13 Matroids

13.2 Other Matroid Axioms

復習

定義 13.2.1. **集合族** $(E, \mathcal{F})$：非空な有限集合 E と $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ の対．
独立集合族 $(E, \mathcal{F})$：次を満たす集合族

(M1) $\emptyset \in \mathcal{F}$，
(M2) $X \subseteq Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \in \mathcal{F}$．

$\mathcal{F}$ の元は**独立**，$2^E \setminus \mathcal{F}$ の元は**従属**．極小な従属集合は**サーキット**，極大な独立集合は**基底**．$X \subseteq E$ の極大な独立部分集合は，X の基底と呼ばれる．

定義 13.2.2. 独立集合族 $(E, \mathcal{F})$ と $X \subseteq E$ について，
ランク：$r(X) := \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$ (X の基底の位数の最大値)．
閉包：$\omega(X) := \{y \in E : r(X \cup \{y\}) = r(X)\}$．

定義 13.2.3 (定理 13.5). **マトロイド** $(E, \mathcal{F})$：次 (のいずれか) を満たす独立集合族

(M3) $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| > |Y| \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y$ s.t. $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$,
(M3') $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| = |Y| + 1 \Longrightarrow \exists x \in X \setminus Y$ s.t. $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$,
(M3") 任意の $X \subseteq E$ について，X の基底の位数はどれも等しい．

基底の族に関する公理系

定理 13.2.9. E を有限集合とし，$\mathcal{B} \subseteq 2^E$ とする．$\mathcal{B}$ が何らかのマトロイド $(E, \mathcal{F})$ の基底の族であることは，以下が同時に成立することと同値．

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \setminus B_2, \exists y \in B_2 \setminus B_1$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

証明. ($\Longrightarrow$) (B1)：(M1) よりよい．

(B2)：(M2) より $B_1 \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$．

(M3) より $\exists y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{F}$．

(M3") よりこれは基底．

また $y \in B_2$ より $x \neq y$，したがって $y \in B_2 \setminus B_1$．

($\Longleftarrow$) (B2) のイメージ：$B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ のとき，B_1 を $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ に置き換えると $|B_1 \cap B_2|$ が 1 増える．

まず，$\mathcal{B}$ の元の位数がどれも等しいことを示す．$|B_1| > |B_2|$ なる B_1，B_2 が存在すると仮定する．(B2) より $|B_1|$ を保ったまま $|B_1 \cap B_2|$ をいくらでも大きくでき，矛盾．

ここで，

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } F \subseteq B\},$$

とする．$(E, \mathcal{F})$ がマトロイドであることを示す．(M1)，(M2) はよい．

(M3) を示す．((M3") で終わりでは ??)

$|X| > |Y|$ なる $X, Y \in \mathcal{F}$ を考える．$X \subseteq B_1 \in \mathcal{B}$，$Y \subseteq B_2 \in \mathcal{B}$ を満たす B_1，B_2 を，$|B_1 \cap B_2|$ が最大になるようにとる．

$B_2 \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ である場合，$x \in B_2 \cap (X \setminus Y)$ とすると，$Y \cup \{x\} \subseteq B_2$ より $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$．

$B_2 \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ と仮定して矛盾を示す．目標：$B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
&|B_1 \cap B_2| + |Y \setminus B_1| + |(B_2 \setminus B_1) \setminus Y| \\
= &|B_2| = |B_1| \\
\geq &|B_1 \cap B_2| + |X \setminus Y| \quad (B_2 \cap (X \setminus Y) = \emptyset) \\
> &|B_1 \cap B_2| + |Y \setminus X| \quad (|X| > |Y|) \\
\geq &|B_1 \cap B_2| + |Y \setminus B_1|.
\end{aligned}$$

したがって $(B_2 \setminus B_1) \setminus Y \neq \emptyset$．$y \in (B_2 \setminus B_1) \setminus Y$ をとると，$\exists x \in B_1 \setminus B_2$ s.t. $(B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ となり，$|B_1 \cap B_2|$ の最大性に矛盾． □

演習 8. $\mathcal{B}$ が何らかのマトロイド $(E, \mathcal{F})$ の基底の族であることは，以下が同時に成立することと同値であることを示せ．

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall y \in B_2 \setminus B_1, \exists x \in B_1 \setminus B_2$ s.t. $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

証明.

$$\overline{\mathcal{B}} := \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\} \quad (\overline{B} = E \setminus B),$$

とする．(B2) は

$$\forall \overline{B_1}, \overline{B_2} \in \overline{\mathcal{B}}, \forall y \in \overline{B_1} \setminus \overline{B_2}, \exists x \in \overline{B_2} \setminus \overline{B_1} \text{ s.t. } (\overline{B_1} \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \overline{\mathcal{B}},$$

