2025年度 複雑理工学実験概論
計測コース 生体計測グループ
第2回

篠田・牧野研究室　特任助教
鈴木 颯

2025年6月6日

演習環境の準備

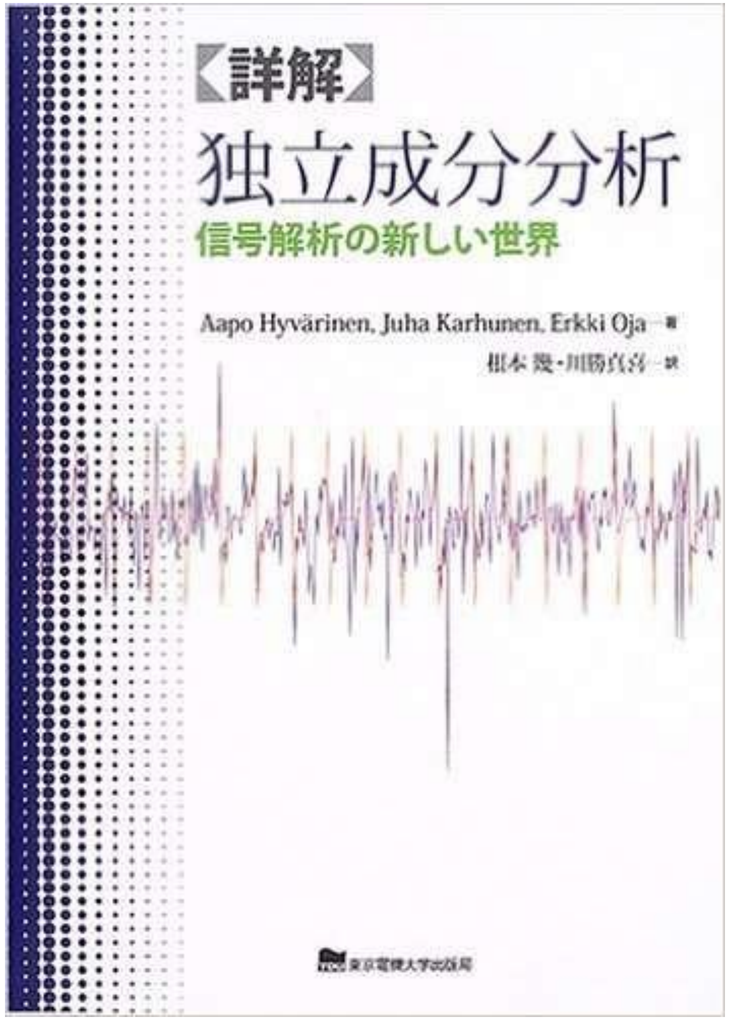
- https://colab.research.google.com/ にアクセスし，「GitHub」タブの検索欄に「https://github.com/shinolab/fukuzatu_jikken」を入力し，「Day2.ipynb」を選択してください．

- または，https://colab.research.google.com/drive/13qpMNx3UWVYIhraAXvhfUjnHgZoYNdVn?usp=sharing

概要

- 「独立成分分析」の基礎を学習
  - 信号の統計的性質に基づき, 意味ある情報を抽出する強力なツール
  - ICA (independent component analysis) ともいう

- ICAに基づく「ブラインド音源分離」をプログラミングにより実装する



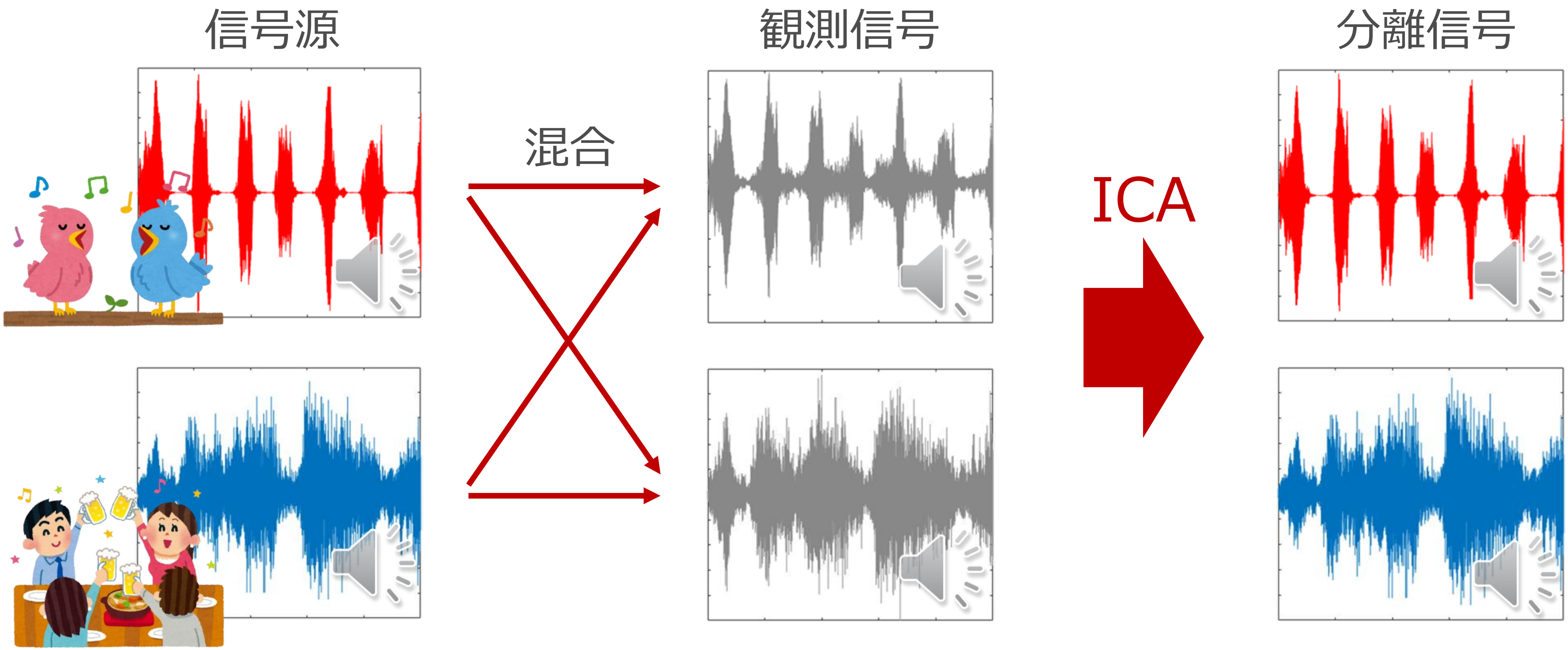
カクテルパーティー効果

- 人間が持つ「音声の選択的聴取能力」
  - 喧騒の中でも話を聞き取れる
- 複数の根拠から説明される
  - 話者の声の特徴
  - 話者の空間配置
  - 視覚情報
  - 会話の文脈
  - 「意識」する

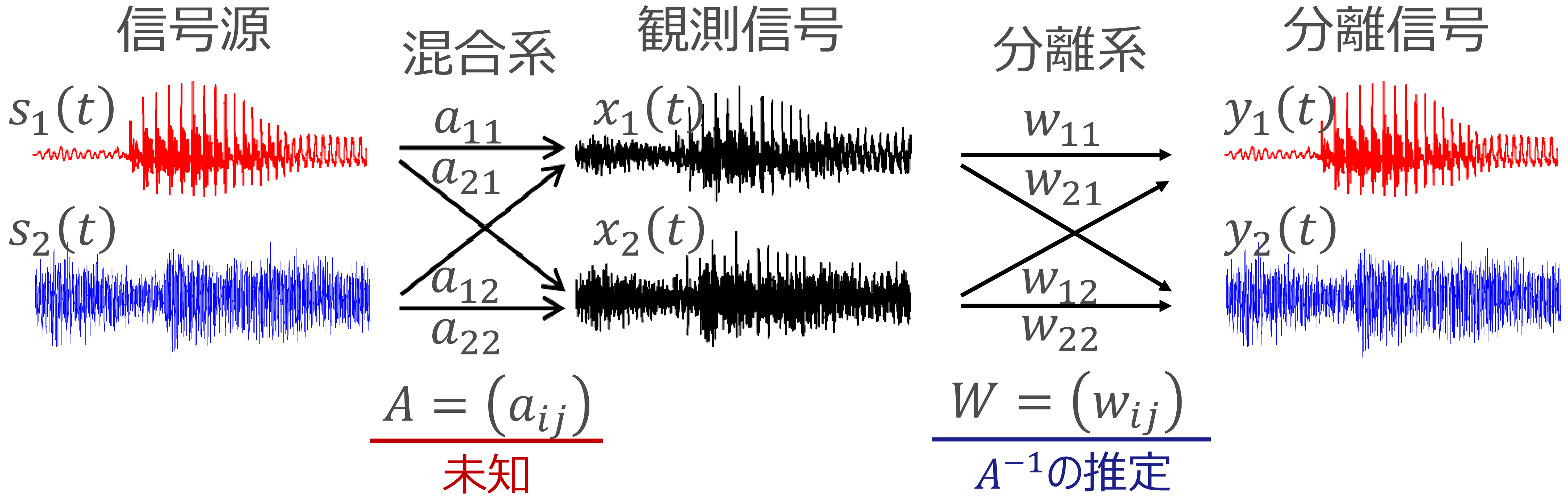
- 工学的には「ブラインド音源分離」という問題

信号処理によるブラインド音源分離

- ブラインド音源分離 (BSS; Blind Source Separation)



BSSの数学的表現



$$\underbrace{s(t)}_{\text{未知}} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{既知}} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = As(t)$$

$$\underbrace{y(t)}_{s(t)\text{の推定}} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Wx(t)$$

