

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1-12

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ СТЕРЖНЯ ИЗ УПРУГОГО НЕЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРА

**Цель работы:** изучение закономерностей упругого нецентрального удара, определение момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня.

**Приборы и принадлежности:** прибор, стальной шарик, электронный секундомер, рулетка.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Ударом принято называть совокупность явлений, возникающих при столкновении тел, когда за малый промежуток времени происходит значительное изменение кинематических и динамических характеристик соударяющихся тел: скоростей, импульсов, моментов импульсов и кинетических энергий. Линией удара называют общую нормаль к поверхности соударяющихся тел в точке их соприкосновения. Если при ударе центры масс двух тел (например, шаров) находятся на линии удара, то шар является центральным. Возможны также случаи, когда линия удара не проходит через центры масс обоих тел, или же на линии удара лежит центр масс только одного тела. Тогда удар называется нецентральным. В результате нецентрального удара тело, центр масс которого не лежит на линии удара, начинает вращаться вокруг одной из свободных осей. Для описания вращательного движения вводится величина, называемая моментом импульса  $\mathbf{L}$ . Моментом импульса  $\mathbf{L}$  материальной точки относительно неподвижной точки  $O$  называется векторное произведение радиуса-вектора материальной точки, проведенного из точки  $O$ , на импульс этой материальной точки

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}] = [\mathbf{r} \cdot m\mathbf{v}]. \quad (1)$$

Соответственно, моментом импульса механической системы (твёрдого тела) относительно неподвижной точки  $O$  называется вектор  $\mathbf{L}_{\text{сист}}$ , равный геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы

$$\mathbf{L}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{P}_i],$$

где  $n$  — число материальных точек системы.

Моментом импульса механической системы (твёрдого тела) относительно оси называется проекция на эту ось вектора момента импульса системы относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси. Для твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, момент импульса равен

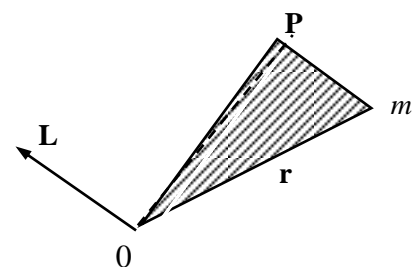


Рис. 1

$$L_z = J\omega_z, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega_z$  – проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Момент инерции тела относительно оси является мерой инертности тела в его вращении вокруг этой оси.

Для замкнутой механической системы выполняется закон сохранения момента импульса.

## МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

В работе рассматривается столкновение однородного шара со стержнем в виде прямоугольного бруска, способного вращаться вокруг оси, проходящей через его центр масс (для однородного стержня центр масс совпадает с геометрическим центром). Пусть шар массой  $m_0$  свободно падает с высоты  $H$  на брусок, установленный горизонтально. Будем считать удар абсолютно упругим (без потерь механической энергии). Начальное и конечное положения шара при таком ударе совпадают. Это показано вектором  $\mathbf{r}$  на рис. 2.

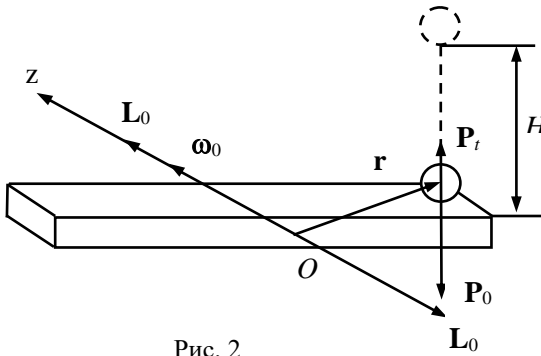


Рис. 2

Если линия удара (пунктирная линия на рис. 2) проходит от центра стержня на расстоянии много большем, чем радиус шара, то вектор направлен к линии удара приблизительно под прямым углом. Обозначим:  $\mathbf{v}$  – скорость шара в момент начала удара;  $\mathbf{U}$  – его скорость в момент окончания удара;  $\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{P}_t$  – импульсы шара в начальный и конечный моменты;  $\omega$  –

угловая скорость вращения стержня после удара (до удара стержень был неподвижен). Принимая малый шар за материальную точку, можно записать:

$$[\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_0] = L_0 \text{ – момент импульса шара до удара;}$$

$$[\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_t] = L_t \text{ – момент импульса шара после удара.}$$

