

컴퓨팅사고력1

날짜	@2024년 9월 10일
태그	

논리와 증명

수와 표현

논리와 증명

1. 다음 명제가 항진 명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

$$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$$

	p	q	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$	
1	T	T	T	F	T
2	T	F	F	T	T
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	F	T

2. 다음 명제가 모순 명제라는 것을 진리표를 이용해서 보이시오

$$(p \wedge q) \wedge (p \wedge \sim q)$$

	p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	
1	T	T	T	F	F
2	T	F	F	T	F
3	F	T	F	F	F
4	F	F	F	F	F

3. 다음 명제의 쌍들에 대해서 두 명제가 동등한지를 진리표를 이용해 확인하시오

$$\sim p \vee q \text{ 와 } \sim(p \vee q)$$

	p	q	$\sim p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	
1	T	T	F	F	T
2	T	F	T	F	F
3	F	T	T	F	F
4	F	F	T	T	T

→ 논리적으로 동등하지 않다

4. 명제식의 변형을 통하여 다음 명제를 간소화 하시오

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

- 분배 법칙 적용

$$\sim q \wedge (p \vee \sim p)$$

$$\sim q \wedge (\text{True}) = \sim q$$

5. 다음 명제들이 참인지 확인하시오.

단, R은 실수의 집합을 의미하고, Z는 정수의 집합을 의미한다.

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq x$$

1. 양수인 경우 ($x \geq 0$)

a. $x = 0$ 일 때, 참

b. $x = 1, x = 2$ 일 때, 참

2. 음수인 경우 ($x < 0$)

a. $x = -1, -2$ 일 때, 참

→ 모든 정수 x 에 대해 성립하므로 이 명제는 참입니다.

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < x$$

1. 양수인 경우 ($x \geq 0$)

a. $x = 0$ 일 때 성립하지 않는다.

2. 음수인 경우 ($x < 0$)

a. $x = -1, -2$ 일 때, 성립하지 않는다.

→ 어떤 정수 x 에 대해서도 성립하지 않으므로, 이 명제는 거짓입니다.

7. n 이 홀수이면 $n^2 + n$ 은 짝수임을 증명하라.

1. n 이 홀수라는 것은 $n = 2k + 1$ (어떤 정수 k 에 대해)로 표현할 수 있다.

$$2. \quad n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 4k^2 + 6k + 2$$

$$2(2k^2 + 3k + 1) \text{은 } 2 \text{의 배수이므로 짝수입니다.}$$

9. 자연수 n 에 대해 $n^2 + 5$ 가 홀수이면 n 은 짝수임을 증명하라

대우 명제 : n 이 홀수이면 $n^2 + 5$ 는 짝수이다.

1. n 이 홀수라는 것은 $n = 2k + 1$ (어떤 정수 k 에 대해)로 표현할 수 있다.

2. $n^2 + 5$ 계산

$$(2k + 1)^2 + 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 5 = 4k^2 + 4k + 6 = 2(2k^2 + 2k + 3)$$

2의 배수이므로 짝수입니다.

3. 대우가 참이므로 원래 명제도 참이다.

11. 자연수 n 에 대해 $n^2 + 5n + 3$ 은 항상 홀수임을 증명하라

• n 이 짝수인 경우 $\rightarrow n = 2k$

$$n^2 + 5n + 3 = (2k)^2 + 5(2k) + 3 = 4k^2 + 10k + 3 = 2(2k^2 + 5k + 1) + 1$$

→ 홀수

• n 이 홀수인 경우 $\rightarrow n = 2k + 1$

$$n^2 + 5n + 3 = (2k + 1)^2 + 5(2k + 1) + 3 = 4k^2 + 14k + 9 = 2(2k^2 + 7k + 4) + 1$$

→ 홀수

• n 이 짝수이든 홀수이든 상관없이 $n^2 + 5n + 3$ 은 항상 홀수입니다.

수와 표현

3. n 이 충분히 큰 값일 때 다음 중 어느 값이 더 큰가? 각 쌍에 대해 비교하고 그 이유를 작성하시오.

- $2^{\frac{n}{2}}, \sqrt{3n}$

$2^{\frac{n}{2}}$ 는 지수 함수로, n 이 커질수록 매우 빠르게 커진다

$\sqrt{3n}$ 는 루트 함수이기 때문에 n 이 커질 수록 증가 속도가 훨씬 느리다

→ $2^{\frac{n}{2}}$, 지수 함수의 성장 속도가 루트 함수보다 훨씬 빠르다

- $\log 2^{2n}, n\sqrt{n}$

$\log 2^{2n} = 2n \log 2$, $2n$ 에 비례하는 **선형 함수**

$n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$, **거듭제곱 함수**

→ $n\sqrt{n}$, 선형 함수보다 거듭제곱 함수가 더 크게 증가한다.

4. $x = \log_a yz$ 일 때 x 를 2를 밑으로 하는 로그들로 표현하시오.

$$x = \log_a yz = \frac{\log_2 yz}{\log_2 a} = \frac{\log_2 y + \log_2 z}{\log_2 a}$$

5. 다음 함수의 역함수를 구하시오.

$$f(x) = 3\log(x+3) + 1$$

$$x = 3\log(y+3) + 1$$

$$x - 1 = 3\log(y+3)$$

$$\frac{x-1}{3} = \log(y+3)$$

$$10^{\frac{x-1}{3}} = y+3$$

$$y = 10^{\frac{x-1}{3}} - 3$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 10^{\frac{x-1}{3}} - 3$$