

1 What is Enumerative Combinatorics?

1.5 Geometric Representations of Permutations

1.5.1 Permutation Matrix

$w \in \mathfrak{S}_n$ について, $n \times n$ 行列 P_w を

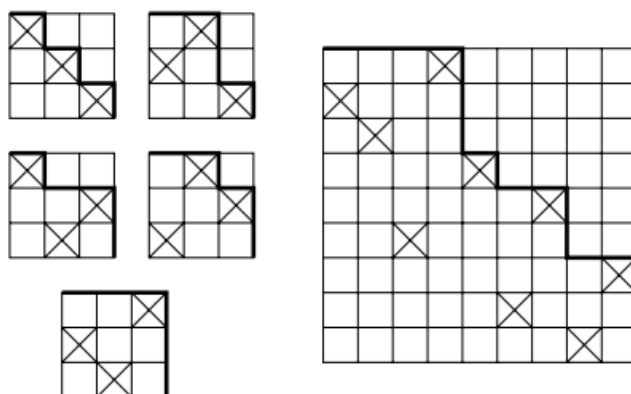
$$(P_w)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } w(i) = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定める. この P_w を w に対応する **permutation matrix** という. P_w を $n \times n$ のグリッドとみなすこともある.

例 1.5.1. 長さ 3 の部分減少列を持たない順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ の個数を $f(n)$ とする. P_w を $n \times n$ のグリッドとみなし, 1 の代わりにバツ印を書き入れる.

条件を満たす $w \in \mathfrak{S}_n$ について, P_w の左上から右下への最短経路を, 次の条件を満たすように書き入れる.

- 経路はすべてのバツ印の上側,
- \neg の形の曲がり角は, いずれかのバツ印の右上.



こうして得られる経路は対角線より下側を通らない左上から右下への最短経路であり，逆にそのような経路からは，長さ 3 の部分減少列を持たないただ一つの $w \in \mathfrak{S}_n$ を対応付けられる（証明略）．

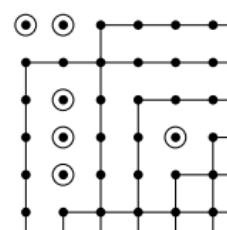
したがって， $f(n)$ はカタラン数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ．

1.5.2 Diagram

$w \in \mathfrak{S}_n$ とする．グリッドを $[n] \times [n]$ で表し，各点 $(i, w(i))$ から右への横線と下への縦線を引く．残った点の集合を w の **diagram** といい， D_w で表す．

例えば

$$D_{314652} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 5), (5, 2)\}.$$



j 行目にある D_w の要素数を a_j とすると， a_j は w 上の値 j より前に位置する， j より大きい要素の個数である．すなわち

$$I(w) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

i 行目にある D_w の要素数を c_i とすると， c_i は w 上で位置 i より前に位置する，位置 i の値より大きい要素の個数である．すなわち

$$\text{code}(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

また， $D_w^\top = D_{w^{-1}}$ （お気持ち記法）が成り立つ．

例 1.5.2. 132-avoiding な順列を考える．132-avoiding でない例：2143, 3142．「長さ 3 の部分減少列を持たない順列」は 123-avoiding と表せる．

w が 132-avoiding であることは， D_w の点が「左寄せ」になっていることと同値であることが分かる．数列 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ が $\lambda_i \leq n - i$ を満たすとき，

$$D_w = \{(i, j) : 1 \leq j \leq \lambda_i\},$$

とすると対応する $w \in \mathfrak{S}_n$ が一意に定まる．このような数列 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ の個数はカタラン数 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ．

以上のことから、全ての $u \in \mathfrak{S}_3$ について、 u -avoiding な順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ の個数は C_n ．

$\#D_w = \text{inv}(w)$ より、次が成り立つ．

命題 1.5.3. 132-avoiding な $w \in \mathfrak{S}_n$ の個数を $S_{132}(n)$ で表すとき、

$$\sum_{w \in S_{132}(n)} q^{\text{inv}(w)} = \sum_{\lambda} q^{|\lambda|},$$

が成り立つ．ただし λ は $\lambda_i \leq n - i$ を満たす数列 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ を動くとし、 $|\lambda| = \sum \lambda_i$ とする．

