

## 1.9 The Twelfold Way

有限集合  $N, X$  について、 $\#N = n$ 、 $\#X = x$  とする。何らかの制約のもとで写像  $f : N \rightarrow X$  を数えていく。

$f$  自体について、「任意」「単射」「全射」の3通りの制約がある。また、「 $N$  の元を区別する／しない」、「 $X$  の元を区別する／しない」の場合がある。

厳密に言うならば、例えば下図 7. は

$f, g : N \rightarrow X$  について、同値関係  $\sim$  を

$$f \sim g \iff \exists v : X \rightarrow X, \text{ 全単射 s.t. } f \circ v = g$$

で定めるとき、互いに同値でない写像  $f : N \rightarrow X$  の個数と表せる。

$N$ の元	$X$ の元	$f$ は任意	$f$ は単射	$f$ は全射
区別する	区別する	1. $x^n$	2. $(x)_n$	3. $x!S(n, x)$
区別しない	区別する	4. $\left(\binom{x}{n}\right)$	5. $\binom{x}{n}$	6. $\left(\binom{x}{n-x}\right)$
区別する	区別しない	7. $\sum_{i=0}^x S(n, i)$	8. $[n \leq x]$	9. $S(n, x)$
区別しない	区別しない	10. $\sum_{i=0}^x p_i(n)$	11. $[n \leq x]$	12. $p_x(n)$

2.

$$(x)_n = {}_xP_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) \quad (\text{下降階乗}).$$

3., 7., 9.  $S(n, x)$  は第二種スターリング数と呼ばれ、

$$\begin{aligned} B_i &\neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, x), \\ [n] &= B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_x, \end{aligned}$$

を満たす  $\pi = \{B_1, \dots, B_x\}$  の個数。なお  $S(0, 0) = 1$  とする。

4., 6.

$$\left( \binom{x}{n} \right) = {}_xH_n = \binom{x}{x+n-1}.$$

8.

$$[P] = \text{if } P \text{ then } 1 \text{ else } 0.$$

10., 12.  $p_x(n)$  は分割  $\lambda_1, \dots, \lambda_x \vdash n$  の個数。実は

$$p_0(n) + p_1(n) + \dots + p_x(n) = p_x(n+x)$$

が成り立つ（練習 66）。これは分割  $\lambda_1, \dots, \lambda_x \vdash n+x$  について各  $\lambda_i$  から 1 だけ引いたものを考えればよい。

第二種スターリング数

$n \geq 1$  について

$$S(n, 0) = 0,$$

$$S(n, k) = 0 \text{ for } k > n,$$

$$S(n, 1) = 1,$$

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1,$$

$$S(n, n) = 1,$$

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2},$$

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4},$$

が成り立つことを確認できる。また、 $S(n, k)$  は次の漸化式に従う。

$$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

$$B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

をベル数という。

次の関係式が成り立つ。

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n, \quad (1)$$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k \quad (k \geq 0), \quad (2)$$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \dots (1-kx)}, \quad (3)$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (x)_k, \quad (4)$$

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(i) \quad (n \geq 0), \quad (5)$$

$$\sum_{n \geq 0} B(n) \frac{x^n}{n!} = \exp(e^x - 1). \quad (6)$$

証明. (2):

$$F_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!},$$

とおく。漸化式  $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$  より、

$$F'_k(x) = kF_k(x) + F_{k-1}(x).$$

帰納法の仮定  $F_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1}$  と条件  $[x^k] F_k = 1/k!$  を用いると、 $F_k(x) = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$  が得られる。

(1): (2) の右辺を展開して

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} e^{ix}.$$

(6):  $k$  を動かして (2) を足し上げる。

(5): (6) を微分して

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} B(n+1) \frac{x^n}{n!} &= e^x \exp(e^x - 1) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(i).\end{aligned}$$

(3):

$$G_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k) x^n,$$

とおく。漸化式  $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$  より、

$$G_k(x) = kxG_k(x) + xG_{k-1}(x).$$

帰納法の仮定  $G_{k-1}(x) = \frac{x^{k-1}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(k-1)x)}$  を用いると、 $G_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$  が得られる。

