ツィオルコフスキーの公式

小路真矢

2018 年 7 月 27 日

1　目的

コンピュータを用いた数値計算により第二次世界大戦中にドイツが開発した世界最初の軍事用液体燃料ミサイルであり，弾道ミサイルである V2 ロケットの一次元運動をいくつかのパラメータを用いて解析する．また，ロシアの物理学者コンスタンチン・ツィオルコフスキーが発見し，人類が宇宙進出の可能性を有することを示したツィオルコフスキーの公式 -通称ロケット方程式-の厳密解と数値解を比較する．

2　理論

ツィオルコフスキーの公式の導出

以下 V2 ロケットに働く抵抗力は無視する．
V2 ロケットには鉛直下向きに重力 $GMm/(R+x)^2$ が働く．ただし，G は万有引力定数，M は地球の質量，$R = 6.4 \times 10^6\mathrm{m}$ は地球の半径，x は V2 ロケットの高度，$m = 1.25 \times 10^4\mathrm{kg}$ は V2 ロケットの質量である．
地球表面でロケットに働く重力について，重力加速度 $g = 9.8\mathrm{ms}^{-2}$ を用いて，

$$\frac{GMm}{R^2} = mg \tag{1}$$

$$GM = gR^2 \tag{2}$$

が成り立つから，(2) 式より，ロケットに働く重力は，$mgR^2/(R+x)^2$ と書き表せる．
ところで，ロケットが単位時間あたりに質量 μ の推進剤を後方に相対速度 $v^{'} < 0$ で噴出する場合の運動量の変化 Δp は，二次の微小量を無視すると，

$$\Delta p = \{(m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|(v + v^{'})\} - mv \tag{3}$$

$$\approx m\Delta v + |\Delta m|v^{'} \tag{4}$$

である．
よって，

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} \approx m\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{|\Delta m|}{\Delta t}v^{'} \tag{5}$$

となり，$\Delta t \to 0$ のとき，

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \left|\frac{dm}{dt}\right|v^{'} \tag{6}$$

である．
これを，鉛直上向きを正の方向とする一直線上でのロケットの運動方程式，

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} \tag{7}$$

に代入して，

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} - \left|\frac{dm}{dt}\right|v^{'} \tag{8}$$

ここで，$\frac{dm}{dt} = -\mu < 0$ であるから，

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} + \frac{dm}{dt}v^{'} \tag{9}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} - \mu v^{'} \tag{10}$$

が得られる．

ところで，V2 ロケットの移動範囲が地球の半径に対して十分小さく $x \ll R$ のとき， $R^2/(R+x)^2 \approx 1$ と見なせるので (9) 式は,

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \frac{dm}{dt}v^{'} \tag{11}$$

と書き表せる．

(11) 式の両辺を m で割って,

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}v^{'} \tag{12}$$

両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分すれば,

$$\int_0^t \frac{dv}{dt^{'}}dt^{'} = -\int_0^t g dt^{'} + v^{'}\int_0^t \frac{1}{m}\frac{dm}{dt^{'}}dt^{'} \tag{13}$$

$$v(t) - v(0) = -gt + v^{'}\ln\left|\frac{m(t)}{m(0)}\right| \tag{14}$$

$$v(t) = v(0) - gt + v^{'}\ln\left|\frac{m(t)}{m(0)}\right| \tag{15}$$

$\frac{m(t)}{m(0)} \quad > 0$ より，

$$v(t) = v(0) - gt + v^{'}\ln\frac{m(t)}{m(0)} \tag{16}$$

こうして得られた (16) 式が，ツィオルコフスキーの公式である．

さらに，上昇高度 $x(t)$ は，(16) 式の両辺を $t = 0$ から $t = t$ まで積分することで得られる．ロケットの初速を $v(0) = 0$ ，時刻 t におけるロケットの質量を $m(t) = m(0) - \mu t$ として,

$$\int_0^t v(t^{'})dt^{'} = \int_0^t \left\{ -gt^{'} + v^{'}\ln\frac{m(0)-\mu t^{'}}{m(0)} \right\} dt^{'} \tag{17}$$

$$= -\frac{g}{2}t^2 - \frac{m(0)v^{'}}{\mu}\int_0^t \left\{ \left(\frac{m(0)-\mu t^{'}}{m(0)}\right)^{'} \ln\frac{m(0)-\mu t^{'}}{m(0)} \right\} dt^{'} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