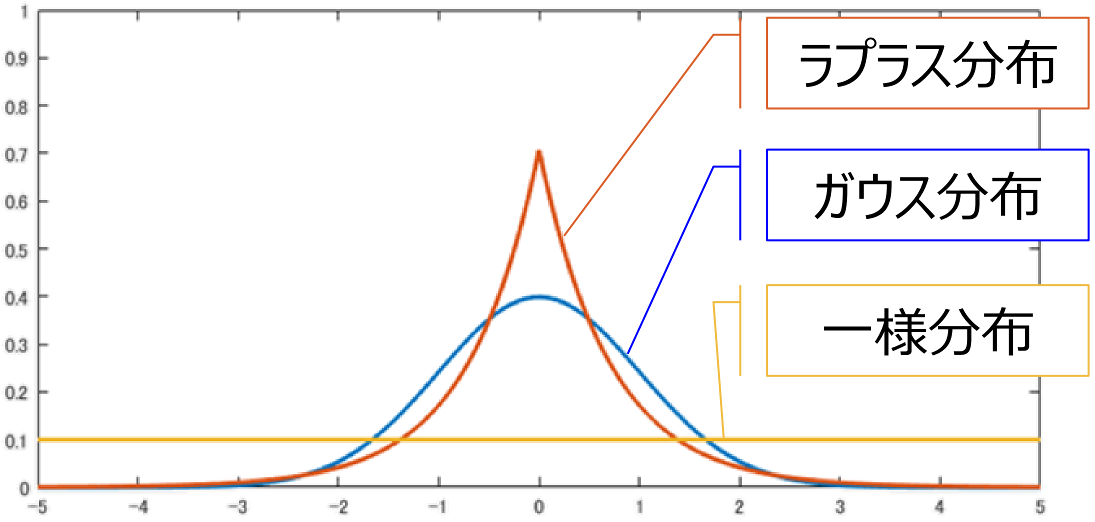
確率統計の復習

確率密度関数

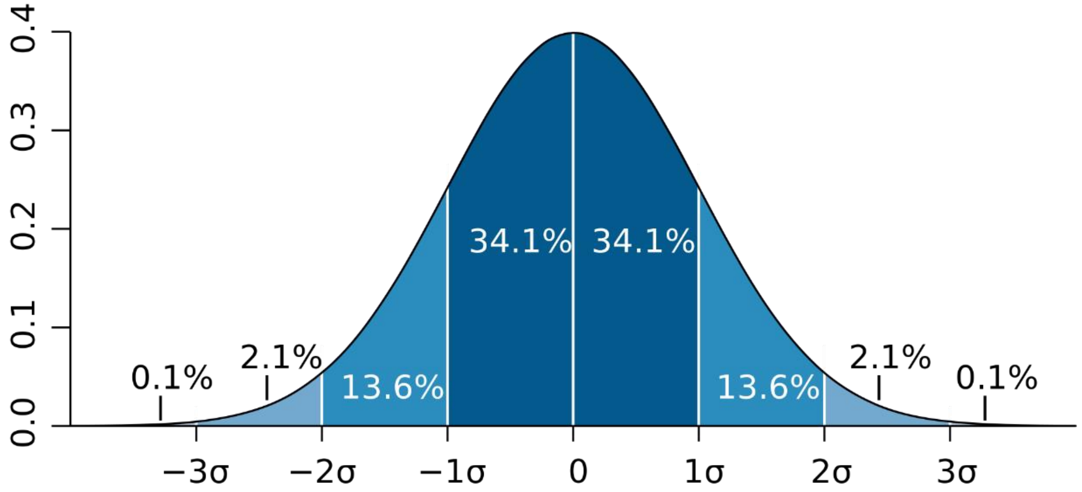
- 確率：物事の起こりやすさを数値化したもの
- 確率変数：値が確率的に決定する変数
- 確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$:

$$\mathrm{Prob}\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x$$

いろいろな確率密度関数



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



ポイント１：「独立」とは

- 「２つの確率変数 X と Y が (統計的に) 独立である」

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

  - ただし

$$\text{Prob}\{x_1 \leq X \leq x_2 \text{ and } y_1 \leq Y \leq y_2\} = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} p(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

条件付確率密度関数

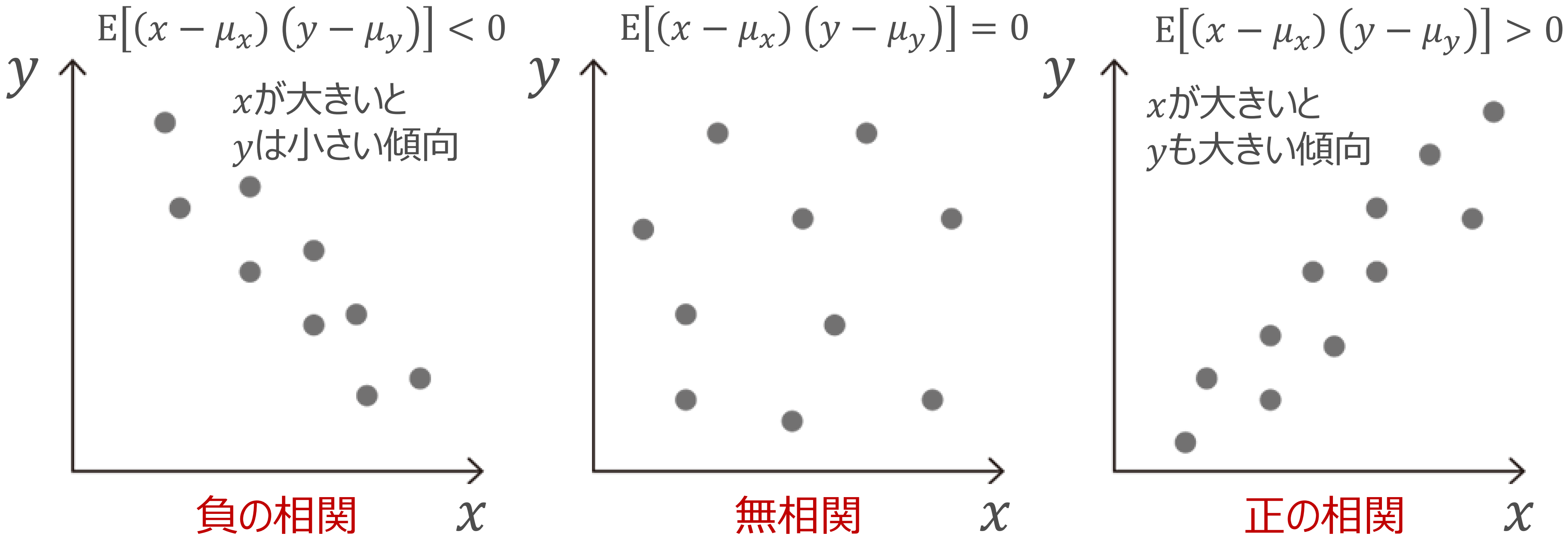
- 一般には $p(x,y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$
  なので, X と Y が独立なら $p(x|y) = p(x), p(y|x) = p(y)$
- つまり「独立」とは「2つの確率変数の一方が確定しても, もう一方に対し何の情報も得られない」という意味
  （e.g., 2つのサイコロの出目）

「無相関」とは

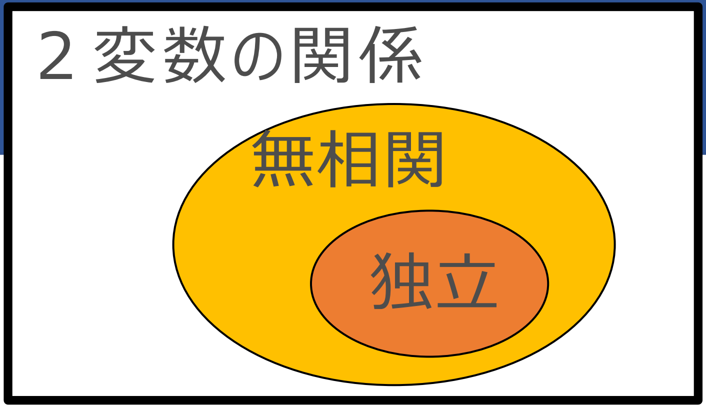
- 「２つの確率変数 X と Y が無相関である」

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{E}\left[(X-\mu_x)\left(Y-\mu_y\right)\right]=0$$

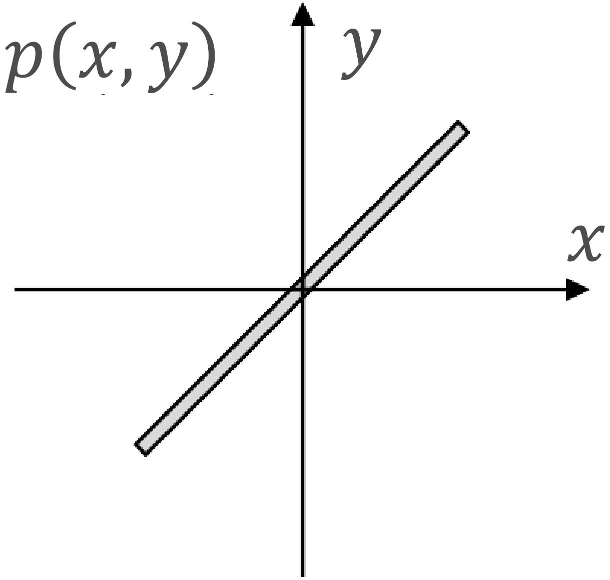
  - ここで, $\mu_x = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$



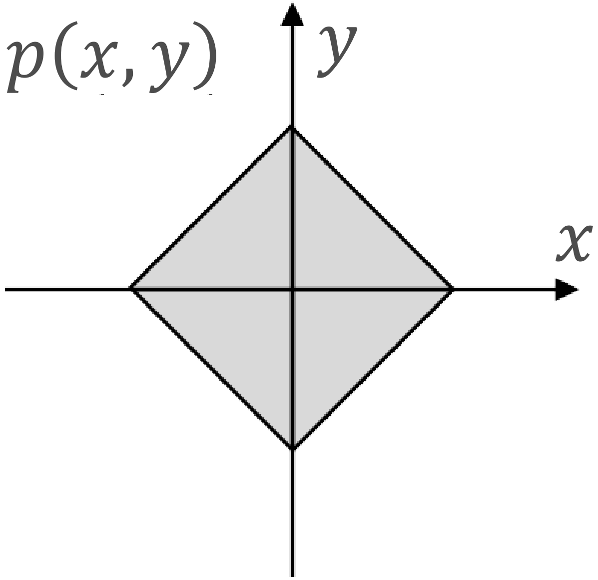
「独立」と「無相関」の関係



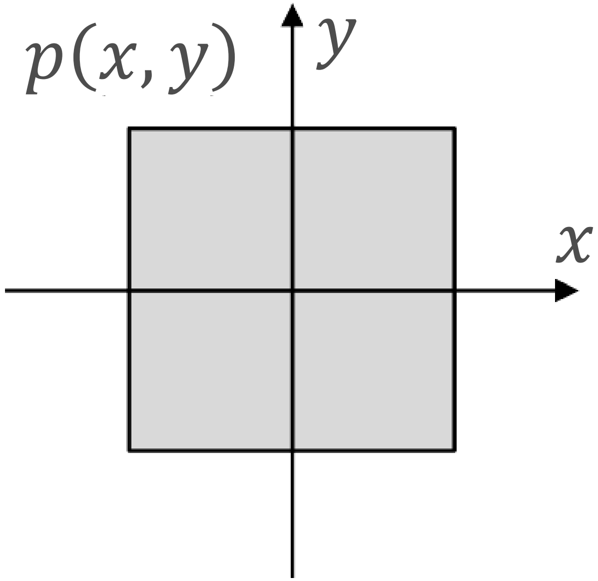
- ２つの確率変数 X と Y が 無相関 ⇒ 独立
- ２つの確率変数 X と Y が 独立 $\nRightarrow$ 無相関
- ただし、X, Y がガウス分布なら 無相関 ⇔ 独立



