Оглавление

Глава 1

Простейшие модели роста популяции. Основные понятия динамических систем.

1.1 Простейшие модели роста

Пусть время дискретно, принимает целые значения и в момент времени n число особей популяции равно x_n, а закон изменения от n выражается уравнением:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow \overline{x} = f(x)$$

1.1.1 Модель неограниченного роста популяции

Пример 1.1 Томас Роберт Мальтус (1766 - 1839)

Пусть количество особей в некоторой популяции в следующем поколении прямо пропорционально количеству в текущем поколении:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

λ - постоянный коэффициент, определяющий темп роста.

При заданном начальном числе особей в популяции x_0, легко найти:

$$x_1 = \lambda x_0,\ x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0, \ldots,\ x_n = \lambda x_{n-1} = \lambda^n x_0$$

Пусть $x_0 > 0$ тогда возможны три принципиально разных случая поведения системы:

- $\lambda > 1$: $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ – взврывообразное увеличение числа особей
- $\lambda = 1$: $x_n = x_0$ – постоянная популяция
- $0 < \lambda < 1$: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ – популяция вымирает

1.1.2 Модель ограниченного роста

Пример 1.2 Пьер Франсуа Ферхюльст (1804-1849)

Пусть число особей обладает максимальным значением M, таким что при его достижении в следующий момент времени наступает вымирание:

$$x_{n+1} = \lambda x_n \left(1 - \frac{x_n}{M}\right)$$

M - параметр аннигиляции.

- $x_n \ll M$: происходит рост $x_{n+1} = \lambda x_n$
- $x_n \geq M$: если $x_{n+1} < 0$ или $x_{n+1} = 0$, то это трактуем как исчезновение.

Определение 1.1 Дискретное логистическое уравнение

Пусть $\frac{x_n}{M} = x'_n$, тогда уравнение перепишется в виде:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x'_n), \quad x'_n \in [0, 1]$$

Модели Мальтуса и Ферхюльста наивные. В реальности есть множество внешних факторов: хищники, болезни, изменчивая доступность питания. Тем не менее они дают грубые оценки.

$$x_0 = 0.5, \quad \lambda \in \{0.5, 1.5, 2, 3.2, 3.5, 3.9\}$$

n	0.5	1.5	2	3.2	3.5	3.9
1	0.125	0.375	0.5	0.8	0.875	0.5750
2	0.0547	0.352	0.5	0.512	0.3828	0.095
3	0.0258	0.342	0.5	0.799	0.8269	0.335
4	†	†	†	0.512	0.5009	0.869
5	†	†	†	0.799	†	†
20	$1.8 \cdot 10^{-7}$	0.333	0.5	0.512	0.5009	†

- $\lambda = 0.5$: вымирание
- $\lambda = 1.5$: орбита стабилизируется в окрестности точки 0.333
- $\lambda = 2$: неподвижная точка отображения
- $\lambda = 3.2$: траектория периода 2, колеблется между 0.799 и 0.512
- $\lambda = 3.5$: траектория периода 4
- $\lambda = 3.9$: нет закономерности, хаотическое поведение

1.2 Основные понятия

1.2.1 Итерации. Понятие о каскаде.

Определение 1.2 Дискретная динамическая система

Отображение $\overline{x} = f(x)$ задает дискретную динамическую систему $\{f^n\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ если $\overline{x} = f(x)$ – взаимно однозначное.

$\overline{x} = f^0(x)$ понимаем $\mathrm{Id} : \overline{x} = x$

если f взаимно однозначное, то под f^{-1} понимаем отображение, такое что $f(f^{-1}(x)) = x$

$k > 0 : f^k(x) = f(f(\dots f(x))), \quad f^{-k}(x) = f^{-1}(f^{-1}(\dots f^{-1}(x)))$

1.2.2 Орбиты (траектории) динамических систем

Всюду далее $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}_0^-$.

Определение 1.3 Орбита (траектория)

Орбитой (траекторией) точки x динамической системы $\{f\}$ называется множество точек:

$$O(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(x), \quad \text{где } f \text{ – взаимно однозначное}$$

$$O(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^+} f^k(x), \quad \text{если } f - \text{не взаимно однозначное}$$

Определение 1.4 Полутраектории

Для взаимно однозначных f определим положительные и отрицательные полутраектории:

$$O^+(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^+} f^k(x), \quad O^-(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_0^-} f^k(x).$$

1.2.3 Неподвижные точки и периодические орбиты

Определение 1.5 Неподвижная точка

Точка x_0 называется неподвижной точкой системы $\{f\}$, если имеет место: $f(x_0) = x_0$.