(4): 写像  $f: N \rightarrow X$  の個数を  $k := \# \operatorname{Im} f$  ごとに数えていくと、

$$x^n = \sum_{k=0}^n k! S(n, k) \binom{x}{k} = \sum_{k=0}^n S(n, k) (x)_k.$$

□

命題 1.3.7 の式

$$\sum_{k=0}^n c(n, k) t^k = t(t+1) \cdots (t+n-1),$$

について、 $t \leftarrow -x$  として  $(-1)^n$  倍すると、

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = (x)_n. \quad (7)$$

式 (4)、(7) は線形空間の基底の変換とみなせる。

命題 1.9.1. (a)

$$\sum_{k \geq 0} S(m, k) s(k, n) = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

(b) 数列  $(a_n)$ 、 $(b_n)$  について、次は同値。

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \sum_{k=0}^n S(n, k) a_k.$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k.$$

The Calculus of Finite Differences (有限差分)

$K$  を標数 0 の体とし、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow K$  あるいは  $f: \mathbb{N} \rightarrow K$  を考える。 $f$  の一階差分  $\Delta f$  を

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

と定める。 $\Delta$  は一階差分演算子と呼ばれる。 $k$  階差分演算子は

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f),$$

で定められる。

シフト演算子  $E$  を

$$Ef(n) = f(n+1),$$

で定めるとき、 $\Delta = E - 1$  (ただし  $1$  は恒等演算子)。これらの演算子は線形写像なので、分配法則が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \Delta^k f(n) &= (E - 1)^k f(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i f(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(n+i). \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
 f(n) &= E^n f(0) \\
 &= (1 + \Delta)^n f(0) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(0).
 \end{aligned} \tag{8}$$

微分と有限差分には次のような対応がある。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} &\longleftrightarrow \Delta \\
 e^x &\longleftrightarrow 2^n \quad (\Delta 2^n = 2^n) \\
 x^k &\longleftrightarrow (n)_k \quad (\Delta (n)_k = k(n)_{k-1})
 \end{aligned}$$

また、Taylor 級数展開

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

には式 (8)

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} (n)_k$$

が対応する。 $f(n) = x^k$

$f(n) = n^4$  の差分表 (difference table) は次のようになる。

0	1	16	81	256	625	...
	1	15	65	175	369	
		14	50	110	194	
			36	60	84	
				24	24	
					0	...

式 (8) より

$$n^4 = \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} + 0\binom{n}{5} + \cdots$$

式 (4) と比べると、

$$1!S(4, 1) = 1, \quad 2!S(4, 2) = 14, \quad 3!S(4, 3) = 36, \quad 4!S(4, 4) = 24,$$

が分かる。

**命題 1.9.2.**  $K$  を標数 0 の体とする。

(a) 関数  $f: \mathbb{Z} \rightarrow K$  は次数が  $d$  以下の多項式  $\iff \Delta^{d+1}f(n) = 0$ 。

(b) 次数が  $d$  以下の多項式  $f$  について

$$f(n) = \sum_{k=0}^d \Delta^k f(0) \cdot \binom{n}{k}.$$

(c)  $f(n) = n^d$  のとき、 $\Delta^k f(0) = k!S(d, k)$ 。

**系 1.9.3.**  $K$  を標数 0 の体とし、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow K$  を次数が  $d$  以下の多項式とすると、

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) \in \mathbb{Z} \iff f(0), \Delta f(0), \dots, \Delta^d f(0) \in \mathbb{Z}.$$

写像十二相には様々な拡張がある。

- 「写像三十相」 <https://arxiv.org/abs/math/0606404>
- 色 1 の球  $\alpha_1$  個、 $\cdots$ 、色  $m$  の球  $\alpha_m$  個を、箱 1 に  $\beta_1$  個、 $\cdots$ 、箱  $n$  に  $\beta_n$  個入れる方法  $N_{\alpha\beta}$ 、さらにどの箱も各色の球が高々 1 個であるような方法  $M_{\alpha\beta}$   
これらは単純な式で表せないが、4 章、5 章、7 章で何度も出てくるらしい。