

# Лабораторная работа № 1.2.3

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Каменская Елизавета

9 ноября 2020 г.

## Цель работы

Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

## Оборудование

Трифиллярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

## Теоретическая справка

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле

$$I = \int r^2 dm. \quad (1)$$

Здесь  $r$  - расстояние массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

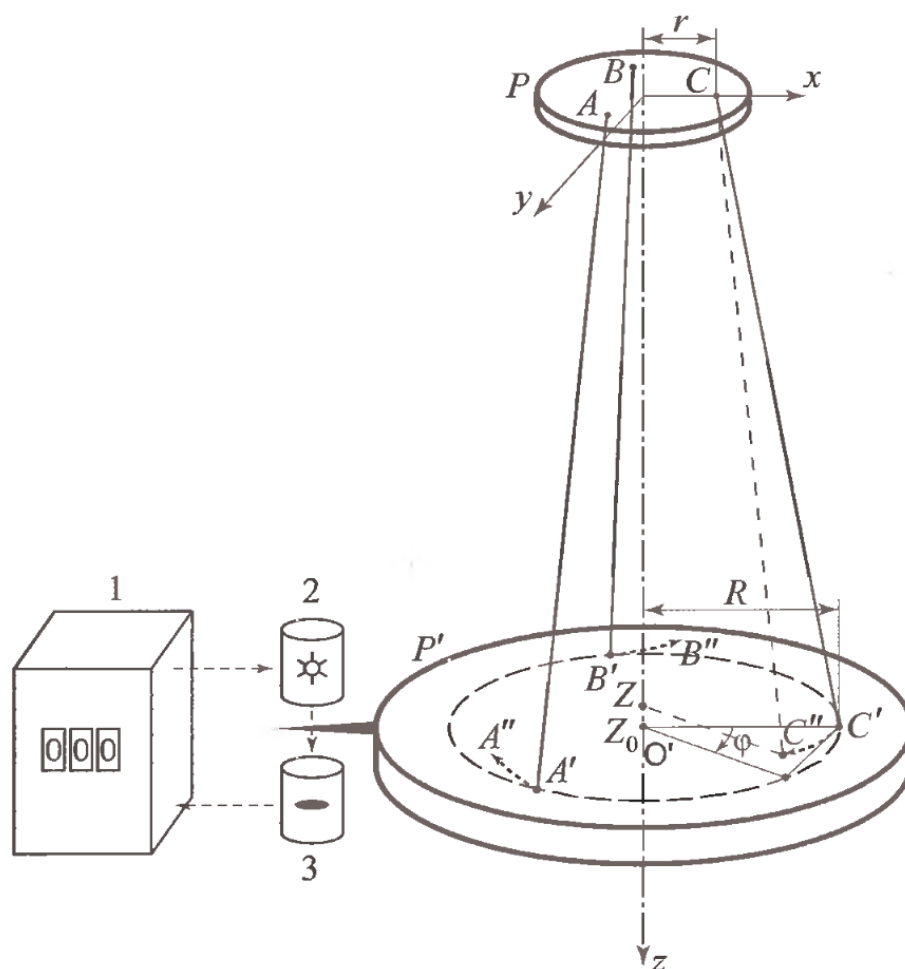


Рис. 1: Трифилярный подвес

Для однородных тел известной плотности при заданных размерах и достаточно простой форме момент инерции можно определить экспериментально. Удобно использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  вращающейся платформы  $P'$ .

Платформа  $P$  укреплена на кронштейне и снабжена рычагом, при помощи которого в системе можно создать крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы. Лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на

неподвижной оси, чем подвешенную на нитях нижнюю, так как нижнюю платформу трудно закрутить не вызвав ее раскачиваний, подобных движению маятника, учет которых сильно усложнил бы расчеты. После поворота, вызывающего крутильные колебания, верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как верхняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\phi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет угловую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебаний.

Если пренебречь потерями энергии на трение (о воздух и в креплениях нитей), то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\phi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E. \quad (2)$$

Здесь  $I$  - момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  - масса платформы с телом,  $\phi$  - угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (угловая скорость),  $z_0$  - координата по вертикали центра нижней платформы  $O'$  при равновесии ( $\phi = 0$ ),  $z$  - координата той же точки при некотором угле поворота  $\phi$ . Первый член в левой части уравнения - кинетическая энергия вращения, второй член - потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  - полная энергия системы (платформы с телом).

Отметим, что, как показывает соотношение (2), возвращающая сила возникает благодаря силе тяжести.

