) \\ &= (J(P) \text{ 上の極大なパスの個数}). \end{aligned}$$

そこで，$J(P)$ 上の鎖をある種の格子上のパスと対応付ける.

P の鎖への分割 $C_1, \ldots, C_k$ をとる．$\delta : J(P) \to \mathbb{N}^k$ を

$$\delta(I) = (\#(I \cap C_1), \#(I \cap C_2), \ldots, \#(I \cap C_k))$$

で定める.

補題. $\mathbb{N}^k$ を辞書式順序のもとで半順序集合 (特に束) とみなすとき，δ は

a. 単射，
b. 束同士の準同型写像，
c. $J(P) \cong \operatorname{Im}\delta$.

したがって $J(P)$ 上の極大なパスは $\operatorname{Im}\delta$ における格子パスと一対一に対応する．

証明.

a. 順序イデアル $I \in J(P)$ は，I の極大元の集合で特徴づけられる．各鎖は I の極大元を高々 1 個しか含まないので，極大元の集合が異なれば δ の像も異なる．

b. $I_1 \vee I_2 = I_1 \cup I_2$，$I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$ に注意．$\mathbb{N}^k$ 上では $\vee$ は各点 max，$\wedge$ は各点 min.
鎖 C_i について，

$$\#((I_1 \cup I_2) \cap C_i) = \max(\#(I_1 \cap C_i), \#(I_2 \cap C_i))$$
$$\#((I_1 \cap I_2) \cap C_i) = \min(\#(I_1 \cap C_i), \#(I_2 \cap C_i)).$$

c. $I_1, I_2 \in J(P)$ について，

$$\begin{aligned} I_1 \le I_2 &\iff I_1 \wedge I_2 = I_1 \\ &\iff \delta(I_1 \wedge I_2) = \delta(I_1) && (\because \text{a.}) \\ &\iff \delta(I_1) \wedge \delta(I_2) = \delta(I_1) && (\because \text{b.}) \\ &\iff \delta(I_1) \le \delta(I_2), \end{aligned}$$

□

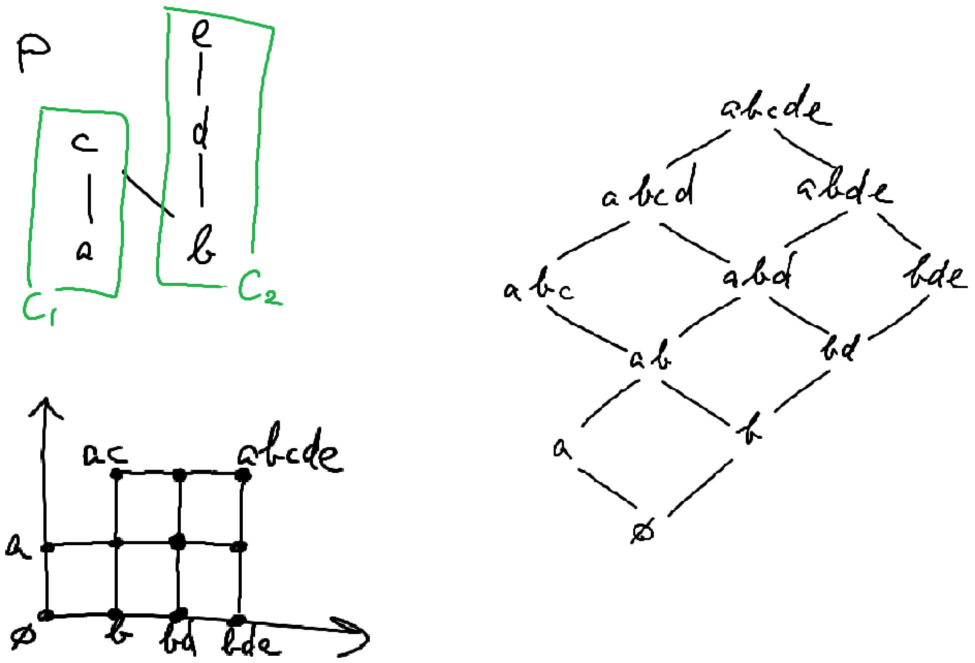

図2　例 3.5.3

1.2　具体例

例 (3.5.4). 位数 m, n の鎖 C_1, C_2 をとり，$P = C_1 + C_2$ とする．
このとき $\operatorname{Im}\delta \cong \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$．したがって $e(P) = \binom{m+n}{m}$．
より一般に，$P = P_1 + \cdots + P_k$，$n_i = \# P_i$ とすると，