На короткое время удара механическую систему «шар–стержень» можно считать замкнутой (пренебрегая внешними силами по сравнению с силами упругой деформации тел). Тогда, применяя закон сохранения момента импульса, запишем его в проекциях на ось вращения  $z$ :

$$rm_0v = -rm_0U + J\omega_0 \rightarrow r(m_0v + m_0U) = J\omega_0. \quad (3)$$

Закон сохранения механической энергии запишется в виде

$$\frac{m_0v^2}{2} = \frac{m_0U^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} \rightarrow m_0v^2 - m_0U^2 = J\omega_0^2. \quad (4)$$

Решив совместно уравнения (3) и (4), можно получить формулу для определения момента инерции стержня  $J$ . Для этого из (3) находим

$$U = \frac{J\omega_0}{m_0r} - v.$$

Подставив в (4), получаем

$$J = \frac{m_0 r}{\omega_0} (2v - \omega_0 r). \quad (5)$$

Для расчета  $J$  необходимо измерить угловую скорость  $\omega_0$ . Вращение стержня происходит с отрицательным угловым ускорением  $\varepsilon$  под действием момента сил трения. Тогда угол стержня  $\varphi$  за время вращения стержня  $t$  определится по формуле  $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ , где угловое ускорение  $\varepsilon$  численно равно  $\varepsilon = \frac{\omega_0}{t}$ . Обозначим число оборотов стержня до полной остановки  $N$ . Тогда можно записать  $\varphi = 2\pi N$ . Сравнив два значения для  $\varphi$ , получим

$$\omega_0 = \frac{4\pi N}{t}. \quad (6)$$

Нужно отметить, что  $N$  может быть дробным.

Линейную скорость шара  $v$  в момент удара можно определить по формуле

$$v = \sqrt{2gH}, \quad (7)$$

где  $H$  – высота шара.

## ОПИСАНИЕ ПРИБОРА

Прибор для определения момента инерции стержня (рис. 3) состоит из основания  $1$ , на котором крепится стойка  $2$  со всеми необходимыми для проведения измерений приспособлениями. Сверху стойки на кронштейне  $3$  помещен электромагнит  $4$  для удерживания стального шарика  $5$ . В нижней части стойки на кронштейне  $6$  крепится диск  $7$  с градусной шкалой (цена деления шкалы составляет  $1^\circ$ ). В центре диска помещена ось  $8$  с подшипником, на котором крепится исследуемый стержень  $9$ . Стержень изготовлен из алюминиевого сплава, поэтому чтобы при падении стального шарика на него стержень не портился, на концах стержня закреплены стальные пластинки  $10$ . На основании  $1$  находится переключатель, с помощью которого можно включать и выключать электромагнит и запускать электросекундомер.

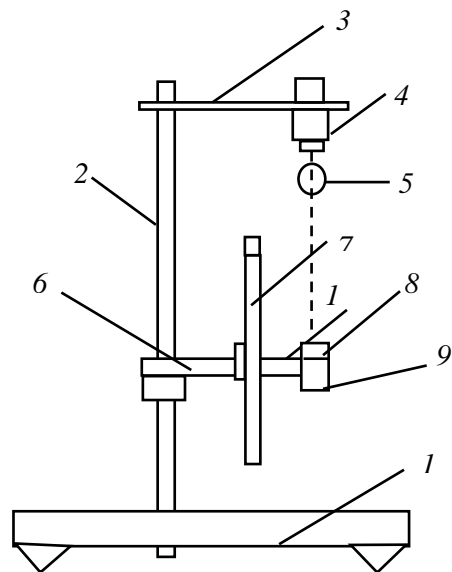


Рис. 3

## ЗАДАНИЕ НА ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Проведите измерение всех величин, необходимых для расчета момента инерции стержня по формуле (5).

## РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

1. Установите стержень в горизонтальном положении и измерьте расстояние  $H$  от шара до поверхности стержня.
2. Выключите электромагнит и в момент удара шара о конец стержня включите секундомер. Считайте обороты  $N$  стержня вплоть до его полной остановки, следя за одним из его концов. Выключите секундомер в момент остановки стержня. Если последний оборот оказался неполным, то необходимо записать величину поворота стержня, выраженную в долях  $N$  (например, 10,3 оборота).
3. Измерьте расстояние  $r$  от оси, вокруг которой вращается стержень (от центра стержня), до той точки на стержне, в которую попадает шарик.
4. Повторите все измерения не менее пяти раз и результаты этих измерений запишите в таблицу.