Определение 1.6 Периодическая орбита

Точка x_0 называется периодической орбитой периода $m > 1$, если $f^m(x_0) = x_0$ и выполнено:

$$f^k(x_0) \neq x_0, \quad \forall k = 1, \ldots, m-1.$$

Определение 1.7 Преднеподвижная (предпериодическая) точка

Точка, которая попадает в неподвижную (периодическую) точку после некоторого числа итераций называется временнонеподвижной (временнопериодической) или преднеподвижной (предпериодической).

Глава 2

Асимптотическое поведение орбит динамических систем. Существование орбит более высокого периода.

2.1 Предсказание судьбы орбиты для данного отображения

Иногда исследование эволюции всех орбит — легкая задача. Простейшим примером является модель неограниченного роста популяции, которая суть геометрическая прогрессия.

Пример 2.1

Рассмотрим отображение $\overline{x} = x^2$, легко предсказать судьбу траектории всех точек на оси x. Найдем неподвижные точки отображения:

$$x = x^2 \implies x = 0,\, x = 1$$

- орбита $x = 0$: $0,\, 0,\, 0, \dots$
- орбита $x = 1$: $1,\, 1,\, 1, \dots$
- орбита $x = -1$: $-1,\, 1,\, 1,\, \dots$ — преднеподвижная точка

Рассмотрим судьбу орбит отображения $\overline{x} = x^2$ для $|x| < 1$, $x \neq 0$:

$$x,\, x^2,\, x^4,\, x^8,\, \dots,\, x^{2^n}, \dots$$

$$x_0 = \frac{1}{2},\, x_1 = \frac{1}{4},\, x_2 = \frac{1}{16},\, \dots,\, x_n = \frac{1}{2^{2^n}}$$

Рассмотрим судьбу орбит отображения $\overline{x} = x^2$ для $|x| > 1$:

$$x,\, x^2,\, x^4,\, x^8,\, \dots,\, x^{2^n}, \dots \quad x_n \to \infty$$

Пример 2.2

Рассмотрим динамическую систему $\overline{x} = x^2 - 1$:

- $x = x^2 - 1 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ – две неподвижные точки
- имеется периодическая орбита $x = 0$ периода 2.
- предпериодическая точка $\sqrt{2}$, ее орбита: $\sqrt{2},\, 1,\, 0,\, -1,\, 0,\, \dots$

Упражнение 2.1

Найти еще несколько предпериодических орбит.

2.1.1 Диаграмма Ламерея

Удобным способом исследования орбит динамических систем является *диаграмма Ламерея* (итерационная диаграмма)

Алгоритм:

- строится график отображения (дискретной динамической системы) и биссектриса в 1 и 3 четвертях
- перемещаемся по некоторой "лестнице" (подробно в следующей лекции)

Рассмотрим отображение $\overline{x} = x^2 - 1$ и орбиту точки $x_0 = 0.5$:

$$x_0 = 0.5000$$

$$x_1 = 0.5^2 - 1 = -0.7500$$

$$x_2 = -0.4375$$

$$x_3 = -0.8086$$

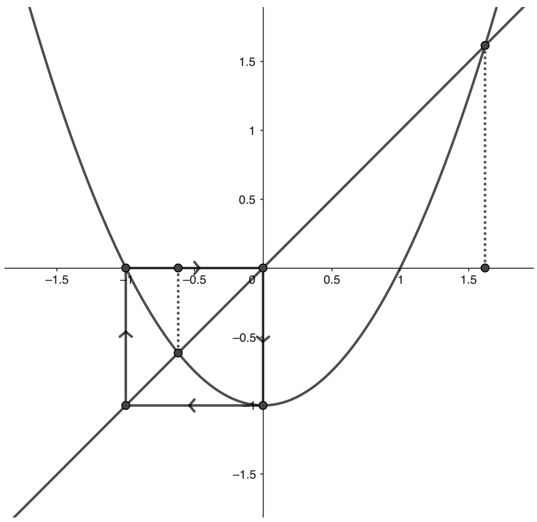
$$\vdots$$

$$x_{20} = 0.0000$$

$$x_{21} = -1.0000$$

$$x_{22} = 0.0000$$

- - - - тут будут рисунки - - - -



2.2 Асимптотическое поведение

Важно, что орбита $x = 0.5$ (любая непериодическая орбита) стремится асимптотически к периодическим орбитам, но за конечное число итераций в нее не приходит. А на численном счете сказываются ошибки округления.