$$e(P) = \binom{n_1 + \cdots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} e(P_1)e(P_2)\cdots e(P_k).$$

例 (3.5.5). $P = \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{n}$, $C_1 = \{(2, j) : j \in \boldsymbol{n}\}$, $C_2 = \{(1, j) : j \in \boldsymbol{n}\}$ とする．
このとき $\operatorname{Im}\delta = \{(i, j) : 0 \leq i \leq j \leq n\}$．この上での格子パスの個

数はカタラン数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

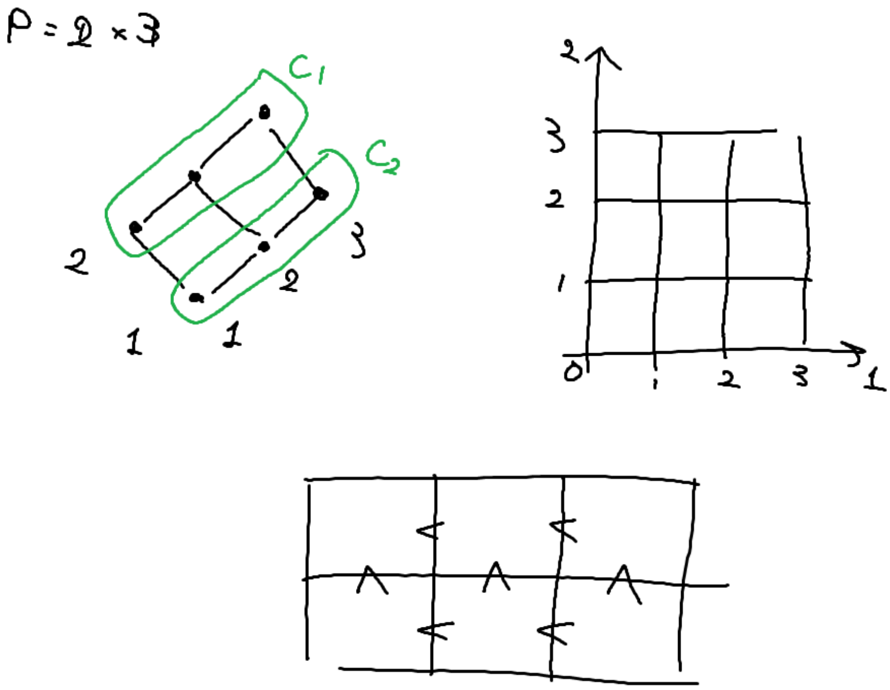

図3　$P = \mathbf{2} \times \mathbf{3}$ と standard Young tableau の例

1.3　パスカルの三角形との関係

各 $I \in J(P)$ について，I を半順序集合とみなしたときの線形順序拡大の個数を $e(I)$ とする．I のトポロジカルソートを最後の点で分けて数えると，

$$e(I) = \sum_{\substack{I' \in J(P) \\ I' \lessdot I}} e(I').$$

例. $P = \mathbb{N} + \mathbb{N}$ とし，P の有限順序イデアルの集合を $J_f(P)$ とする．このとき $J_f(P) \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$J_f(P)$ のハッセ図において各 $I \in J_f(P)$ を $e(I)$ でラベル付けすると，パスカルの三角形が得られる．

定義. 有限的分配束 $L = J_f(P)$ と，対応する $e : L \to \mathbb{P}$ をあわせて**一般パスカル三角形**と呼ぶ.