컴퓨팅사고력2

날짜	@2024년 9월 11일
태그	

집합과 조합론
기초 수식

집합과 조합론

2. **수학적 귀납법으로 $(x+y)^n = \Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$임을 증명하라**

   a. n = 1일 때

      좌변 : $x+y$

      우변 : $\Sigma_{k=0}^{1}(\binom{1}{k})x^{1-k}y^k = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1 = x+y$

   b. n = k일때 성립한다고 가정하자

      $(x+y)^k = \Sigma_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$

   c. n = k + 1일 때

      $(x+y)^{k+1} = \Sigma_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^{k+1-i}y^i$

      좌변 :

      $(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = (x+y)\Sigma_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$

      $(x+y)^{k+1} = \Sigma_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k+1-i}y^i + \Sigma_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^{i+1}$

      $(x+y)^{k+1} = \binom{k}{0}x^{k+1} + \Sigma_{i=1}^{k}\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1})x^{k+1-i}y^i + \binom{k}{k}y^{k+1}$

      파스칼의 항등식 $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ 사용

      $(x+y)^{k+1} = \Sigma_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^{k+1-i}y^i$

      이므로 성립한다.

3. **위의 결과를 이용해서 n개의 원소를 가진 집합의 가능한 부분집합의 종류는 2^n개임을 증명하라**

   n개의 원소를 가진 집합 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$가 있다고 가정하자.

   $(x+y)^n = \Sigma_{k=0}^{n}\frac{n}{k}x^{n-k}y^k$

   x : 원소가 부분집합에 포함된다

   y : 원소가 부분집합에 포함되지 않는다.

$\binom{n}{k}$: n개의 원소 중에서 k개의 원소를 선택하는 방법의 수

$(x+y)^n$에서 $x=1, y=1$로 두면 → $(1+1)^n = \Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

따라서 n개의 원소를 가진 집합에서 가능한 모든 부분집합의 개수는 2^n개이다.

6. $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$**이 사실임을 증명하라**

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 전개

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 이므로 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap A^c \cup (A \cup B) \cap B^c$

$(A \cup B) \cap A^c = B - A$이고, $(A \cup B) \cap B^c = A - B$이므로

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$은 **참**이다.

10. 비밀번호를 0부터 9까지의 숫자만 가지고 만든다고 하자. 4개 이상 6개 이하의 숫자를 쓸 수 있다 고 할 때 가능한 비밀번호의 가지수는 얼마인가?

→ ${}_{10}P_4 +_{10} P_5 +_{10} P_6 = 186480$가지

13. **52개의 카드를 이용해서 만들 수 있는 5개의 카드 조합 중 같은 무늬의 카드가 정확히 3개인 경우는 몇가지인가?**

- 3장의 카드를 같은 무늬에서 선택하는 경우
    - 4개의 무늬 중에 하나 선택 → $\binom{4}{1} = 4$
    - 선택한 무늬 13장의 카드 중 3장을 선택하는 경우의 수 → $\binom{13}{3} = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 286$
    - $4 \times 286 = 1144$
- 나머지 2장의 카드를 다른 두 무늬에서 선택하는 경우
    - 나머지 3개의 무늬 중 2개의 무늬 선택 → $\binom{3}{2} = 3$
    - 각 무늬에서 1장씩 카드 선택 → $13 \times 13 = 169$
    - $3 \times 169 = 507$
- $1144 \times 507 = 580,008$ → 580008가지

16. 52개 카드에서 5개 카드 조합을 만들 때, 숫자가 같은 카드가 한 쌍도 없는 경우는 몇 가지인가?

- 서로 다른 5개의 숫자를 13개의 숫자 중에서 선택하는 경우의 수
    - $\binom{13}{5} = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1} = 1287$
- 각 숫자에 대해 무늬를 고르는 경우의 수

- 각 숫자에 대해 4개의 무늬 중 하나를 고를 수 있다.
- $4^5 = 1024$

- $1287 \times 1024 = 1,317,888$가지

기초 수식

- **다음 재귀식을 O() notation 수준으로 풀어라**

2. $T(n) = T(n-1) + n, T(0) = 1$

   $T(n-1) = T(n-2) + (n-1), T(n-2) = T(n-3) + (n-2), ...$

   $T(n) = T(0) + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

5. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 1$

   $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + O(n^d)$에서 $a = 1, b = 2, d = 1$이다

   마스터 정리 → $log_b a = log_2 1 = 0$, $d = 1$

   $d > log_b a$인 경우가 해당되므로, 마스터 정리의 결과에 따라 $T(n) = O(n^d) = O(n)$

   시간 복잡도 : $O(n)$