1.9 The Twelvefold Way

有限集合 N, X について、$\#N = n$、$\#X = x$ とする。何らかの制約のもとで写像 $f : N \to X$ を数えていく。

f 自体について、「任意」「単射」「全射」の 3 通りの制約がある。また、「N の元を区別する／しない」、「X の元を区別する／しない」の場合がある。

厳密に言うならば、例えば下図 7. は

> $f, g : N \to X$ について、同値関係 $\sim$ を
>
> $$f \sim g \iff \exists v : X \to X, \text{全単射 s.t. } f \circ v = g$$
>
> で定めるとき、互いに同値でない写像 $f : N \to X$ の個数

と表せる。

N の元	X の元	f は任意	f は単射	f は全射
区別する	区別する	1. x^n	2. $(x)_n$	3. $x!S(n,x)$
区別しない	区別する	4. $\left(\!\binom{x}{n}\!\right)$	5. $\binom{x}{n}$	6. $\left(\!\binom{x}{n-x}\!\right)$
区別する	区別しない	7. $\sum_{i=0}^{x} S(n,i)$	8. $[n \le x]$	9. $S(n,x)$
区別しない	区別しない	10. $\sum_{i=0}^{x} p_i(n)$	11. $[n \le x]$	12. $p_x(n)$

2.

$$(x)_n = {}_x\mathrm{P}_n = x(x-1)\cdots(x-n+1) \quad (\text{下降階乗冪}).$$

3., 7., 9. $S(n,x)$ は第二種スターリング数と呼ばれ、

$$B_i \neq \emptyset \quad (i = 1, \ldots, x),$$
$$[n] = B_1 \,\dot\cup\, B_2 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, B_x,$$

を満たす $\pi = \{B_1, \ldots, B_x\}$ の個数。なお $S(0,0) = 1$ とする。

4., 6.

$$\left(\!\!\binom{x}{n}\!\!\right) = {}_x\mathrm{H}_n = \binom{x}{x+n-1}.$$

8.

$$[P] = \text{if } P \text{ then } 1 \text{ else } 0.$$

10., 12. $p_x(n)$ は分割 $\lambda_1, \dots, \lambda_x \vdash n$ の個数。実は

$$p_0(n) + p_1(n) + \cdots + p_x(n) = p_x(n+x)$$

が成り立つ（練習 66)。これは分割 $\lambda_1, \dots, \lambda_x \vdash n + x$ について各 λ_i から 1 だけ引いたものを考えればよい。

第二種スターリング数

$n \geq 1$ について

$$\begin{aligned}
S(n,0) &= 0, & S(n,k) &= 0 \text{ for } k > n,\\
S(n,1) &= 1, & S(n,2) &= 2^{n-1} - 1,\\
S(n,n) &= 1, & &\\
S(n,n-1) &= \binom{n}{2}, & S(n,n-2) &= \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4},
\end{aligned}$$

が成り立つことを確認できる。また、$S(n,k)$ は次の漸化式に従う。

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

を**ベル数**という。

次の関係式が成り立つ。

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n, \tag{1}$$

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k \quad (k\geq 0), \tag{2}$$

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)x^n=\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}, \tag{3}$$

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(x)_k, \tag{4}$$

$$B(n+1)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B(i) \quad (n\geq 0), \tag{5}$$

$$\sum_{n\geq 0}B(n)\frac{x^n}{n!}=\exp(e^x-1). \tag{6}$$

証明. (2):

$$F_k(x)=\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{x^n}{n!},$$

とおく。漸化式 $S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ より、

$$F_k'(x)=kF_k(x)+F_{k-1}(x).$$

帰納法の仮定 $F_{k-1}(x)=\frac{1}{(k-1)!}(e^x-1)^{k-1}$ と条件 $[x^k]F_k=1/k!$ を用いると、$F_k(x)=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k$ が得られる。

(1): (2) の右辺を展開して

$$\sum_{n\geq k}S(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}e^{ix}.$$

(6): k を動かして (2) を足し上げる。

(5): (6) を微分して

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} B(n+1)\frac{x^n}{n!} &= e^x \exp(e^x-1) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B(i).\end{aligned}$$