Очень важный результат для конкретной динамической системы это строгое доказательство этого утверждения.

2.3 Периодические орбиты любых периодов

Отметим, что дискретная динамическая система может обладать периодическими орбитами любого периода. Например, отображение $\overline{x} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ обладает периодическими орбитами всех периодов.

Один из **центральных вопросов** теории динамических систем — какова мощность множества периодических точек?

> **Утверждение 2.1** А.Н. Шарковский, 1964
>
> Если непрерывное отображение интервала имеет периодические орбиты периода 3, то оно имеет периодические орбиты всех периодов больше 3

Глава 3

Общие понятия теории динамических систем.

3.1 Инвариантные множества

Определение 3.1

Непрерывной динамической системой или *потоком* на метрическом пространстве (X, d), которое называется *фазовым пространством* или *объемлющим пространством*, называется отображение:

$$f\colon X \times \mathbb{R} \longrightarrow X$$

с групповыми свойствами:

- $f(x, 0) = x, \ \forall x \in X$
- $f(f(x, t), s) = f(x, t + s), \ \forall x \in X, \forall s, t \in \mathbb{R}$

Определение 3.2

Дискретной динамической системой или *каскадом* будем называть f удовлетворяющую условиям в определении выше, и если $\mathbb{R}$ заменить на $\mathbb{Z}$.

Везде ниже следующие обозначения:

для потока $f^t(x) = f(x, t), \ t \in \mathbb{R}$

для каскада $f^t(x) = f(x, t), \ t \in \mathbb{Z}$

Из определения 3.1 следует, что $f^t\colon X \longrightarrow X$ для фиксированных $t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{Z}$ является гомеоморфизмом.
Каскад f^k(или же f^{-k}), $k \in \mathbb{N}$ есть суперпозиция $f^k = \underbrace{f \dots f}_{k}$ (или же $f^{-k} = \underbrace{f^{-1} \dots f^{-1}}_{k}$).

Поток f^1 — сдвиг на единицу времени для каскада $f^1 = f$.

Таким образом, непрерывная (дискретная) динамическая система — это действие гомеоморфизмами группы $\mathbb{R}$ (или же $\mathbb{Z}$) на наше топологическое пространство.

Определение 3.3

Траекторией или *орбитой* точки $x \in X$ называется множество

$$O_x = \{f^t(x) | \, t \in \mathbb{R}(t \in \mathbb{Z})\}$$

траектория потока ориентируема согласно возрастанию t.

Определение 3.4

Множество $A \subset X$ называется *инвариантным множеством динамической системы*, если траектория любой точки $x \in A$ полностью принадлежит A.

Определение 3.5

Инвариантное множество A называется *топологически транзитивным* (динамическая система называется *топологически транзитивной* на A), если A содержит всюду плотную орбиту.

Определение 3.6

Инвариантное множество $A \subset X$ называется *локально максимальным*, если существует его открытая окрестность U такая, что:

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{Z}} f^t(U) = A$$

Заметим, что любая траектория является инвариантным множеством.

Упражнение 3.1

Фазовое пространство представляется в виде объединения попарно непересекающихся траекторий динамической системы.

Выделяется 2 типа траекторий (с которыми мы на самом деле уже встречались) специального вида:

Определение 3.7

Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой*, если $O_x = \{x\}$. Обозначим Fix_{f^t} (или Fix_f) множество неподвижных точек системы f^t (или f).

Определение 3.8

Точка $x \in X$ называется *периодической точкой* потока f^t (каскада f), если существует число $per(x) > 0$ ($per(x) \in \mathbb{N}$) такое, что $f^{per(x)}(x) = x$, но $f^t(x) \neq x$ для всех действительных (натуральных) чисел $0 < t < per(x)$.

Число $per(x)$ называется *периодом периодической точки x*.