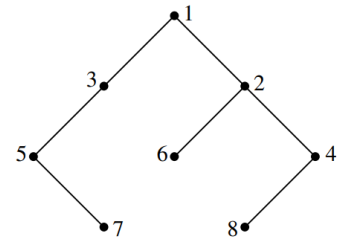
1.5.3 Increasing Binary Tree

根からのパスが単調増加列になるような、 $V(T) = \{1, \dots, n\}$ の根付き二分木を n 頂点の **increasing binary tree** という．

$T(w)$ を w の Cartesian tree とするとき、写像 $w \mapsto T(w)$ は \mathfrak{S}_n から n 頂点の increasing binary tree 全体への全単射である．

$w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$ に対して、 w_i を

- $w_{i-1} < w_i < w_{i+1}$ のとき **double rise**
または **double ascent**,
- $w_{i-1} > w_i > w_{i+1}$ のとき **double fall**
または **double descent**,
- $w_{i-1} < w_i > w_{i+1}$ のとき **peak**,
- $w_{i-1} > w_i < w_{i+1}$ のとき **valley**,



例： $T(57316284)$

と呼ぶ．ただし $w_0 = w_{n+1} = 0$ としておく． w_i の性質と $T(w)$ の頂点 w_i は、次の対応関係にある．

w_i	$T(w)$ の頂点 w_i の子
double rise	右
double fall	左
valley	左と右
peak	なし

命題 1.5.4. (a) n 頂点の increasing binary tree の個数は $n!$.

(b) ちょうど k 個の頂点が左の子（または左の子と右の子）を持つような increasing binary tree の個数はオイリアン数 $A(n, k+1)$.

(c) $2n+1$ 頂点の increasing binary tree であって, complete であるものの個数は, alternating な順列 $w \in \mathfrak{S}_{2n+1}$ の個数と等しい. ここで, complete binary tree とは全ての頂点が 0 個または 2 個の子を持つものである.

$$\ast A(n, k+1) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \#D(w) = k\}.$$

$$\ast w \text{ が alternating} \iff w_1 > w_2 < w_3 > \cdots.$$

証明. (a) \mathfrak{S}_n からの全単射が存在.

(b)

$$\begin{aligned} T(w) \text{ の頂点 } w_i \text{ が左の子を持つ} &\iff w_i \text{ が double fall または valley} \\ &\iff i-1 \in D(w). \end{aligned}$$

(c)

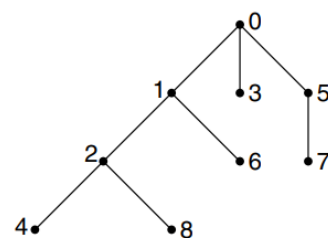
$$\begin{aligned} T(w) \text{ が complete} &\iff w_1, \dots, w_n \text{ がいずれも valley または peak} \\ &\iff (0=) w_0 < w_1 > w_2 < \cdots. \end{aligned}$$

□

1.5.4 Unordered Increasing Tree

根からのパスが単調増加列になるような根付き木（子の順番は区別しない）を **unordered increasing tree** という．

$w \in \mathfrak{S}_n$ に対して，0 を根とする根付き木 $T'(w)$ を次のように構成する．



例： $T(57316284)$

- $1 \leq i \leq n$ について， w 上で値 i より左に位置する i 未満で最右の要素を i の親とする．そのような要素が存在しなければ，0 を親とする．

このとき，写像 $w \mapsto T'(w)$ は \mathfrak{S}_n から $n+1$ 頂点の unordered increasing tree 全体への全単射である．

命題 1.5.5. (a) $n+1$ 頂点の unordered increasing tree の個数は $n!$ ．

(b) 根が k 個の子を持つ unordered increasing tree の個数は符号なしスターリング数 $c(n, k)$ ．

(c) k 個の葉を持つ unordered increasing tree の個数はオイラリアン数 $A(n, k)$ ．

$$\ast c(n, k) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : k \text{ 個のサイクルを持つ}\}.$$

証明. (a) \mathfrak{S}_n からの全単射が存在．

(b)

$$\begin{aligned} & \#\{w \in \mathfrak{S}_n : T'(w) \text{ の根が } k \text{ 個の子を持つ}\} \\ &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : k \text{ 個の left-to-right minima を持つ}\} \\ &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \hat{w} \text{ が } k \text{ 個の left-to-right maxima を持つ}\} \\ &= \#\{w \in \mathfrak{S}_n : k \text{ 個のサイクルを持つ}\}. \end{aligned}$$

(c)

$$w_i \text{ が } T'(w) \text{ の葉} \iff i \in D(w) \text{ または } i = n.$$