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе -  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C'$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\phi$  эта точка переходит в  $C''$  с координатами  $(R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ . Расстояние между точками  $C$  и  $C''$  равно длине нити  $L$ . Поэтому

$$(R \cos \phi - r)^2 + R^2 \sin^2 \phi + z^2 = L^2. \quad (3)$$

Учитывая, что при малых углах поворота  $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$ , получаем

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \phi \approx z_0^2 - Rr\phi^2. \quad (4)$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость угла  $\phi$ , имеем

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 \sqrt{1 - \frac{Rr\phi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}. \quad (5)$$

Подставляя это значение  $z$  в уравнение (2), получаем

$$\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\phi^2 = E. \quad (6)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\phi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\phi} + mg\frac{Rr}{2z_0}\phi = 0. \quad (7)$$

Производная по времени от  $E$  равна нулю, так как потерями энергии на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения, как нетрудно убедиться простой подстановкой, имеет вид

$$\phi = \phi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right). \quad (8)$$

Здесь амплитуда  $\phi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}. \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что из этой формулы при  $r = R$  и  $I = mR^2$  (тонкое кольцо) получаем формулу для математического маятника.

Из (9) находим формулу для определения момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2z_0}. \quad (10)$$

Учитывая, что параметры установки  $R$ ,  $r$  и  $z_0$  при проведении опытов не меняются, удобно переписать последнее уравнение следующим образом:

$$I = k m T^2. \quad (11)$$

Здесь  $k = \frac{gRr}{4\pi^2z_0}$  - величина, постоянная для данной установки.

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний. Затем вычисляем момент инерции тела, пользуясь аддитивностью, в справедливости которой можно убедиться, проведя измерения сначала для каждого из двух тел отдельно, а затем для обоих тел вместе.

При выводе формул предполагалось, что малы необратимые потери энергии, связанные с трением, то есть мало затухание колебаний. О затухании колебаний можно судить, сравнивая время  $\tau$  уменьшения амплитуды колебаний в 2-3 раза с периодом колебаний  $T$ . Необратимыми потерями энергии можно пренебречь, если выполняется условие

$$\tau \gg T. \quad (12)$$

В данной работе рекомендуется период колебаний определять с относительной погрешностью 0.5%. Число колебаний, по которым надо вычислять период, определяется этой погрешностью и погрешностью времени.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1) (см. рис. 1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

## Ход работы

1. Измерим параметры установки:

$$R = (115.5 \pm 0.5) \text{ мм}, \quad r = (30.2 \pm 0.3) \text{ мм}, \quad m = (1026.4 \pm 0.5) \text{ г}, \quad z_0 = (2150 \pm 0.5) \text{ мм}.$$

Вычислим по ним константу  $k$  и ее погрешность  $\sigma_k$ :

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = \frac{9.8 \cdot 115.5 \cdot 30.2}{4\pi^2 \cdot 2150} \approx 4 \cdot 10^{-4}$$

Погрешность вычисляется по формуле:

$$\sigma_k = k \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} = 0.0004 \sqrt{\left(\frac{0.5}{115.5}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{30.2}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{2150}\right)^2} \approx 0.043 \cdot 10^{-4}$$

2. Определим момент инерции ненагруженной платформы:

Кол-во периодов	10.00	15.00	20.00	25.00	30.00
$t$ , с	45.37	67.98	90.51	112.98	135.45
$T$ , с	4.54	4.53	4.53	4.52	4.51
$I$ , кг·м <sup>2</sup>	0.00846	0.00843	0.00843	0.00839	0.00835

Таблица 1: Экспериментальные расчеты момента инерции ненагруженной платформы.

Итоговое значение:

$$I_0 = (8412 \pm 124) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad \epsilon = 1.5\%$$

3. Измерим моменты инерции двух тел порознь, а затем вместе и проверим аддитивность моментов инерции  $I = I_1 + I_2$ .

