2 Sieve Methods

2.1 Inclusion-Exclusion

“Sieve method”：有限集合 S の要素数を求める方法

パターン (1) $\#S$ を大きめに見積もり，誤差を大きめに見積もり，その誤差を…ということを繰り返し，誤差を 0 に近づけていく

パターン (2) $T \supseteq S$ について，余分な元が打ち消しあうように T の各元を重みづけする（後の節で登場）

定理 2.1.1. n 元集合 S，線形空間 $V = \{f : 2^S \to K\}$ (K は体) について，線形写像 $\phi : V \to V$ を

$$\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y),$$

で定める．このとき ϕ^{-1} が存在し，

$$\phi^{-1} f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y).$$

証明. $\psi : V \to V$ を $\psi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f(Y)$ で定めると，

$$\begin{aligned}
\phi\psi f(T) &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \phi f(Y) \qquad (\psi\phi f(T) \text{ では？}) \\
&= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z) \\
&= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} \right) f(Z).
\end{aligned}$$

T，Z を固定したとき，$m = \#(Z - T)$ とおくと

$$\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{0m},$$

なので，$\phi\psi f(T) = f(T)$ がわかる．よって $\phi^{-1} = \psi$． $\square$

よくある定理 2.1.1 の適用例

集合 A と，A の元が持ったり持たなかったりする性質の集合 S がある．

ちょうど $T \subseteq S$ の性質のみを持つ A の元の個数 $f_=(T)$[*1]は求めにくいが，少なくとも $T \subseteq S$ の性質は満たすような A の元の個数 $f_\geq(T)$ は求めやすいようなとき，

$$f_\geq(T) = \sum_{Y \supseteq T} f_=(Y),$$

なので，定理 2.1.1 より

$$f_=(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{\#(Y-T)} f_\geq(Y).$$

とくに，どの性質も持たないような元の個数は

$$f_=(\emptyset) = \sum_Y (-1)^{\#Y} f_\geq(Y). \tag{1}$$

性質を集合で言い換えることもできる．$A_1, \ldots, A_n$ を A の部分集合とし，

$$A_T = \bigcap_{i \in T} A_i,$$

と定める（$A_\emptyset = A$ とする）．A_i を「性質 P_i を満たす A の元の集合」と考えれば，式 (1) に対応するのは

$$\begin{aligned} \#(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= \#(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n, \end{aligned}$$

ただし

$$S_k = \sum_{\#T = k} \#A_T.$$

*1 重み $w : A \to K$ を決めて，元の個数の代わりに元の重みの和 $\sum_x w(x)$ を $f_=(T)$ としてもよい

包除原理やその変種は，$\cap$ と $\cup$，$\subseteq$ と $\supseteq$ などを入れ替えることで双対形が得られる．定理 2.1.1 の双対形は，

$\widetilde{\phi} : V \to V$ を

$$\widetilde{\phi} f(T) = \sum_{Y \subseteq T} f(Y),$$

で定めるとき，$\widetilde{\phi}^{-1}$ が存在して

$$\widetilde{\phi}^{-1} f(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(T-Y)} f(Y).$$

である．証明も同様．元の定理 2.1.1 について $f'(T) = f(S-T)$ を考えることでも双対形の主張が得られる．また，高々 T の性質しか満たさない A の元の個数を $f_{\leq}(T)$ とするとき，

$$f_{\leq}(T) = \sum_{Y \subseteq T} f_{=}(Y),$$
$$f_{=}(T) = \sum_{Y \subseteq T} (-1)^{\#(T-Y)} f_{\leq}(Y).$$

$f_{=}(T)$ が T の要素数によってのみ決まる場合を考える．$i = 0, \ldots, n$ について

$$a(n-i) = f_{=}(T) \quad (\#T = i),$$
$$b(n-i) = f_{\geq}(T) \quad (\#T = i),$$

とする．このとき $0 \leq m \leq n$ について

$$b(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a(i),$$
$$a(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{m-i} b(i).$$

$n = \infty$ でも上の 2 つの式が同値であることが確認できる．また，有限差分を使うと $0 \le m \le n$ について

$$a(m) = \Delta^m b(0),$$

とも表せる．$a(m)$，$b(m)$ の値が n に依存しないなら，任意の $m \in \mathbb{N}$ について $a(m) = \Delta^m b(0)$ (命題 2.2.2)．

2.2 Examples and Special Cases

例 2.2.1 (撹乱順列)．順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ であって，不動点を持たない ($\forall i$ $w(i) \neq i$) ものはいくつあるか？そのような順列（撹乱順列）の個数を $D(n)$ とおく．

少なくとも $T \subseteq [n]$ の点が不動点であるような順列の個数は

$$f_{\geq}(T) = b(n-i) = (n-i)! \quad (\#T = i).$$

したがって，不動点を持たない順列の個数 $f_{=}(\emptyset) = a(n) = D(n)$ は

$$\begin{aligned} D(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i! \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

これより $n!/e$ が $D(n)$ の良い近似であることが分かる．実際，$n > 0$ について $D(n) = \mathrm{round}(n!/e)$ が確認できる．[*2]

[*2]

$$\left| D(n) - \frac{n!}{e} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots .$$

右辺を $g(n+1)$ とおくと，$g(n+1) = ng(n) - 1$ $(n \geq 1)$ より

$$g(1) = e - 1 \approx 1.718, \quad g(2) \approx 0.718, \quad g(3) \approx 0.436, \quad g(4) = 0.308, \ldots$$

WolframAlpha によると $g(n) = e(\Gamma(n) - \Gamma(n,1)) = \int_0^1 t^{n-1} e^{-t} dt$ で，これは $n \geq 1$