相関あり
（もちろん独立でない）



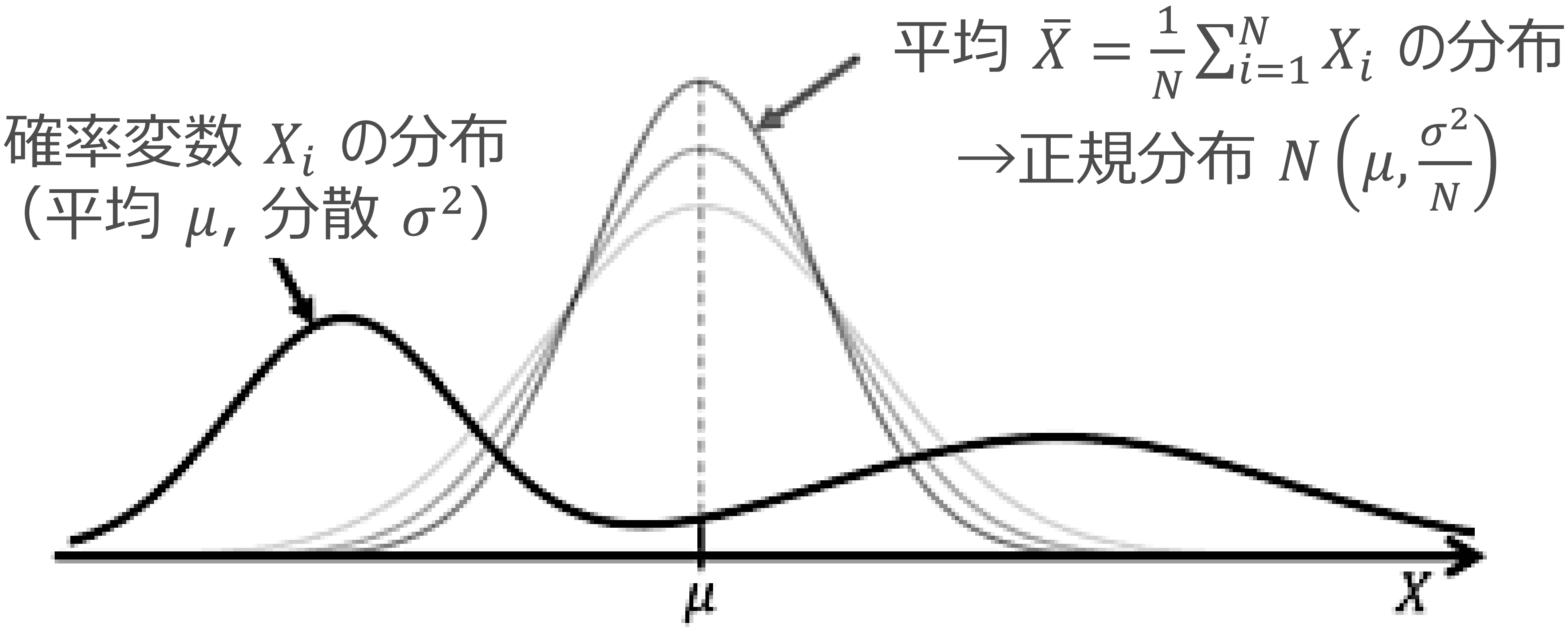
無相関だが独立でない



独立
（もちろん無相関）

ポイント２：中心極限定理

- 独立同一分布に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1...N}$ の和 (または平均) が従う確率分布は, N が大きいときガウス分布に近似される



統計的信号処理

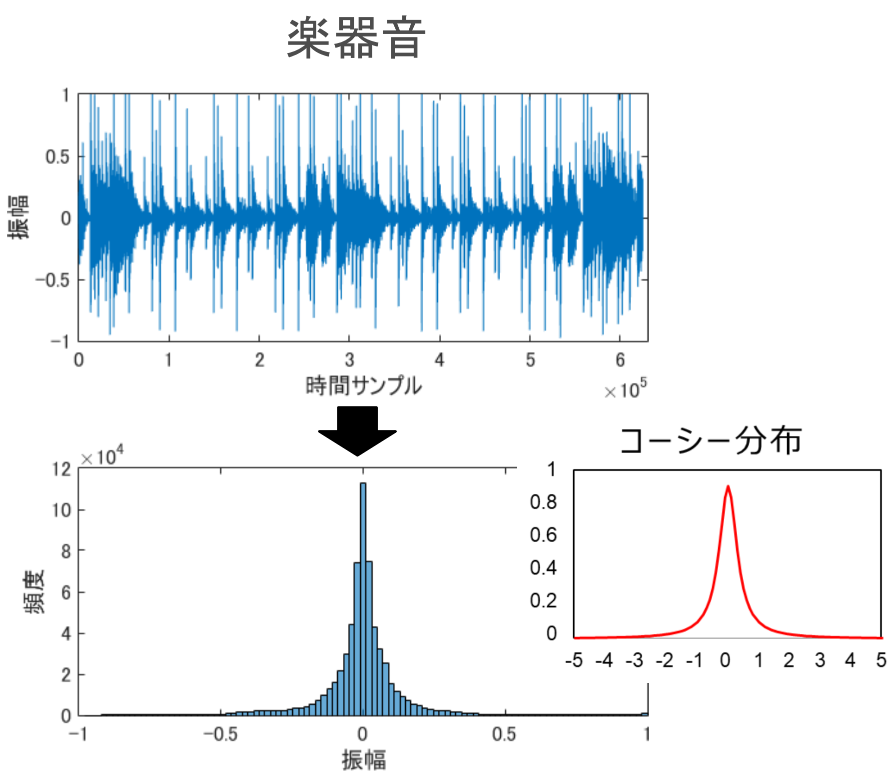
- 統計的信号処理: 観測信号を確率的信号 (ある確率密度関数に従う確率過程) と仮定
  - 離散時間信号の場合は確率変数列 $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$
  - 一般に, 確率密度関数は未知
    → 観測信号 $\{x_i\}_{i=1\ldots K}$ から, 確率密度関数やそのパラメータを推定できる

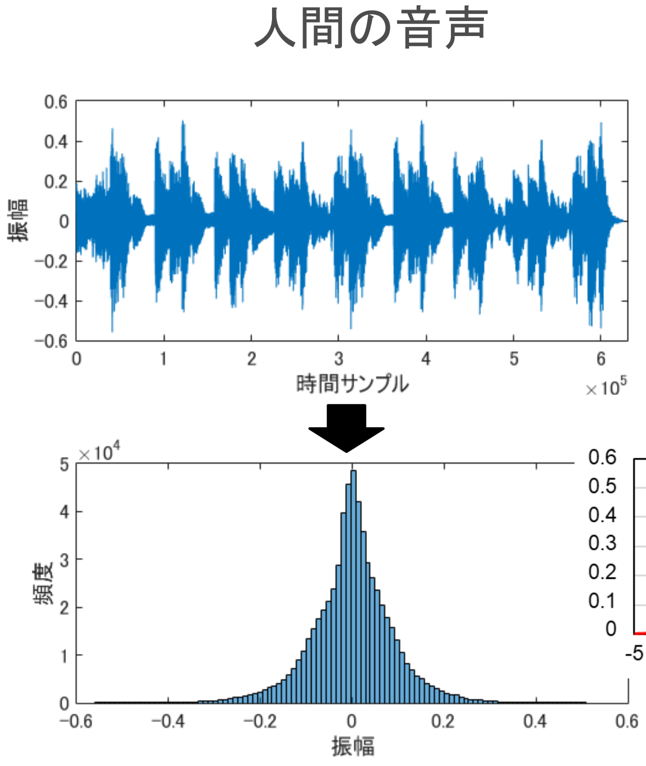
$$\mu \approx \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x_i\,, \qquad \sigma^2 \approx \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(x_i - \mu)^2$$

- 実際には確率密度関数 $p(x)$ がガウス分布と考えられる信号が多い
  - 測定誤差
  - 雑音
  - 学校の試験の点数 etc.

非ガウス分布

- ガウス分布に従わない信号も多い
  - コイン投げ (二項分布), 時間当たりのメールの受信数 (ポアソン分布), 雑音電力 (カイ2乗分布), 標本平均 (t分布), 次に地震が起こる時間 (指数分布), etc.