№ п/п	$N$	$t$ , с	$\omega_0$ , с <sup>-1</sup>	$H$ , м	$r$ , м	$v$ , м/с	$J$ , кг·м <sup>2</sup>	$J_{\text{ср}}$	$J_{\text{теор}}$
1									
2									
3									
4									
5									

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Рассчитайте по формуле (5) с использованием формул (6) и (7) момент инерции стержня со стальными пластинками для пяти серий измерений.
2. Получите среднеарифметическое значение момента инерции  $J_{\text{ср}}$ .
3. Результаты вычислений запишите в таблицу.
4. Получите на основании формул (5), (6), (7) формулу для вычисления абсолютной погрешности в определении момента инерции стержня с пластинками  $\Delta J$ .
5. Рассчитайте абсолютную погрешность  $\Delta J$  и запишите ответ как
 
$$J = J_{\text{ср}} \pm \Delta J.$$
6. Проведите теоретический расчет момента инерции стержня с пластинками. Для чего:
  - Получите формулу для момента инерции однородного тонкого стержня массы  $m$  и длины  $l$  относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину, используя общую формулу для вычисления момента инерции тела  $J = \int r^2 dm$ . Известно, что длина стержня  $l = 25,45$  см, ширина стержня  $b = 2,85$  см, высота стержня  $c = 1,75$  см, плотность алюминиевого сплава, из которого изготовлен стержень,  $\rho = 3000$  кг/м<sup>3</sup>. Так как на концах стержня расположены две стальные пластинки, то необходимо вычислить их

момент инерции относительно той же оси и добавить момент инерции пластинок к моменту инерции стержня. Именно этот результат нужно сравнивать с экспериментально полученным. Для вычисления момента инерции пластинок можно считать их за материальные точки, масса которых сосредоточена в центре пластинок. Формула для расчета момента инерции обеих пластинок относительно оси вращения стержня  $J = 2mr^2$ , где  $m$  – масса пластинки ( $m = \rho V$ ), где  $\rho$  – плотность материала пластинки, а  $V$  – объем пластинки. Плотность материала, из которого изготовлена каждая пластинка,  $\rho = 7900 \text{ кг /м}^3$ .

## **ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Проведенные в работе измерения и расчеты позволяют ответить на следующие вопросы.

1. Верна ли формула (5) для определения момента инерции стержня, если в эксперименте стержень участвует вместе со стальными пластинками, которые изменяют величину момента инерции стержня относительно оси вращения?
2. Совпадает ли теоретически рассчитанный момент инерции стержня с пластинками с экспериментально определенным по формуле (5)?
3. Если отклонение теоретического расчета от экспериментального больше рассчитанной погрешности в измерении, то объясните, почему это происходит?

## **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ**

1. Дайте развернутую характеристику явления, называемого ударом.
2. Приведите динамические и кинематические характеристики соударяющихся тел. Как они измеряются?
3. Как измерить момент импульса материальной точки? Стержня?
4. Как измерить момент импульса молекул? Например, воздуха?
5. Определите максимальный момент импульса стержня в данной работе. Сравните его значение с механическим моментом импульса электрона.
6. Определите момент импульса Земли, собственный и орбитальный. Как его можно измерить?
7. Определите момент инерции молекулы воздуха. Определите момент инерции стержня и сравните его с моментом импульса шарика в его точке соударения со стержнем относительно оси вращения стержня.
8. Сравните значения момента инерции, полученные экспериментально и теоретически. Объясните полученные расхождения.
9. Каким образом можно измерить момент сил трения, действующих на стержень.
10. Почему механическую систему «шар – стержень» можно считать замкнутой?

11. Каким методом можно измерить угловое ускорение стержня?
12. Придумайте способ измерения числа оборотов с точностью до 1 оборота, 0,1 оборота, 0,01 оборота?
13. Каким образом можно измерить время вращения стержня в автоматическом режиме?
14. Как определить направление момента импульса стержня шарика?
15. Как измерить силы, возникающие при упругой деформации шара и стержня?
16. Массу шара Вы записываете из таблицы, имеющейся на установке. Какая точность подразумевает такая форма записи? Каково влияние погрешности массы на точность измерения момента инерции стержня?
17. Приведите несколько способов измерения угловой скорости  $\omega_0$ .
18. Как учесть потери механической энергии при ударе шара и стержня? Как измерить эти потери?
19. Как измерить силы трения, возникающие при вращении стержня?
20. Как влияет соотношение между массой шарика и стержня на точность измерения?
21. Как влияет величина  $r$  на точность измерения момента инерции стержня?
22. Существует ли оптимальное значение  $r$ , при котором точность измерения момента инерции максимальна.
23. Определите силу трения, момент силы трения в оси стержня. Сравните ее величину с моментом силы тяжести шарика.
24. Как влияет размер шарика и его масса на точность определения момента импульса стержня?
25. Как влияет размер шарика и его масса на точность определения момента инерции стержня?