と同値．また，(M3”) より $\mathcal{B}$ がマトロイドの基底の族であることと $\overline{\mathcal{B}}$ が基底の族であることは同値． □

ランク関数に関する公理系

定理 13.2.10. E を有限集合とし，$r : 2^E \to \mathbb{Z}_+$ とする．次の主張は同値．

(a) $\mathcal{F} := \{F \subseteq E : r(F) = |F|\}$ とするとき，r はマトロイド $(E, \mathcal{F})$ のランク関数．

(b) 各 $X, Y \subseteq E$ について，

(R1) $r(X) \leq |X|$,

(R2) $X \subseteq Y \Longrightarrow r(X) \leq r(Y)$,

(R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ (劣モジュラ性).

(c) 各 $X \subseteq E$ と $x, y \in E$ について，

(R1') $r(\emptyset) = 0$,

(R2') $r(X) \leq r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1$,

(R3') $r(X \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) = r(X) \Longrightarrow r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$.

証明. (a) $\Longrightarrow$ (b): r はランク関数なので，(R1) と (R2) は明らか．(R3) を示す．

$X, Y \subseteq E$ について，$X \cap Y$ の基底 A をとる．基底 A を拡張して，$A \dot{\cup} B$ を X の基底，$A \dot{\cup} B \dot{\cup} C$ を $X \cup Y$ の基底とする．$C \subseteq Y$ より $A \cup C \subseteq Y$．また $A \cup B \cup C \in \mathcal{F}$ より $A \cup C \in \mathcal{F}$．したがって

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |A \cup B| + |A \cup C| \\ &= |A \cup B \cup C| + |A| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y). \end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (c): (R1') は (R1) より，(R2') の前半は (R2) よりよい．また (R3) より

$$r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + r(\{y\}) - r(X \cap \{y\}) \leq r(X) + 1.$$

(R3') を示す．$x=y$ のときは明らか，$x \neq y$ のとき，

$$\begin{aligned} 2r(X) &\leq r(X) + r(X \cup \{x,y\}) && \because\ (R2) \\ &\leq r(X \cup \{x\}) + r(X \cup \{y\}) && \because\ (R3) \\ &= 2r(X), \end{aligned}$$

より $r(X) = r(X \cup \{x,y\})$．

(c) $\Longrightarrow$ (a):

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq E : r(F) = |F|\},$$

とする．(M1) は (R1') よりよい．(M2) を示す．$Y \in \mathcal{F}$，$y \in Y$ について，$X := Y \setminus \{y\}$ とすると，

$$|X| + 1 = |Y| = r(Y) = r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1 \leq |X| + 1,$$

より $X \in \mathcal{F}$．

(M3') を示す．$X, Y \in \mathcal{F}$，$|X| = |Y| + 1$ とする．

$$X \setminus Y = \{x_1, \dots, x_k\},$$

とおく．$\exists i$ s.t. $Y \cup \{x_i\} \in \mathcal{F}$ を示したい．そうでないと仮定する．(R2) より

$$r(Y \cup \{x_i\}) = r(Y) \quad (i = 1, \dots, k).$$

さらに (R3) より

$$r(Y \cup \{x_1, x_i\}) = r(Y) \quad (i = 2, \dots, k).$$

そこで，$Y \leftarrow Y \cup \{x_1\}$ とし，同じ議論を繰り返すと，

$$r(Y \cup \{x_1, \dots, x_k\}) = r(X \cup Y) = r(Y).$$

これは $r(X \cup Y) \geq r(X) = |X| = |Y| + 1 > r(Y)$ に矛盾．

最後に r がマトロイド $(E,\mathcal{F})$ のランク関数であることを示す．$X \subseteq E$ について，X の基底 Y を $|Y|$ が最大になるようにとる．$\forall x \in X \setminus Y$, $r(Y \cup \{x\}) = r(Y)$ なので，先ほどと同じ議論により $r(X) = r(Y) = |Y|$． □

閉包演算子に関する公理系

定理 13.2.11. E を有限集合とし，$\sigma : 2^E \to 2^E$ とする．σ がマトロイド $(E,\mathcal{F})$ の閉包演算子であることは，任意の $X, Y \subseteq E$ と $x, y \in E$ について以下が同時に成立することと同値．

(S1) $X \subseteq \sigma(X)$,

(S2) $X \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow \sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$,

(S3) $\sigma(X) = \sigma(\sigma(X))$,

(S4) $y \notin \sigma(X)$, $y \in \sigma(X \cup \{x\}) \Longrightarrow x \in \sigma(X \cup \{y\})$.

