2.6 Involutions

包除原理の特別な形

$$f_=(\emptyset) = \sum_Y (-1)^{\#Y} f_\geq(Y).$$

を考える．これを

$$f_=(\emptyset) + \sum_{\#Y\ \text{odd}} f_\geq(Y) = \sum_{\#Y\ \text{even}} f_\geq(Y).$$

と書き換える．これを組合せ的解釈を用いて示してみる．

集合 A の元が，性質（S の元）を持ったり持たなかったりする状況を考える．

$$\begin{aligned} M &= \{x \in A : x \text{ は } S \text{ のどの性質も持たない}\}, \\ N &= \{(x, Y, Z) : x \in A \text{ が持つ性質が } Z \supseteq Y \text{ に一致し，} \#Y \text{ は奇数}\}, \\ N' &= \{(x', Y', Z') : x \in A \text{ が持つ性質が } Z \supseteq Y \text{ に一致し，} \#Y' \text{ は偶数}\}, \end{aligned}$$

とする．S に全順序を入れ，$\sigma : M \cup N \to N'$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= (x, \emptyset, \emptyset) \quad \text{if } x \in M, \\ \sigma(x, Y, Z) &= \begin{cases} (x, Y - i, Z) & \text{if } \min Y = \min Z = i, \\ (X, Y \cup i, Z) & \text{if } \min Z = i < \min Y. \end{cases} \end{aligned}$$

σ は全単射であり，

$$\sigma^{-1}(x, Y, Z) = \begin{cases} x \in M & \text{if } Y = Z = \emptyset, \\ (X, Y - i, Z) & \text{if } Z \neq \emptyset \text{ and } \min Y = \min Z = i, \\ (X, Y \cup i, Z) & \text{if } Z \neq \emptyset \text{ and } \min Z = i < \min Y, \end{cases}$$

ただし $\min \emptyset = \infty$ とする．

$x \in M$ を $(x, \emptyset, \emptyset) \in N'$ と同一視すれば，$\tau := \sigma \cup \sigma^{-1} : N \cup N' \to N \cup N'$ は以下を満たす．

(a) τ は involution ($\tau^2 = \mathrm{id}$).

(b) τ の不動点は $(x, \emptyset, \emptyset)$ $(x \in M)$.

(c) (x, Y, Z) が τ の不動点でないとき，$\tau(x, Y, Z) = (x, Y', Z')$ とおくと

$$(-1)^{\# Y} + (-1)^{\# Y'} = 0.$$

これらを踏まえて，包除原理の式

$$\begin{aligned} f_{=}(\emptyset) &= \sum_{Y} (-1)^{\# Y} f_{\geq}(Y) \\ &= \sum_{Y} (-1)^{\# Y} \#\{x : Z := \{x \text{ が持つ性質}\} \supseteq Y\}, \end{aligned}$$

の右辺を見ると，τ で移りあう元 (x, Y, Z) 同士が係数 $(-1)^{\# Y}$ によって打ち消され，不動点 $(x, \emptyset, \emptyset)$ $(\{x \text{ が持つ性質}\} = \emptyset)$ のみが残っている．

一般化する．有限集合 X が 2 つの集合の disjoint union $X^+ \dot{\cup} X^-$ で表されるとし，X の involution τ が次の条件を満たすとする．

(a) $\tau(x) = y$，$x \neq y$ ならば，x, y のちょうど片方のみが X^+ に属する．

(b) $\tau(x) = x$ ならば $x \in X^+$.

X の元を重み関数

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in X^+, \\ -1 & \text{if } x \in X^-, \end{cases}$$

で重みづけするとき，

$$\# \operatorname{Fix}(\tau) = \sum_{x \in X} w(x),$$

が成り立つ．ただし $\operatorname{Fix}(\tau)$ は τ の不動点の集合．

ここで，さらに別の有限集合の disjoint union $\widetilde{X} = \widetilde{X}^+ \cup \widetilde{X}^-$ を考え，$\widetilde{X}$ の involution $\widetilde{\tau}$ が (a), (b) を満たしているとする．さらに，全単射 $f : X \to \widetilde{X}$ が符号を保つ，すなわち $f(X^+) = \widetilde{X}^+$, $f(X^-) = \widetilde{X}^-$ と仮定する．このとき

$$\# \operatorname{Fix}(\tau) = \# X^+ - \# X^- = \# \widetilde{X}^+ - \# \widetilde{X}^- = \# \operatorname{Fix}(\widetilde{\tau}).$$

このとき，$\mathrm{Fix}(\tau)$ から $\mathrm{Fix}(\widetilde{\tau})$ への自然な全単射 g を構成することができる．これを **involution principle** という．

$x \in \mathrm{Fix}(\tau)$ とする．このとき，

$$f(\tau f^{-1}\widetilde{\tau} f)^n(x) \in \mathrm{Fix}(\widetilde{\tau}),$$

を満たす非負整数 n が存在する．そのような n について，

$$g(x) = f(\tau f^{-1}\widetilde{\tau} f)^n(x),$$

と定める．この $g : \mathrm{Fix}(\tau) \to \mathrm{Fix}(\widetilde{\tau})$ は全単射である．

この involution principle について，“sieve-equivalence” という変種がある．2 つの disjoint な有限集合 $X, \widetilde{X}$ と $Y \subseteq X$，$\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ について，全単射 $f : X \to \widetilde{X}$，$g : Y \to \widetilde{Y}$ がとれたとする．このとき $\#(X - Y) = \#(\widetilde{X} - \widetilde{Y})$．ここで全単射 $h : (X - Y) \to (\widetilde{X} - \widetilde{Y})$ を構成する．

$x \in X - Y$ をとる．このとき，

$$f(g^{-1}f)^n(x) \in \widetilde{X} - \widetilde{Y}.$$

を満たす非負整数 n が存在する．そのような n について，

$$h(x) = f(g^{-1}f)^n(x),$$

と定める．この $h : (X - Y) \to (\widetilde{X} - \widetilde{Y})$ は全単射．

例 2.6.1. 1 を不動点とする順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ 全体の集合を Y とする．また，ちょうど 1 個のサイクルからなる順列 $w \in \mathfrak{S}_n$ 全体の集合を $\widetilde{Y}$ とする．このとき $\#(\mathfrak{S}_n - Y) = \#(\mathfrak{S}_n - \widetilde{Y}) = n! - (n-1)!$．

$\mathfrak{S}_n - Y$ と $\mathfrak{S}_n - \widetilde{Y}$ の間の全単射 h を構成する明らかな方法はなさそうだが，全単射 $g : Y \to \widetilde{Y}$ を構成するのは簡単である．$f : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ を恒等写像とすれば，先ほどの方法で全単射 $h : (\mathfrak{S}_n - Y) \to (\mathfrak{S}_n - \widetilde{Y})$ を構成できる．

ただし，この場合に関しては Y と $\widetilde{Y}$ が disjoint であることから，

$$h(w) = \begin{cases} w & \text{if } w \notin \widetilde{Y}, \\ g^{-1}(w) & \text{if } w \in \widetilde{Y}, \end{cases}$$

としてやれば済む．