また，$n \geq 1$ について

$$D(n) = nD(n-1) + (-1)^n,$$

これを繰り返し使って

$$\begin{aligned} D(n) &= nD(n-1) - (-1)^{n-1} \\ &= nD(n-1) - (D(n-1) - (n-1)D(n-2)) \\ &= (n-1)(D(n-1) + D(n-2)). \end{aligned}$$

$D(n)$ の指数型母関数は

$$\sum_{n \geq 0} D(n) \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

例 2.2.3. 多重集合 $M_n = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ の順列のうち，どの 2 つの隣接する項も等しくないものの個数を $h(n)$ とおく．$h(0) = 1$，$h(1) = 0$，$h(2) = 2$．

順列 w に対して，性質 P_i を「2 つの i が隣接すること」とする．求める値は $f_{=}(\emptyset) = h(n)$．

$g(i) = f_{\geq}(T)$ $(i = \#T)$ とおくと

$$g(i) = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} (n+i)! 2^{-i} \\ &= \Delta^n (n+i)! 2^{-i} \Big|_{i=0}. \end{aligned}$$

について単調減少．また $|D(1) - 1!/e| = |0 - 1!/e| < 1/2$．

$n = 0$ については $D(0) = 1$ なので不成立．

例 2.2.4. 順列 $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ について descent set $D(w)$ を

$$D(w) = \{i : a_i > a_{i+1}\},$$

で定める．また，

$$\begin{aligned} \alpha_n(S) &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : D(w) \subseteq S\}, \\ \beta_n(S) &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : D(w) = S\}, \end{aligned}$$

とする．このとき

$$\begin{aligned} \alpha_n(S) &= \sum_{T \subseteq S} \beta_n(T), \\ \beta_n(S) &= \sum_{T \subseteq S} (-1)^{\#(S-T)} \alpha_n(T). \end{aligned}$$

また，$S = \{s_1, \ldots, s_k\}_< \subseteq [n-1]$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha_n(S) &= \binom{n}{s_1,\ s_2 - s_1,\ s_3 - s_2,\ \ldots,\ n - s_k}, \\ \beta_n(S) &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le k} (-1)^{k-j} \binom{n}{s_{i_1}, s_{i_2} - s_{i_1}, \ldots, n - s_{i_j}}. \end{aligned}$$

$s_0 = 0$，$s_{k+1} = n$ とすると，

$$\beta_n(S) = n! \det\left[\frac{1}{(s_{j+1} - s_i)!}\right]_{(i,j) \in [0,k] \times [0,k]}$$

と書き換えられる（ただし $i \ge j$ について (i,j)-成分は 0 とする）．さらに $n!$ を各列にばらすと

$$\beta_n(S) = \det\left[\binom{n - s_i}{s_{j+1} - s_i}\right],$$

が得られる．

例 2.2.5. $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq [n-1]$ について，

$$\sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ D(w) \subseteq S}} q^{s(w)} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{s_1, s_2 - s_1, \ldots, n - s_k}}$$

が成り立つような $s(w)$ を考える．実は $s(w) = \mathrm{inv}(w)$ とすると上の等式が成り立つ．

$$t_1 = s_1,\ t_2 = s_2 - s_1,\ \ldots,\ t_{k+1} = n - s_k,$$

とし，

$$M = \{1^{t_1}, 2^{t_2}, \ldots, (k+1)^{t_{k+1}}\},$$

とおく．命題 1.7.1 より

$$\sum_{u \in \mathfrak{S}(M)} q^{\mathrm{inv}(u)} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}}}.$$

$u \in \mathfrak{S}(M)$ について，u の要素に対して小さい順に番号を振りなおして，$\mathrm{inv}(u) = \mathrm{inv}(v)$ となるように $v \in \mathfrak{S}_n$ をとる（例：$u = 12112 \Rightarrow v = 14235$）．$w = v^{-1}$ とおく．

このようにしてとれる $w \in \mathfrak{S}_n$ は $D(w) \subseteq \{s_1, \ldots, s_k\}$ を満たす．逆に，$w \in \mathfrak{S}_n$ について $D(w) \subseteq \{s_1, \ldots, s_k\}$ が成り立つなら，対応する $u \in \mathfrak{S}(M)$ がただ一つ存在する．よって示された．

$$\beta_n(S, q) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ D(w) = S}} q^{\mathrm{inv}(w)},$$

とおくと，例 2.2.4 と同じ議論により

$$\begin{aligned} \beta_n(S, q) &= \boldsymbol{(n)!} \det\left[\frac{1}{\boldsymbol{(s_{j+1} - s_i)!}}\right] \\ &= \det\left[\binom{\boldsymbol{n - s_i}}{\boldsymbol{s_{j+1} - s_i}}\right]. \end{aligned}$$

上の議論を一般化して，次の結果が得られる．

命題 2.2.6. $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ を性質の集合とする．また h を $\mathbb{N}$ 上の関数とし，e を $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の関数であって $e(i,i) = 1$，$e(i,j) = 0$ $(j < i)$ が成り立つものとする．

各 $T \subseteq S$ について，$T = \{P_{s_1}, \ldots, P_{s_k}\}$ $(1 \leq s_1 < \cdots < s_k \leq n)$ とおくと

$$f_{\leq}(T) = h(n)e(s_0, s_1)e(s_1, s_2) \cdots e(s_k, s_{k+1}),$$

が成り立つとする（ただし $s_0 = 0$，$s_{k+1} = n$ とする）．このとき

$$f_{=}(T) = h(n) \det[e(s_i, s_{j+1})].$$