ここで上付きの $'$ は t についての微分を表す．部分積分を実行して,

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{m(0)v^{'}}{\mu}\left\{ \left(\frac{m(0)-\mu T}{m(0)}\right)\ln\frac{m(0)-\mu T}{m(0)} + \frac{\mu}{m(0)}t \right\} \tag{20}$$

3　方法

差分方程式

(10) 式を速度 v についての差分方程式として表し，それに加えて高度 x ，質量 m に関しての 3 つの差分方程式を c 言語で記述したプログラムを用いて解くことにより，V2 ロケットの運動を解析した．
まず，高度 x ，速度 v ，質量 m に関する 3 つの微分方程式は,

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{21}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} - \mu v^{'} \tag{10}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\mu \tag{22}$$

で与えられる．
これらの微分方程式を差分方程式に変換した．
任意の時刻 t における高度を x_n ，速度を v_n ，質量を m_n ，時刻 $t+\Delta t$ における高度を x_{n+1} ，速度を v_{n+1} ，質量を m_{n+1} とすると,

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t \tag{23}$$

$$v_{n+1} = v_n - \left\{\frac{gR^2}{(R+x_n)^2} + \frac{\mu}{m_n}v^{'}\right\}\Delta t \tag{24}$$

$$m_{n+1} = m_n - \mu\Delta t \tag{25}$$

が得られる．
また，今回は地表にある打ち上げ台から発射したあとの V2 ロケットの運動を解析することにした．それに即して初期条件を時刻 $t=0$ において，$x=x(0)=x_0=0$ ，$v=v(0)=v_0=0$ とした．尚，V2 ロケットは内部に推進剤を 8720 kg 積載しているとし，V2 ロケット本体の質量を 3780 kg とした．さらに，微小時間 Δt の間隔は，$\Delta t = 0.05$ s ，解析時間の上限は，$t = 1000$ s とした．
これより，変更するパラメーターは，単位時間あたりに放出する推進剤の質量 μ と，推進剤を放出する相対速度 $v^{'}$ のみである．

数値解とツィオルコフスキーの公式解の比較

上で得た差分方程式を用いて得た数値解 $x(t)$ ，$v(t)$ に関するグラフと，以下の 2 式が示すグラフとを視覚的に比較した．

$$v(t) = -gt + v^{'}\ln\frac{m(0)-\mu t}{m(0)} \tag{26}$$

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{m(0)v^{'}}{\mu}\{(\frac{m(0)-\mu t}{m(0)})\ln\frac{m(0)-\mu t}{m(0)} + \frac{\mu}{m(0)}t\} \tag{19}$$

