Оглавление

Глава 1

Простейшие модели роста популяции. Основные понятия динамических систем.

1.1 Простейшие модели роста

Пусть время дискретно, принимает целые значения и в момент времени n число особей популяции равно x_n, а закон изменения от n выражается уравнением:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow \overline{x} = f(x)$$

1.1.1 Модель неограниченного роста популяции

Пример 1.1 Томас Роберт Мальтус (1766 - 1839)

Пусть количество особей в некоторой популяции в следующем поколении прямо пропорционально количеству в текущем поколении:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

λ - постоянный коэффициент, определяющий темп роста.

При заданном начальном числе особей в популяции x_0, легко найти:

$$x_1 = \lambda x_0,\ x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0, \dots,\ x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^n x_0$$

Пусть $x_0 > 0$ тогда возможны три принципиально разных случая поведения системы:

- $\lambda > 1$: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ – взврывообразное увеличение числа особей
- $\lambda = 1$: $x_n = x_0$ – постоянная популяция
- $0 < \lambda < 1$: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ – популяция вымирает

1.1.2 Модель ограниченного роста

Пример 1.2 Пьер Франсуа Ферхюльст (1804-1849)

Пусть число особей обладает максимальным значением M, таким что при его достижении в следующий момент времени наступает вымирание:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - \frac{x_n}{M})$$

M - параметр аннигиляции.

- $x_n \ll M$: происходит рост $x_{n+1} = \lambda x_n$
- $x_n \geq M$: если $x_{n+1} < 0$ или $x_{n+1} = 0$, то это трактуем как исчезновение.

Определение 1.1 Дискретное логистическое уравнение
Пусть $\frac{x_n}{M} = x'_n$, тогда уравнение перепишется в виде:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x'_n), \quad x'_n \in [0, 1]$$

Модели Мальтуса и Ферхюльста наивные. В реальности есть множество внешних факторов: хищники, болезни, изменчивая доступность питания. Тем не менее они дают грубые оценки.

$$x_0 = 0.5, \quad \lambda \in \{0.5, 1.5, 2, 3.2, 3.5, 3.9\}$$

n	0.5	1.5	2	3.2	3.5	3.9
1	0.125	0.375	0.5	0.8	0.875	0.5750
2	0.0547	0.352	0.5	0.512	0.3828	0.095
3	0.0258	0.342	0.5	0.799	0.8269	0.335
4	†	†	†	0.512	0.5009	0.869
5	†	†	†	0.799	†	†
20	$1.8 \cdot 10^{-7}$	0.333	0.5	0.512	0.5009	†

- $\lambda = 0.5$: вымирание
- $\lambda = 1.5$: орбита стабилизируется в окрестности точки 0.333
- $\lambda = 2$: неподвижная точка отображения
- $\lambda = 3.2$: траектория периода 2, колеблется между 0.799 и 0.512
- $\lambda = 3.5$: траектория периода 4
- $\lambda = 3.9$: нет закономерности, хаотическое поведение

1.2 Основные понятия

1.2.1 Итерации. Понятие о каскаде.

Определение 1.2 Дискретная динамическая система
Отображение $\overline{x} = f(x)$ задает дискретную динамическую систему $\{f^n\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ если $\overline{x} = f(x)$ – взаимно однозначное.

$\overline{x} = f^0(x)$ понимаем $\mathrm{Id} : \overline{x} = x$

если f взаимно однозначное, то под f^{-1} понимаем отображение, такое что $f(f^{-1}(x)) = x$

$k > 0 : f^k(x) = f(f(\ldots f(x))), \quad f^{-k}(x) = f^{-1}(f^{-1}(\ldots f^{-1}(x)))$

1.2.2 Орбиты (траектории) динамических систем

Всюду далее $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}_0^-$.

Определение 1.3 Орбита (траектория)
Орбитой (траекторией) точки x динамической системы $\{f\}$ называется множество точек:

$$O(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(x), \quad \text{где } f \text{ – взаимно однозначное}$$

$$O(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^+} f^k(x), \quad \text{если } f - \text{не взаимно однозначное}$$

Определение 1.4 Полутраектории

Для взаимно однозначных f определим положительные и отрицательные полутраектории:

$$O^+(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^+} f^k(x), \quad O^-(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^-} f^k(x).$$

1.2.3 Неподвижные точки и периодические орбиты

Определение 1.5 Неподвижная точка

Точка x_0 называется неподвижной точкой системы $\{f\}$, если имеет место: $f(x_0) = x_0$.

Определение 1.6 Периодическая орбита

Точка x_0 называется периодической орбитой периода $m > 1$, если $f^m(x_0) = x_0$ и выполнено:

$$f^k(x_0) \neq x_0, \quad \forall k = 1, \dots, m-1.$$

Определение 1.7 Преднеподвижная (предпериодическая) точка

Точка, которая попадает в неподвижную (периодическую) точку после некоторого числа итераций называется временнонеподвижной (временнопериодической) или преднеподвижной (предпериодической).

Глава 2

саламалейкум