Кол-во периодов	10	15	20	25	30
$t_{\text{ц}}$ , с	43.31	64.97	86.55	108.11	129.69
$T_{\text{ц}}$ , с	4.331	4.333	4.328	4.324	4.323
$I_{\text{ц}}$ , кг·м <sup>2</sup>	0.007366	0.007367	0.007354	0.007343	0.007339
$t_{\text{д}}$ , с	32.45	50.61	68.74	85.84	103.92
$T_{\text{д}}$ , с	3.24	3.37	3.44	3.43	3.46
$I_{\text{д}}$ , кг·м <sup>2</sup>	0.002469	0.002671	0.002783	0.002767	0.002815
$t_{\text{ц+д}}$ , с	40.79	61.15	81.48	101.79	122.07
$T_{\text{ц+д}}$ , с	4.079	4.077	4.074	4.072	4.069
$I_{\text{ц+д}}$ , кг·м <sup>2</sup>	0.010446	0.010434	0.010421	0.010408	0.010395
$I_{\text{ц}} + I_{\text{д}}$ , кг·м <sup>2</sup>	0.009831	0.010033	0.010145	0.010095	0.010144
$\Delta$	0.000615	0.000401	0.000276	0.000313	0.000251

Таблица 2: Экспериментальное определение моментов инерции цилиндра ( $m_1 = 981.7$  г) и диска ( $m_2 = 587.9$  г) по отдельности и вместе.

Сумма значений моментов инерции цилиндра и диска и значение их общего момента на опыте оказались приблизительно равны.

Проверим результаты с помощью теоретических расчетов: моменты инерции цилиндра и диска можно найти по формулам  $I_{\text{ц}} = mr^2$  ( $R_{\text{ц}} = 86 \pm 0.5$  мм) и  $I_{\text{д}} = \frac{1}{2}mr^2$  ( $R_{\text{д}} = 96 \pm 0.5$  мм) соответственно:

$$I_{\text{ц}} = 0.00726 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{\text{д}} = 0.00265 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{\text{ц}} + I_{\text{д}} = 0.009913 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Как видно из теоретических расчетов, результаты эксперимента оказались довольно точны.

- Поместим на платформу разрезанный по диаметру диск. Постепенно раздвигая половинки диска так, чтобы их общий центр масс все время оставался на оси вращения платформы, снимем зависимость момента инерции такой системы  $I$  от расстояния  $h$  каждой из половинок до оси вращения (таблица 3).

Построим график зависимости  $I(h^2)$ , пользуясь формулой

$$I(h^2) = I_0 + 0.5 \cdot m \cdot R^2 + m \cdot h^2,$$

где  $R = (4.2 \pm 0.05)$  см,  $m = (1526 \pm 1)$  г,  $\sigma_h = 0.05$  см. Из формулы выше видно, что погрешность **теоретического**  $I$  зависит от погрешностей  $I_0, m, h$  и  $R$ :  $\sigma_{I_T} = 0.07 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ .

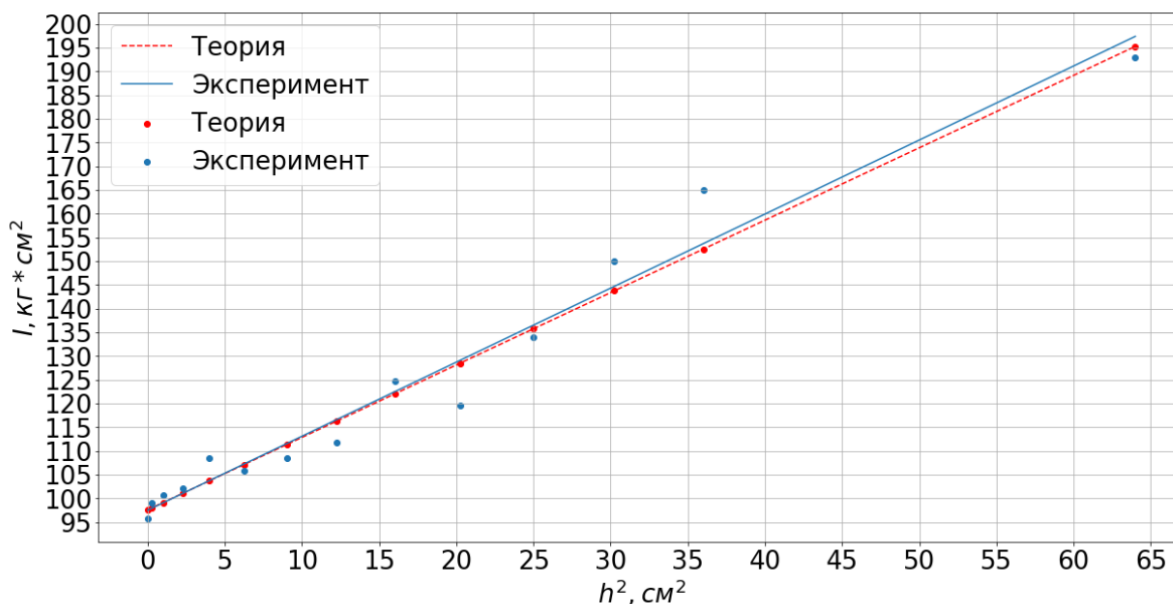


Рис. 2: График зависимости момента инерции диска от квадрата расстояния.