用いたプログラムのソースコード

プログラムは，ロケットの上昇，自由落下，不発，着陸の各場合それぞれに対応するようにした．また，ロケットは燃料をすべて使いきるまで動作するようになっている．

```c
#include<stdio.h>

int main(void) {
  int i;
  double x,v,m,u,e,t,tmax,dt;
  double k0[2],k1[2],k2[2],k3[2],km,X[4];
  double x1,v1,m1,x2,v2,m2,x3,v3,m3;
  double G = 9.8*6400000*6400000;
  x = 0;
  v = 0;
  m = 12500;

  scanf("%lf %lf %lf %lf",&u,&e,&dt,&tmax);

  i=0;
  for(t=0; t<=tmax; t+=dt) {
    printf("%8.4f %8.4f %8.4f %8.4f\n",t,x,v,m);
    if(i == 0) {
      if(m > 3780) {
        X[0] = 6400000+x;
        k0[0] = dt*v;
        k0[1] = -dt*((G/(X[0]*X[0]))+(e*u/m));
        km = dt*(-e);
        x1 = x+k0[0]/2.0;
        v1 = v+k0[1]/2.0;
        m1 = m+km/2.0;
        X[1] = 6400000+x1;
        k1[0] = dt*v1;
        k1[1] = -dt*((G/(X[1]*X[1]))+(e*u/m1));
        x2 = x+k1[0]/2.0;
        v2 = v+k1[1]/2.0;
        m2 = m+km/2.0;
        X[2] = 6400000+x2;
        k2[0] = dt*v2;
        k2[1] = -dt*((G/(X[2]*X[2]))+(e*u/m2));
        x3 = x+k2[0];
        v3 = v+k2[1];
        m3 = m+km;
        X[3] = 6400000+x3;
```

```
        k3[0] = dt*v3;
        k3[1] = -dt*((G/(X[3]*X[3]))+(e*u/m3));
        x = x+(k0[0]+2.0*k1[0]+2.0*k2[0]+k3[0])/6.0;
        v = v+(k0[1]+2.0*k1[1]+2.0*k2[1]+k3[1])/6.0;
        m = m+km;
      }
      else {
        X[0] = 6400000+x;
        k0[0] = dt*v;
        k0[1] = -dt*(G/(X[0]*X[0]));
        x1 = x+k0[0]/2.0;
        v1 = v+k0[1]/2.0;
        X[1] = 6400000+x1;
        k1[0] = dt*v1;
        k1[1] = -dt*(G/(X[1]*X[1]));
        x2 = x+k1[0]/2.0;
        v2 = v+k1[1]/2.0;
        X[2] = 6400000+x2;
        k2[0] = dt*v2;
        k2[1] = -dt*(G/(X[2]*X[2]));
        x3 = x+k2[0];
        v3 = v+k2[1];
        X[3] = 6400000+x3;
        k3[0] = dt*v3;
        k3[1] = -dt*(G/(X[3]*X[3]));
        x = x+(k0[0]+2.0*k1[0]+2.0*k2[0]+k3[0])/6.0;
        v = v+(k0[1]+2.0*k1[1]+2.0*k2[1]+k3[1])/6.0;
      }
      if(x < 0) {
        x = 0;
        v = 0;
        i++;
      }
    }
    else {
      if(m > 3780) {
        m = m+km;
      }
      else {
        break;
      }
    }
  }
  return(0);
}
```