一般にガウス分布より
急峻で裾野が長い

演習1: 音声データの振幅を見てみよう

- Google Colabを開き, 演習1の部分にコードを書いてみよう

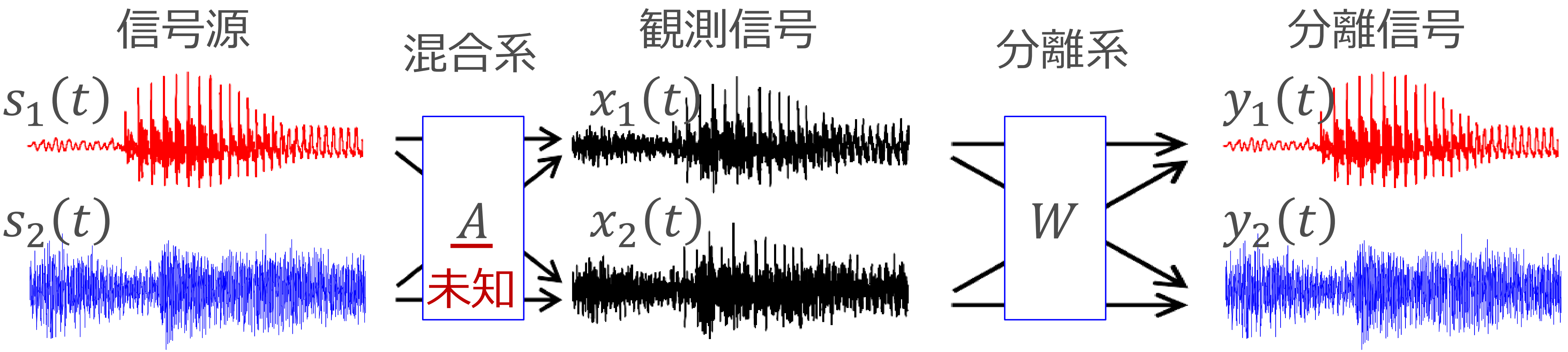
演習2: 音声データの振幅分布を見てみよう

- Google Colabを開き, 演習2の部分にコードを書いてみよう

独立成分分析

独立成分分析（ICA）

- 独立成分分析: 観測信号から元信号を分離する変換 W を決定

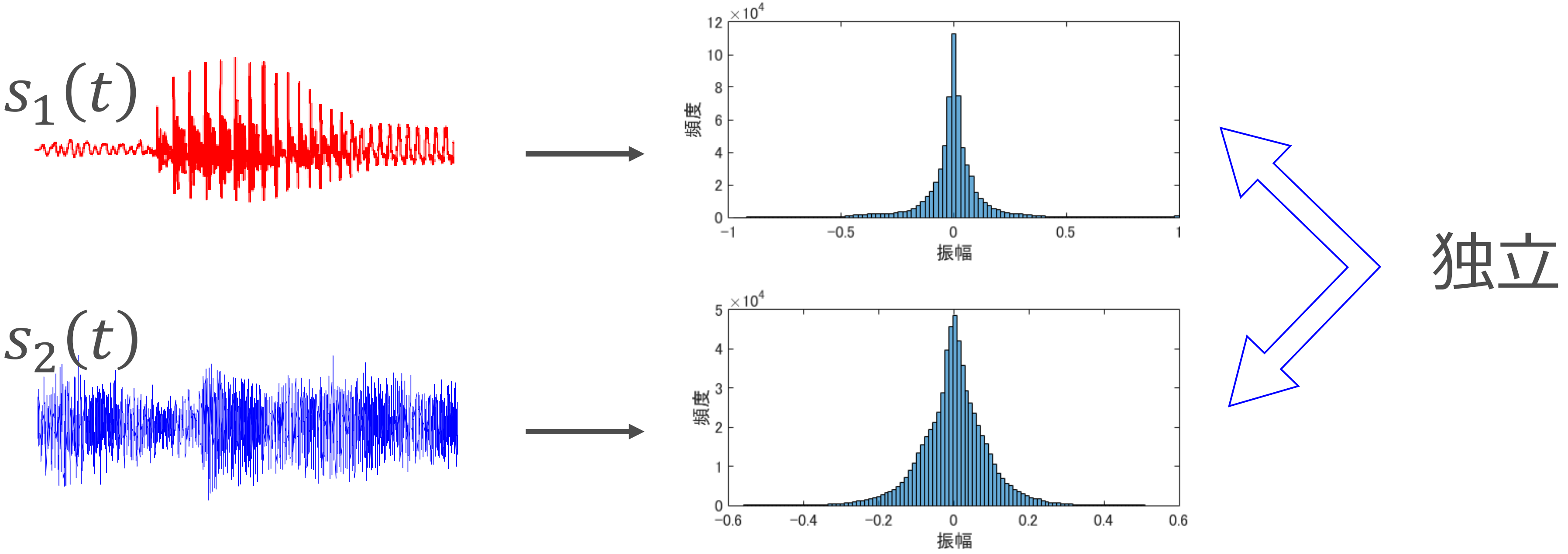


$$y(t) = Wx(t)$$

$$\underbrace{s(t)}_{\text{未知}} = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} \qquad \underbrace{x(t)}_{\text{既知}} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = As(t) \qquad \underbrace{y(t)}_{s(t)\text{の推定}} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Wx(t)$$

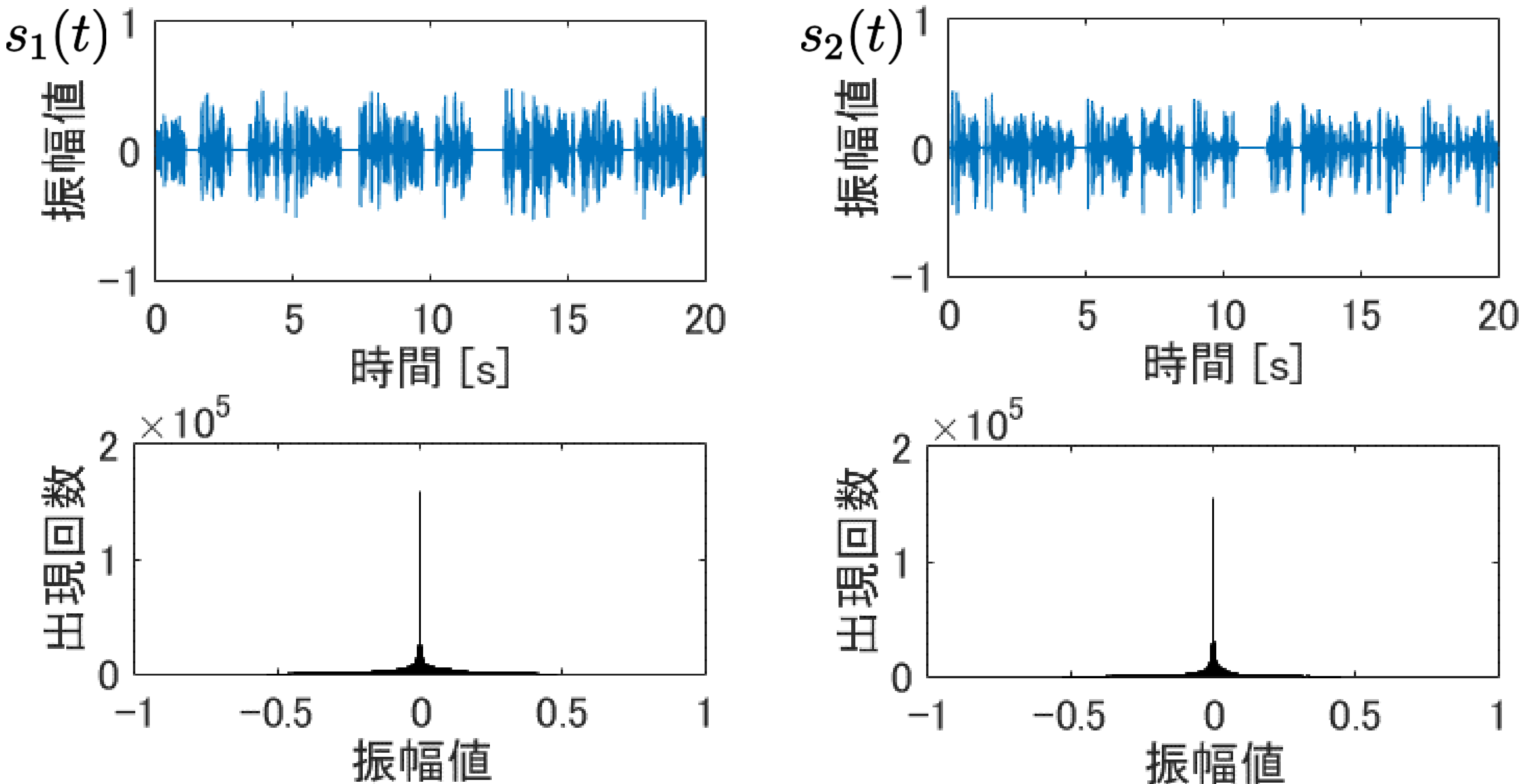
ICAの考え方

- ICAがおく仮定
  1. 信号源の各成分 s_1, s_2 は統計的に独立である
  2. 信号源の各成分 s_1, s_2 が従う確率分布はガウス分布でない
  - これらの仮定が成立しないと分離できない