(3):

$$G_k(x)=\sum_{n\geq k} S(n,k)x^n,$$

とおく。漸化式 $S(n,k)=kS(n-1,k)+S(n-1,k-1)$ より、

$$G_k(x)=kxG_k(x)+xG_{k-1}(x).$$

帰納法の仮定 $G_{k-1}(x)=\frac{x^{k-1}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(k-1)x)}$ を用いると、$G_k(x)=\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$ が得られる。

(4): 写像 $f:N\to X$ の個数を $k:=\#\operatorname{Im} f$ ごとに数えていくと、

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)\binom{x}{k}=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

□

命題 1.3.7 の式

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k)t^k=t(t+1)\cdots(t+n-1),$$

について、$t\leftarrow -x$ として $(-1)^n$ 倍すると、

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k=(x)_n. \tag{7}$$

式 (4)、(7) は線形空間の基底の変換とみなせる。

命題 1.9.1. (a)

$$\sum_{k\geq 0} S(m,k)s(k,n) = \delta_{mn} \quad (m,n\in\mathbb{N}).$$

(b) 数列 (a_n)、(b_n) について、次は同値。

(i) $\forall n\in\mathbb{N}\ b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)a_k$.

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_k$.

The Calculus of Finite Differences (有限差分)

K を標数 0 の体とし、$f:\mathbb{Z}\to K$ あるいは $f:\mathbb{N}\to K$ を考える。f の**一階差分** Δf を

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n),$$

と定める。Δ は一階**差分演算子**と呼ばれる。k 階差分演算子は

$$\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f),$$

で定められる。

シフト演算子 E を

$$Ef(n) = f(n+1),$$

で定めるとき、$\Delta = E - 1$（ただし 1 は恒等演算子）。これらの演算子は線形写像なので、分配法則が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}\Delta^k f(n) &= (E-1)^k f(n)\\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} E^i f(n)\\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(n+i).\end{aligned}$$

また、

$$f(n) = E^n f(0) = (1+\Delta)^n f(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0). \tag{8}$$

微分と有限差分には次のような対応がある。

$$\frac{d}{dx} \longleftrightarrow \Delta$$
$$e^x \longleftrightarrow 2^n \qquad (\Delta 2^n = 2^n)$$
$$x^k \longleftrightarrow (n)_k \quad (\Delta (n)_k = k(n)_{k-1})$$

また、Taylor 級数展開

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

には式 (8)

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} (n)_k$$

が対応する。$f(n) = x^k$

$f(n) = n^4$ の**差分表** (difference table) は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & \cdots \\
& 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & & \\
& & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & & & \\
& & & 36 & & 60 & & 84 & & & & & \\
& & & & 24 & & 24 & & & & & & \\
& & & & & 0 & & \ddots & & & & &
\end{array}$$

式 (8) より

$$n^4 = \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} + 0\binom{n}{5} + \cdots.$$

式 (4) と比べると、

$$1!S(4,1) = 1,\ \ 2!S(4,2) = 14,\ \ 3!S(4,3) = 36,\ \ 4!S(4,4) = 24,$$

が分かる。

命題 1.9.2. K を標数 0 の体とする。

(a) 関数 $f : \mathbb{Z} \to K$ は次数が d 以下の多項式 $\iff \Delta^{d+1} f(n) = 0$。

(b) 次数が d 以下の多項式 f について

$$f(n) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \cdot \binom{n}{k}.$$

(c) $f(n) = n^d$ のとき、$\Delta^k f(0) = k!S(d,k)$。

系 1.9.3. K を標数 0 の体とし、$f : \mathbb{Z} \to K$ を次数が d 以下の多項式とすると、

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ f(n) \in \mathbb{Z} \iff f(0), \Delta f(0), \ldots, \Delta^d f(0) \in \mathbb{Z}.$$

写像十二相には様々な拡張がある。

- 「写像三十相」`https://arxiv.org/abs/math/0606404`
- 色 1 の球 α_1 個、…、色 m の球 α_m 個を、箱 1 に β_1 個、…、箱 n に β_n 個入れる方法 $N_{\alpha\beta}$、さらにどの箱も各色の球が高々 1 個であるような方法 $M_{\alpha\beta}$
  これらは単純な式で表せないが、4 章、5 章、7 章で何度も出てくるらしい。