Из графика найдем массу и момент инерции диска и сравним их с экспериментальными (таблица 4) (масса на графике является угловым коэффициентом):

$$m_{\text{теория}} = 1526 \text{ г.}$$

$$m_{\text{эксперимент}} = 1532 \text{ г.}$$

## Вывод

В ходе работы были измерены и рассчитаны моменты инерции ряда тел, в результате чего подтвердилась справедливость формулы Гюйгенса-Штейнера и аддитивность моментов инерции.

Кол-во периодов	10	15	20
$t_0$	39.330000	59.530000	80.100000
$T_0$	3.933000	3.969000	4.005000
$I_0$	0.009442	0.009616	0.009791
$t_{0.5}$	39.800000	59.820000	80.860000
$T_{0.5}$	3.980000	3.988000	4.043000
$I_{0.5}$	0.009669	0.009708	0.009978
$t_1$	40.400000	61.060000	81.620000
$T_1$	4.040000	4.071000	4.081000
$I_1$	0.009963	0.010116	0.010166
$t_{1.5}$	41.320000	61.480000	81.220000
$T_{1.5}$	4.132000	4.099000	4.061000
$I_{1.5}$	0.010422	0.010256	0.010067
$t_2$	42.420000	63.480000	83.600000
$T_2$	4.242000	4.232000	4.180000
$I_2$	0.010984	0.010932	0.010665
$t_{2.5}$	41.330000	61.950000	83.440000
$T_{2.5}$	4.133000	4.130000	4.172000
$I_{2.5}$	0.010427	0.010412	0.010624
$t_3$	41.730000	63.330000	84.120000
$T_3$	4.173000	4.222000	4.206000
$I_3$	0.010629	0.010881	0.010798
$t_{3.5}$	43.240000	64.640000	84.880000
$T_{3.5}$	4.324000	4.309000	4.244000
$I_{3.5}$	0.011413	0.011334	0.010994
$t_4$	45.000000	68.130000	89.880000
$T_4$	4.500000	4.542000	4.494000
$I_4$	0.012361	0.012592	0.012328
$t_{4.5}$	44.600000	66.780000	88.600000
$T_{4.5}$	4.460000	4.452000	4.430000
$I_{4.5}$	0.012142	0.012098	0.011979
$t_5$	46.720000	69.930000	92.980000
$T_5$	4.672000	4.662000	4.649000
$I_5$	0.013324	0.013267	0.013193
$t_{5.5}$	49.350000	74.700000	99.920000
$T_{5.5}$	4.935000	4.980000	4.996000
$I_{5.5}$	0.014866	0.015138	0.015236
$t_6$	52.370000	78.540000	104.700000
$T_6$	5.237000	5.236000	5.235000
$I_6$	0.016741	0.016735	0.016728
$t_8$	56.530000	84.550000	112.420000
$T_8$	5.653000	5.637000	5.621000
$I_8$	0.019506	0.019396	0.019286

Таблица 3: Моменты инерции при разных положениях половинок диска,  $h$  обозначено через индексы.



$h$ , см	$I_{\text{эксперимент}}$	$I_{\text{теория}}$	$\epsilon_{\text{эксперимент}}$ , %	$\epsilon_{\text{теория}}$ , %
0	95.81	97.57932	1.85	0.072
0.5	99.01	97.96082	1.06	0.072
1	100.60	99.10532	1.49	0.071
1.5	102.02	101.01282	0.98	0.069
2	108.47	103.68332	4.41	0.068
2.5	105.72	107.11682	1.32	0.065
3	108.45	111.31332	2.64	0.063
3.5	111.80	116.27282	4.00	0.060
4	124.69	121.99532	2.16	0.058
4.5	119.63	128.48082	7.39	0.055
5	134.01	135.72932	1.28	0.052
5.5	150.01	143.74082	4.17	0.049
6	165.01	152.51532	7.56	0.046
8	193.01	195.24332	1.16	0.036

Таблица 4: Сравнение результатов расчетов момента инерции и экспериментальных значений ( $\text{кг}\cdot\text{см}^2$ ) и их относительных погрешностей при каждом  $h$ .