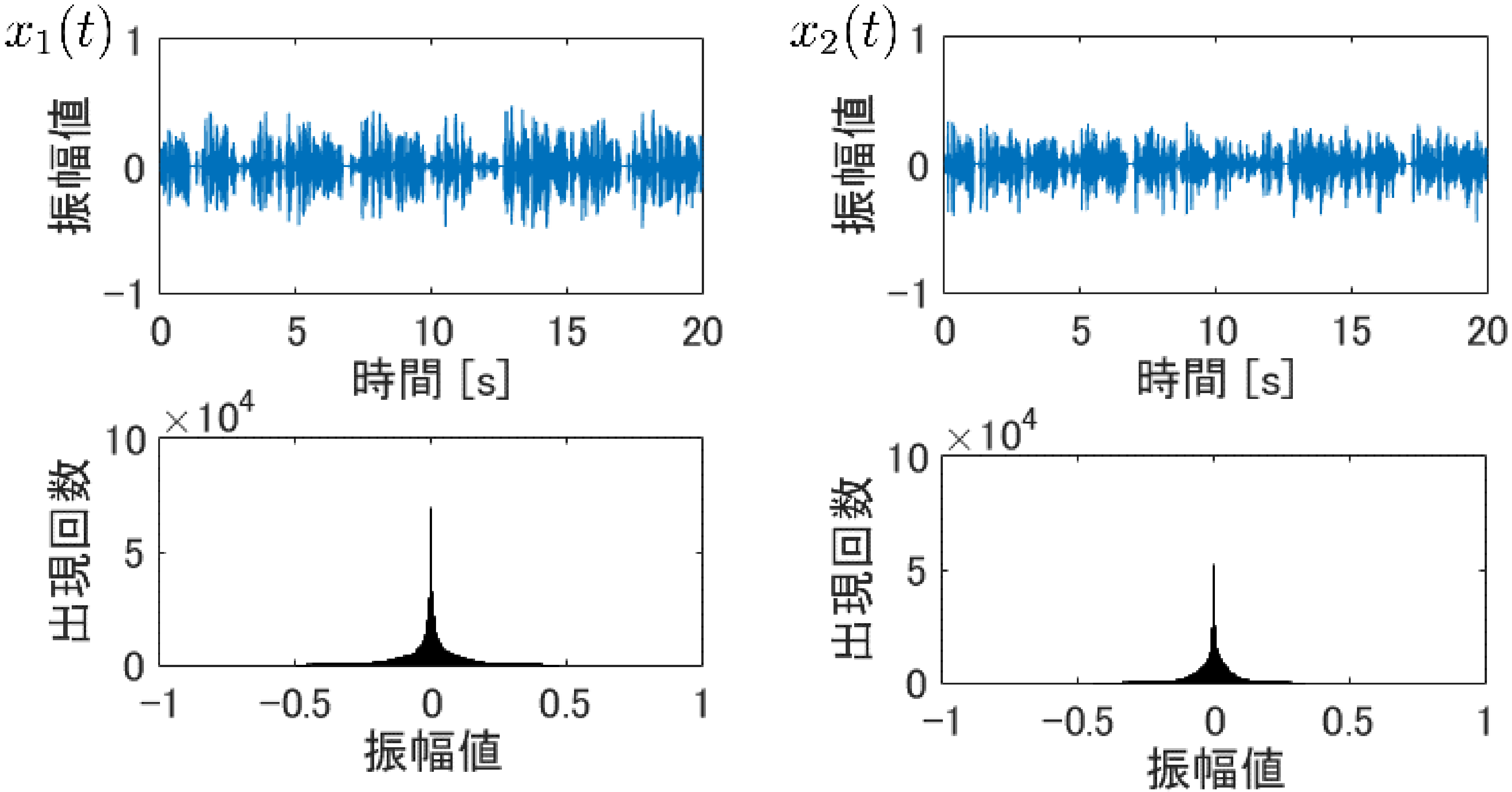
混合過程 (1/4): 混合前の信号

- 信号源
  - ここでは平均（直流バイアス）0 としておく

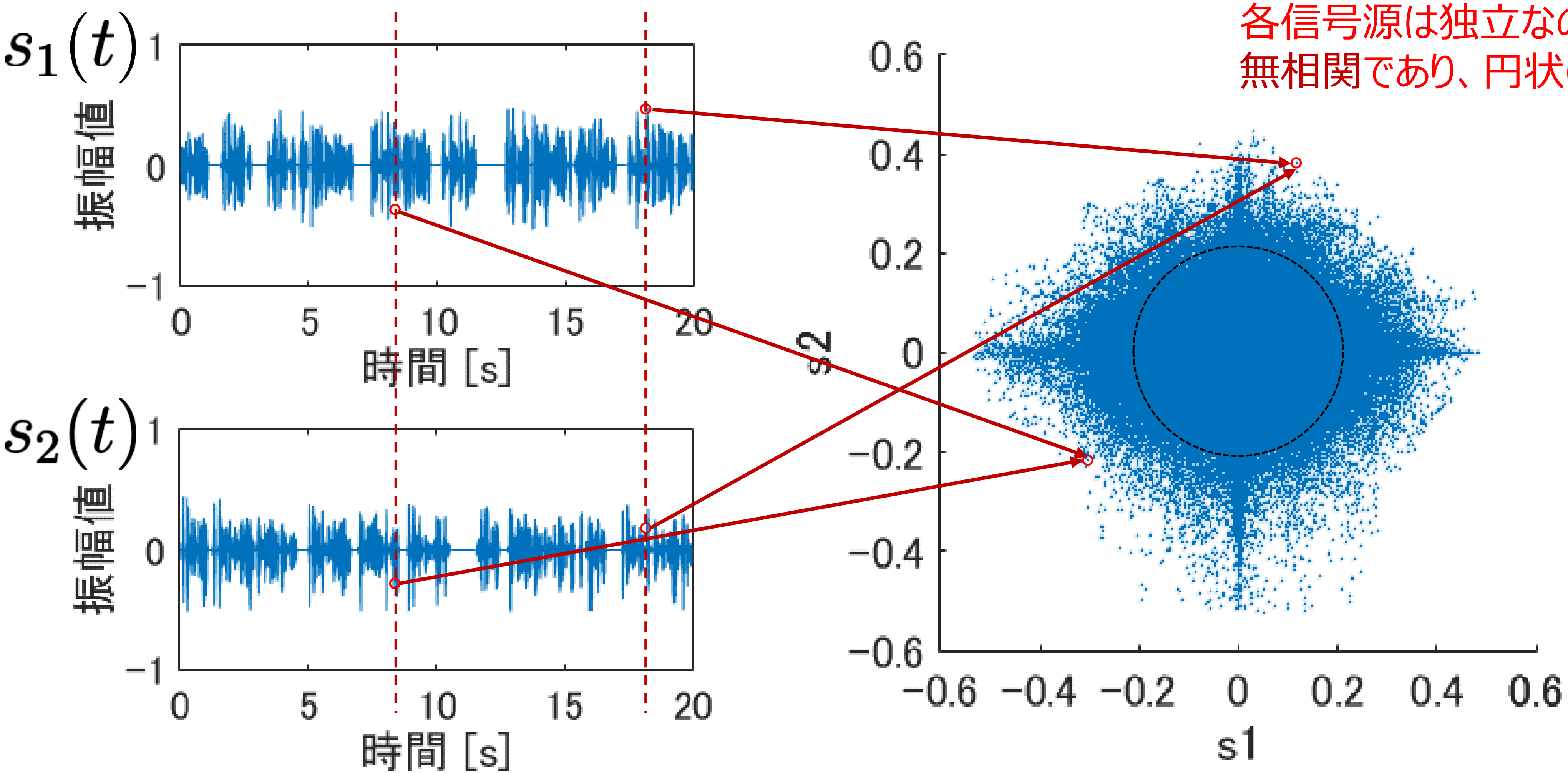


混合過程 (2/4): 混合後の信号

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.31 \\ 0.41 & 0.73 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.31 \\ 0.41 & 0.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

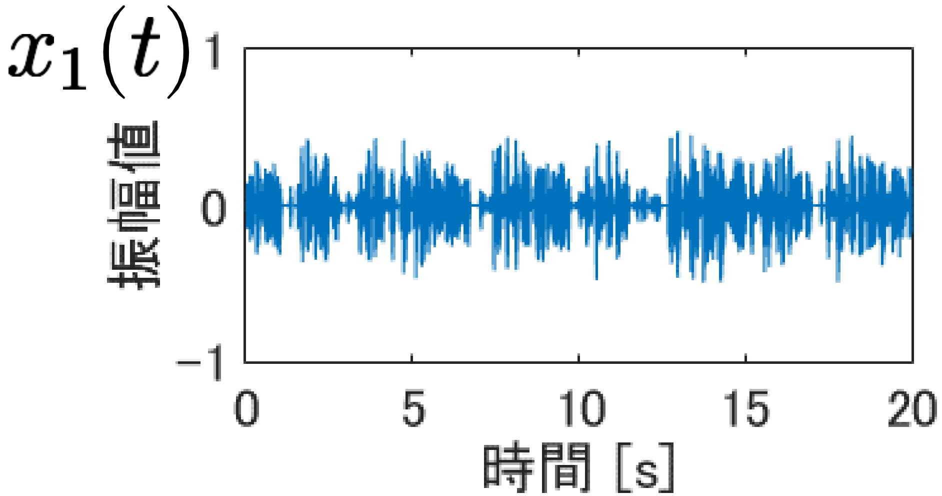


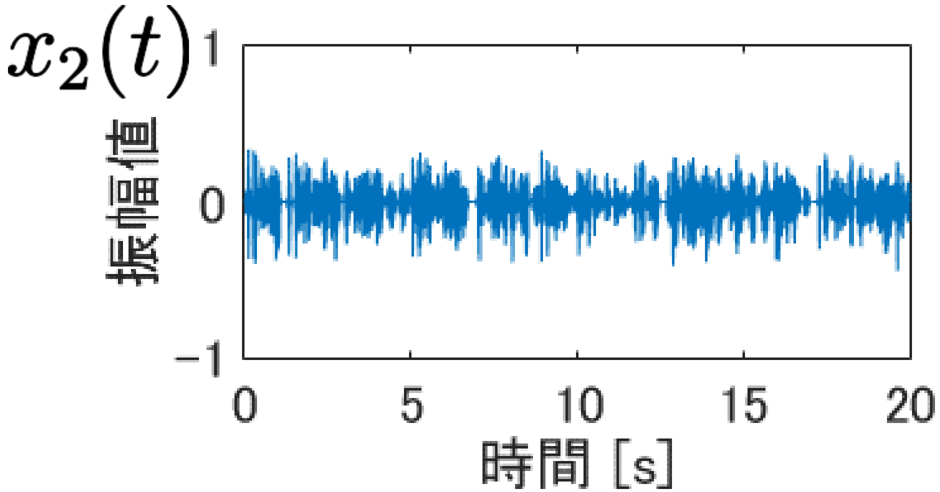
混合過程 (3/4): 混合前の信号



各信号源は独立なので
無相関であり、円状に分布

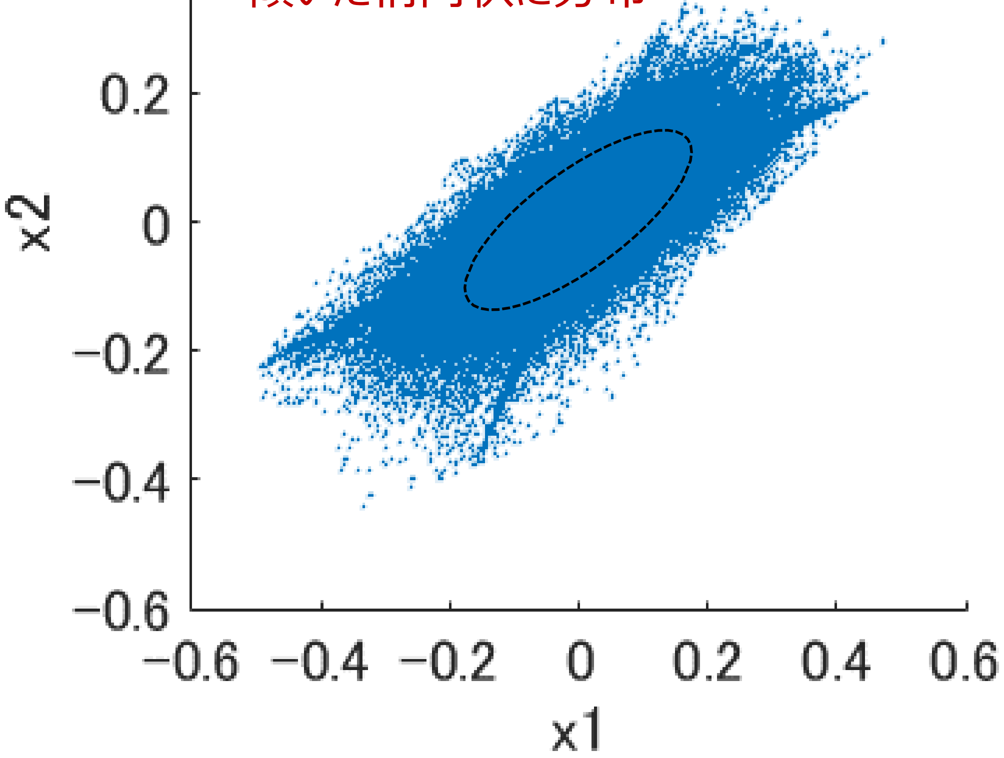
混合過程 (3/4): 混合後の信号





$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.31 \\ 0.41 & 0.73 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