4　結果

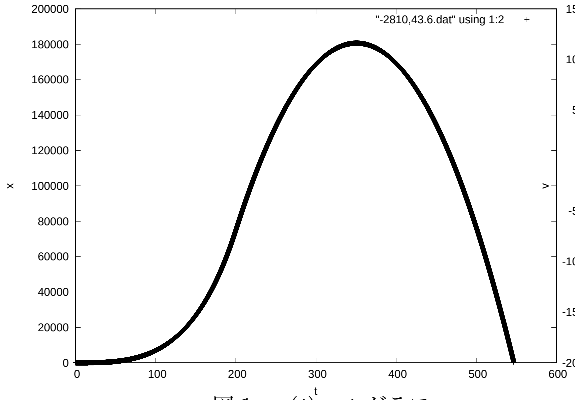

図 1　$x(t) - t$ グラフ

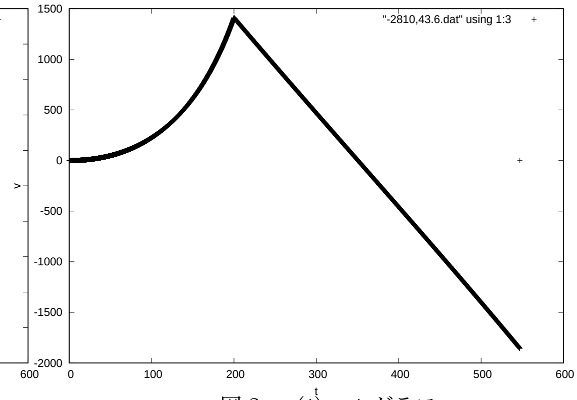

図 2　$v(t) - t$ グラフ

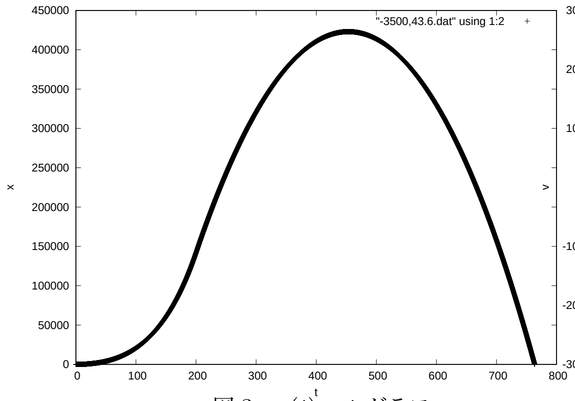

図 3　$x(t) - t$ グラフ

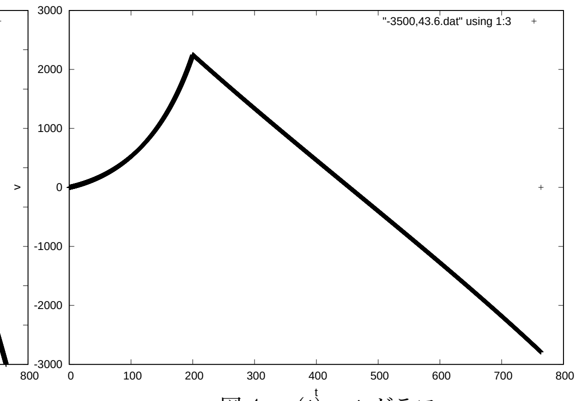

図 4　$v(t) - t$ グラフ

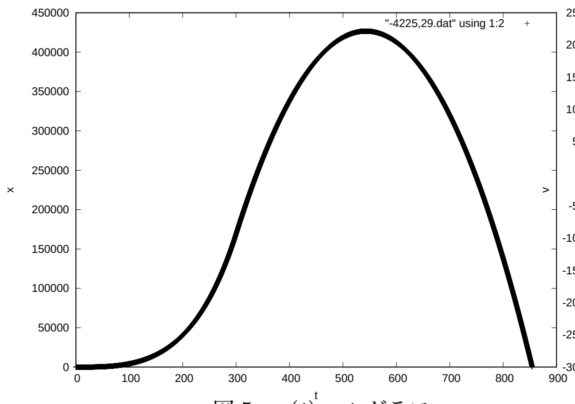

図 5　$x(t) - t$ グラフ

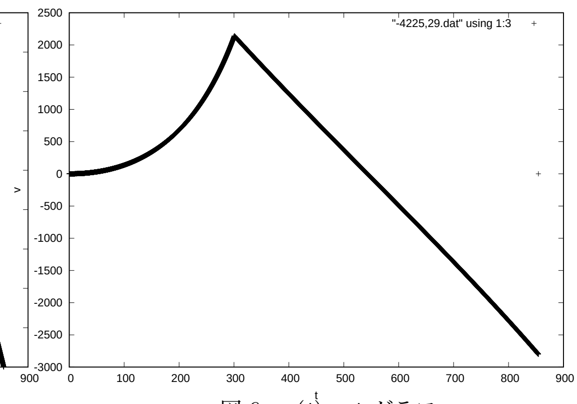

図 6　$v(t) - t$ グラフ

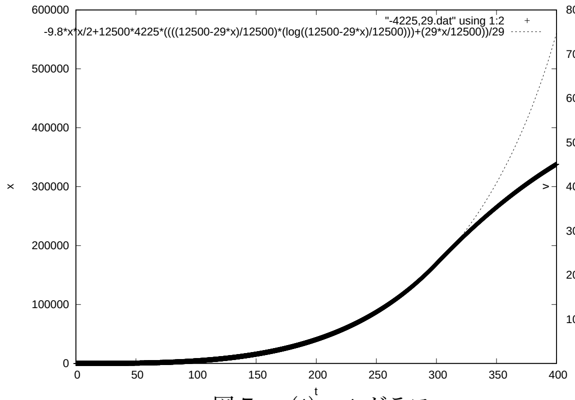

図 7　$x(t) - t$ グラフ

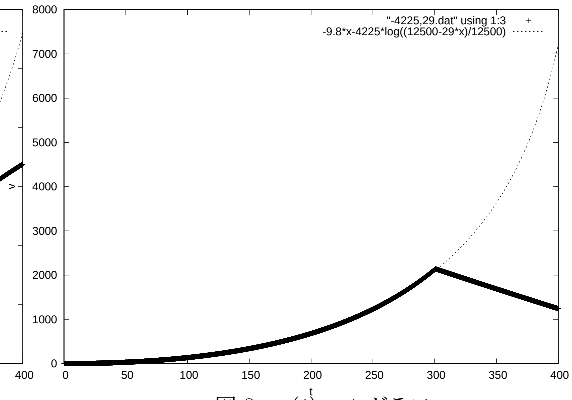

図 8　$v(t) - t$ グラフ

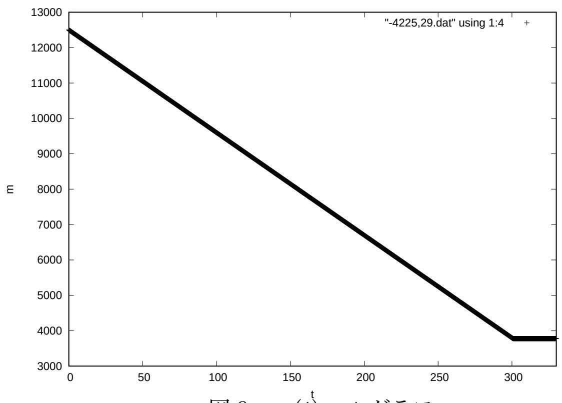

図 9　$m(t) - t$ グラフ

図の補足

パラメータの値は図 1,2 において，$v' = -2810 \text{ m s}^{-1}$ ，$\mu = 43.6 \text{ kg s}^{-1}$ ，図 3,4 において，$v' = -3500 \text{ m s}^{-1}$ ，$\mu = 43.6 \text{ kg s}^{-1}$ ，図 5 以降はすべて，$v' = -4225 \text{ m s}^{-1}$ ，$\mu = 29 \text{ kg s}^{-1}$ である．
また，図 7,8 はツィオルコフスキーの公式から得られる結果も添付されている．最後に図 9 は，$m(t)$ の時間変化を表している．

5　考察

ロケットが上昇するための条件は，$t = 0$ において，$\frac{dv}{dt} > 0$ が満たされていることである．すなわち，

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\mu}{m}v' > 0 \tag{27}$$

$$-\frac{\mu}{m}v' > g = 9.8 \text{ m s}^{-2} \tag{28}$$

あるいは,