В случае потока траектория периодической точки называется *периодиечской траекторией* или *замкнутой орбитой* и гомеоморфна единичной окружности $\mathbb{S}^1$. В случае каскада траектория периодической точки называется *периодической орбитой* и состоит из в точности $per(x)$ точек. Неподвижная точка каскада — частный случай периодической точки с периодом 1, для потока это неверно!

Обозначим: Per_{f^t} (Per_f) множество периодических точек системы f^t (f)

Под *фазовым портретом динамической системы* понимают неформальное изображение фазового пространства X с некоторыми инвариантными подмножествами (неподвижные точки, периодические орбиты, инвариантные пожмножества), дающие представление о глобальном поведении траектории динамической системы и разбиении фазового пространства на траектории.

Многие свойства динамических систем определяются асимптотическим поведением траектории $t \to \pm\infty$, $t \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$:

Определение 3.9

Для потока f^t (каскада f) точка $y \in X$ называется ω – *предельной точкой для точки* x, если существует последовательность $t_n \to \infty$, $t_n \in \mathbb{R}$ (или $t_n \in \mathbb{Z}$) такая, что

$$\lim_{t_n \to +\infty} d(f^{t_n}(x), y) = 0$$

Множество $\omega(x)$ всех предельных точек для x называется ее ω – *предельным множеством.*

Заменив в пределе выше $+\infty$ на $-\infty$ мы аналогично определим α – *предельное множество* $\alpha(x)$ точки x.

Утверждение 3.1

Если X компактно, то множество $\omega(x)$ непусто. В частности, если система имеет неподвижную или периодическую точку x, то $\omega(x) = \alpha(x) = O_x$.

Множества

$$L_\omega(f^t) = cl(\bigcup_{x \in X} \omega(x))$$

$$L_\alpha(f^t) = cl(\bigcup_{x \in X} \alpha(x))$$

называются ω – *предельными* и α – *предельными* множествами соответственно.

Множество $L_{f^t} = L_\omega(f^t) \cup L_\alpha(f^t)$ называется *предельным множеством* f^t.

В общем случае $\bigcup_{x \in X} \omega(x)$ не является замкнутым. на рисунке изображен фазовый портрет потока на сфере $\mathbb{S}^2$ с неподвижными точками A, B, C, D, дополнение до которых состоит из замкнутых траектории, окружающих точки A, B, D и двух траекторий, для которых точка C является ω, α предельной точкой (объединение этих траекторий с точкой C образует «восьмерку»). Дополнение до объединения ω – предельных множеств есть множество точек «восьмерки» без точки C, оно не является открытым подмножеством $\mathbb{S}^2$.

- - - - тут когда-то будет рисунок - - - -

Определение 3.10

Для потока f^t (каскада f) точка $x \in X$ называется ω – *рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$ и называется *рекуррентной*, если $x \in \omega(x) \cup \alpha(x)$. Аналогичным образом определяется и α – *рекуррентная* точка.

Рекуррентность — возвращаемость орбиты точки в свою сколь угодно малую окрестность. Более слабый вариант возвращаемости — *неблуждаемость*.

Определение 3.11

Для потока f^t (каскада f) точка $x \in X$ называется *блуждающей*, если существует окрестность U_x такая, что

$$f^t(U_x) \cap U_x = \varnothing, \quad \forall t > 1 \, (t \in \mathbb{N})$$

в противном случае точка x называется *неблуждающей.*

Из определений следует, что любая точка из U_x является блуждающей. Следовательно, множество блуждающих точек открыто, а множестов неблуждающих замкнуто. Множество блуждающих точек инвариантно, так как для $\forall t \in \mathbb{R}$ (или $t \in \mathbb{Z}$) любая точка $f^t(x)$ из орбиты блуждающей точки x имеет окрестность $U_{f^\tau(x)} = f^\tau(U_x)$ удовлетворяет условиям определения блуждающей точки.

Множество всех неблуждающих точек потока f^t называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_{f^t}.

Заметим, что для потока на рисунке 1, неблуждающее множество совпадает с предельным ($L_{f^t} = \Omega_{f^t} = \mathbb{S}^2$).

Пример 3.1

Существуют потоки, для которых $L_{f^t} \neq \Omega_{f^t}$. На рисунке: фазовый поток на листке Мебиуса, для которого неблуждающее множество совпадает с вертикальным отрезком AB, а предельное множество состоит из неподвижных точек A, B.
- - - - тут будет рисунок - - - -