観測信号は独立性がなく、無相関でもないため
傾いた楕円状に分布

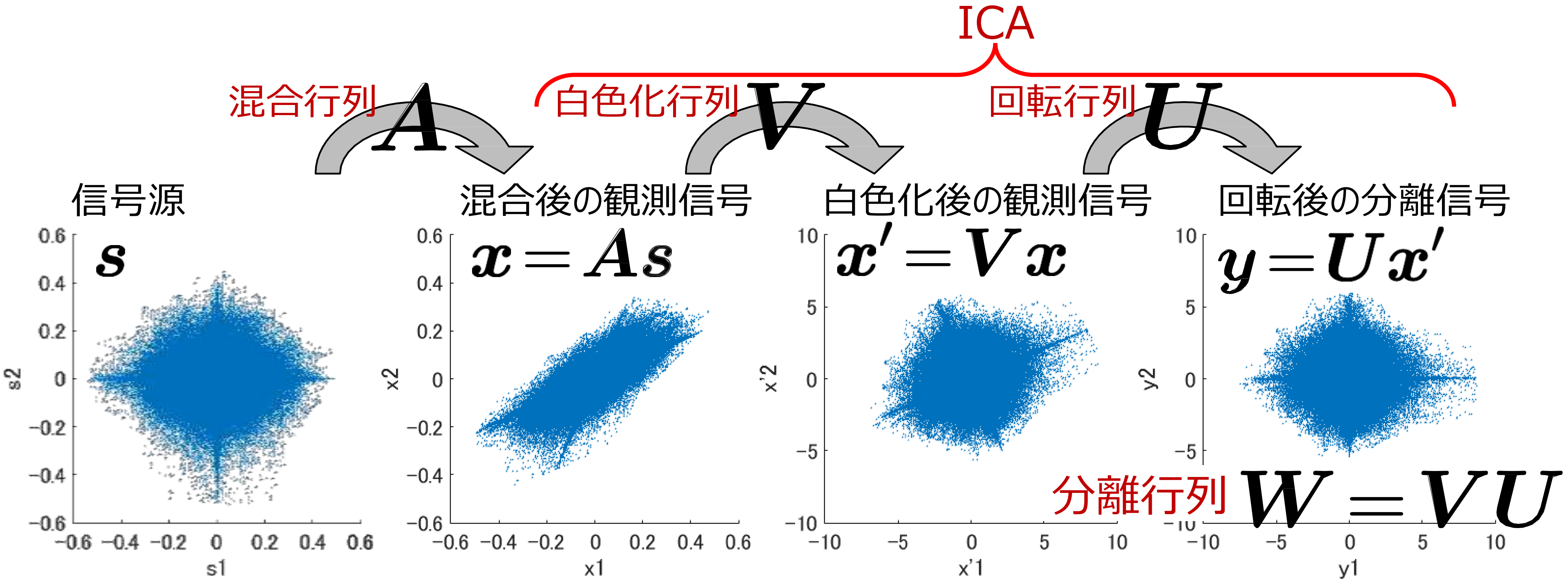


演習3: 信号の散布図を見てみよう

- Google Colabを開き, 演習3の部分にコードを書いてみよう

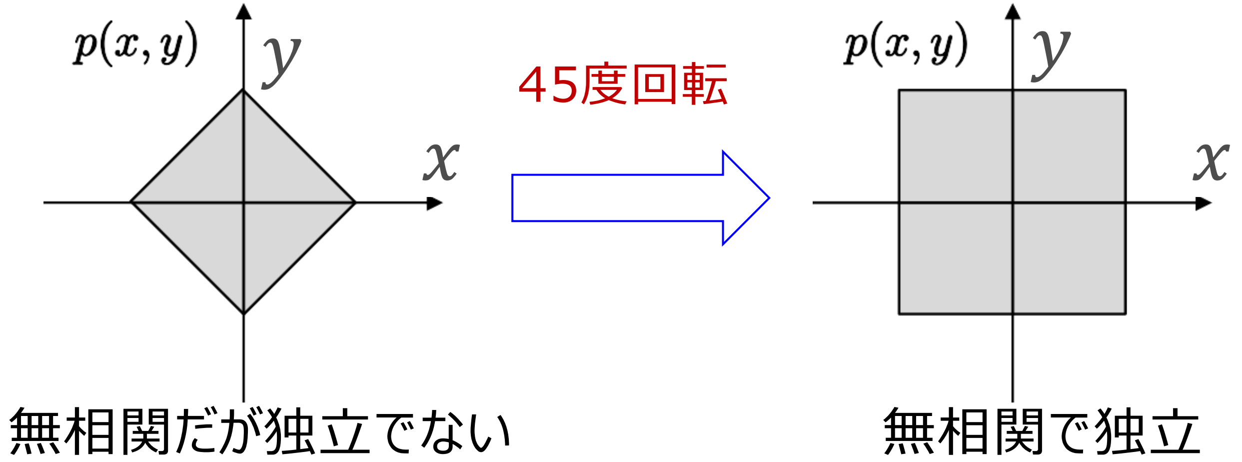
ICAの手順

1. 観測信号を**白色化** (無相関化, whitening, sphering) する
2. 各信号の**非ガウス性が最大**となるような回転行列（直交行列）を探索



手順の根拠

1. 観測信号を**白色化** (無相関化, whitening, sphering) する
   - 信号成分を独立にする前に, まず**無相関**にする
   - 手順2の準備として, 各信号の分散も1に**正規化**する
2. 各信号の**非ガウス性が最大**となるような回転行列 (直交行列) を探索
   - 手順1より各信号は無相関で分散 1 なので, 回転しても無相関で分散 1
     - ただし, 独立性が変わる
   - 混合された信号 (独立でない) は, 元の信号より必ずガウス分布に近くなる (**中心極限定理**)
     → ガウス分布からもっとも遠い分布になるように回転すれば独立になる (分離できる)



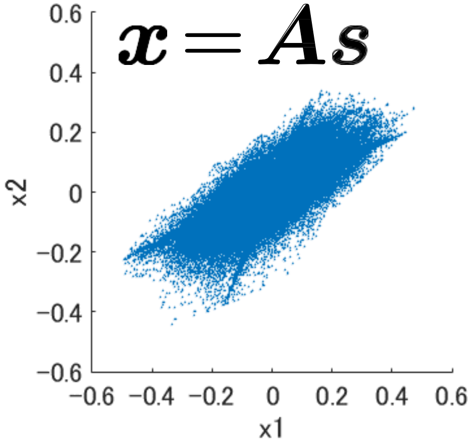
白色化 (1/2)

1. 観測信号の白色化 (無相関化＋分散正規化)
   - 白色化: 下記の分散共分散行列 R_x を線形変換により単位行列にする

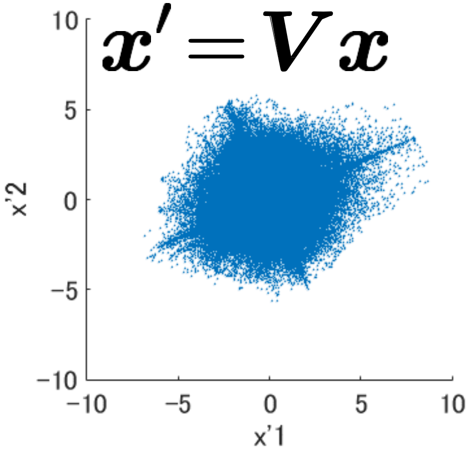
$$R_x = \mathrm{E}[(x-\mu)(x-\mu)^T] = \mathrm{E}[xx^T] = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

     - r_{11}, r_{22}は各信号の分散, $r_{12} (= r_{21})$は信号間の共分散
     - 分散共分散行列が単位行列
       $\Leftrightarrow$ 各信号の分散が1, 信号間の共分散が0 (=無相関)

$$\boldsymbol{R_x} = \begin{pmatrix} .0072 & .0038 \\ .0038 & .0032 \end{pmatrix}$$



白色化行列
$\boldsymbol{V}$



$$\boldsymbol{R_{x'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V をどう求める？

白色化 (2/2)