$$-\mu v^{'} > mg = 1.225 \times 10^5 \mathrm{N} \tag{29}$$

が満たされていれば，ロケットは上昇する．
結果として示した図はすべてこの条件を満たした場合の結果である．条件が満たれなければ常に $x(t) = 0$ ，$v(t) = 0$ であるグラフが正常にプロットされる．
それぞれの図を比較してみると，図 3 と図 5，図 4 と図 6 は大きな差が確認できない．1 つだけ違う点は，急激に上昇が始まる時刻と，燃料を使い切る時刻がそれぞれ約 100s ずつずれていることである．
時刻 $t = 0$ における推進力はパラメータを用いて計算すれば， $v' = -3500$ m s^{-1} ， $\mu = 43.6$ kg s^{-1} のとき， $-\mu v^{'} \approx 1.53 \times 10^5$N ， $v' = -4225$ m s^{-1} ，$\mu = 29$ k gs^{-1} のとき， $-\mu v^{'} \approx 1.23 \times 10^5$N である．
以上からパラメータと推進力に違いが確認できるが，到達高度や，最高速度に違いが見られないことから，パラメータを $v' = -4225$ m s^{-1} ， $\mu = 29$ kg s-1 とした方が速度の上昇が緩やかで機体や機体内部へのショックが少なくなることが予想できる．
図 1 と図 3，図 2 と図 4 はパラメータが v' のみ異なるが，その違いは明らかで到達高度は 2 倍以上，最高速度はおよそ 1.5 倍違う．この結果から，エンジン性能の向上は宇宙開発において，大変重要であることがわかる．
また，いずれの場合も第一宇宙速度約 7.9 km s^{-1} には遠く及ばなかった．
ところで，差分方程式から得られた数値解とツィオルコフスキーの公式から得られた厳密解を比較した図 7,8 を見ると燃料を使い終える 300 s まではズレが確認できず完全に一致した．この結果から数値計算の有効性が目に見えて明らかになった．

6 参考文献

- 詳解 力学演習　共立出版
- ミサイルの科学 サイエンス・アイ新書
- 模擬講義：ロケット方程式の導出と意味について 九州大学大学院工学研究院航空宇宙工学部門 麻生茂 http://yumenavi.info/reference/g0034051.pdf
- V2 ロケットⅡ 飛行原理　http://benedict.co.jp/smalltalk/talk-43/