証明. $(\Longrightarrow)$ (S1) はよい．$X \subseteq Y$，$z \in \sigma(X)$ について

$$\begin{aligned}
r(Y \cup \{z\}) &= r(X \cup Y \cup \{z\}) \\
&\leq r(X \cup \{z\}) + r(Y) - r((X \cup \{z\}) \cap Y) && \because\ (R3) \\
&\leq r(X) + r(Y) - r(X) && \because\ (R2) \\
&= r(Y),
\end{aligned}$$

より (S2) もよい．

(R3') を使って X に $\sigma(X) \setminus X$ の元を追加していくと $r(\sigma(X)) = r(X)$ が成り立つ．このランクを保ったまま $\sigma(X)$ に新たな元を追加することはできないので，(S3) もよい．

$y \notin \sigma(X)$，$y \in \sigma(X \cup \{x\})$，$x \notin \sigma(X \cup \{y\})$ と仮定する．(R2') より $r(X \cup \{y\}) = r(X) + 1$，$r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{x\})$，$r(X \cup \{x, y\}) = r(X \cup \{y\}) + 1$．ゆえに $r(X \cup \{x\}) = r(X) + 2$ となり矛盾．よって (S4) もよい．

$(\Longleftarrow)$
$$\mathcal{F} := \{X \subseteq E : \forall x \in X,\ x \notin \sigma(X \setminus \{x\})\},$$
とする．$(E, \mathcal{F})$ がマトロイドであることを示す．

(M1) はよい．$X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して
$$x \notin \sigma(Y \setminus \{x\}) \supseteq \sigma(X \setminus \{x\}),$$
より $X \in \mathcal{F}$．よって (M2) もよい．

主張. $X \in \mathcal{F}$ と $Y \subseteq E$ が $|X| > |Y|$ を満たすとき，$X \not\subseteq \sigma(Y)$．

証明. $|Y \setminus X|$ に関する帰納法で示す．$Y \setminus X = \emptyset$ のとき，$Y \subset X$．$x \in X \setminus Y$ をとる．
$$x \notin \sigma(X \setminus \{x\}) \supseteq \sigma(Y),$$
より $x \notin \sigma(Y)$，したがって $X \not\subseteq \sigma(Y)$．

$|Y \setminus X| > 0$ とする．$y \in Y \setminus X$ をとる．帰納法の仮定より，
$$x \in X \setminus \sigma(Y \setminus \{y\}),$$
がとれる．$x \notin \sigma(Y)$ ならよい．そうでないとき，$x \notin \sigma(Y \setminus \{y\})$ かつ
$$x \in \sigma(Y) = \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{y\}),$$
なので，(S4) より
$$y \in \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$
y 以外の Y の元は $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})$ に属するので，
$$Y \subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$
(S2) より
$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(\sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})) = \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}).$$
帰納法の仮定より $X \not\subseteq \sigma((Y \setminus \{y\}) \cup \{x\})$ なので，$X \not\subseteq \sigma(Y)$． ■

先ほどの主張を用いて (M3) を示す．$X, Y \in \mathcal{F}$ が $|X| > |Y|$ を満たすとする．主張より，$x \in X \setminus \sigma(Y)$ がとれる．ここで $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことを示す．

$z \in Y \cup \{x\}$ とする．$z \in Y$ のとき，$Y \in \mathcal{F}$ より $z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$．$z = x$ のとき，$z \notin \sigma(Y)$ より $z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$．

$z \notin \sigma(Y \setminus \{z\})$，$x \notin \sigma(Y)$ から，(S4) より

$$z \notin \sigma((Y \setminus \{z\}) \cup \{x\}) \supseteq \sigma((Y \cup \{x\}) \setminus \{z\}).$$

したがって $z \notin \sigma((Y \cup \{x\}) \setminus \{z\})$．よって $Y \cup \{x\} \in \mathcal{F}$．

以上より，$(E, \mathcal{F})$ はマトロイド．マトロイド $(E, \mathcal{F})$ のランク関数を r，閉包演算子を σ' とする．$\sigma = \sigma'$ を示す．

まず，$X \subseteq E$ と $z \in \sigma'(X)$ について，$z \in \sigma(X)$ を示す．$z \in X \subseteq \sigma(X)$ ならよい．そうでない場合を考える．X の基底 Y をとる．

$$r(Y \cup \{z\}) \leq r(X \cup \{z\}) = r(X) = |Y| < |Y \cup \{z\}|,$$

より $Y \cup \{z\} \notin \mathcal{F}$．したがって

$$\exists y \text{ s.t. } y \in \sigma((Y \cup \{z\}) \setminus \{y\}).$$

$y = z$ ならば $z \in \sigma(Y \setminus \{z\}) \subseteq \sigma(X)$．$y \neq z$ ならば，$y \notin \sigma(Y \setminus \{y\})$ なので (S2) より $z \in \sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$．　□