PCA: Principal Component Analysis

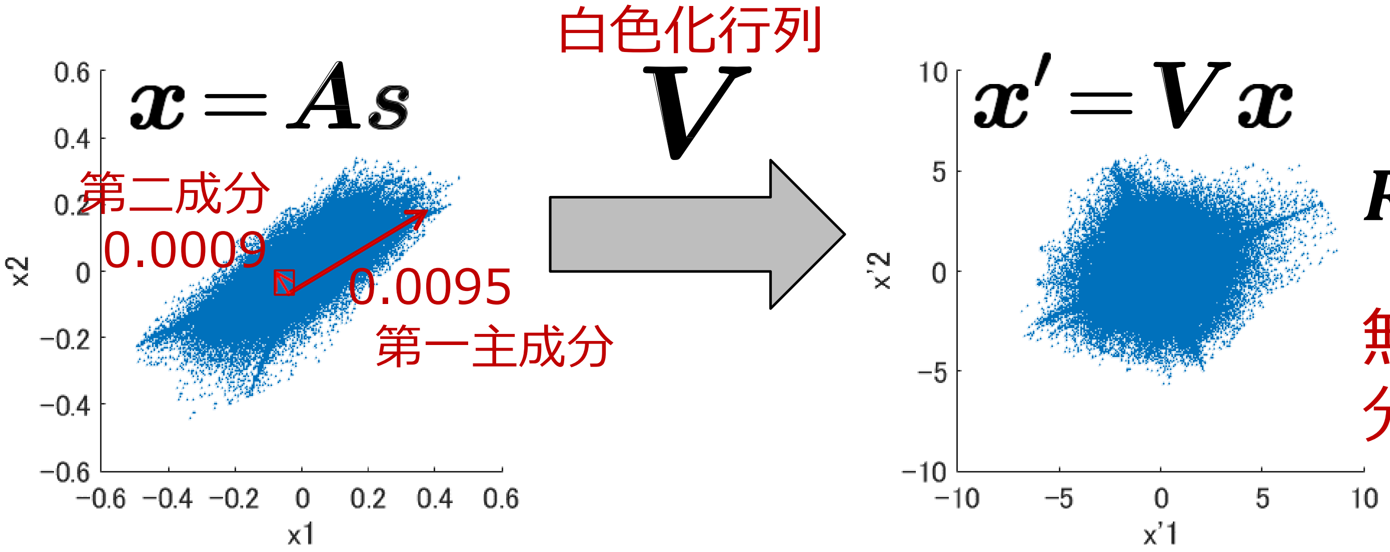
1. 観測信号の白色化 (無相関化＋分散正規化)
   - 白色化行列 V を求める: R_x の固有値分解（主成分分析; PCA）を利用

$$R_x = QDQ^T = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 は固有値
q_1, q_2 は固有ベクトル

   - $x' = \underbrace{D^{-1/2}Q^T}_{V} x$ とおくと簡単な計算により、$R_{x'} = E[x'x'^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{R_x} = \begin{pmatrix} .0072 & .0038 \\ .0038 & .0032 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{R_{x'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

無相関かつ各信号の分散が1

演習4: 白色化してみよう

- Google Colabを開き, 演習4の共分散行列を計算する`covariace_matrix`関数と白色化を行う`whitening`関数を完成させよう

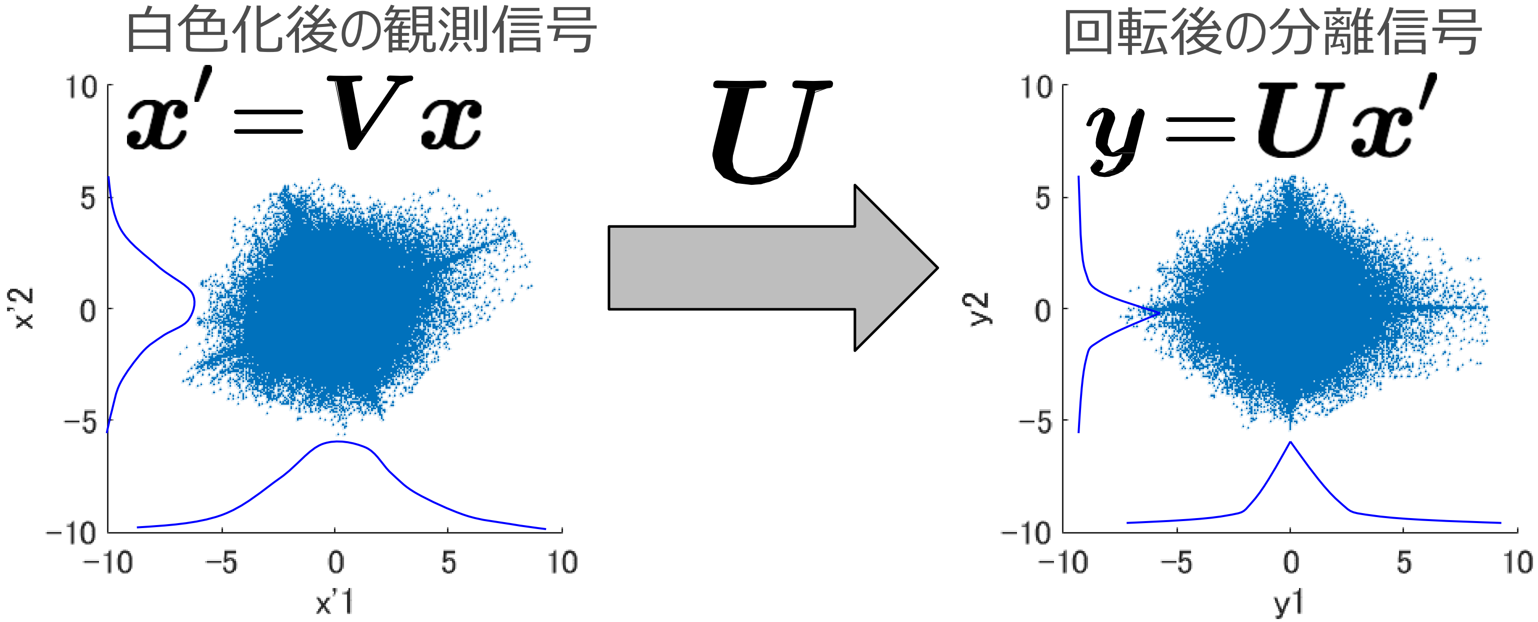
分散共分散行列: $R_x = \mathrm{E}[(x-\mu)(x-\mu)^T]$

固有値分解: $R_x = QDQ^T$

白色化: $x' = D^{-1/2}Q^T x$

非ガウス性最大化 (1/4)

2. 各信号の非ガウス性が最大となるような回転行列 (直交行列) を探索
   - 回転行列 $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の回転角度 θ を変化させる
   - 非ガウス性の指標として, ここでは「尖度 (kurtosis)」を使う

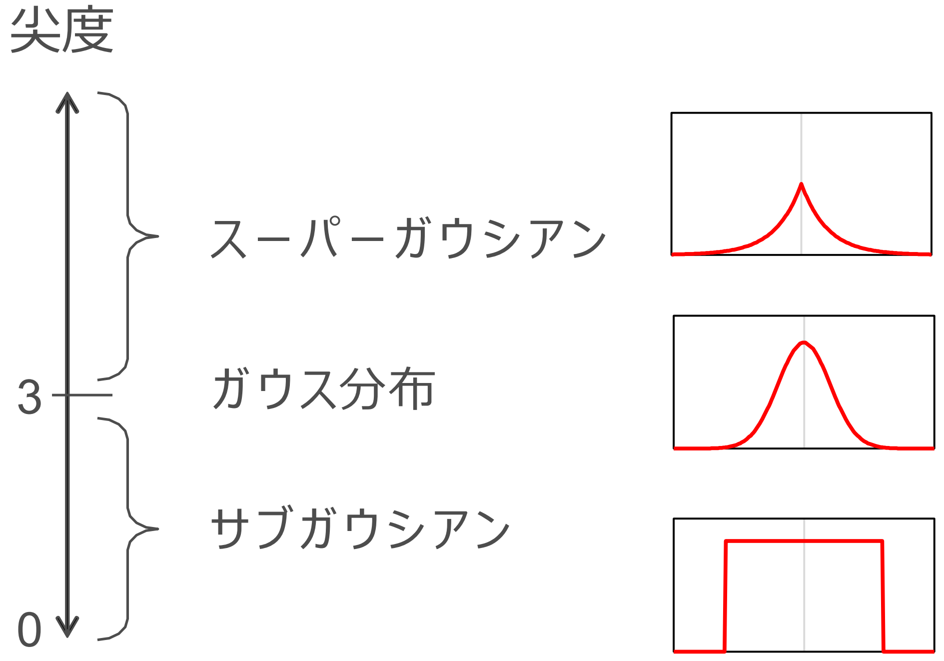


非ガウス性最大化 (2/4)

- 確率密度関数のモーメント

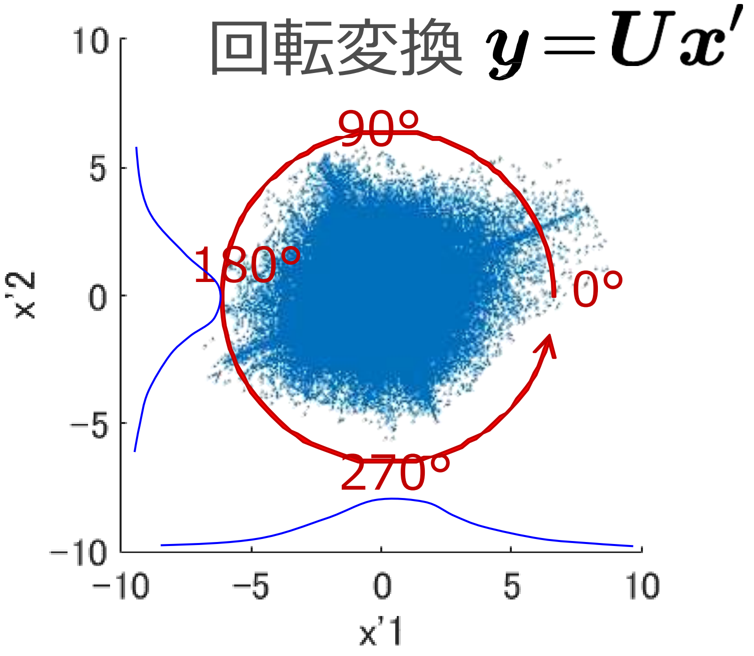
$$E_n = E[(x-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n p(x)\mathrm{d}x$$

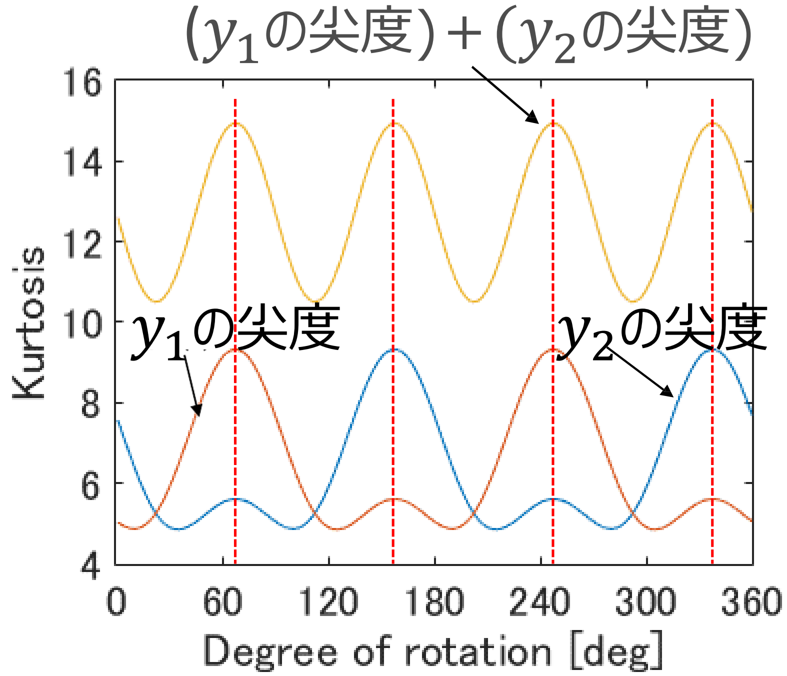
  - $E_0 = 1, E_1 = 0, E_2 = \sigma^2, \ldots$
- 尖度 (kurtosis) $\beta = \frac{E_4}{\sigma^2}$
  - 分布中心の「とがり度」
  - ガウス分布では $\beta = 3$
  - $\beta = 3$ から離れるほど非ガウス的



非ガウス性最大化 (3/4)

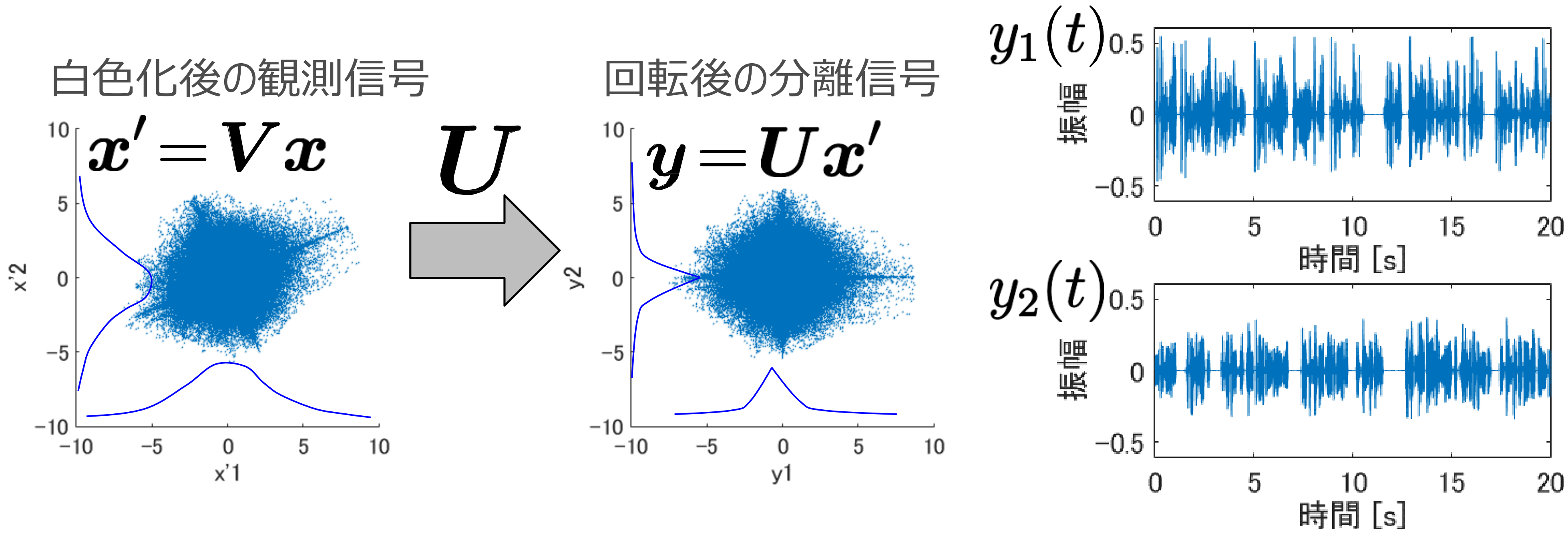
2. 各信号の非ガウス性が最大となるような回転行列 (直交行列) を探索
   - 各信号の尖度が最大となる角度 θ の回転行列 $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が求める行列





非ガウス性最大化 (44)

2. 各信号の非ガウス性が最大となるような回転行列 (直交行列) を探索
   - 回転行列 Uにより, y_1 成分と y_2 成分は独立になる

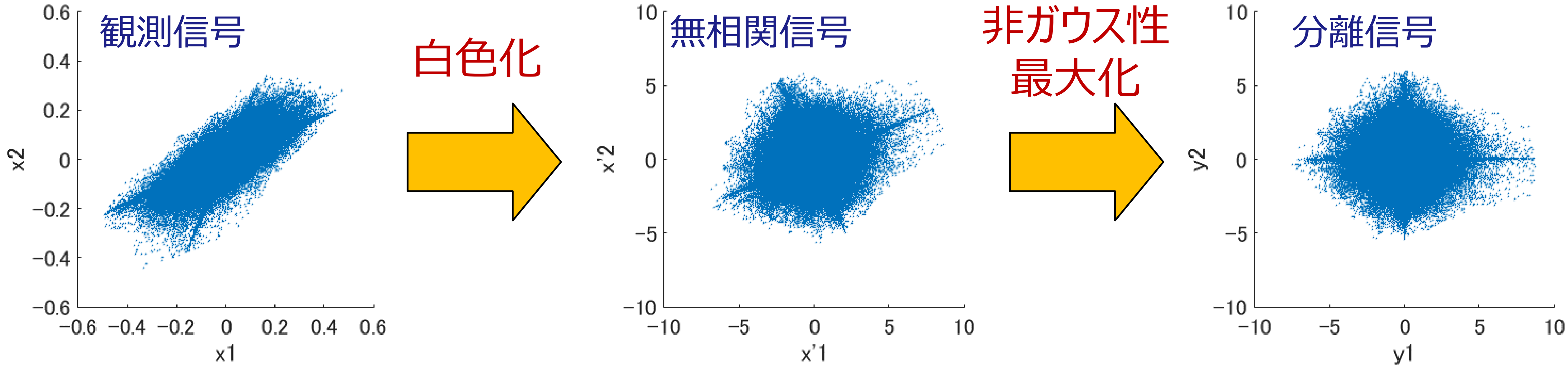


演習5: 尖度を計算してみよう

- Google Colabを開き, 演習5の`kurtosis`関数を完成させよう
- 尖度が最大になる回転角を解析的に求めることもできるが, 本演習では, 愚直に全探索する
  - 解析解は興味がある人は計算してみよう

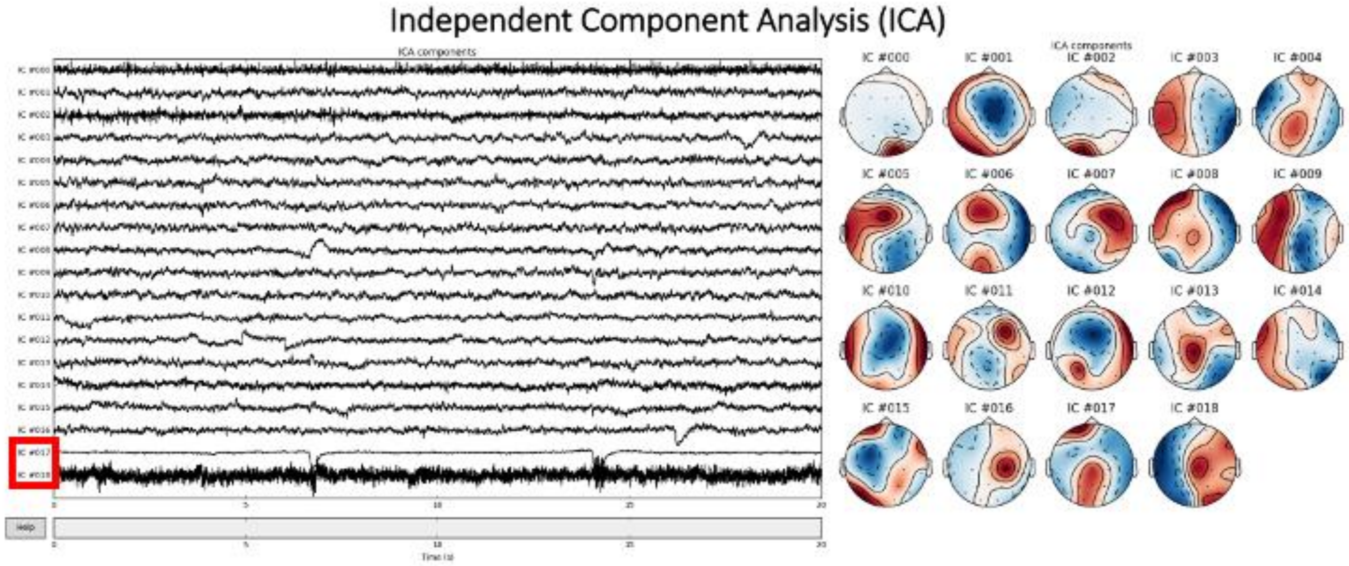
まとめ

- 独立成分分析（ICA, independent component analysis）
  - 独立性最大化による信号分離
  - 信号源の独立性と非ガウス性を仮定
  - 白色化（無相関化＋分散の正規化）と非ガウス性最大化による独立化



ICAの応用

- 音声信号以外にも
  - 画像 (顔画像, 医用画像, ...)
  - 生体信号 (脳波, 筋電, ...)
  - 金融データ (株価, 為替, 売り上げ, ...) etc.



Wikipedia – Independent component analysis

参考資料

- 北村大地, 「音響メディア信号処理における独立成分分析の発展と応用, History of independent component analysis for sound media signal processing and its applications」
  - https://www.slideshare.net/DaichiKitamura/history-of-independent-component-analysis-for-sound-media-signal-processing-and-its-applications